ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 3 (9), стр. 538–548

ВЯЗКОУПРУГИЕ СВОЙСТВА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

В. В. Новиков *

Одесский национальный политехнический университет
65044, Одесса, Украина

К. В. Войцеховский **

Institute of Molecular Physics of Polish Academy of Sciences
60-179, Poznan, Poland

Поступила в редакцию 28 декабря 2001 г.

Проведены расчеты вязкоупругих свойств двухфазной среды с хаотической структурой во всем диапазоне концентраций. Установлены условия немонотонного и сингулярного поведения эффективных вязкоупругих свойств.

PACS: 61.43.Hv, 46.35.+z, 05.10.Cc, 82.70.Kj, 83.50.-v

1. ВВЕДЕНИЕ

Если на тело действует внешняя сила, то в нем возникают деформации, а само тело находится под напряжением. Если это напряжение неизменно существует и исчезает мгновенно при прекращении действия, то тело является идеально упругим. В этом случае связь между тензором напряжений σ и тензором деформаций ε определяется согласно закону Гука [1]:

$$\sigma = C\varepsilon, \quad \varepsilon = S\sigma, \tag{1.1}$$

где C — тензор модулей упругости, S — тензор модулей податливости.

При необратимой деформации, т. е. при течении тела, напряжение в кратчайшие промежутки времени убывает и снова восстанавливается вследствие смещения структурных элементов. Если при этом форма и состояние структурных элементов не испытывают изменения, то тело является идеально вязким и его поведение описывается уравнением Ньютона [2, 3]

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{1.2}$$

где η — вязкость жидкости.

Большинство реальных тел являются вязкоупругими и только при определенных условиях подчиняются законам (1.1) и (1.2). Поэтому для характеристики деформационно-напряженного состояния реальных тел вводят понятие времени спада напряжения, или времени релаксации τ. Для абсолютно упругих тел $\tau \to 0$, а для идеально вязких $\tau \to \infty$. В интервале $0 < \tau < \infty$ располагаются реальные вязкие, аномально вязкие и вязкоупругие среды.

Если внешнее воздействие периодическое, то напряжение и деформации изменяются по закону [2, 3]

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^0 e^{i\omega t}, \quad \varepsilon_{kl}(t) = \varepsilon_{kl}^0 e^{i(\omega t - \varphi)}, \tag{1.3}$$

где σ_{ij}^0 и ε_{ij}^0 — амплитудные значения напряжений и деформаций, ω — круговая частота, φ — угол потерь.

Для амплитудных значений σ_{ij}^0, ε_{ij}^0 справедлив закон Гука, если в материале протекает один релаксационный процесс, т. е.

$$\sigma_{ij}^0 = c_{ijkl}(\omega)\varepsilon_{kl}^0, \quad \varepsilon_{ij}^0 = s_{ijkl}(\omega)\sigma_{kl}^0, \tag{1.4}$$

где c_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости, а s_{ijkl} — компоненты тензора податливости.

В идеальной упругой среде $\varphi = 0$ и связь между тензором напряжений σ и тензором деформаций ε сводится к закону Гука для упругой среды (1.1).

Если $\varphi \neq 0$, то с учетом (1.3) получим

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}(\omega) e^{-i\varphi} \sigma_{kl}. \tag{1.5}$$

*E-mail: novikov@Te.Net.Ua
**K. W. Wojciechowski

В этом случае для расчетов удобно ввести понятие комплексной податливости $S^*(\omega)$:

$$S^*(\omega) = S(\omega)e^{-i\varphi} = S(\omega)(\cos\varphi - i\sin\varphi), \qquad (1.6)$$

и закон Гука можно записать в виде

$$\varepsilon = S^*(\omega)\sigma, \qquad (1.7)$$

где

$$S^*(\omega) = S'(\omega) - iS''(\omega), \qquad (1.8)$$

$S'(\omega)$ — податливость накоплений, $S''(\omega)$ — податливость потерь.

Можно показать, что относительное рассеяние упругой энергии связано только с мнимой составляющей $S''(\omega)$ упругих модулей [2, 3]. В связи с этим φ обычно называют внутренним трением материала или углом потерь.

В дальнейшем будем рассматривать изотропные среды, для которых аналогично (1.8) можно ввести понятие комплексного объемного модуля упругости $K^*(\omega)$ [3]:

$$K^*(\omega) = K'(\omega) + iK''(\omega) = K'(\omega)(1 + i\,\mathrm{tg}\,\varphi), \quad (1.9)$$

где

$$\mathrm{tg}\,\varphi = K''(\omega)/K'(\omega). \qquad (1.10)$$

Комплексный модуль сдвига μ^* и комплексную вязкость η^* можно записать в виде [2, 3]

$$\mu^*(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega), \qquad (1.11)$$

$$\eta^* = \mu^*/i\omega, \qquad (1.12)$$

$$\eta^*(\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega). \qquad (1.13)$$

Связь между $\mu'(\omega)$, $\mu''(\omega)$ и $\eta'(\omega)$, $\eta''(\omega)$ определяется уравнениями

$$\mu'(\omega) = \omega\eta''(\omega), \quad \mu''(\omega) = \omega\eta'(\omega). \qquad (1.14)$$

Для среды, которая является ньютоновской жидкостью, выполняется равенство

$$\mu^*(\omega) = i\omega\eta'(\omega). \qquad (1.15)$$

При описании вязкоупругих сред используются различные модели в виде сочетания пружины и поршня в вязкой жидкости. В этом (одномерном) случае законы Гука и Ньютона имеют вид [2]

$$F_H = kx, \qquad (1.16)$$

$$F_N = \eta\frac{dx}{dt}. \qquad (1.17)$$

Последовательному соединению этих элементов соответствует модель Максвелла, а параллельному — модель Кельвина–Фойгта (рис. 1).

Обратный переход от моделей к сплошной среде осуществляется заменой силы F и перемещений x на напряжения σ и деформации ε.

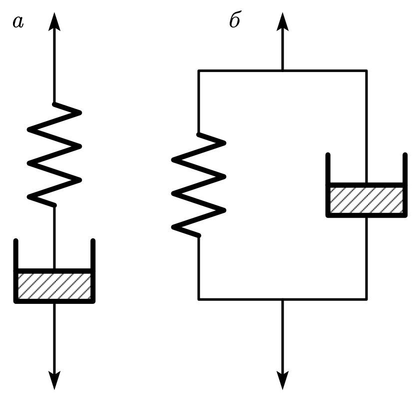

Рис. 1. Моделирование вязкоупругих свойств: *а*) модель Максвелла; *б*) модель Кельвина–Фойгта

1.1. Модель Максвелла

Модель Максвелла изображена на рис. 1*а*. Здесь общая деформация ε состоит из упругой ε_0 и вязкой ε_m составляющих:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_m. \qquad (1.18)$$

Скорость изменения упругой деформации равна

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{1}{\mu_\infty}\frac{d\sigma}{dt}, \qquad (1.19)$$

так как $\varepsilon_0 = \sigma/\mu_\infty$, где $\mu_\infty = \mu(\omega)|_{\omega\to\infty}$ — нерелаксированное значение модуля сдвига ($\omega \to \infty$). Изменение вязкой деформации во времени связано с напряжением:

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}, \qquad (1.20)$$

где η — вязкость среды.

Таким образом, получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\mu_\infty}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}. \qquad (1.21)$$

При неизменной во времени деформации,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \qquad (1.22)$$

получаем решение уравнения (1.21)

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left[-(t/\tau_\varepsilon)\right], \qquad (1.23)$$

которое характеризует зависимость напряжения от времени t, т. е. релаксацию тела. Отношение $\tau_\varepsilon = \eta/\mu_\infty$ является временем релаксации напряжений по Максвеллу.

При периодическом воздействии $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ с учетом (1.21) получим

$$\sigma_0 \mu_\infty e^{i\omega t} + i\omega\eta\sigma_0 e^{i\omega t} = \eta\mu_\infty i\omega\varepsilon e^{i\omega t},$$

откуда следует, что

$$\sigma = \frac{\mu_\infty i\omega\tau_\varepsilon \varepsilon}{1 + i\omega\tau_\varepsilon}\,, \qquad (1.24)$$

т. е. комплексный модуль сдвига для среды Максвелла равен

$$\mu^*(\omega) = \frac{\mu_\infty i\omega\tau_\varepsilon}{1 + i\omega\tau_\varepsilon}, \quad \tau_\varepsilon = \frac{\eta}{\mu_\infty}\,. \qquad (1.25)$$

1.2. Модель Кельвина–Фойгта

В модели Кельвина–Фойгта (рис. 1*б*) упругий σ_1 и вязкий σ_2 элементы соединены параллельно. В этом случае

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \qquad (1.26)$$

или

$$\sigma = 2\mu_0 \left(\varepsilon + \tau_\sigma \frac{d\varepsilon}{dt}\right), \quad \tau_\sigma = \frac{\eta}{\mu_0}\,, \qquad (1.27)$$

откуда следует, что

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\mu_0 \left[1 - \exp(-t/\tau_\sigma)\right]}\,. \qquad (1.28)$$

Здесь $\mu_0 = \mu(\omega)|_{\omega=0}$ — релаксированное значение модуля сдвига ($\omega \to 0$).

Если воздействие периодическое, то с учетом (1.27) для среды Кельвина–Фойгта получим

$$\sigma_0 e^{i\omega t} = \mu_0(\varepsilon_0 e^{i\omega t} + \tau_\sigma i\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t}).$$

Таким образом,

$$\sigma = \mu_0(1 + i\omega\tau_\sigma), \quad \tau_\sigma = \eta/\mu_0, \qquad (1.29)$$

т. е. комплексный модуль сдвига для среды Кельвина–Фойгта равен

$$\mu^* = \mu_0(1 + i\omega\tau_\sigma). \qquad (1.30)$$

1.3. Модель Зинера

Основным недостатком модели Максвелла является то, что в ней статический модуль сдвига μ_0 обращается в нуль, а недостаток модели Кельвина–Фойгта состоит в том, что она не описывает релаксацию напряжений.

Этих недостатков лишена модель Зинера (модель стандартного линейного тела) [2], в которой сочетаются модели Максвелла и Кельвина–Фойгта и которая отражает процесс деформаций, близкий к реальному процессу.

Для стандартного линейного тела уравнение упругости можно записать в виде [2]

$$\sigma + \tau_\varepsilon \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = \mu \left(\varepsilon + \tau_\sigma \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha}\right), \qquad (1.31)$$

где

$$\mu_0 = \mu(\omega)|_{\omega=0}, \quad \mu_\infty = \lim_{\omega\to\infty} \mu(\omega), \quad \tau_\varepsilon/\tau_\sigma = \mu_0/\mu_\infty,$$

ω — частота воздействия на образец. Применяя преобразование Фурье к (1.31), получим [2]

$$\overline{\sigma} + (i\omega\tau)^\alpha \overline{\sigma} = 2\mu_0 \left(\overline{\sigma} + (i\omega\tau)^\alpha \overline{\varepsilon}\right),$$

где $\overline{\sigma}$ и $\overline{\varepsilon}$ — фурье-образы величин σ и ε. Отсюда следует, что комплексный модуль сдвига для стандартного линейного тела равен

$$\mu^*(\omega) = \mu_\infty - \frac{\mu_\infty - \mu_0}{1 + (i\omega\tau_\varepsilon)^\alpha}\,. \qquad (1.32)$$

Учитывая (1.11), получим

$$\frac{\mu_\infty - \mu'(\omega)}{\mu_\infty - \mu_0} = \frac{1 + (\omega\tau)^\alpha \cos(\pi\alpha/2)}{1 + (\omega\tau)^\alpha \left[2\cos(\pi\alpha/2) + (\omega\tau)^\alpha\right]}, \qquad (1.33)$$

$$\frac{\mu_\infty - \mu''(\omega)}{\mu_\infty - \mu_0} = \frac{(\omega\tau)^\alpha \sin(\pi\alpha/2)}{1 + (\omega\tau)^\alpha \left[2\cos(\pi\alpha/2) + (\omega\tau)^\alpha\right]}. \qquad (1.34)$$

Если известно фурье-преобразование функции $\mu(t)$, то фурье-преобразование функции распределения времен релаксации, $f(\tau)$, имеет вид [2]

$$\overline{f}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \pm\frac{1}{\pi}\, \mathrm{Im}\, \mu\left[\omega \exp(\pm i\pi)\right]. \qquad (1.35)$$

Используя (1.34) и (1.35), можно определить нормированную плотность распределения $f_0(\tau)$ времен релаксации (рис. 2*в*):

$$f_0(\tau) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi\left\{\mathrm{ch}\left[\alpha\ln(\tau/\tau_\varepsilon)\right] + \cos(\alpha\pi)\right\}}\,, \qquad (1.36)$$

где

$$f_0(\tau) = \frac{f(\tau)}{\mu_\infty - \mu_0}\,.$$

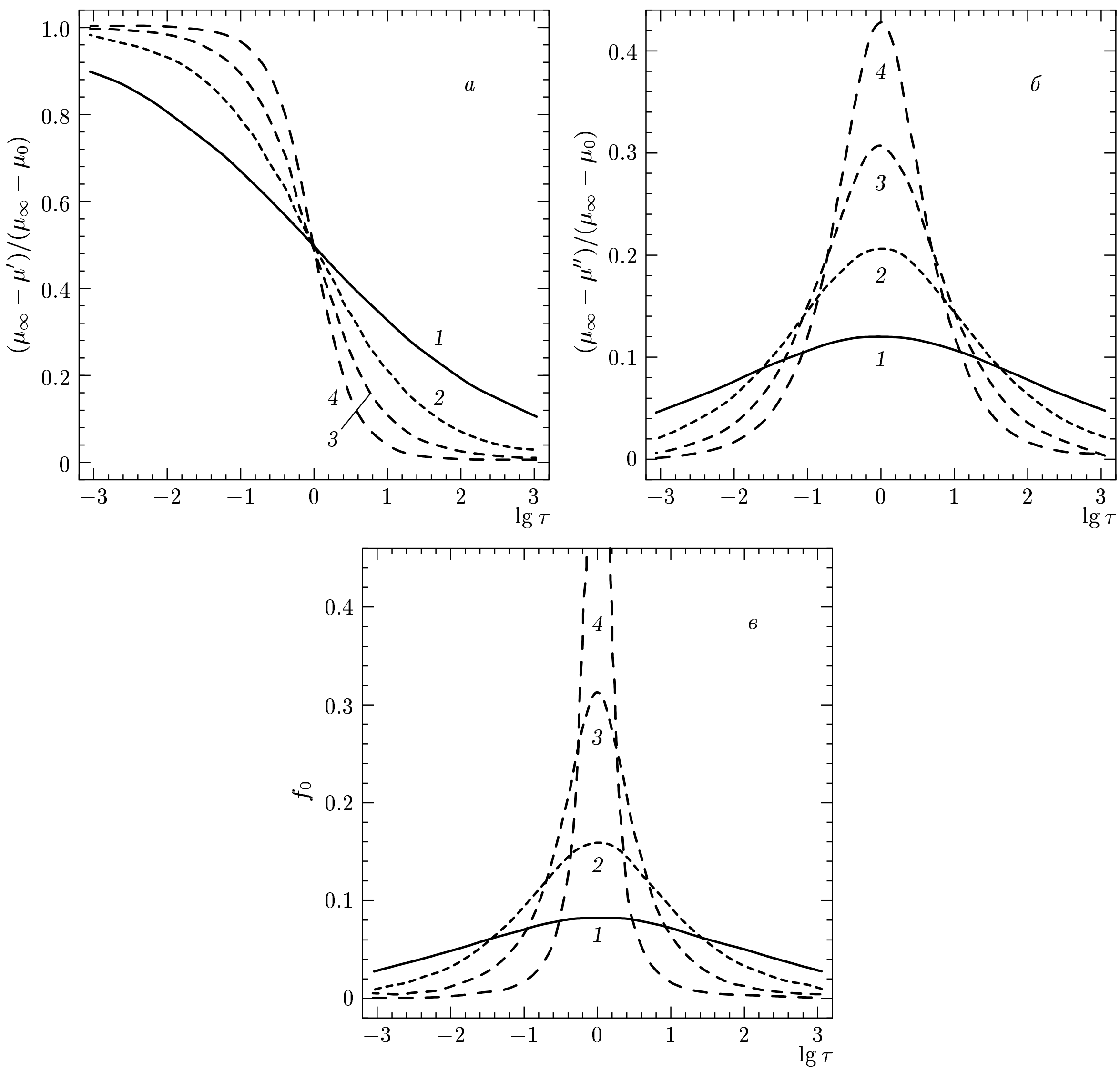

Рис. 2. Зависимости вязкоупругих свойств стандартного линейного тела от $\lg \tau$ при значениях $\alpha = 0.2$ (кривые *1*); 0.4 (*2*); 0.7 (*3*); 0.9 (*4*): *а*) действительная часть относительного модуля сдвига; *б*) мнимая часть относительного модуля сдвига; *в*) нормированная функция распределения времен релаксации

Зависимость между дисперсией γ^2 времени релаксации хаотической динамики и параметром α имеет вид

$$\gamma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \ln^2 \left(\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right) f_0(\tau) d\ln\tau = \frac{\pi^2}{3} \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}. \quad (1.37)$$

В [4] было показано, что уравнение (1.31) с дробными производными можно получить, если предположить, что множество времен релаксации имеет фрактальную природу. Параметр α в (1.31), (1.33) и (1.34) (рис. 2*а* и *б*) согласно [4] равен дробной размерности фрактального множества времен релаксации и является характеристикой локализации (размытости) релаксационного спектра.

2. СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ

Ниже рассмотрим вязкоупругие свойства модельной неоднородной среды с хаотической фрактальной структурой.

Рассмотрим иерархическую модель структуры двухфазной среды, изменение которой с увеличени-

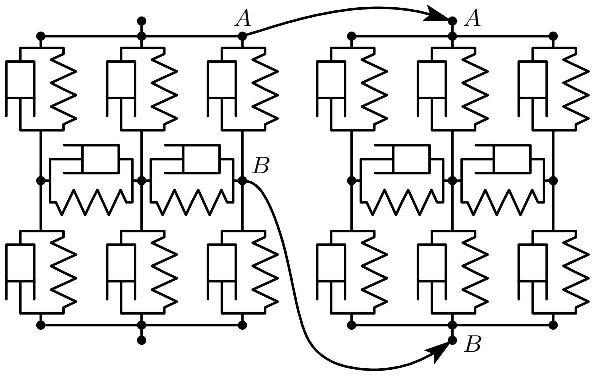

Рис. 3. Иллюстрация получения основного фрактального множества $\Omega_n(\ell_0, p_0 = 1)$ вязкоупругих элементов для случая $\ell_0 = 2$

ем объемной концентрации p первой фазы можно качественно описать следующим образом. Вначале в непрерывной среде из второй фазы образуются изолированные кластеры из первой фазы, затем с увеличением объемной концентрации p изолированные кластеры соединяются и переходят в так называемый бесконечный кластер, состоящий из первой фазы.

Моделирование хаотической структуры неоднородной среды можно провести на базе решеток со случайным распределением их параметров [5–7]. Узлы решетки моделируют распределение фаз в пространстве, а связи между узлами — их контакты с соседями. В дальнейшем каждая связь представлялась в виде параллельного соединения пружины и поршня (рис. 3).

Основное множество связей, $\Omega_n(\ell_0, p_0)$, было получено с помощью итерационной процедуры. На начальном этапе расчетов исследовалась решетка конечных размеров с длиной ребра ℓ_0 и вероятностью p_0 того, что связь принадлежит первой фазе. На следующем шаге ($k = 1, 2, \ldots, n$) каждая связь в решетке заменяется решеткой, полученной на предыдущем шаге (рис. 3, 4). Итерационный процесс заканчивается, когда свойства решетки перестают зависеть от номера итерации k.

Таким образом, найденное с помощью итерационной процедуры множество связей, $\Omega_n(\ell_0, p_0)$, зависит от размера ℓ_0 начальной решетки и вероятности p_0 и является самоподобным множеством, т. е. фрактальным [5–7].

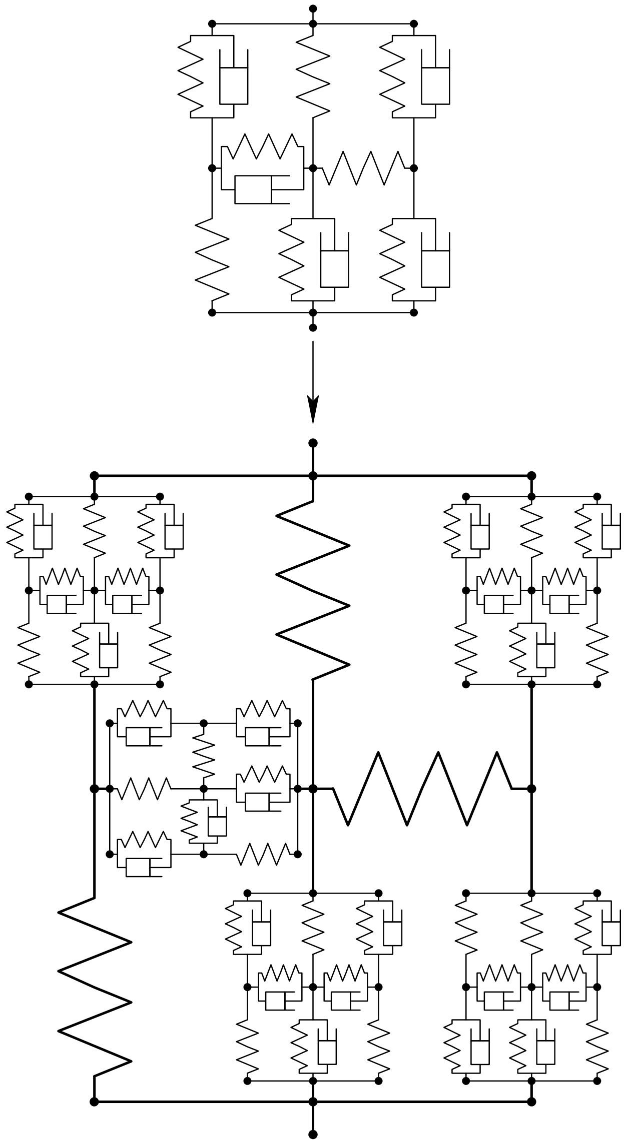

Рис. 4. Иллюстрация получения множества $\Omega_n(\ell_0, p_0)$ для случая $\ell_0 = 2$, $p_0 = 3/8$ на втором итерационном шаге ($k = 2$)

3. ВЯЗКОУПРУГИЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим двухфазную систему с функцией распределения

$$P_0(C) = p_0\delta\left(C - C_1^{(0)}\right) + (1-p_0)\delta\left(C - C_2^{(0)}\right), \quad (3.1)$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака; данная локальная область с вероятностью p_0 обладает свойством $C_1^{(0)}$ и с вероятностью $1 - p_0$ — свойством $C_2^{(0)}$.

После k итерационных шагов функция плотно-

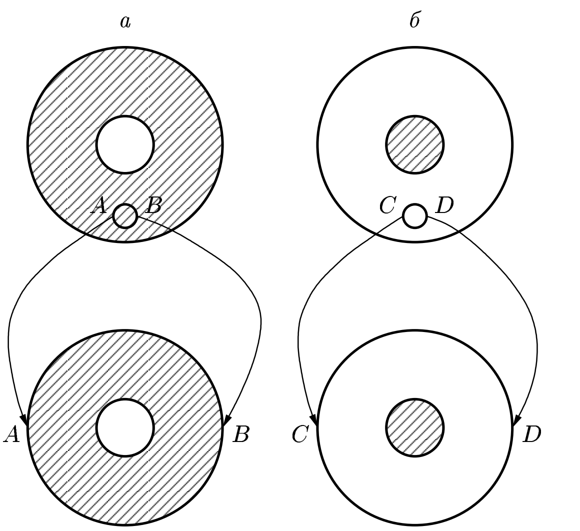

Рис. 5. Иллюстрация моделирования связанного (a) и несвязанного ($б$) множеств

сти принимает вид

$$P_k(C) = p_k\delta\left(C - C_c^{(k)}\right) + (1-p_k)\delta\left(C - C_n^{(k)}\right). \quad (3.2)$$

Здесь $C_c^{(k)}, C_n^{(k)}$ — свойства на k-м итерационном этапе соответственно связанного и несвязанного множеств, $p_k = R(\ell_{k-1}, p_{k-1})$ — плотность соединяющего множества связей; функция $R(\ell_{k-1}, p_{k-1})$ равна отношению числа связанных множеств к числу всех разбросов («раскрасок») на решетке.

При $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} P_k(C) = \begin{cases} \delta\left(C - C_c^{(\infty)}\right), & p_0 > p^*, \\ \delta\left(C - C_n^{(\infty)}\right), & p_0 < p^*. \end{cases} \quad (3.3)$$

При этом

$$C_c^{(k)} \geq C \geq C_n^{(k)},$$
$$\lim_{k\to\infty} C_c^{(k)} = \lim_{k\to\infty} C_n^{(k)} = C. \quad (3.4)$$

На каждом шаге итерационного процесса структуры связанного и несвязанного множеств моделировались составной «каплей» [5, 6]: первое представляет собой непрерывный массив первой фазы с включением сферы (капли) из второй фазы (рис. 5a); второе — непрерывный массив второй фазы с включением сферы (капли) из первой фазы (рис. 5$б$). При этом принималось, что модуль объемной упругости K_1 первой фазы и модуль сдвига μ_1 больше соответствующих величин второй фазы (K_2, μ_2).

Таким образом, для определения эффективных вязкоупругих свойств фрактальных структур по данной итерационной схеме расчета используется несколько аналитических зависимостей, а именно: функция вероятностей $R(\ell, p)$ и зависимости вязкоупругих свойств связанного и несвязанного множеств от свойств и концентрации фаз неоднородной среды.

Функция вероятностей $R(\ell, p)$ определяет вероятность того, что при заданных ℓ, p множество связей $\Omega_n(\ell, p)$ будет связанным. Анализ численных расчетов функции $R(p)$ [7] для решетки $2\times 2\times 2$ показал, что достаточно хорошее согласие с численными результатами имеет функция

$$R(p) = p^2(4+8p-14p^2-40p^3+16p^4+288p^5-655p^6+ \\ + 672p^7 - 376p^8 + 112p^9 - 14p^{10}), \quad (3.5)$$

которая была приведена ранее [8].

Согласно (3.5) порог протекания p_c равен 0.2084626828, т. е. несвязанное множество переходит в связанное при $p_c \approx 0.208462$.

Для расчета упругих свойств связанного и несвязанного множеств были использованы формулы Хашина–Штрикмана, которые основаны на структурной модели «шар» в однородной среде [9, 10] (рис. 5).

Формулы Хашина–Штрикмана получены на основе принципа минимума дополнительной энергии с помощью вариационного метода вычисления эффективных модулей упругости неоднородной среды [2, с. 120] и определяют верхнюю (K_c, μ_c) и нижнюю (K_n, μ_n) границы эффективных модулей упругости:

$$K_c = K_1 + \frac{(1-p)(K_2 - K_1)}{1 + pa_1(K_2 - K_1)}, \quad (3.6)$$

$$\mu_c = \mu_1 + \frac{(1-p)(\mu_2 - \mu_1)}{1 + pb_1(\mu_2 - \mu_1)}, \quad (3.7)$$

где

$$a_1 = \frac{3}{3K_1 + 4\mu_1}, \quad b_1 = \frac{6(K_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(3K_1 + 4\mu_1)}. \quad (3.8)$$

Формулы для K_n, μ_n можно получить из (3.6)–(3.8) заменой индексов $c \to n$, $1 \leftrightarrow 2$ и $p \leftrightarrow 1 - p$.

Как было показано выше, упругие статические решения можно преобразовать в вязкоупругие решения для установившихся гармонических колебаний, заменяя упругие модули K и μ соответствующими упругими комплексными модулями K^* и μ^*.

С использованием данного принципа соответствия для связанного множества комплексный модуль объемной упругости K_c^* и комплексный модуль

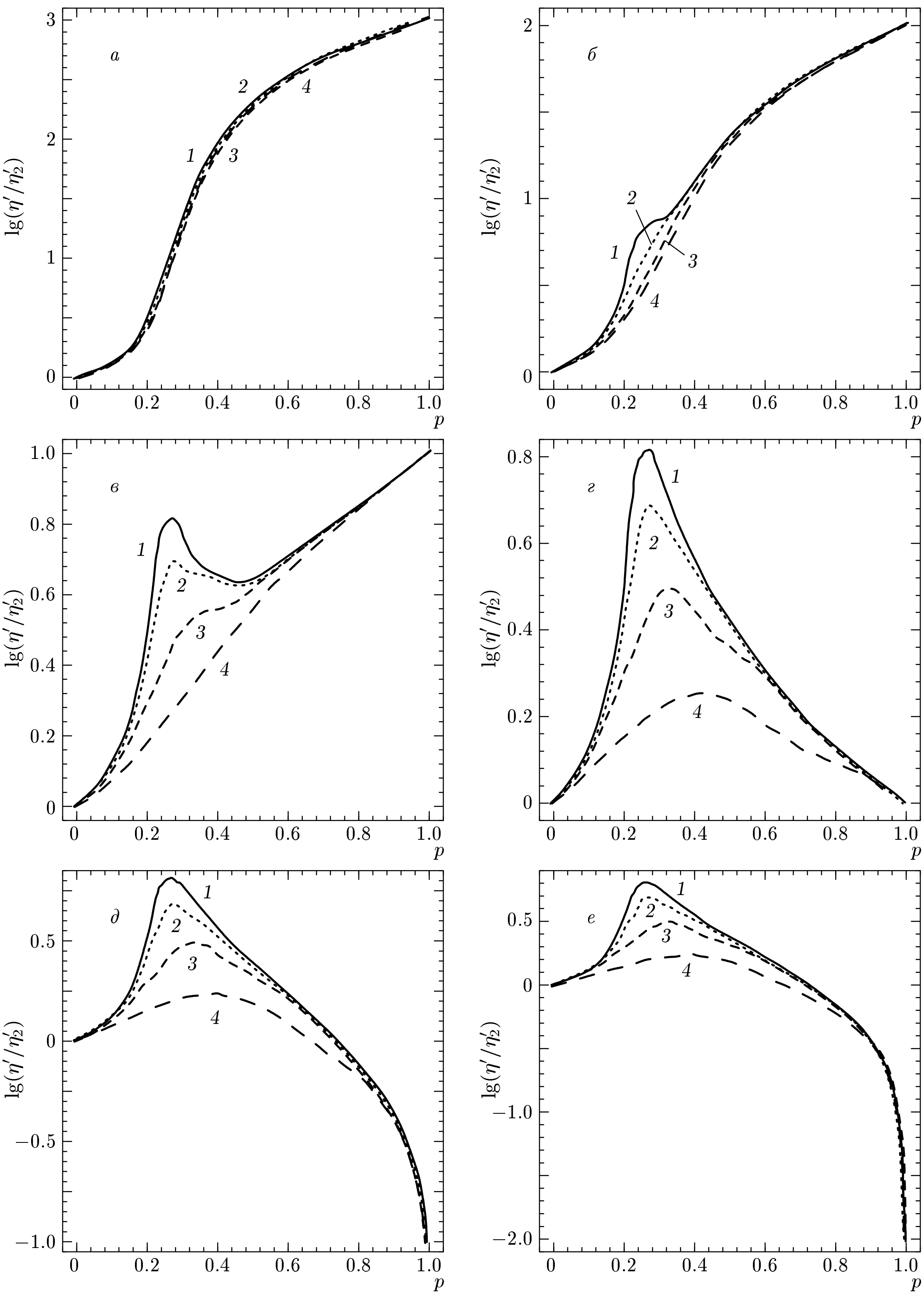

Рис. 6. Зависимость логарифма эффективной относительной вязкости $\eta'/\eta'_2 = \mathrm{Im}[\mu^*(\omega)]/\,\mathrm{Im}[\mu_2^*(\omega)]$ от концентрации p первой фазы при $x = 10^4$ и $a = 10^{-1}$ (*а*), 10^{-2} (*б*), 10^{-3} (*в*), 10^{-4} (*г*), 10^{-5} (*д*), 10^{-6} (*е*). Расчеты проводились при значениях $y = 10^{-2}$ (*1*), 10 (*2*), 10^2 (*3*), 10^3 (*4*)

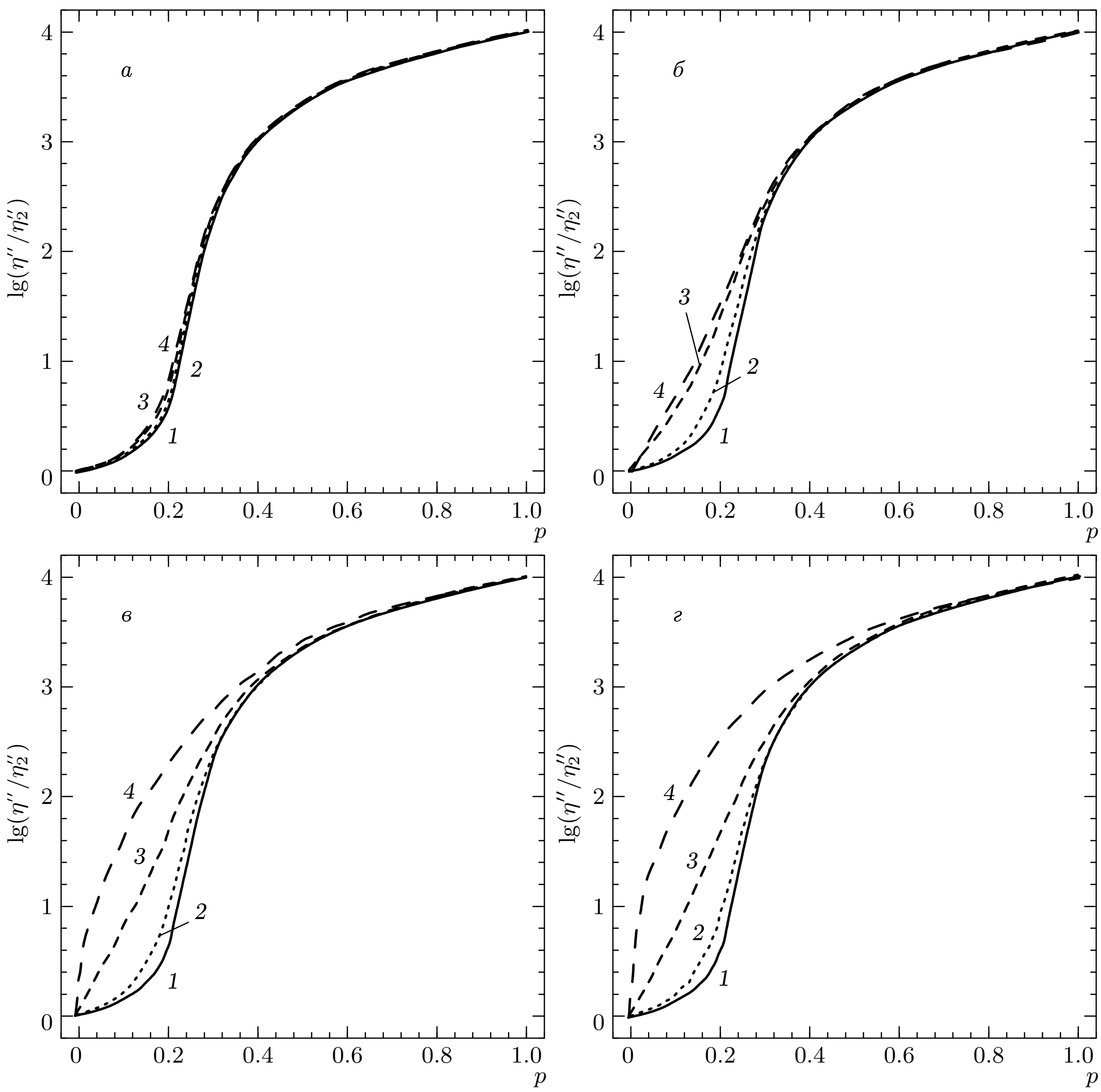

Рис. 7. Зависимость логарифма эффективной относительной вязкости, $\eta''/\eta''_2 = \mathrm{Re}[\mu^*(\omega)]/\,\mathrm{Re}[\mu_2^*(\omega)]$, от концентрации p первой фазы при тех же значениях x, a и y, что и на рис. 6

сдвига μ_c^* на $(i+1)$-м этапе можно записать в виде [5, 6]

$$K_c^{*(i+1)} = K_c^{*(i)} + \frac{(1-p_i)\left(K_n^{*(i)} - K_c^{*(i)}\right)}{1+p_i a_c^{(i)}\left(K_n^{*(i)} - K_c^{*(i)}\right)}, \qquad (3.9)$$

$$\mu_c^{*(i+1)} = \mu_c^{*(i)} + \frac{(1-p_i)\left(\mu_n^{*(i)} - \mu_c^{*(i)}\right)}{1+p_i b_c^{(i)}\left(\mu_n^{*(i)} - \mu_c^{*(i)}\right)}, \qquad (3.10)$$

где

$$a_c^{(i)} = \frac{3}{3K_c^{*(i)} + 4\mu_c^{*(i)}}, \quad b_c^{(i)} = \frac{6\left(K_c^{*(i)} + 2\mu_c^{*(i)}\right)}{5\mu_c^{*(i)}\left(3K_c^{*(i)} + 4\mu_c^{*(i)}\right)}, \qquad (3.11)$$

где $K_c^{*(0)} = K_1^*$ и $\mu_c^{*(0)} = \mu_1^*$ — соответственно комплексный модуль объемной упругости и комплексный модуль сдвига первой фазы неоднородной среды, а $K_n^{*(0)} = K_2^*$ и $\mu_n^{*(0)} = \mu_2^*$ — соответственно комплексный модуль объемной упругости и ком-

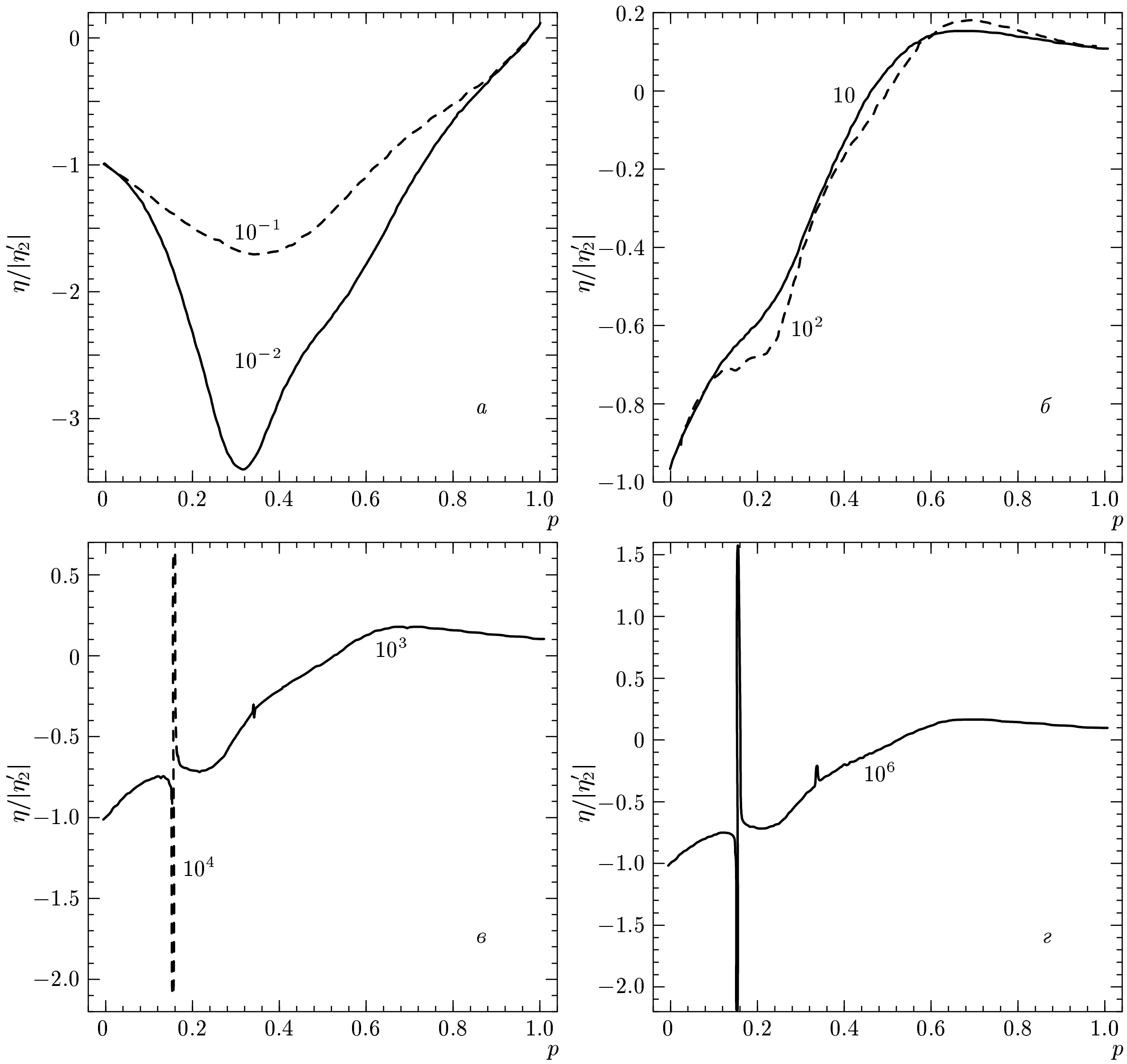

Рис. 8. Зависимость эффективной относительной вязкости от концентрации p первой фазы, когда вторая фаза обладает отрицательными значениями вязкости. Значения y указаны около кривых

плексный модуль сдвига второй фазы, $p_{i+1} = R(p_i)$ по (3.5).

Для несвязанного множества упругие свойства $(K_n^{*(i+1)}, \mu_n^{*(i+1)})$ определяются по формулам, которые можно получить из (3.9)–(3.11) после замены индексов $c \leftrightarrow n$ и $p_i \leftrightarrow 1 - p_i$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Вязкоупругие среды. Расчеты проводились для двухфазной (двухкомпонентной) неоднородной среды в предположении, что объемные деформации упругие, а сдвиговые — вязкоупругие. Отношение локальных объемных модулей, K_1'/K_2', задавалось равным 10^4.

Для удобства расчетов локальные модули сдвига (модули сдвига фаз) представлялись в виде

$$\mu_1^* = \mu_2' x(1 + iay), \tag{4.1}$$

$$\mu_2^* = \mu_2'(1 + iy), \quad y = \operatorname{tg}\varphi_2 = \mu_2''/\mu_2', \tag{4.2}$$

$$x = \mu_1'/\mu_2' = \eta_1''/\eta_2'', \quad a = \operatorname{tg}\varphi_1/\operatorname{tg}\varphi_2. \tag{4.3}$$

Комплексная вязкость равна

$$\eta_j^*(\omega) = \eta_j'(\omega) - i\eta_j''(\omega),$$

где

$$\mu_j' = \omega\eta_j''(\omega), \quad \mu_j''(\omega) = \omega\eta_j'(\omega), \quad j = 1, 2.$$

Рис. 9. Зависимость относительного эффективного модуля сдвига от концентрации p первой фазы, когда модули сдвига фаз равны $\mu_1^* = 1$, $\mu_2^* = -y$. Значения y изменялись в диапазонах 0.01–1 (*а*) и 1–10 (*б*)

На рис. 6 представлены результаты расчетов логарифма относительной эффективной вязкости неоднородной фрактальной среды, $\eta'/\eta_2' = \operatorname{Im}[\mu^*(\omega)]/\operatorname{Im}[\mu_2^*(\omega)]$ (η_2' — вязкость второй фазы), в зависимости от концентрации p первой фазы при различных значениях a.

Расчеты проводились при отношении вещественных частей модулей сдвига фаз $x = 10^4$ и значениях $y = 10^{-2}$, 10, 10^2, 10^3.

Из рис. 6*а* ($a = 0.1$, $\mu_1''/\mu_1' \ll 1$, $\mu_2''/\mu_2' \ll 1$) следует, что зависимость релаксированной вязкости ($\omega \to 0$) от концентрации представляет собой монотонную кривую и не зависит от значений μ_2''/μ_2'. При $a = 0.01$ и $\mu_2''/\mu_2' = 0.01$ (рис. 6*б*) в окрестности порога протекания появляются локальные максимум и минимум, которые при $a < 0.01$ (рис. 6*в*–*е*) существенно зависят от значений μ_2''/μ_2'. При этом в области до порога протекания ($p < p_c$) характер зависимости практически не меняется (рис. 6*в*–*е*), тогда как после порога протекания ($p > p_c$) кривая из вогнутой (рис. 5*в*–*д*) становится выпуклой (рис. 5*е*, $\mu_1''/\mu_1' \ll 1, \mu_2''/\mu_2' \gg 1$). При $a \leq 10^{-4}$ минимум исчезает и остается единственный максимум в окрестности порога протекания, который также исчезает при $\mu_2''/\mu_2' \to \infty$ (рис. 6*д, е*). Полученные результаты показывают, что зависимость $\lg|\eta'/\eta_2'|$ от концентрации p фаз фрактальной структуры становится выпуклой с единственным максимумом, когда $ax \sim 1$, т. е. когда $\mu_1'' \sim \mu_2''$ при значениях $x \gg 1$ ($\mu_1' \gg \mu_2'$).

На рис. 7 представлены результаты расчетов логарифма относительной эффективной вязкости, $\eta''/\eta_2'' = \operatorname{Re}[\mu^*(\omega)]/\operatorname{Re}[\mu_2^*(\omega)]$ от концентрации p первой фазы. Из расчетов следует, что при $a \leq 10^{-3}$ (рис. 7*в, г*) относительная эффективная вязкость η''/η_2'' практически не зависит от a. При $p < p_c$ характер зависимости меняется, когда $a \to 0$, а при $p > p_c$ остается неизменной.

Вязкоупругие среды с отрицательным модулем сдвига. В [11–13] рассматривался неоднородный материал, один компонент в котором обладал отрицательным модулем сдвига (отрицательной жесткостью), и было отмечено, что композиты с включениями с отрицательными модулями сдвига в вязкоупругих средах имеют более высокую жесткость и механическое демпфирование по сравнению с компонентами, из которых получен композит.

На рис. 8 представлены результаты расчетов модуля сдвига вязкоупругой неоднородной среды с хаотической фрактальной структурой, в которой первая фаза имела комплексный модуль сдвига

$$\mu_1^* = 1 + 0.1iy, \tag{4.4}$$

а вторая фаза — отрицательный модуль сдвига

$$\mu_2^* = -iy. \tag{4.5}$$

Из расчетов следует (рис. 8), что в окрестности порога протекания в зависимости относительной эффективной вязкости от концентрации фаз неоднородной среды при $y \geq 10$ ($\mu_1'' \geq \mu_1'$) возникают сингулярности, которые исчезают при $y \ll 1$ ($|\mu_2''| \ll \mu_1'$). Когда $y \ll 1$ ($|\mu_2''| \ll \mu_1'$), в зависимости эффективной относительной вязкости $\eta'/|\eta_2'|$ от p существует минимум в окрестности порога p_c, который исчезает при $y \to 10$ ($\mu_1'' \to \mu_1'$).

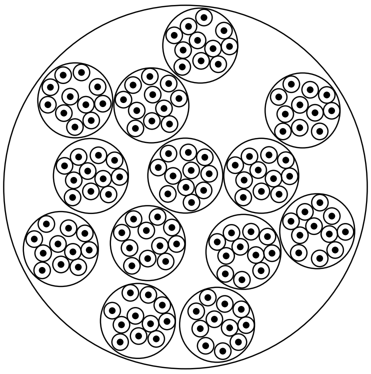

Рис. 10. Пример получения материала с фрактальной структурой

На рис. 9 представлены результаты расчетов эффективного модуля сдвига для модулей сдвига фаз $\mu_1^* = 1$, $\mu_2^* = -y$. Из расчетов следует, что при $y \gg 1$ сингулярности локализуются и смещаются в область малых концентраций p. При $y \ll 1$ сингулярности возникают во всем диапазоне концентраций p.

Анализ функции распределения $f(t)$ времени релаксации вязкоупругой среды с фрактальной структурой может быть проведен аналогично анализу функции распределения времени релаксации диэлектрических свойств [14].

В заключение отметим, что создание материалов с фрактальной структурой, которые будут иметь вязкоупругие свойства, адекватные рассмотренным модельным расчетам, можно провести по следующей схеме: на первом этапе изготавливаются «таблетки», например, при создании материала с высокими демпфирующими свойствами. Таблетка состоит из полимерной оболочки с включением из единичных доменов ферромагнитного материала. На втором этапе создается таблетка, включениями в которой служат таблетки, полученные на первом этапе и т. д. (рис. 10).

5. ВЫВОДЫ

Исследованы вязкоупругие свойства неоднородных сред с хаотической фрактальной структурой. Выявлены условия немонотонного поведения эффективной вязкости в вязкоупругих средах и сингулярного поведения эффективной вязкости и эффективного модуля сдвига при отрицательном модуле сдвига (вязкости) одной из фаз неоднородной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1987).
2. Т. Д. Шермергор, *Теория упругости микронеоднородных сред*, Наука, Москва (1977).
3. Р. Кристенсен, *Введение в механику композитов*, Мир, Москва (1982).
4. В. В. Новиков, К. В. Войцеховский, ПМТФ **41**, 162 (2000).
5. V. V. Novikov, K. W. Wojciechowski, D. V. Belov, and V. P. Privalko, Phys. Rev. E **63**, 036120 (2001).
6. В. В. Новиков, К. В. Войцеховский, ФТТ **41**, 2147 (1999).
7. В. В. Новиков, В. П. Белов, ЖЭТФ **106**, 780 (1994).
8. J. Bernasconi, Phys. Rev. B **18**, 2185 (1978).
9. Z. Hashin and S. Shtrikman, J. Mech. Phys. Sol. **10**, 335 (1962).
10. Z. Hashin, J. Appl. Mech. **50**, 481 (1983).
11. R. S. Lakes, Phys. Rev. Lett. **86**, 2897 (2001).
12. R. S. Lakes, T. Lee, A. Bersie, and Y. C. Wang, Nature **410**, 565 (2001).
13. R. S. Lakes, Phil. Mag. Lett. **81**, 95 (2001).
14. V. V. Novikov and V. P. Privalko, Phys. Rev. E **64**, 031504 (2001).