

О ЗАРОЖДЕНИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ И ГИСТЕРЕЗИСЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ I РОДА

Г. Ф. Жарков*

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 ноября 2001 г.

Изучены одномерные безвихревые решения системы нелинейных уравнений Гинзбурга–Ландау (так называемые состояния-предвестники), описывающие зарождение сверхпроводимости в длинном цилиндрическом сверхпроводнике первого рода, первоначально находившемся в переохлажденном нормальном состоянии в магнитном поле, и возникающие при последующем ослаблении внешнего поля. Состояния-предвестники ответственны за магнитный гистерезис в сверхпроводниках I рода (для которых $\kappa < \kappa_c$, где $\kappa_c(R)$ — зависящее от радиуса критическое значение параметра κ теории Гинзбурга–Ландау). Найден интервал полей, в котором (наряду с мейснеровским состоянием) существуют состояния-предвестники и возможен гистерезис в зависимости от радиуса цилиндра R и параметра κ .

PACS: 74.25.-q, 74.25.Dw

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о зарождении (и разрушении) сверхпроводящего состояния в магнитном поле в сверхпроводниках различной геометрии рассматривался на основе макроскопической теории сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау [1] во многих работах [2–22]. Было, в частности, найдено, что для сверхпроводников II рода ($\kappa > 1$) в случае длинного цилиндра радиусом R при уменьшении внешнего аксиального магнитного поля H сверхпроводимость возникает из нормального состояния путем фазового перехода второго рода в некотором поле $H = H_2(m, \kappa, R)$ [4], когда впервые появляется отличное от нуля малое значение модуля комплексного параметра порядка $\Psi = \psi e^{i\Theta}$ (ψ — модуль, Θ — фаза, m — полное число вихрей в сверхпроводнике). В случае больших R и m поле $H_2(m, \kappa, R)$ совпадает с полем зарождения поверхностной сверхпроводимости $H_{c3} = 1.69H_{c2}$ [3, 4], где $H_{c2} = \phi_0/2\pi\xi^2$, ϕ_0 — квант потока, ξ — длина когерентности. Численное исследование одномерных (зависящих только от радиуса) решений нелинейных уравнений Гинзбурга–Ландау при конечных значениях $\psi \sim 1$, проведенное в последнее время [17–22] для случая цилиндрической геометрии,

выявило, что эти решения ($\psi \sim 1$) весьма сложным образом зависят от параметров задачи (m, κ, R, H). Упомянем, например, наличие нескольких ветвей решений в сверхпроводниках второго рода [18], скачкообразную перестройку этих решений при переходах через критические значения параметров [19, 21], сложную форму границы $S_{I-II}(\kappa, R)$, разделяющей сверхпроводники I и II родов (эта граница, или, что тоже самое, критическое значение $\kappa_c(R)$, зависит от радиуса цилиндра [21] и не совпадает с простым значением $\kappa_c = 1/\sqrt{2}$, характерным для случая контакта двух полубесконечных металлических фаз: сверхпроводящей (s) и нормальной (n) [1, 2]), гистерезисные явления в сверхпроводниках II рода, связанные с существованием «депрессивной» ветви решений [22] и др.

В частности, в [22] было отмечено, что сверхпроводящее состояние ($m = 0$), зарождающееся в переохлажденном (по магнитному полю) нормальном цилиндрическом образце из сверхпроводника I рода, описывается особым решением — «предвестником» (precursor), которое предшествует полному выталкиванию поля из объема образца и скачкообразному переходу цилиндра в мейснеровское состояние. В настоящей работе эти решения-предвестники изучены более подробно. Поскольку состояния-предвестники в сверхпроводниках I ро-

*E-mail: zharkov@lpi.ru

да (а также сопутствующие им гистерезисные явления) проявляются особенно сильно вблизи границы S_{I-II} , разделяющей на плоскости (κ, R) сверхпроводники I и II родов [21], далее будет рассмотрен общий случай произвольных κ , что позволит описать поведение решений при переходе через границу S_{I-II} , которая существенно зависит от параметров R и κ .

Ясно, что в цилиндрах достаточно малого радиуса могут существовать только безвихревые состояния с $m = 0$. В настоящей работе мы ограничимся детальным изучением свойств именно таких безвихревых состояний. Будет показано, в частности, что форма петли гистерезиса намагниченности цилиндра с $m = 0$ существенно зависит от параметров R и κ . Это, в принципе, может быть использовано для экспериментального определения этих параметров в мезоскопических сверхпроводниках. Некоторые детали полученной ниже картины ранее не были известны, и, возможно, результаты данного исследования могут быть полезны при обсуждении экспериментов со сверхпроводниками малых (мезоскопических) размеров [23–29].

2. УРАВНЕНИЯ

Макроскопическая теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау [1] приводит к системе двух нелинейных уравнений для параметра порядка Ψ и векторного потенциала \mathbf{A} магнитного поля, причем в уравнение для Ψ входит длина когерентности ξ , а в уравнение для \mathbf{A} — глубина проникновения λ магнитного поля ($\lambda = \kappa\xi$, κ — параметр теории Гинзбурга–Ландау). Эти две длины равноправны, и любая из них может быть выбрана в качестве единицы измерения. В данной работе за единицу измерения принята длина λ . Мы будем изучать безвихревые состояния ($m = 0$), при этом фазу Θ можно положить равной нулю и параметр порядка считать вещественной величиной, $\Psi = \psi$. В этом случае уравнения Гинзбурга–Ландау для бесконечно длинного цилиндра в аксиальном внешнем магнитном поле H в цилиндрической системе координат (r, φ, z) могут быть записаны в следующем безразмерном виде:

$$\frac{d^2 U}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - \psi^2 U = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} + \kappa^2 (\psi - \psi^3) - \frac{U^2}{\rho^2} \psi = 0. \quad (2)$$

Здесь $\rho = r/\lambda$ — безразмерная радиальная координата, $U(\rho)$ — безразмерный потенциал магнитного поля,

$$A = \frac{\lambda\phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{U}{\rho}, \quad B = \frac{1}{r} \frac{d(rA)}{dr}, \quad b = \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho},$$

где $b = B/H_\lambda$ — безразмерное поле внутри сверхпроводника, $H_\lambda = \phi_0/2\pi\lambda^2$ — единица измерения поля.

Граничные условия к уравнениям (1), (2) имеют вид

$$U|_{\rho=0} = 0, \quad \left. \frac{dU}{d\rho} \right|_{\rho=R_\lambda} = h_\lambda, \quad (3)$$

$$\left. \frac{d\psi}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{d\rho} \right|_{\rho=R_\lambda} = 0. \quad (4)$$

Здесь $R_\lambda = R/\lambda$ и $h_\lambda = H/H_\lambda$. Магнитный момент M цилиндра (или намагниченность, отнесенная к единице объема) находится из формулы

$$\bar{b} = h_\lambda + 4\pi M_\lambda, \quad \bar{b} = B_{av}/H_\lambda,$$

где B_{av} — среднее магнитное поле внутри сверхпроводника, $M_\lambda = M/H_\lambda$.

Очевидно, что решения $U(\rho)$ и $\psi(\rho)$ уравнений (1)–(4) зависят от трех параметров: κ , R_λ , h_λ . Для нахождения самосогласованных решений системы уравнений (1)–(4) применялся итерационный метод, более подробно описанный в [17]. Этот метод эквивалентен аналогичным численным процедурам, использованным ранее [5–8]. Однако, в отличие от [5–8], где решения, как правило, находились для отдельных случайно разбросанных значений параметров κ , R , H , мы провели гораздо более детальное и систематическое исследование решений в широкой области изменения параметров κ , R_λ , h_λ , что позволило обнаружить ряд интересных особенностей, которые остались незамеченными при менее подробном рассмотрении. Некоторые результаты этого исследования изложены ниже.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для компактного описания результатов численных расчетов рассмотрим прежде всего плоскость переменных (κ, R_λ) . Каждой точке этой плоскости соответствует некоторое решение $\psi(\rho; h_\lambda)$ и $U(\rho; h_\lambda)$ системы (1)–(4). Определенное представление о свойствах этого решения (при заданных κ и R_λ) можно получить, изучая зависимость параметра порядка ψ_0 в центре цилиндра от внешнего поля, $\psi_0 = \psi(0; h_\lambda)$. Аналогичная информация о свойствах решения в точке (κ, R_λ) содержится в зависимости магнитного момента системы, $-4\pi M_\lambda$, от

внешнего поля. Удобно мысленно представить себе, что в любой точке плоскости (κ, R_λ) имеется «дырка», сквозь которую «видна» зависимость ψ_0 (и $-4\pi M_\lambda$) в этой точке от поля h_λ . Сопоставляя такие зависимости, можно установить, что на плоскости (κ, R_λ) существуют три области с качественно различным характером поведения $\psi_0(h_\lambda)$, а также $M_\lambda(h_\lambda)$. Эти области обозначены I, II_a и II_b на рис. 1.

Смысл разделения плоскости (κ, R_λ) на отдельные области будет пояснен далее, однако, прежде чем комментировать рис. 1, заметим, что сверхпроводящее состояние (при температуре $T < T_c$) можно получать двумя различными способами: либо первоначально в отсутствие внешнего поля с последующим увеличением H (режим усиления поля); либо уменьшая сильное магнитное поле H , в котором металл первоначально находился в нормальном состоянии (режим ослабления поля). Этим двум режимам отвечают, вообще говоря, различные решения при одном и том же значении поля h_λ . При поиске решений уравнений (1)–(4), отвечающих режиму усиления поля, пробная функция для параметра порядка в начале итерационной процедуры задавалась в виде $\psi(\rho) \sim 1$. Решениям в режиме ослабления поля отвечала начальная пробная функция $\psi(\rho) \sim 0.01 \ll 1$. Примеры зависимостей $\psi_0(h_\lambda)$ и $-4\pi M_\lambda(h_\lambda)$ показаны ниже на рис. 2–4, а примеры координатных зависимостей решений $\psi(\rho)$ и $b(\rho)$, возникающих в разных режимах, — на рис. 5.

Если на линии $R_\lambda = 6$ на рис. 1 проделать дырку в точке $\kappa = 0.95$ (в области I), то можно увидеть, что решения, возникающие в режиме усиления поля при разных полях h_λ , отвечают устойчивому мейсснеровскому состоянию (с $\psi_0 \approx 1$). Этим решениям соответствует сплошная линия на рис. 2а. При достижении полем значения h_1 мейсснеровское решение становится абсолютно неустойчивым и цилиндр скачком переходит в нормальное состояние ($\psi \equiv 0$). Поскольку в мейсснеровском состоянии параметр порядка ψ_0 остается конечным вплоть до точки скачка h_1 , значение критического поля $h_1(\kappa, R_\lambda)$ не может быть найдено из линеаризованной теории [4, 9], для применимости которой необходимо выполнение условия $\psi_0 \ll 1$, см. подробнее [22]. Величина скачка параметра порядка ψ_0 в точке h_1 обозначена как δ_1 . При $h > h_1$ нет других решений, кроме нормального ($\psi \equiv 0$).

Если теперь искать решения в режиме ослабления поля (при $h_\lambda < h_1$), то нормальное решение ($\psi \equiv 0$) остается устойчивым (относительно малых пространственных возмущений) вплоть до точки h_p ,

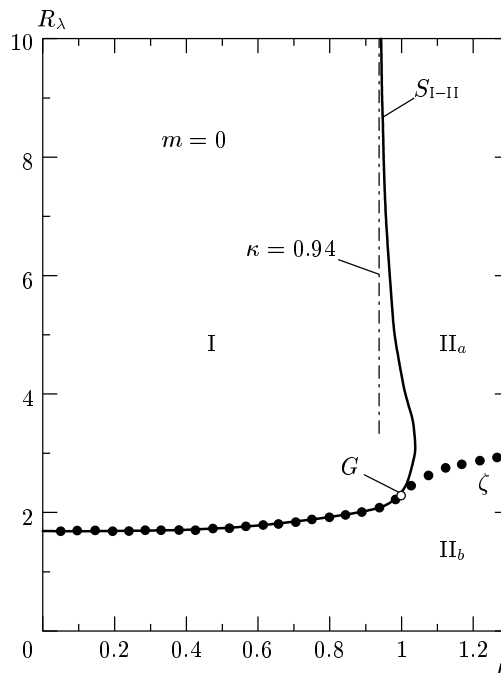


Рис. 1. Критические линии S_{I-II} и ζ , разделяющие плоскость $(R_\lambda, \kappa; m = 0)$ на три области. В режиме усиления поля разрушение сверхпроводящего состояния в области I происходит при переходе первого рода из мейсснеровского (M) состояния, $\psi \approx 1$, в нормальное (n) состояние, $\psi \equiv 0$. В области II_a M -состояние сначала скачком переходит в сверхпроводящее e -состояние, которое окончательно разрушается переходом второго рода. В области II_b разрушение сверхпроводимости (в режиме усиления поля) происходит постепенно (фазовый переход второго рода), без скачков. В режиме ослабления поля восстановление M -состояния в области II_a идет через состояния e и d и сопровождается скачками и гистерезисом. В области II_b гистерезис и скачки отсутствуют. В области I (в режиме ослабления поля) сверхпроводящее p -состояние зарождается из переохлажденного n -состояния фазовым переходом второго рода, после чего происходит скачок в M -состояние и имеется гистерезис. В точке G ($\kappa = 1, R_\lambda = 2.28$) критические линии S_{I-II} и ζ сливаются в единую кривую. Ниже линии ζ гистерезис отсутствует. При $\kappa > 3.5$ кривая ζ выходит на константу $R_\zeta \approx 3.6$. При $\kappa \ll 1$ имеем $R_\zeta \approx 1.69$

где впервые появляется малый ($\psi_0 \ll 1$) зародыш сверхпроводящего состояния (состояние-предвестник, или p -состояние). В интервале полей $\Delta_n = h_1 - h_p$ существуют два устойчивых (в указанном смысле) решения: мейсснеровское и переохлажденное (в магнитном поле) нормальное состояние. Очевидно,

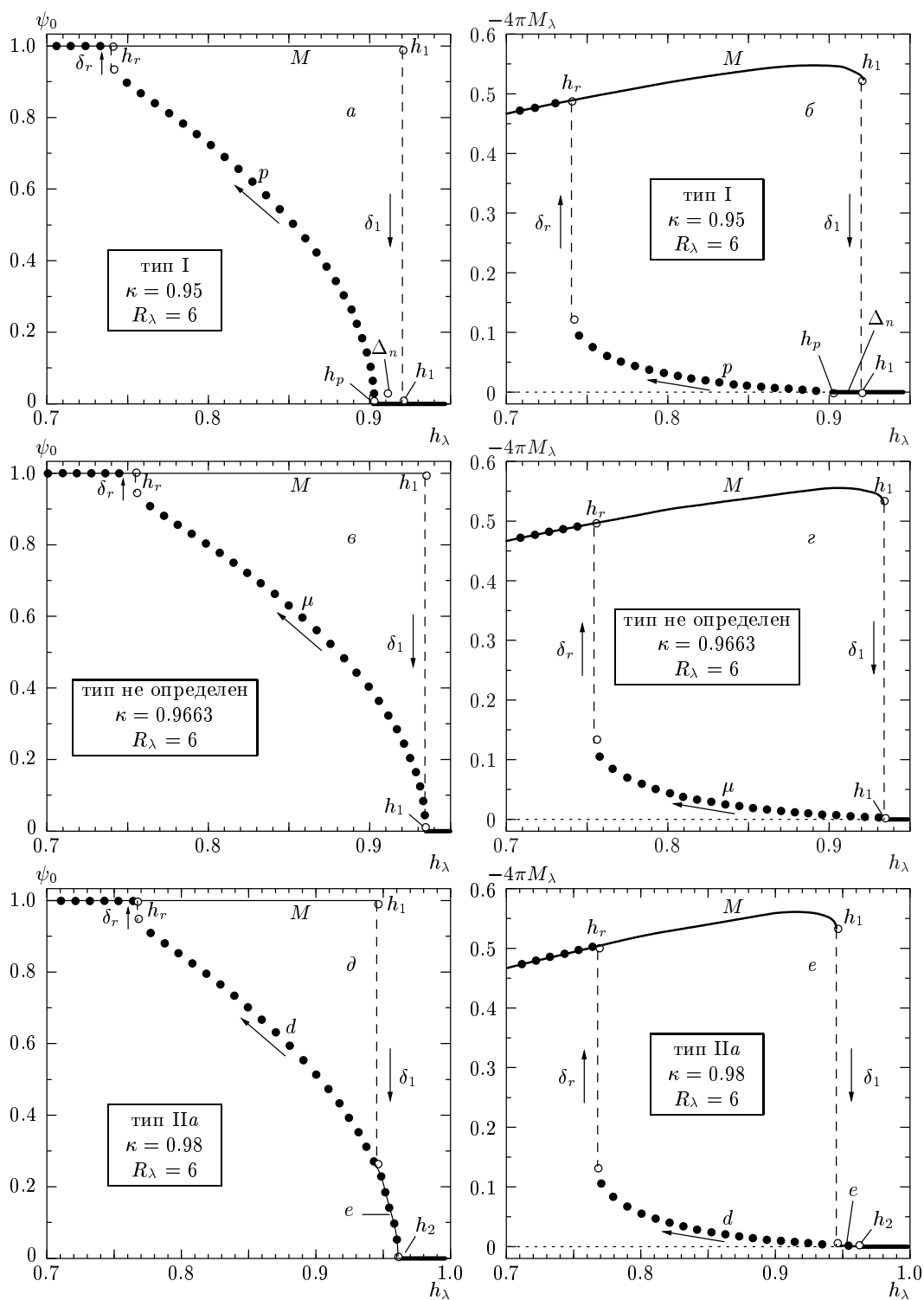


Рис. 2. Различные типы сверхпроводящих состояний (M — мейсснеровское, p — предвестник, μ — маргинальное, e — краевое подавленное, d — депрессивное), существующие вблизи линии S_{I-II} на рис. 1 при $R_\lambda = 6$. Показаны зависимости амплитуды состояний (ψ_0) и намагниченности ($-4\pi M_\lambda$) от поля h_λ при разных κ . Сплошные кривые отвечают режиму усиления поля, точечные линии — режиму ослабления поля. Скачки δ_1 между состояниями происходят в точках h_1 в режиме усиления поля; скачки δ_r — в точках h_r в режиме ослабления поля. Состояние-предвестник (p) зарождается в точке h_p (рис. 2а, б) из переохлажденного нормального состояния ($\Delta_n = h_1 - h_p$ — ширина области переохлаждения)

что переохлажденное нормальное состояние метастабильно, поскольку в мейсснеровском состоянии (с $\psi \approx 1$) свободная энергия меньше. Поскольку амплитуда зародившегося p -состояния мала, значение критического поля $H_p(\kappa, R_\lambda)$ можно найти из линеаризованной теории [4, 9], откуда при $R_\lambda \gg 1$ следует $H_p = \phi_0/2\pi\xi^2 \equiv H_{c2}$.

При дальнейшем уменьшении поля ($h_\lambda < h_p$) амплитуда зародившегося сверхпроводящего p -состояния возрастает (см. штриховую линию на рис. 2а) вплоть до точки h_r , где скачком происходит восстановление (restoration) мейсснеровского состояния (амплитуда скачка δ_r). В интервале полей $\Delta_p = h_p - h_r$ существуют два устойчивых (относительно малых возмущений) сверхпроводящих состояния: мейсснеровское (M) и p -состояние. При $h_\lambda < h_r$ существует только одно устойчивое мейсснеровское состояние. Состояние-предвестник (как и переохлажденное n -состояние) метастабильно, оно описывает возможность гистерезиса в режиме ослабления поля (петля гистерезиса обозначена стрелками). Полная ширина петли гистерезиса есть

$$\Delta_{pn} = \Delta_p + \Delta_n = h_1 - h_r.$$

Подчеркнем, что поле h_r и амплитуду ψ_r в точке перехода нельзя найти с помощью линеаризованной теории [4, 9] (см. обсуждение этого вопроса в [22]).

Аналогичная картина возникает при изучении зависимости намагниченности ($-4\pi M_\lambda$) от поля (рис. 2б). Здесь также имеются переохлажденное n -состояние (в интервале полей Δ_n), петля гистерезиса, $\Delta_{pn} = \Delta_p + \Delta_n = h_1 - h_r$, связанная с наличием n - и p -состояний, и скачок намагниченности (δ_r) при восстановлении M -состояния. Такая картина характерна для сверхпроводников I рода.

Если на рис. 1 проделать дырку в точке $R_\lambda = 6$, $\kappa = 0.98$, лежащей в области Π_a , то возникает существенно иная картина (рис. 2д). Здесь мейсснеровское состояние в режиме усиления поля также становится абсолютно неустойчивым в поле $h_1(\kappa, R_\lambda)$, однако скачок δ_1 происходит не в состояние с $\psi \equiv 0$ (как в сверхпроводниках I рода), а в особое сверхпроводящее состояние с подавленным параметром порядка — e -состояние (edge-suppressed state), характерное для сверхпроводников II рода [18, 21, 22]. Для e -состояния амплитуда параметра порядка ψ_0 плавно уменьшается при увеличении h_λ и окончательно исчезает в поле $h_\lambda = h_2(\kappa, R_\lambda)$. При $R \gg 1$ поле $H_2(\kappa, R)$ совпадает с $H_{c2} = \phi_0/2\pi\xi^2$. В интервале полей $\Delta_e = h_2 - h_1$ зависимость $\psi_0(h_\lambda)$ имеет плавно спадающий хвост, отвечающий e -состоянию.

В режиме ослабления поля сверхпроводящее e -состояние вновь появляется в поле h_2 (рис. 2д) и продолжает существовать вплоть до точки h_1 . В интервале полей $\Delta_e = h_2 - h_1$ в обоих режимах (усиления и ослабления поля) существует единственное e -решение и поэтому отсутствует гистерезис. При дальнейшем уменьшении поля ($h_\lambda < h_1$) e -решение плавно переходит в новое d -состояние (depressed state) [22], которое сохраняется вплоть до точки $h_r(\kappa, R_\lambda)$, где скачком (δ_r) восстанавливается мейсснеровское решение. В интервале полей $\Delta_d = h_1 - h_r$ имеются два устойчивых решения (M - и d -состояния), в связи с чем возможна петля гистерезиса шириной Δ_d .

Аналогично ведет себя магнитный момент, $-4\pi M_\lambda(h_\lambda)$, рис. 2е. Здесь также на кривой намагниченности имеется хвост, отсутствует переохлажденное n -состояние, и существует петля гистерезиса, связанная с d -состоянием, которое можно считать переохлажденным e -состоянием. Такая картина характерна для сверхпроводников II рода.

В случае приближения параметра κ к критической линии S_{I-II} , разделяющей сверхпроводники I и II родов — сплошной линией на рис. 1 (ее можно обозначить как $\kappa_c(R_\lambda)$), интервалы полей $\Delta_n = h_1 - h_p$ (где возможно переохлажденное нормальное состояние в сверхпроводниках I рода) и $\Delta_e = h_2 - h_1$ (где имеется хвост на кривой намагниченности в сверхпроводниках II рода) уменьшаются и на самой критической линии они обращаются в нуль. В этом случае (при $R_\lambda = 6$ и $\kappa_c = 0.9663$) возникает решение, представленное на рис. 2в и г. Здесь невозможно сказать, к какому типу принадлежит сверхпроводник (тип неопределенный). Решение-предвестник можно в этом особом случае назвать маргинальным (μ), оно зарождается без предварительного появления переохлажденного нормального состояния. Все маргинальные μ -состояния лежат на критической кривой S_{I-II} на рис. 1. Амплитуда маргинального p -состояния в точке скачка, $\psi_r = \psi_0(h_r, \kappa_c)$, наибольшая по сравнению с другими p -состояниями, существующими в области I.

На рис. 3 показано, что происходит вблизи критической кривой S_{I-II} при меньшем радиусе цилиндра, $R_\lambda = 2.5$. Видно (в соответствии с рис. 1), что в области I p -решение имеет максимальную амплитуду ψ_r на критической линии S_{I-II} ($\kappa_c = 1.022$, $\psi_r = 0.3855$, $h_r = 1.2716$, это — маргинальное μ -состояние). При $\kappa < \kappa_c$ амплитуда ψ_r быстро уменьшается ($\psi_r = 0.095$ при $\kappa = 1$ и $\psi_r \approx 0.001$ при $\kappa = 0.9$). Это позволяет говорить о том, что при

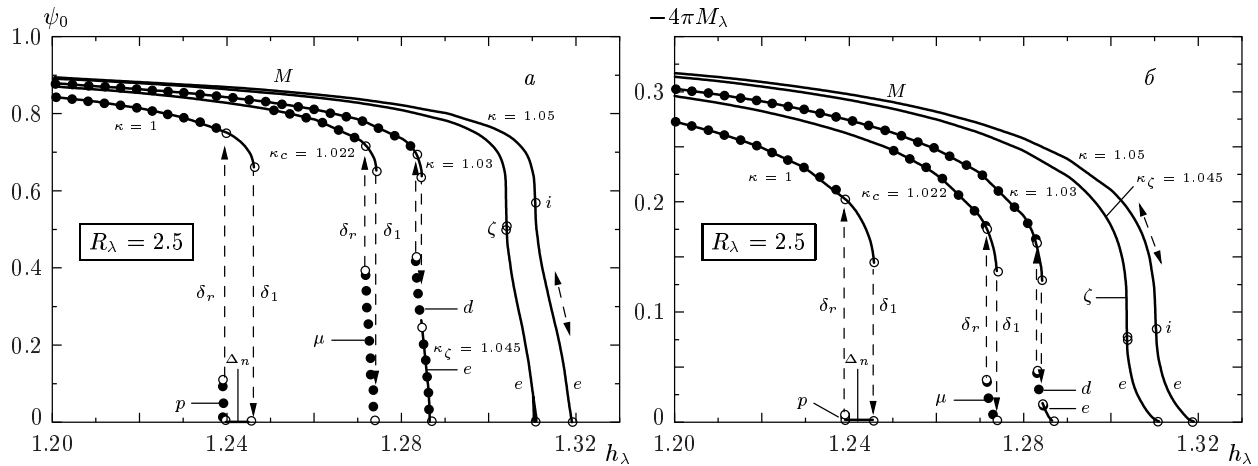


Рис. 3. Зависимость амплитуды решений (ψ_0) и намагниченности ($-4\pi M_\lambda$) в разных состояниях (обозначения пояснены в подписи к рис. 2) от поля h_λ при $R_\lambda = 2.5$ и нескольких κ (см. цифры около кривых). Сплошные кривые отвечают режиму усиления поля, точечные линии — режиму ослабления поля. При $\kappa = 1$ решения (M , p и n) принадлежат области I на рис. 1. При $\kappa_c = 1.022$ состояние-предвестник обладает максимальной амплитудой $\psi_r(h_r) = 0.3855$, $h_r = 1.2716$ (μ -состояние). Решения с $\kappa = 1.03$ лежат в области II_a (см. рис. 1); здесь имеются две особые точки, h_1 и h_r , где происходят скачки δ_1 и δ_r и возможен гистерезис. При $\kappa = \kappa_c = 1.045$ эти две особенности сливаются в точке $h_\zeta = 1.3037$, где $dM_\lambda/dh_\lambda = \infty$. При $\kappa > \kappa_c$ значения $dM_\lambda/dh_\lambda < \infty$ и гистерезис отсутствует (кривые типа i)

$\kappa < \kappa_c(R_\lambda)$ сверхпроводящее мейсснеровское состояние (с $\psi_0 \approx 1$) восстанавливается из переохлажденного нормального состояния (существующего в интервале Δ_n), как правило, путем фазового перехода «почти первого рода» (скачок δ_r происходит из p -состояния с $\psi_r \ll 1$).

При $\kappa > \kappa_c(R_\lambda)$ (в области II_a) переохлажденное нормальное состояние и соответствующий гистерезис отсутствуют, однако (см. кривую с $\kappa = 1.03$) появляются сверхпроводящие e - и d -состояния (e -ветвь в режиме усиления поля, d -ветвь в режиме ослабления поля) и становится возможным гистерезис, связанный с одновременным наличием сверхпроводящих d - и M -состояний. При $\kappa > 1.03$ интервал полей $\Delta_d = h_1 - h_r$, где существуют d -решения и возможен гистерезис (см. рис. 2*d*, e), уменьшается, и при $\kappa_c = 1.045$ он обращается в нуль. В точке $\kappa = \kappa_c$ исчезают также и скачки между ветвями ($\delta_1 = \delta_r = 0$), причем в этой точке $dM_\lambda/dh_\lambda = \infty$ (рис. 3*б*). При $\kappa > \kappa_c$ (в области II_b) на кривой намагниченности остается точка максимального спада (точка перегиба i) с конечным значением производной dM_λ/dh_λ (см. кривую с $\kappa = 1.05$). Здесь в режимах ослабления и усиления поля сверхпроводящие решения (M и e) сливаются в единую ветвь и гистерезис невозможен, однако на кривой намагниченности можно различать два участка: до точки

перегиба (M -состояние) и после (e -состояние).

Критические значения κ_c , отвечающие разным R_λ , изображены на рис. 1 точечной линией ζ . Выше этой линии (в области II_a) возможен гистерезис (имеются d -решения), ниже этой линии (в области II_b) гистерезис отсутствует. В точке G ($R_G \approx 2.28$ при $\kappa \approx 1$) критические кривые S_{I-II} и ζ сливаются, и при $R_\lambda < R_G$ имеется единая критическая кривая, выше которой (в области I) процессы разрушения (и восстановления) сверхпроводимости сопровождаются фазовыми переходами первого рода (со скачками δ_1 и δ_2), а ниже (в области II_b) имеются плавные фазовые переходы второго рода. Таким образом, при достаточно малом радиусе цилиндра все сверхпроводники I рода (с $\kappa < \kappa_c(R_\lambda)$) фактически становятся сверхпроводниками II рода.

К такому же заключению (на основе иных соображений) пришел в свое время Гинзбург [30], заметивший, что при достаточно малом радиусе цилиндра сверхпроводник I рода (с $\kappa \ll 1$) ведет себя в магнитном поле как сверхпроводник II рода. Поэтому точку G можно назвать бикритической точкой Гинзбурга. На плоскости (κ, R_λ) в точке G сходятся две критические линии, S_{I-II} и ζ , в отличие от трикритической точки Ландау, когда на плоскости параметров (H, R) сходятся вместе три критические линии, отвечающие переохлажденному, равновесно-

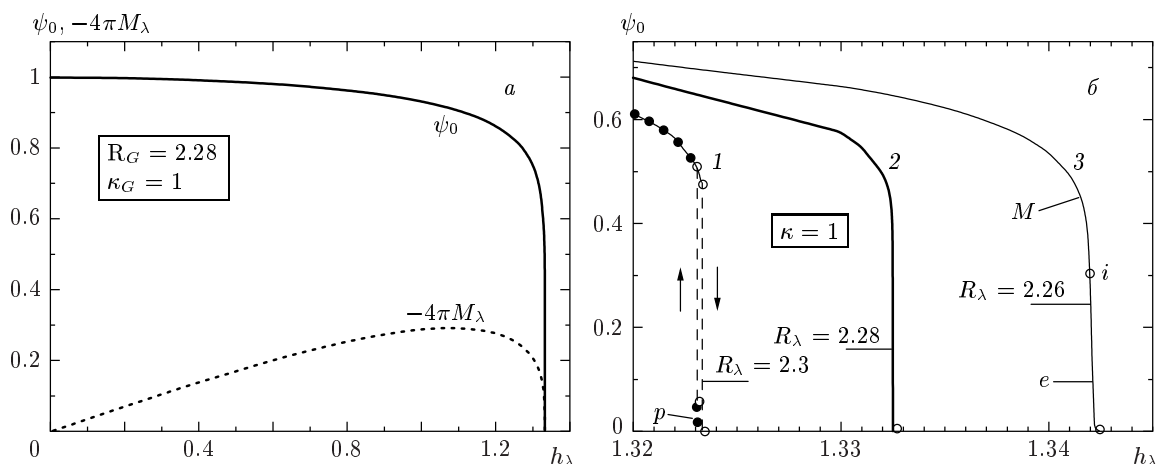


Рис. 4. а) Зависимость параметра порядка ψ_0 (сплошная кривая) и намагниченности $-4\pi M_\lambda$ (пунктирная линия) от поля h_λ в критической точке G ($\kappa_G \approx 1, R_G \approx 2.28$). б) В увеличенном масштабе показано поведение $\psi_0(h_\lambda)$ вблизи точек окончания решений для следующих значений параметров: 1 — $R_\lambda = 2.30$ ($R_\lambda > R_G$, область I), 2 — $R_\lambda = 2.28$ ($R_\lambda \approx R_G$), 3 — $R_\lambda = 2.26$ ($R_\lambda < R_G$, область II_b на рис. 1). Видно, что при $R_\lambda < R_G$ на безгистерезисной кривой имеется точка перегиба i с конечной производной и хвостом e -состояний, а при $R_\lambda > R_G$ появляются p -состояние и петля гистерезиса

му и перегретому состояниям (см., например, [7]). Нижняя часть кривой ζ (лежащая ниже точки G) определяет радиус цилиндра, при котором сверхпроводник I рода становится безгистерезисным сверхпроводником II рода.

На рис. 4а изображена зависимость параметра порядка ψ_0 (и намагниченности, $-4\pi M_\lambda$) от поля h_λ в точке G ($\kappa = 1, R_\lambda \approx 2.28$). Нетрудно убедиться, что гистерезисные d -состояния (присутствующие на рис. 3а при $R_\lambda = 2.5$) здесь уже отсутствуют (поскольку точка G лежит на безгистерезисной ζ -кривой). По той же причине должны отсутствовать гистерезисные p -состояния (точнее, μ -состояния, поскольку точка G лежит на критической линии S_{I-II}), а также и e -состояния. В результате в точке G зависимость $\psi_0(h_\lambda)$ должна иметь вид однозначной безгистерезисной кривой, состоящей только из M -состояний, но с вертикальной касательной в точке перехода, где ψ_0 обращается в нуль.

Сказанное иллюстрирует рис. 4б, где в увеличенном масштабе приведена зависимость $\psi_0(h_\lambda)$ в непосредственной близости к точке G ($R_\lambda = 2.28$, кривая 2), а также в точках $R_\lambda = 2.3 > R_G$ (кривая 1, область I) и $R_\lambda = 2.26 < R_G$ (кривая 3, область II_b).

На рис. 1–4 было изображено поведение безвихревых ($m = 0$) решений уравнений Гинзбурга–Ландау как функций параметров $\kappa, R_\lambda, h_\lambda$. Рисунок 5 иллюстрирует поведение самосогласованных решений $\psi(x)$ и $b(x)$ как функций координаты

$x = r/R$. На рис. 5а показан вид параметра порядка $\psi(x)$ для p -решений (предвестники перехода в мейсснеровское состояние в области I на рис. 1) при $R_\lambda = 6$. Маргинальное μ -решение лежит на критической кривой S_{I-II} (при $\kappa_c = 0.9663$), где оно достигает максимальной амплитуды ψ_r в точке скачка ($h_r = 0.7548, \psi_r = 0.9441$), после чего становится неустойчивым и трансформируется в M -решение (пунктирная кривая). При удалении от границы S_{I-II} в глубь области I амплитуда p -решений быстро убывает (на рис. 5а показаны лишь p -решения в точках их трансформации в M -решения; соответствующие M -решения не показаны).

На рис. 5б приведены аналогичные зависимости для распределения магнитного поля по радиусу цилиндра, $b(x) = B(x)/H_\lambda$.

Рисунок 5в иллюстрирует поведение параметра порядка $\psi(x)$ при $R_\lambda = 2.5$. Здесь маргинальному μ -решению отвечает $\kappa = 1.022$ ($h_r = 1.2716, \psi_r = 0.3855$), причем скачок из μ -состояния происходит в соответствующее ему мейсснеровское M_μ -состояние. Показано также p -решение в области I (при $\kappa = 1.0, h_r = 1.2393$) и соответствующее ему M_p -состояние. Кроме того, приведено ζ -решение, лежащее (см. рис. 1) на границе областей II_a и II_b (при $\kappa_\zeta = 1.045$ и $h_\lambda = 1.3037$, где производная $dM_\lambda/dh_\lambda = \infty$), а также решение i из области II_b (при $\kappa = 1.05$ в точке $h_\lambda = 1.311$, где намагниченность $M_\lambda(h_\lambda)$ имеет точку перегиба i с конечным

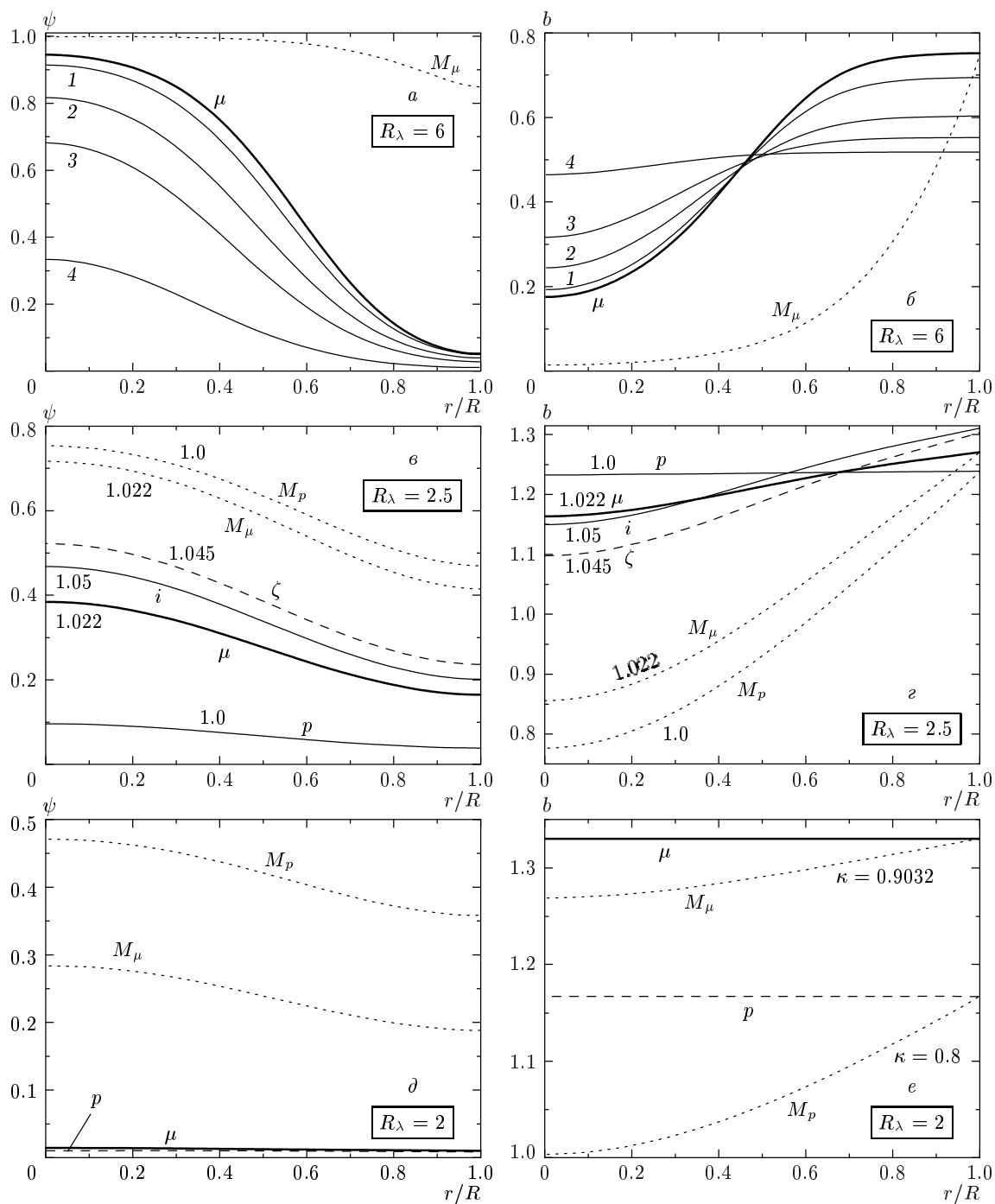


Рис. 5. Примеры координатных зависимостей решений $\psi(x)$ и $b(x)$ ($x = r/R$). *a, б)* $R_\lambda = 6$. Решения-предвестники (p) существуют в области I наряду с мейснеровскими (M) решениями. Кривая μ — маргинальное решение, возникающее при критическом значении $\kappa_c = 0.9663$ (см. рис. 2в, г) и имеющее в поле $h_r = 0.7548$ максимальную амплитуду $\psi_r = 0.9441$. При $h_\lambda = 0.7547 < h_r$ происходит скачок в M -состояние. При уменьшении $\kappa < \kappa_c$ амплитуда p -решения в точке скачка ($\psi_r = \psi(h_r)$) быстро убывает: кривая 1 — $\kappa = 0.9$, $h_r = 0.6966$, $\psi_r = 0.9135$; 2 — $\kappa = 0.8$, $h_r = 0.6044$, $\psi_r = 0.8150$; 3 — $\kappa = 0.75$, $h_r = 0.5538$, $\psi_r = 0.6784$; 4 — $\kappa = 0.72$, $h_r = 0.5193$, $\psi_r = 0.3321$; при $\kappa = 0.71$: $h_r = 0.5057$, $\psi_r < 1 \cdot 10^{-4}$. Мейснеровские решения в точках перехода h_r имеют вид $\psi(x) \approx 1$; они аналогичны M_μ и не приводятся. Рисунки 5в, г ($R_\lambda = 2.5$) и 5д, е ($R_\lambda = 2$) пояснены в тексте

значением производной dM_λ/dh_λ , см. рис. 3). В состояниях типа ζ и i гистерезис невозможен ввиду однозначности этих решений (см. рис. 3). Решения для поля $b(x)$ в случае $R_\lambda = 2.5$ приведены на рис. 5г.

Решения $\psi(x)$ и $b(x)$ в случае $R_\lambda = 2.0$ (область I) изображены на рис. 5д, е. Здесь μ -состоянию отвечает $\kappa_c = 0.9032$ ($h_r = 1.3301$), показано также p -состояние, существующее при $\kappa = 0.8$ (в точке $h_r = 1.1666$). Как видно из рис. 5а, в, д, амплитуда p -состояний быстро уменьшается при удалении от границы S_{I-II} (при этом переохлажденное n -состояние перестраивается в сверхпроводящее мейсснеровское состояние путем фазового перехода «почти первого рода»). Видно, кстати, что амплитуда p -состояния всегда максимальна в центре цилиндра, т.е. зарождение сверхпроводящего состояния происходит в объеме цилиндра, а не на его поверхности. В этой связи см. работы [31–37], где вопрос о зарождении сверхпроводимости в плоскопараллельных пластинах трактуется иначе.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основное внимание в настоящей работе уделено изучению поведения цилиндрических сверхпроводников I рода (с достаточно малыми значениями параметра κ) в произвольном магнитном поле H . Найдены самосогласованные решения уравнений Гинзбурга–Ландау для безвихревых ($m = 0$) состояний, которые характерны для цилиндров с достаточно малыми радиусами R . Определена граница S_{I-II} , разделяющая области поведения параметра порядка и намагниченности цилиндра, характерные для сверхпроводников I и II родов (рис. 1). Показано, что в сверхпроводниках I рода зависимость намагниченности от поля, $-4\pi M_\lambda(h_\lambda)$, имеет петлю гистерезиса, связанную с существованием переохлажденной нормальной фазы и появлением (в режиме ослабления поля) особых p -состояний (предвестников, см. рис. 3), предшествующих полному выталкиванию поля из образца и переходу цилиндра в мейсснеровское состояние в поле $h_r(\kappa, R_\lambda)$. Это мейсснеровское состояние разрушается скачком первого рода (в режиме усиления поля) в поле $h_1(\kappa, R_\lambda)$, а восстанавливается также скачком (в режиме ослабления поля) в поле $h_r(\kappa, R_\lambda)$. Вблизи границы S_{I-II} амплитуда зародившегося сверхпроводящего p -состояния может стать большой ($\psi \sim 1$), что, в принципе, возмож-

но заметить в эксперименте. При удалении от границы S_{I-II} в глубь области I амплитуда p -состояния быстро уменьшается, поэтому для большинства сверхпроводников I рода (с $\kappa < \kappa_c(R)$) восстановление мейсснеровского состояния ($\psi \approx 1$) происходит путем фазового перехода «почти первого рода» (скачком из p -состояния с $\psi_r \ll 1$). Форма петли гистерезиса намагниченности, ее расположение, места и величины скачков (см. рис. 2–4) сильно зависят от κ (при заданных R и температуре T), что, в принципе, может быть использовано для экспериментального определения параметров κ, R, T . По поводу учета температурной зависимости см. также [20].

Мы ограничимся здесь этими качественными замечаниями о возможной связи с экспериментом, поскольку прямые опыты по наблюдению гистерезисных (и других) явлений в длинных мезоскопических цилиндрах, по-видимому, отсутствуют. Такого рода эксперименты проводились в основном на сверхпроводящих мезоскопических дисках различной формы [23–29]; их обсуждение в рамках теории Гинзбурга–Ландау можно найти в [10–16]. Впрочем, многие теоретические результаты, как оказывается, довольно слабо зависят от выбора геометрии образца, поэтому предсказания, полученные в частном случае цилиндрической геометрии, могут иметь более общее значение, и их следует иметь в виду при обсуждении конкретных экспериментов.

В заключение поясним, почему граница S_{I-II} между сверхпроводниками I и II родов не совпадает с общепринятым критерием $\kappa_0 = 1/\sqrt{2}$ [1]. Такое разногласие обусловлено несколькими причинами. Во-первых, в [1] рассмотрен случай неограниченного сверхпроводника, а мы рассматриваем сверхпроводящий цилиндр конечного радиуса. Во-вторых, у нас сверхпроводник граничит с вакуумом, а в [1] рассмотрен случай контакта двух полубесконечных s - и n -металлов. В третьих, мы различаем два типа сверхпроводников по виду зависимости $-4\pi M_\lambda(h_\lambda)$ (т.е. по тому, имеется ли хвост на кривой намагниченности), а в [1] сверхпроводники делятся на две группы согласно другому критерию: по знаку свободной энергии $\sigma(\kappa)$ на поверхности раздела s - и n -фаз (при этом $\sigma = 0$ при $\kappa_0 = 1/\sqrt{2}$ [1]). Таким образом, несовпадение нашей границы S_{I-II} со значением $\kappa_0 = 1/\sqrt{2}$ связано с различиями в постановке задачи.

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу за интерес к работе и ценные замечания, а также В. Г. Жаркову и А. Ю. Цветкову за обсуждения. Работа поддержана РФФИ (проект № 02-02-16285).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
2. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
3. D. Saint-James and P. de Gennes, Phys. Lett. A **7**, 306 (1963).
4. D. Saint-James, Phys. Lett. A **15**, 13 (1965).
5. H. J. Fink and A. G. Presson, Phys. Rev. **151**, 219 (1966); **168**, 399 (1968).
6. F. de la Cruz, H. J. Fink, and J. Luzuriaga, Phys. Rev. B **20**, 1947 (1979).
7. H. J. Fink, D. S. McLachlan, and B. Rothberg-Bibby, in *Progress in Low Temperature Physics*, ed. by D. F. Brewer, North Holland, Amsterdam (1978), Vol. VIIb, p. 435.
8. R. Doll and P. Graf, Z. Phys. **197**, 172 (1966); **204**, 205 (1967).
9. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **79**, 1496, 1825 (1980).
10. V. V. Moshchalkov, X. G. Qiu, and V. Bruindoncx, Phys. Rev. B **55**, 11793 (1997).
11. J. J. Palacios, Phys. Rev. B **58**, R5948 (1998); Physica B **256–258**, 610 (1998); Phys. Rev. Lett. **84**, 1796 (2000).
12. P. Deo, V. Schweigert, F. Peeters, and A. K. Geim, Phys. Rev. Lett. **79**, 4653 (1997).
13. V. Schweigert, F. Peeters, and P. Deo, Phys. Rev. Lett. **81**, 2783 (1998).
14. V. Schweigert and F. Peeters, Phys. Rev. B **57**, 13817 (1998); **59**, 6039 (1999).
15. F. M. Peeters, V. A. Schweigert, B. J. Baelus, and P. S. Deo, Physica C **332**, 255 (2000).
16. V. A. Schweigert and F. M. Peeters, Physica C **332**, 266, 426 (2000).
17. G. F. Zharkov and V. G. Zharkov, Phys. Scripta **57**, 664 (1998).
18. G. F. Zharkov, V. G. Zharkov, and A. Yu. Zvetkov, Phys. Rev. B **61**, 12293 (2000).
19. G. F. Zharkov, V. G. Zharkov, and A. Yu. Zvetkov, E-print archives, cond-mat/0008217; Г. Ф. Жарков, В. Г. Жарков, А. Ю. Цветков, Кратк. сообщ. по физике ФИАН, Вып. 11, 35 (2001); Вып. 12, 31 (2001).
20. G. F. Zharkov, Phys. Rev. B **63**, 214502 (2001).
21. G. F. Zharkov, Phys. Rev. B **63**, 224513 (2001).
22. G. F. Zharkov, E-print archives, cond-mat/0109451, J. Low Temp. Phys. **128** (3/4), (2002).
23. G. Dolan, J. Low Temp. Phys. **15**, 133 (1974).
24. O. Buisson, P. Gandit, R. Rammal et al., Phys. Lett. A **150**, 36 (1990).
25. W. Braunish, N. Knauf, G. Bauer et al., Phys. Rev. Lett. **68**, 1908 (1992); Phys. Rev. B **48**, 4030 (1993).
26. A. Geim, S. Dubonos, I. Grigorieva et al., Nature **390**, 259 (1997); **396**, 144 (1998); **407**, 55 (2000); Phys. Rev. Lett. **85**, 1528 (2000).
27. L. Pust, L. Wenger, and M. Koblishka, Phys. Rev. B **58**, 14191 (1998).
28. C. Bolle, V. Aksyuk, F. Pardo et al., Nature **399**, 43 (1999).
29. F. Müller-Alinger and A. Motta, Phys. Rev. Lett. **84**, 3161 (2000).
30. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **34**, 113 (1958).
31. P. M. Markus, Rev. Mod. Phys. **36**, 294 (1964).
32. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **47**, 720 (1964).
33. H. J. Fink, Phys. Rev. Lett. **14**, 309 (1965).
34. L. J. Barnes and H. J. Fink, Phys. Lett. A **20**, 583 (1966).
35. J. Matricon and D. Saint-James, Phys. Lett. A **24**, 241 (1967).
36. P. V. Christiansen and H. Smith, Phys. Rev. **171**, 445 (1968).
37. J. Feder and D. McLachlan, Phys. Rev. **177**, 763 (1969).