

СТАТИСТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ АТОМНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ПЛАЗМЕ

Л. А. Буреева^{*а}, *В. С. Лисица*^б, *Д. А. Шувалов*^б

^а *Институт спектроскопии Российской академии наук
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

^б *Российский научный центр «Курчатовский институт»
123181, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 февраля 2002 г.

На основе квазиклассического подхода решена задача о радиационном каскаде между ридберговскими состояниями в пространстве параболических квантовых чисел, отвечающих квантованию атома (или иона) в плазменном микрополе. Рассмотрен источник заселения уровней, связанный с диэлектронной рекомбинацией электронов на ионах с остовом во внешнем электрическом поле. Найдены населенности состояний и интенсивности переходов между уровнями с малым изменением главного квантового числа. Эти «динамические» интенсивности сопоставлены со «статистическими» интенсивностями, отвечающими равномерному распределению по штарковским подуровням. Обнаружено заметное расхождение между обоими типами интенсивностей в плазме достаточно низкой плотности, отвечающей преобладанию радиационных переходов над столкновительными.

PACS: 34.80.Lx, 32.80.Dz, 32.70.Fw, 32.70.Jz

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема статистических и динамических интенсивностей атомных спектральных линий в электрическом поле, наблюдаемых в плотной или разреженной среде, возникала на первых этапах измерения эффекта Штарка и подробно обсуждается в известной монографии Бете и Солпитера [1]. Суть этой проблемы сводится к тому, что статистические интенсивности возникают в достаточно плотной среде, когда каждый акт возбуждения либо сам пропорционален статистическому весу состояний, либо (если это не так) сопровождается столкновительным «размешиванием» по статистическим весам после акта возбуждения за время, меньшее времени радиационного распада из этих состояний. В этом случае наблюдаемые интенсивности линии в целом получают суммирование интенсивностей переходов из отдельных подуровней пропорционально их статистическим весам. Динамические интенсивности, напротив, возникают при малой плотности, когда после заселения какого-либо подуровня радиационный пе-

реход происходит непосредственно из него за достаточно короткое время, когда столкновения «не успевают» установить статистическое равновесие между подуровнями. В этих условиях интенсивность излучения всей линии определяется суммой произведений интенсивностей излучения ее отдельных компонент на функцию распределения по этим компонентам, определяемую радиационным каскадом. Явный вид этой функции распределения и, следовательно, степень различия «статистических» и «динамических» интенсивностей могут быть рассчитаны для водородоподобных состояний в плазме, что и является предметом данной работы.

Отметим, что подавляющее большинство расчетов контуров спектральных линий выполнено для статистического распределения атомных населенностей, см. [2]. Исключение составляют немногочисленные расчеты контуров низковозбужденных линий многозарядных ионов, где задачи расчета населенностей и контуров линий решались совместно на основе формализма матрицы плотности. Эти расчеты, однако, очень громоздки даже для этих низковозбужденных линий и их применение к высоково-

*E-mail: bureyeva@sci.lebedev.ru

бужденным атомным состояниям вряд ли возможно.

В связи с характером заселения атомных состояний уместно указать на многомерный характер заселения состояний в пространстве квантовых чисел атома. При статистически равновесном заселении достаточно ограничиться одномерным каскадом, включающим переходы только между различными главными квантовыми числами n (n -каскад), широко используемым в атомной кинетике [3]. При малой плотности плазмы и отсутствии электрического поля естественным приближением является двумерный сферически-симметричный радиационный каскад в пространстве главного n и орбитального l квантовых чисел [4]. Существенным фактором в плазме является наличие электрического поля, создаваемого окружающими заряженными частицами, в котором уже теряется сферическая симметрия, так что радиационный каскад в пространстве главного n , электрического k и магнитного m квантовых чисел становится трехмерным.

Отметим, что прямой квантовый расчет радиационного каскада в электрическом поле становится громоздким при учете переходов между высоковозбужденными (ридберговскими) состояниями, поскольку он связан с необходимостью учета чрезвычайно большого числа матричных элементов, для которых нет строгих правил отбора в параболическом базисе, диагонализующем взаимодействие с полем. Действительно, для значений главных квантовых чисел $n = 10^2$ количество матричных элементов между соседними уровнями оказывается порядка $10^4 \times 10^4 = 10^8$. Учитывая далее, что количество таких уровней порядка 10^2 , а для учета их заселения также требуется знание порядка 10^3 матричных элементов, приходим к выводу, что общее число таких матричных элементов оказывается порядка 10^{13} — величина нереальная для ее прямого учета в цепочке каскадов. Поэтому ниже для расчета каскада используется классическое приближение, справедливое для больших значений квантовых чисел.

Электрическое микрополе плазмы, образуемое ионами плазмы, полагается ниже постоянным (статическим), тогда как электроны ответственны за столкновительное перемешивание подуровней. Статичность поля означает, что штарковское расщепление атомных состояний в нем достаточно велико по сравнению с характерной частотой его изменения, т. е. атом адиабатически «следит» за полем, сохраняя свои параболические квантовые числа k и m . Критерием статичности служит известное условие

$$g = \Delta\omega_S \tau_F \gg 1, \quad (1)$$

где

$$\Delta\omega_S = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{m_e} \frac{n(n-1)}{Z} F \sim \frac{n^2}{Z} F, \\ \tau_F^{-1} \sim \frac{v_i}{r} \sim N_i^{1/3} v_i,$$

откуда получаем

$$g = \frac{Zn^2}{Z} N_i^{2/3} \frac{1}{N_i^{1/3} v_i} = \left(\frac{N_e}{Z} \left(\frac{n^2}{v_i} \right)^3 \right)^{1/3} \gg 1.$$

Здесь Z — заряд иона, $F = ZN_i^{2/3}$ — напряженность ионного микрополя плазмы, τ_F — характерное время изменения ионного поля (N_i — плотность ионов, v_i — их тепловая скорость), m_e — масса электрона. Указанное условие отвечает, очевидно, достаточно большому значению электронной плотности плазмы N_e .

Вторым условием является «неперемешивание» заселения атомных состояний за время их радиационного распада. Это означает, что мы ориентируемся на ионы с достаточно большим зарядом Z , для которых радиационная ширина A , пропорциональная Z^4 , достаточно велика по сравнению с частотой электронных столкновений Γ , ответственных за перемешивание:

$$\Gamma \ll A.$$

Это условие соответствует, напротив, достаточно малому значению плотности и приведено, например в монографии [3]. Совокупность указанных условий ограничивает значение электронной плотности как сверху (неучет столкновений), так и снизу (статичность поля). Подставляя в указанные критерии значение электронной температуры порядка потенциала ионизации $T_e = Z^2 \text{ Ry}$, получим следующие неравенства для электронной плотности:

$$\left(\frac{3Z}{n^2} \right)^3 \ll \frac{N_e}{10^{18} \text{ см}^{-3}} \ll \left(\frac{Z}{n} \right)^7. \quad (2)$$

Например, для ионов с зарядом порядка 30 и для значений главных квантовых чисел порядка 10^2 диапазон изменения плотности равен

$$10^{12} \text{ см}^{-3} \ll N_e \ll 10^{15} \text{ см}^{-3}. \quad (3)$$

Сравнивая левую и правую части неравенств (2), находим диапазон изменения атомных параметров в нашем приближении

$$Z^4 \gg 10n. \quad (4)$$

Указанные диапазоны изменения параметров плазмы и атомных ионов относятся, очевидно, к термически равновесной плазме. Имеется, однако, значительное количество объектов, в которых многозарядные ионы и возбужденные атомы существуют при низких температурах и плотностях плазмы, где радиационный каскад играет доминирующую роль. Здесь мы отметим, прежде всего, плазму накопительных колец, а также разреженную плазму газовых туманностей.

Таким образом, ниже рассматривается заселение высоковозбужденных состояний многозарядных ионов путем радиационного каскада, возникающего под действием какого-либо источника заселения. В качестве такого источника рассматривается диэлектронная рекомбинация электронов на ионах со сложным остовом, обладающим переходами без изменения главного квантового числа n_c (переходы $\Delta n_c = 0$). Именно диэлектронная рекомбинация на таких переходах приводит к заселению высоковозбужденных состояний ионов со значением главных квантовых чисел $n = 10^2$. Водородоподобный характер таких ридберговских состояний позволяет получить универсальные распределения для интенсивностей линий, заселяемых каскадом, и найти явное соотношение между «статистическими» и «динамическими» интенсивностями этих линий.

2. ФОРМУЛЫ КРАМЕРСА В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ. ИНТЕНСИВНОСТИ РАДИАЦИОННЫХ ПЕРЕХОДОВ

Наличие внешнего электрического поля, действующего на атом в плазме или создаваемого внешними источниками, приводит к необходимости рассмотрения радиационных переходов в параболических квантовых числах в отличие от сферического базиса для свободного атома. Переход от сферического к параболическому базису определяется, как известно [5], преобразованием волновых функций с коэффициентами Клебша–Гордана:

$$\Psi(n, n_1, n_2, m) = \sum_l C(n, n_1, n_2, l, m) \Psi(n, l), \quad (5)$$

где n_1, n_2 — параболические квантовые числа, m — магнитное квантовое число, $C(n, n_1, n_2, l, m)$ — коэффициенты Клебша–Гордана.

Ниже мы будем использовать «электрическое» квантовое число k , определяющее энергетический сдвиг уровней в электрическом поле:

$$k = n_1 - n_2. \quad (6)$$

Переход к соотношениям (5), (6), аналогичным соотношениям для водородоподобного атома, происходит при достаточно большом значении электрического поля, когда можно пренебречь квантовыми дефектами уровней и считать состояния полностью перемешанными этим полем. Практически приближение полного перемешивания наступает для рассматриваемых ридберговских состояний при весьма малых значениях напряженности поля (порядка 10 В/см, см. [6]), тогда как значения напряженности плазменных микрополей на несколько порядков больше. Кроме того, квантовый дефект быстро уменьшается с увеличением орбитального момента, а статистический вес состояний с малым моментом также мал. Поэтому ниже используется приближение «смешанных» водородоподобных атомных состояний.

Прямые расчеты с волновыми функциями (5) являются, как отмечалось, чрезвычайно громоздкими. Поэтому мы будем использовать ниже квазиклассические и чисто классические приближения. В этом приближении вероятности переходов в сферическом и параболическом базисах связаны квадратами коэффициентов Клебша–Гордана, имеющих следующий вид [5]:

$$[C(n, k|l, m)]^2 = \frac{2l}{\pi [(l^2 - l_{min}^2)(l_{max}^2 - l^2)]^{1/2}}, \quad (7)$$

где

$$l_{min}^2 = \frac{1}{2} \left\{ [(n-1)^2 + m^2 - k^2] - \left[[(n-1)^2 + m^2 - k^2]^2 - 4(n-1)^2 m^2 \right]^{1/2} \right\},$$

$$l_{max}^2 = \frac{1}{2} \left\{ [(n-1)^2 + m^2 - k^2] + \left[[(n-1)^2 + m^2 - k^2]^2 - 4(n-1)^2 m^2 \right]^{1/2} \right\}$$

и мы использовали для записи электрические квантовые числа. Величины l_{max}, l_{min} определяют связь параболических и сферических переменных. Геометрический смысл такой связи непосредственно следует из рассмотрения траектории движения атомного электрона в кулоновском поле, показанной на рис. 1.

Из рис. 1 непосредственно следует связь между сферическими (орбитальным моментом) и параболическими (проекцией эксцентриситета ε орбиты) переменными:

$$\frac{k}{n} = \varepsilon \sin \alpha = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{m^2}{l^2}}. \quad (8)$$

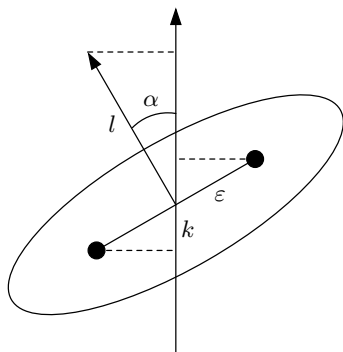


Рис. 1. Траектория движения атомного электрона в кулоновском поле и углы, определяющие связь сферических и параболических переменных, описывающих движение

Представляет интерес установить явный вид классических вероятностей радиационных переходов в параболических координатах. Для этого преобразуем известные формулы Крамерса для вероятности радиационного распада в сферическом базисе с помощью квазиклассического представления коэффициентов Клебша–Гордана (7) согласно соотношению

$$B(k, m) = \int_{l_{min}}^{l_{max}} A(n, l) [C(n, k|l, m)]^2 dl. \quad (9)$$

Прямое вычисление интегралов в (9) дает

$$B(k, m) = \frac{4Z^4}{\pi\sqrt{3}c^3} \frac{1}{n^3(n-1)|m|}, \quad (10)$$

$$B(k, m = 0) = \frac{4Z^4}{\pi^2\sqrt{3}c^3} \frac{2}{n^3} \frac{1}{[(n-1)^2 - k^2]^{1/2}} \quad (11)$$

(c — скорость света). Формулы (10), (11) являются «параболическими аналогами» формул Крамерса в сферическом базисе. Отметим, что в случае $m \neq 1$ эти вероятности не зависят от электрического квантового числа k .

Интересно сравнить расчеты в приближении Крамерса с точными численными расчетами вероятностей перехода в параболическом базисе [7]. Результаты такого сравнения представлены в табл. 1 для $m = 0$ и в табл. 2 для $m \neq 0$. Как следует из таблиц, крамерсовские вероятности обладают достаточно высокой точностью, особенно для $m \neq 0$. Отметим, что приведенные данные относятся к весьма умеренным значениям главных квантовых чисел $n = 10$.

Рассмотрим далее вероятности радиационных переходов в параболических координатах между дву-

Таблица 1. Сравнение крамерсовских вероятностей радиационного перехода с уровня $n = 10$, описываемого квантовыми числами n, k и $m = 0$, на все нижележащие уровни, с результатами численных работ [7]

k	$B(k, m = 0)$	Точное
1	0.73	0.48
3	0.77	0.57
5	0.88	0.77
7	1.15	1.17
9	2.63	2.15

Таблица 2. То же, что в табл. 1, для n, k и $m > 0$

m	$\overline{B}^{Kr}(m)$	$\overline{B}^0(m)$	\overline{B}
1	1.129	1.045	1.0871
2	0.556	0.518	0.552
3	0.363	0.341	0.366
4	0.265	0.254	0.272

Примечание. $\overline{B}^0(m)$ — квазиклассическая формула из [8], \overline{B} — квантовый расчет, $\overline{B}^{Kr}(m)$ — рассчитано по формуле (10), где было проведено усреднение по k .

мя уровнями с высокими значениями n и различными параболическими квантовыми числами. Эти вероятности определяются матричными элементами компонент радиуса-вектора атомного электрона между состояниями с определенными параболическими квантовыми числами. Соответствующие результаты описываются, как известно, формулами Гордона, выражающимися через достаточно громоздкие гипергеометрические функции. Эти формулы допускают, однако, существенные упрощения в квазиклассической области, точнее, в области больших квантовых чисел при малом их изменении [8]:

$$n \gg 1, \quad \Delta n \ll n. \quad (12)$$

В этой области массив матричных элементов, отвечающих верхним параболическим квантовым числам n_1, n_2, m и нижним параболическим квантовым числам n'_1, n'_2, m' , можно разбить на крупномасштабные и мелкомасштабные блоки. Крупный масштаб отвечает комбинации квантовых чисел

$$K = (n_1 - n_2) - (n'_1 - n'_2). \quad (13)$$

Тогда как внутри каждого блока по K интенсивности штарковских компонент описываются мелкомасштабной переменной

$$k = n'_1 - n'_2, \quad (14)$$

которую ниже мы будем считать непрерывно изменяющейся между $-n$ и n .

Интенсивность крупномасштабных блоков резко уменьшается с увеличением их номера, так что практически надо учитывать лишь первые два-три блока. Мелкомасштабная зависимость допускает простое аналитическое представление в виде степенных функций. Так, для переходов $\Delta n = 1$ ($\Delta n = n - n'$), которые будут широко использоваться ниже для иллюстрации, эта зависимость имеет вид [9]

$$X_m^{m-1} \approx b \sqrt{(n_1 + m)(n_2 + m)} \times \left(1 - \frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{b^2} \right), \quad (15)$$

$$X_m^{m+1} \approx b \sqrt{n_1 n_2} \left(1 - \frac{(n_1 + m)(n_2 + m)}{b^2} \right), \quad (16)$$

$$Z_m^m \approx b \left[\sqrt{n_1(n_1 + m)} \delta_{K,+1} + \sqrt{n_2(n_2 + m)} \delta_{K,-1} \right], \quad (17)$$

$$b = \frac{4nn'}{(n - n')^2} = 4n(n - 1).$$

Здесь надо заметить, что приведенные результаты могут быть получены также из чисто классического рассмотрения траектории движения электрона в кулоновском поле в параболических координатах, см. [10]. Действительно, «относительные амплитуды» излучения, вычисленные М. Борном [10], представляют собой двойное фурье-разложение по параболическим переменным и приведены в Приложении.

Интегрируя эти формулы по магнитному квантовому числу m , получим полные «относительные интенсивности» штарковских π - и σ -компонент для случая $\Delta n = 1$:

$$I_k^\sigma \sim \sum_m \left[(X_m^{m-1})^2 + (X_m^{m+1})^2 \right] \approx \frac{1}{3n^2} (2n^3 - 3n^2k + k^3),$$

$$I_k^\pi \sim \sum_m (Z_m^m)^2 \approx \frac{1}{6n^2} (n^3 + 3n^2k - 3nk|k| - k^2|k|).$$

Эти выражения будут использованы ниже для расчета интенсивностей спектральных линий.

3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Кинетическое уравнение для населенностей атомных состояний, описывающее радиационный каскад в пространстве квантовых чисел, представляет собой соотношение баланса вероятностей прихода в данное квантовое состояние и ухода с него в результате испускания квантов. Квантовое кинетическое уравнение является, как отмечалось, чрезвычайно громоздким ввиду большого количества переходов, которые необходимо учитывать при его решении. Для высоковозбужденных состояний можно преобразовать квантовое уравнение к классическому уравнению непрерывности, выражающему течение электронной жидкости в пространстве соответствующих квантовых чисел. Переход к такому уравнению был детально прослежен в сферических координатах, см. [4]. Соответствующие результаты совпадают с классическим кинетическим уравнением радиационного каскада, полученным впервые Беляевым и Будкером [11]:

$$\dot{n} \frac{\partial}{\partial n} f + i \frac{\partial}{\partial l} f = q(n, l). \quad (18)$$

Здесь f — функция распределения в пространстве энергии (главного квантового числа) и момента (орбитального квантового числа), определяющая населенности атомных уровней. Величина $q(n, l)$ — источник заселения, зависящий от конкретного механизма заполнения возбужденных атомных состояний при столкновениях с частицами плазмы. Изменения квантовых чисел (производные в уравнении (18)) определяются чисто классическими соотношениями для потери энергии и момента вследствие излучения в кулоновском поле [12], имеющими вид

$$\dot{n} = \frac{Z^4}{c^3 l^5} \left(3 - \frac{l^2}{n^2} \right), \quad (19)$$

$$\dot{l} = \frac{2Z^4}{c^3 n^3 l^2}. \quad (20)$$

Классическое кинетическое уравнение описывает заселение атомных состояний с достаточно высокой точностью даже для небольших значений главных квантовых чисел, как это показано в [4] путем детального сравнения с результатами квантовых расчетов, см. также [8].

Учет плазменного микрополя производится путем перехода от сферически-симметричной системы «атом в отсутствие поля» к системе «атом в поле», которая квантуется в параболических координатах. Классическая картина движения атомного электрона в электрическом поле состоит в прецессии ор-

биты вокруг направления поля с частотой, определяемой проекцией момента на направление поля (т. е. штарковским расщеплением), и медленного (по сравнению с этой частотой) уменьшения параметра кеплеровского эллипса вследствие силы радиационного трения. Структура этой силы (а следовательно, и интенсивности соответствующих радиационных переходов) определяется движением электрона по кеплеровскому эллипсу, не возмущенному электрическим полем, напряженность которого считается малой по сравнению с напряженностью кулоновского поля. При квантовом рассмотрении это находит свое выражение в том, что интенсивности расщепленных штарковских компонент в первом приближении не зависят от напряженности электрического поля и определяются известными формулами Гордона. Зависимость интенсивности излучения от поля возникает в более высоком порядке теории возмущений и приводит к малым поправкам к интенсивностям штарковских компонент, рассчитанным в работе [13]. Таким образом, в рассматриваемом приближении классическая прецессия орбиты приводит к штарковскому расщеплению состояний, тогда как интенсивности радиационных переходов по-прежнему определяются невозмущенным кеплеровским движением. Тем не менее, для того чтобы связать интенсивности радиационных переходов с определенным штарковским расщеплением, необходимо рассматривать это движение в параболических переменных, отвечающих определенной проекции дипольного момента на направление поля.

Преобразуем кинетическое уравнение (18) к параболическим переменным. Для этого нужно, очевидно, знать якобиан соответствующего преобразования. Его легко найти из приведенных выше соотношений (8) между сферическими и параболическими переменными. Связь между этими переменными имеет вид (см. также рис. 1):

$$k^2 = (n^2 - l^2) \left(1 - \frac{m^2}{l^2} \right). \quad (21)$$

С учетом такой связи классическое уравнение радиационного каскада в параболических переменных приобретает вид

$$\dot{n} \frac{\partial}{\partial n} f + \dot{k} \frac{\partial}{\partial k} f + \dot{m} \frac{\partial}{\partial m} f = q(n, k, m). \quad (22)$$

Здесь все производные (19), (20) выражены через параболические переменные путем подстановки за-

висимости $l = l(n, k, m)$, следующей из (21):

$$\dot{k} = \dot{n} \frac{\partial k}{\partial n} + \dot{l} \frac{\partial k}{\partial l} + \dot{m} \frac{\partial k}{\partial m} = Z^4 \frac{l^2(n, k, m) - m^2}{c^3} \times \frac{n^2 (3n^2 - l^2(n, k, m)) - 2l^4(n, k, m)}{n^3 l^7(n, k, m) k}. \quad (23)$$

Уравнение (22) является трехмерным в отличие от двумерного сферического случая, что обусловлено нарушением сферической симметрии атомных состояний во внешнем электрическом поле.

Правая часть уравнения (22) представляет собой источник заселения в параболических переменных. Этот источник не всегда получается из соответствующего сферического источника путем его преобразования с коэффициентами Клебша–Гордана, и его расчет представляет, как показано ниже, самостоятельную проблему. Введение характеристик производится путем приведения левой части уравнения к полной производной:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\dot{k}}{\dot{n}} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{\dot{m}}{\dot{n}} \frac{\partial}{\partial m} \right\} f = \frac{d}{dn} f = \frac{q(n, k, m)}{\dot{n}}. \quad (24)$$

Уравнение интегрируется, если переменные k и m удовлетворяют следующим характеристическим уравнениям:

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\dot{k}}{\dot{n}}, \quad \frac{\partial m}{\partial n} = \frac{\dot{m}}{\dot{n}}, \quad (25)$$

решениями которых являются функции

$$m^2 = \frac{k^2}{\ln \frac{n^2}{n^2 - k^2} - k^2 C_2}, \quad (26)$$

$$k^2 = n^2 \left(1 - C_1^{2/3} m^2 \right) + m^2, \quad (27)$$

где постоянные C_1, C_2 — характеристики уравнений. С учетом (24)–(27) функция распределения приобретает вид

$$f(n, k, m) = \varphi(n, k, m) + \int_{n+1}^{\infty} \frac{q(n', k[n', m, C_1], m[n', k, C_2])}{|\dot{n}(n', k[n', m, C_1], m[n', k, C_2])|} dn', \quad (28)$$

где $\varphi(n, k, m)$ — граничное условие.

Граничные условия при решении уравнения (22) выбраны таким образом, чтобы при устремлении n к бесконечности решение совпадало с прямым заселением, определяемым отношением источника к полной вероятности радиационного распада данного состояния. Последнее определяется, очевидно, формулами Крамерса в параболических переменных.

Таким образом, решается проблема расчета населенностей высоковозбужденных состояний при наличии известного источника заселения.

4. ИСТОЧНИКИ ЗАСЕЛЕНИЯ

Основные источники заселения высоковозбужденных состояний связаны с рекомбинацией на высоковозбужденные уровни. Что касается радиационной рекомбинации, то она может быть получена из соответствующих результатов для сферического базиса путем их преобразования с коэффициентами Клебша–Гордана аналогично тому, как это делалось в разд. 2 при получении формул Крамерса. При этом в силу нормировки коэффициентов Клебша–Гордана сохраняется полный рекомбинационный поток внутрь атома, т. е. полная скорость радиационной рекомбинации. Сохраняется также скорость рекомбинации на данный уровень, просуммированная по всем сферическим (или параболическим) квантовым числам, принадлежащим данному уровню. Различия возможны для населенностей отдельных штарковских компонент, поскольку радиационные переходы даже из статистически равновесного континуума не приводят к статвесовому заселению отдельных подуровней, см. [4, 8].

Основным источником заселения, рассматриваемым в настоящей работе, является, как указывалось, диэлектронная рекомбинация. Диэлектронная рекомбинация для переходов в ионном остове без изменения главного квантового числа n_c приводит к заселению весьма высоко возбужденных (ридберговских) состояний иона вплоть до значений главного квантового числа порядка 10^2 , см. [3].

Особенность диэлектронной рекомбинации состоит в том, что соответствующие результаты для источника заселения в параболическом базисе не могут быть получены из результатов в сферическом базисе путем прямого преобразования с коэффициентами Клебша–Гордана. Действительно, скорость диэлектронной рекомбинации представляет собой вероятность захвата налетающего электрона на некоторый дважды возбужденный уровень, умноженную на вероятность радиационной стабилизации остова иона, возбуждаемого при захвате, определяемую так называемым фактором ветвления, зависящим от отношения скорости радиационной стабилизации остова к скорости автоионизации (обратного распада) захваченного электрона [3]. Из этих двух величин только скорость автоионизации преобразуется к параболическому базису с коэффициентами Клеб-

ша–Гордана. В то же время ионный остов не испытывает заметного влияния электрического поля и его вероятность радиационной стабилизации остается постоянной в обоих базисах. Фактически, ион представляет собой часть, связанную с высоковозбужденным электроном, испытывающим сильное влияние поля, и связанную с остовом, на которую поле практически не влияет.

Таким образом, скорость диэлектронной рекомбинации иона с зарядом Z при температуре T в параболическом базисе записывается в виде

$$Q_{DR}(n, k, m) = \left(\frac{4\pi R_y}{T} \right)^{3/2} \frac{g_f}{g_i} \times a_0^3 W_R e^{-\hbar\omega_c/T + Z^2 R_y / 2n^2 T} \frac{W_A(n, k, m)}{W_R + W_A(n, k, m)}, \quad (29)$$

где $W_R = 2\omega^2 f_{ij}/c^3$ — скорость радиационной стабилизации остова, f_{ij} — сила осциллятора перехода в остове, ω_c — частота перехода в остове, a_0 — борковский радиус, g_i, g_f — статистические веса начального и конечного состояний соответственно, T — температура электронов, W_A — скорость автоионизации в параболическом базисе, связанная коэффициентами Клебша–Гордана со скоростью автоионизации в сферическом базисе:

$$W_A(n, k, m) = \int_{l_{min}}^{l_{max}} W_A(n, l) [C(n, k|l, m)]^2 dl. \quad (30)$$

Автоионизационная ширина в сферическом базисе может быть рассчитана точно с кулоновскими волновыми функциями [14]. Переходя в этом результате к большим значениям квантовых чисел, можно получить простые аналитические результаты для автоионизационной ширины. К этим же результатам можно придти чисто классическим путем, учитывая, что матричные элементы в квазиклассическом случае должны переходить в фурье-коэффициенты траектории электрона в кулоновском поле. Эти последние выражаются, как известно, через функции Бесселя [12]. Нас будут интересовать предельные формы этих функций, отвечающие сильно искривленным траекториям электрона, где он испытывает наибольшее ускорение и, тем самым, наиболее интенсивные радиационные переходы. В этой области вероятности перехода определяются одним лишь орбитальным моментом электрона и не зависят от его начальной энергии. Эта область служит основанием для так называемой «крамерсовской электродинамики», позволяющей описывать классически даже сильно неупругие переходы [15]. Формально осно-

вание для применения классических методов к расчету скоростей диэлектронной рекомбинации связано со следующими простыми соображениями. Действительно, для рекомбинации электрона необходимо, чтобы его начальная энергия E была меньше энергии возбуждения остова, равной по порядку величины $Z Ry$. Тогда, очевидно, выполнены условия

$$E \ll Z Ry \ll Z^2 Ry, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v} \gg 1, \quad (31)$$

т. е. как раз условия квазиклассичности движения электрона в кулоновском поле.

Отметим, что автоионизационная ширина однозначно связана с сечением неупругого возбуждения в пороге [3]. Для переходов $\Delta n_c = 0$ эти сечения также хорошо описываются квазиклассическим приближением, см. [16].

Используя любой из указанных методов расчета, приходим к следующему выражению для автоионизационной ширины в сферических координатах [8]:

$$W_A = \frac{f_{if}}{\pi n^3} l G \left(\frac{\omega_c(l+1/2)^3}{3Z^2} \right), \quad (32)$$

где

$$G(x) = x \left[K_{1/3}^2(x) + K_{2/3}^2(x) \right].$$

Видно, что эффективные значения орбитального момента, вносящие вклад в автоионизационную ширину, оказываются порядка

$$l_{eff} = \left(\frac{3Z^2}{\omega_c} \right)^{1/3}. \quad (33)$$

Отметим, что выражение (32) справедливо, если значения орбитального момента не слишком велики; в противном случае характер спада автоионизационной ширины оказывается другим, см. [8], однако эта область не вносит заметного вклада в каскад.

Для преобразования к параболическому базису проинтегрируем (32) с квадратом коэффициентов Клебша–Гордана аналогично (9). Результат может быть выражен через универсальную функцию

$$W_A(n, k, m) = \frac{f_{if}}{\pi n^3} I(n, k, m), \quad (34)$$

где

$$I(n, k, m) = \frac{2l_{eff}}{\pi} \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{t^2 G(t^3)}{\sqrt{(t^2 - t_{min}^2)(t_{max}^2 - t^2)}} dt,$$

$$t_{min} \approx \frac{(n-1)m}{\sqrt{(n-1)^2 + m^2 - k^2}}, \quad t_{max} \approx \frac{(n-1)m}{t_{min}},$$

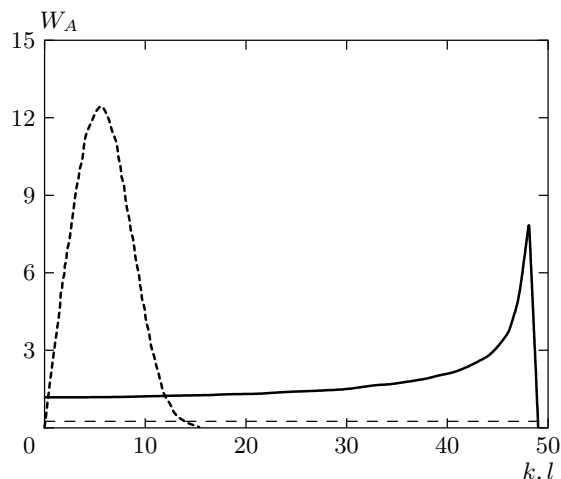


Рис. 2. Зависимости автоионизационных ширин уровня с главным квантовым числом $n = 50$ от орбитального момента l (штриховая кривая) и от электрического квантового числа k (сплошная линия) для литиеподобного иона ZnXXVIII (в отн. ед.). Нижняя прямая — радиационная ширина

$$t_{max} = \frac{l_{max}}{l_{eff}}.$$

Формула (34) является универсальным представлением автоионизационной ширины в параболических переменных для всех ионов, обладающих переходами без изменения главного квантового числа внутри остова. Зависимость ее от электрического квантового числа гораздо менее резкая, чем зависимость от орбитального квантового числа в сферическом базисе. На рис. 2 представлены зависимости автоионизационных ширин от соответствующих квантовых чисел для иона с $Z = 30$ и уровня $n = 100$. Видно, что область фазового пространства, занимаемого электрическими квантовыми числами гораздо шире области, занимаемой орбитальными квантовыми числами. Именно это обстоятельство является основой того, что диэлектронная рекомбинация в электрическом поле значительно превосходит эту рекомбинацию в отсутствие поля.

Результат (34) следует подставить в общую формулу (29) для скорости диэлектронной рекомбинации. Удобно записать скорость рекомбинации в определенное параболическое состояние, введя эффективное главное квантовое число заселяемого подуровня согласно соотношению

$$q_{DR} = \frac{B(Z, T_e)}{c^3 \left(1 + \frac{n^3}{n^{*3}} \right)}, \quad (35)$$

$$B(Z, T_e) = 2 \frac{gf}{g_i} \left(\frac{2\pi}{T_e} \right)^{3/2} \omega^2 f_{ij} e^{-\omega/T_e},$$

$$n^{*3} = \frac{c^3 l_{eff}^2}{\omega_c^2 \pi l_{max}} \left(\frac{l_{min}}{l_{eff}} \right)^2 \int_1^\infty \frac{t^2 e^{-2(l_{min}/l_{eff})^3 t^3}}{\sqrt{t^2-1}} dt. \quad (36)$$

Результат (35) определяет источник заселения определенного параболического состояния. Он должен быть подставлен в общее решение кинетического уравнения для получения населенностей уровней (функции распределения по параболическим квантовым числам).

5. НАСЕЛЕННОСТИ УРОВНЕЙ

Для расчета населенностей уровней необходимо выполнить интегрирование в формуле (28). Соответствующая характеристика, отвечающая правильным начальным условиям, совпадает с функцией l_{eff} . Нетрудно найти предельные выражения для населенностей в области квантовых чисел, малых и больших по сравнению с эффективным квантовым числом (36):

$$f(n, k, m, Z) =$$

$$= \frac{B(Z, T)}{Z^4} \left(\frac{\pi \sqrt{3} n^4 |m|}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \frac{l_{min}^5}{3} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{c^3 l_{min}^3}{\omega^2 \pi m} \int_1^\infty \frac{t^2 e^{-2(l_{min}/l_{eff})^3 t^3}}{\sqrt{t^2-1}} dt \right)^{1/4} \right),$$

$n \ll n^*, \quad (37)$

$$f(n, k, m, Z) = \frac{B(Z, T)}{Z^4} \frac{c^3}{\pi \omega^2} \times$$

$$\times \left(\frac{\pi \sqrt{3} |m|^3}{4} + \frac{1}{9} \frac{|m|^7}{(n+1)^3} \right) \times$$

$$\times \int_1^\infty \frac{t^2 e^{-2(l_{min}/l_{eff})^3 t^3}}{\sqrt{t^2-1}} dt, \quad n \gg n^*. \quad (38)$$

Расчеты во всей области изменения параболических квантовых чисел выполняются численно на основе формул (37), (38).

Рассмотрим структуру заполнения параболических состояний для литиеподобного иона цинка с зарядом ядра $Z = 30$, заселяемых диэлектронной рекомбинацией с последующим радиационным каскадом в плазме с достаточно высокой температурой. На рис. 3-5 представлены распределения населенностей уровней в пространстве электрического

Рис. 3. Зависимость функции распределения населенности уровня с $n = 100$ от квантовых чисел k и m (в отн. ед.)

Рис. 4. То же, что на рис. 3, для $n = 30$. Левая часть по шкале m — прямое заселение, правая — каскадное

k и магнитного m квантовых чисел для различных значений главного квантового числа. Для сравнения на рис. 6 показано распределение населенностей в сферическом базисе в зависимости от орбитального момента. Из сравнения приведенных данных видно, что характер распределения по магнитным

деляется множителем $n/l_{eff} \gg 1$, который составляет несколько десятков. Практически, однако, такое увеличение не наблюдается, поскольку высоковозбужденные состояния не реализуются в реальных плазменных условиях из-за их ионизации как в электрическом поле, так и вторичными столкновениями с электронами. Тем не менее фактор увеличения рекомбинации в поле может быть весьма значительным, см. [6, 17].

Соотношение между прямым и каскадным заселением в параболическом базисе также изменяется по сравнению со сферическим базисом. Так, каскадный член оказывается порядка члена прямого заселения в сферическом базисе уже при $n = 30$, тогда как в параболическом базисе — лишь при $n = 20$.

Интересно отметить, что параболическое распределение не получается из сферического прямой подстановкой характеристики $l_{min}(n, k, m)$ вместо орбитального момента. Это обусловлено отмечавшейся нетривиальностью введения источника заселения в параболических координатах.

Рис. 5. То же, что на рис. 3, для $n = 10$

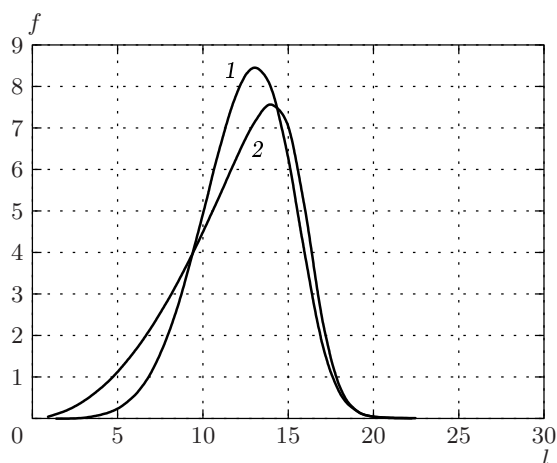


Рис. 6. Зависимости прямого (1) и каскадного (2) членов функции распределения населенностей уровня с $n = 30$ в сферическом базисе от орбитального момента l для литиеподобного иона $ZnXXVIII$ (в отн. ед.)

квантовым числам в параболическом базисе близок к распределению по орбитальным моментам в сферическом базисе. В то же время распределение по электрическому квантовому числу оказывается гораздо более широким — порядка величины главного квантового числа n . Ясно поэтому, что полная (интегральная по всем квантовым числам) населенность в параболическом базисе будет существенно больше, чем в сферическом. Это увеличение опре-

6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Найдем статистические и динамические распределения интенсивностей по параболическим квантовым числам, используя результаты, полученные выше. Статистические интенсивности I^{stat} получаются, как указывалось в разд. 1, в предположении статистического распределения населенностей по всем параболическим переменным. Рассмотрим переходы с малым изменением главного квантового числа, используя указанные в разд. 2 законы распределения интенсивностей перехода по крупно и мелко масштабным блокам. Тогда полная интенсивность линии получается суммированием индивидуальных интенсивностей по крупномасштабным блокам (обозначаемым квантовым числом K), мелко масштабным блокам (электрическим квантовым числом k) с учетом их сдвига в электрическом поле, а также по всем магнитным квантовым числам:

$$I^{stat}(n, \Delta n) = \sum_{K, k, m} I(K, n, \Delta n, k, m) \times \delta\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_F} - Kn - \Delta nk\right). \quad (39)$$

Здесь безразмерный сдвиг частоты $\Delta\omega/\omega_F$ в электрическом поле F выражен в единицах типичного расщепления в поле

$$\omega_F = 3ea_0F/2\hbar Z.$$

Суммирование в (39) проводится по всем квантовым числам с одинаковым весом, отражающим равно-распределение между штарковскими подуровнями.

Динамические интенсивности I^{dyn} получаются суммированием интенсивностей отдельных переходов, умноженными на нормированную функцию распределения (или населенность) $f(n, k, m)$ начального состояния, что отражает характер заселения штарковских подуровней радиационным каскадом:

$$I^{dyn}(n, \Delta n) = \sum_{K, k, m} I(K, n, \Delta n, k, m) \times \frac{f(n, k, m)}{\sum_{k, m} f(n, k, m)} \delta\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_F} - Kn - \Delta nk\right). \quad (40)$$

Результаты расчетов статистических и динамических интенсивностей для переходов $\Delta n = 1$, проведенных по формулам (39), (40) с учетом результатов (37), (38) для функции распределения, представлены на рис. 7а отдельно для σ - и π -компонент линий, а также на рис. 7б для суммарного распределения интенсивностей. Видно заметное различие между обоими типами интенсивностей.

Укажем, что наблюдаемые интенсивности получаются суммированием по всем магнитным квантовым числам, что отвечает, очевидно, сферически-симметричному распределению электрического поля в равновесной плазме. Вместе с тем интенсивность излучения отдельного атома, так же как и его функция распределения (населенность подуровней), существенно зависит от величины магнитного квантового числа, что отражает факт сохранения его проекции на направление поля при медленном (адиабатическом) изменении последнего.

Отметим, что при расчете контуров линий в плазме практически всегда использовались статистические интенсивности, что, как ясно из проведенного рассмотрения, отнюдь не всегда корректно.

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Результатами проведенного рассмотрения являются нахождение функции распределения (населенностей уровней) по параболическим квантовым числам в электрическом микрополе, отвечающей заселению диэлектронной рекомбинацией и радиационным каскадом, и расчет динамических интенсивностей спектральных линий, возникающих при радиационных переходах с этих уровней.

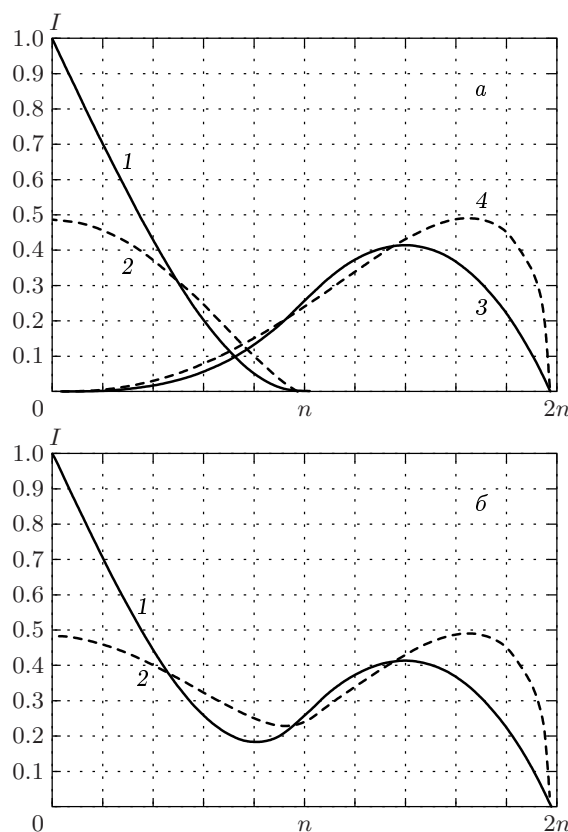


Рис. 7. Распределения интенсивности $I(\omega)$ (в отн. ед.) в электрическом поле F как функции сдвига частоты $\Delta\omega$ (в единицах $(3ea_0/2\hbar)F$) для $H_{n\alpha}$ линий при $n \gg 1$: а — разделенные по штарковским компонентам (1 — статистическая σ -компонента, 2 — динамическая σ -компонента, 3 — статистическая π -компонента, 4 — динамическая π -компонента); б — суммарное распределение (1 — статистическая суммарная интенсивность, 2 — динамическая суммарная интенсивность)

Одним из основных выводов работы является вывод об увеличении населенностей возбужденных состояний в электрическом поле по сравнению с расчетами без поля. Это может сказаться на интерпретации спектроскопических данных по абсолютным измерениям интенсивностей спектральных линий многозарядных ионов в разреженной плазме. Действительно, увеличение населенностей состояний, а вместе с ними интенсивностей линий, означает, что содержание ионов при интерпретации данных наблюдения в сферическом базисе может оказаться значительно завышенным. В действительности наблюдаемое увеличение интенсивностей обусловлено наличием плазменного микрополя.

Различие между статистическим и динамическим распределениями интенсивностей является также весьма важным при расчетах контуров спектральных линий, для которых это распределение служит исходным пунктом, см. [2]. Изменения различий контуров линий возможны, как следует из приведенного рассмотрения, в плазме умеренной плотности, когда радиационные переходы доминируют над столкновительными. Однако расчет контуров конкретных линий выходит за рамки настоящей работы. Отметим только, что в рассматриваемом случае высоковозбужденных (ридберговских) состояний, отвечающих выполнению критерия (2), штарковское расщепление значительно превосходит доплеровское.

Различие статистических и динамических интенсивностей означает также, что кинетика заселения атомных состояний является существенно многомерной в случае преобладания радиационных переходов над столкновительными в плазме достаточно низкой плотности.

Авторы благодарны Г. В. Шолину за ценные замечания и обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-02-16305) и Минпромнауки РФ по теме «Развитие методов оптической спектроскопии сверхвысокого спектрального разрешения».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем выражения для «относительных амплитуд»:

$$\begin{aligned}
 Z_{\Delta n_1 \Delta n_2}^{\Delta m=0} &\approx \frac{1}{\Delta n} \left\{ \sigma_2 J_{\Delta n_1}(\Delta n \sigma_1) J'_{\Delta n_2}(\Delta n \sigma_2) - \right. \\
 &- \left. \sigma_1 J'_{\Delta n_1}(\Delta n \sigma_1) J_{\Delta n_2}(\Delta n \sigma_2) \right\} = \\
 &= \frac{1}{\Delta n} \left\{ -\frac{K}{\Delta n} J_{\Delta n_1}(\Delta n \sigma_1) J_{\Delta n_2}(\Delta n \sigma_2) - \right. \\
 &- \left. \sigma_2 J_{\Delta n_1}(\Delta n \sigma_1) J_{\Delta n_2+1}(\Delta n \sigma_2) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left. \sigma_1 J_{\Delta n_1+1}(\Delta n \sigma_1) J_{\Delta n_2}(\Delta n \sigma_2) \right\}, \\
 X_{\Delta n_1 \Delta n_2}^{\Delta m=\pm 1} &\approx \frac{1}{\Delta n} \times \\
 &\times \left\{ \frac{n \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{n_1 n_2}} J_{\Delta n_1}(\Delta n \sigma_1) J_{\Delta n_2}(\Delta n \sigma_2) - \right. \\
 &- \left. \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{n} J_{\Delta n_1 \pm 1}(\Delta n \sigma_1) J_{\Delta n_2 \pm 1}(\Delta n \sigma_2) \right\}, \tag{П.1}
 \end{aligned}$$

где $J_p(g)$ — функции Бесселя с целочисленными индексами p ,

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{\sqrt{n_1(n_1 + m)}}{n} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{nn'}} \sqrt{(n + k - 1)^2 - m^2}, \\
 \sigma_2 &= \frac{\sqrt{n_2(n_2 + m)}}{n} = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{nn'}} \sqrt{(n - k - 1)^2 - m^2}, \tag{П.2}
 \end{aligned}$$

$$\Delta n_1 = \frac{1}{2}(\Delta n + K - \Delta m),$$

$$\Delta n_2 = \frac{1}{2}(\Delta n - K - \Delta m),$$

$$K = (n_1 - n'_1) - (n_2 - n'_2) = \Delta n_1 - \Delta n_2,$$

$$s = n_1 - n_2, \quad s' = n'_1 - n'_2 = k.$$

Легко заметить, что четным $\Delta n + K$ соответствуют π -компоненты, нечетным $\Delta n + K - \sigma$ -компоненты. Нетрудно также показать, что основной вклад в интенсивности вносят члены с малыми значениями K .

Разлагая функции Бесселя в выражениях для квадратов «относительных амплитуд» (41) по малому параметру $\Delta n^2/4nn'$, легко получить простые универсальные выражения для относительных интенсивностей π - и σ -компонент для переходов с любыми $\Delta n \ll n$:

$$\begin{aligned}
 I_{K=0}^\pi(m) &\approx Z_{K=0}^2 \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{2(\Delta n+1)} \left(\frac{\Delta n^2}{4nn'}\right)^{\Delta n} \times \\
 &\times \frac{[(n^2 - k^2)^2 - 2m^2(n^2 + k^2) + m^4]^{\Delta n/2}}{(\Delta n/2)!^2((\Delta n + 1)/2)!^2} \left(\frac{k}{n}\right)^2, \tag{П.3}
 \end{aligned}$$

$$I_{K \neq 0}^{\pi}(m) \approx Z_{K \neq 0}^2 \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{2\Delta n} \left(\frac{\Delta n^2}{4nn'}\right)^{\Delta n} \left(\frac{K}{\Delta n}\right)^2 \times \frac{[(n^2 + k^2)^2 - m^2]^{|\Delta n + K|/2} [(n^2 - k^2)^2 - m^2]^{|\Delta n - K|/2}}{(|\Delta n + K|/2)!^2 (|\Delta n - K|/2)!^2}, \quad (\text{П.4})$$

$$I_{K}^{\sigma}(m) \approx (X^{\Delta m = +1})^2 + (X^{\Delta m = -1})^2 \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{2(\Delta n - 3)} \left(\frac{\Delta n^2}{4nn'}\right)^{\Delta n} \frac{1}{\Delta n^4} \times \frac{[(n+k)^2 - m^2]^{|\Delta n - 1 + K|/2} [(n-k)^2 - m^2]^{|\Delta n - 1 - K|/2}}{(|\Delta n - 1 + K|/2)!^2 (|\Delta n - 1 - K|/2)!^2}. \quad (\text{П.5})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Гос. изд-во физ.-мат. лит., Москва (1960).
2. Г. Грим, *Уширение спектральных линий в плазме*, Мир, Москва (1978).
3. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собельман, Е. А. Юков, *Возбуждение атомов и уширение спектральных линий*, Наука, Москва (1979).
4. А. Б. Кукушкин, В. С. Лисица, *ЖЭТФ* **88**, 1570 (1984).
5. D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific. Singapore–New Jersey–Hong Kong (1980).
6. Y. Hanh, *Rep. Prog. Phys.* **60**, 691 (1997).
7. D. R. Herrick, *Phys. Rev. A* **12**, 1949 (1975).
8. Л. А. Буреева, В. С. Лисица, *Возмущенный атом*, ИздАт, Москва (1997).
9. С. А. Гуляев, *Астроном. ж.* **53**, 1010 (1976).
10. М. Борн, *Атомная механика*, Физматгиз, Москва (1936).
11. С. Т. Беляев, Г. И. Будкер, в сб.: *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, под ред. М. А. Леонтовича, изд-во АН СССР (1958), т. 3, с. 41.
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
13. A. A. Kamenski and V. D. Ovsiannikov, *J. Phys. B* **33**, 491 (2000).
14. И. Л. Бейгман, Л. А. Вайнштейн, Б. Н. Чичков, *ЖЭТФ* **80**, 964 (1981).
15. V. I. Kogan, A. B. Kukushkin, and V. S. Lisitsa, *Phys. Rep.* **213**, 1 (1992).
16. В. А. Базылев, М. И. Чибисов, *УФН* **133**, 617 (1981).
17. L. A. Bureyeva, T. Kato, V. S. Lisitsa, and C. Namba, *Phys. Rev. A* **65**, 032702 (2002).