

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ОПТИЧЕСКИХ ИЛИ АКУСТИЧЕСКИХ СВЕРХРЕШЕТКАХ (ФОТОННЫХ ИЛИ ФОНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ)

А. М. Косевич, М. А. Мамалуй*

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина
Национальной академии наук Украины
61103, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 5 марта 2002 г.

Предложена модель диэлектрической или упругой сверхрешетки, позволяющая сравнительно просто описать спектр частот электромагнитных или акустических волн. В одномерной сверхрешетке зонный частотный спектр сводится к сужающимся с ростом частоты мини-зонам (соответственно, спектр характеризуется расширяющимися с ростом частоты запрещенными полосами). Элементарный анализ спектра двумерной сверхрешетки приводит к выводу о наличии многих запрещенных полос частот и в этом случае. Указана возможность нелинейного обобщения динамических уравнений для сверхрешеток, приводящего к уравнениям типа нелинейного уравнения Шредингера на решетке. Описаны солитонные возбуждения и показан частицеподобный характер динамики солитона. Изучены и графически проиллюстрированы локальные колебания вблизи точечных дефектов сверхрешеток различной сложности. Обсуждены условия блоховских осцилляций волнового пакета в сверхрешетке, подвергнутой действию однородного внешнего поля.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Yv, 43.20, 62.65, 63.20.Dj, 68.35.Ja

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие «фотонные кристаллы» вошло в научный лексикон благодаря книге [1], в которой достаточно популярно и очень детально изложена теория диэлектрических сверхрешеток. Известно, что в области прозрачности однородный диэлектрик обладает сплошным спектром электромагнитных волн и колебаний: $\omega = ck$, где ω — частота, k — величина волнового вектора, а c — скорость света в диэлектрике, зависящая от коэффициента преломления среды. Периодическая структура, составленная из макроскопических слоев (или блоков) разных диэлектриков, приобретает новые свойства, проявляющиеся прежде всего в особенностях спектра электромагнитных колебаний в такой системе. Из динамики кристаллической решетки, которая является естественной структурой с микроскопическим периодом, следует известный вывод, что пространственная периодичность неизбежно порождает зонный ха-

рактер спектра любых собственных колебаний кристалла (механических, магнитных, электромагнитных). В определении как ширины зон допустимых частот, так и запрещенных полос (щелей) входит обратный период решетки. В кристалле со скоростью звука s эти ширины в спектре собственных механических колебаний (фононов) грубо можно оценить как $\delta\omega \sim s/a$, где a — период кристаллической решетки (межатомное расстояние). Заметим, что аналогичную формулу можно использовать для оценки ширины области прозрачности диэлектрика относительно электромагнитных волн: $\delta\omega \sim c/a$.

Наличие таких оценок связано только с фактом периодичности структуры, а не с величиной периода. Поэтому они остаются справедливыми для периодической структуры с макроскопическим периодом d , который, по определению, значительно превышает межатомное расстояние: $d \gg a$. А последнее, в частности, означает, что в области частот прозрачности однородных диэлектриков, из которых составлена сверхрешетка, возникает зонный спектр собственных электромагнитных колебаний (фото-

*E-mail: kosevich@ilt.kharkov.ua

нов), напоминающий по своей структуре спектр кристаллической решетки, но ширины зон которого определяются иной оценкой $\delta\omega \sim c/d \ll \delta\omega \sim c/a$. Это и послужило причиной появления слов «фотонные кристаллы».

Аналогично, фононным кристаллом, или акустической сверхрешеткой, называют макроскопически периодическую структуру, состоящую из чередующихся упругих материалов, различающихся упругими модулями и скоростями звука (общая теория акустики слоистых сред изложена в [2], а одна из последних публикаций по акустическим сверхрешеткам с полезной библиографией — это работа [3]). Большое число публикаций посвящено изучению частотного спектра сверхрешеток. Естественно, в общем случае этот спектр необычайно сложен и включает систему как большого числа зон собственных частот, так и щелей, отвечающих запрещенным частотам собственных колебаний. Для качественной характеристики таких спектров и иллюстрации основных их особенностей полезно использовать простые модели, учитывающие эти особенности. В настоящей работе предлагается модель сверхрешетки, позволяющая дать аналитическое описание высокочастотной части ее спектра и указать возможную реализацию интересной акустической сверхрешетки. Краткое описание этой модели и простейших возможностей ее применения опубликовано в [4].

Мы воспользовались результатами работ [5, 6], где приведены дисперсионные уравнения для одномерных диэлектрических и упругих сверхрешеток, с точностью до обозначений совпадающие с законом дисперсии квантовой частицы в одномерной модели Кронига–Пенни [7]. Рассмотрен предельный случай дисперсионного уравнения, который обычно не представлял интереса с точки зрения квантовой частицы в периодическом поле, но который оказался удобной и поучительной моделью упругой сверхрешетки. Полученный частотный спектр интересен тем, что его высокочастотная часть имеет вид системы сужающихся полос дозволённых частот, в которых с хорошей точностью аналитически вычисляется закон дисперсии. Это закон дисперсии размерно квантованных звуковых колебаний в отдельных слоях (блоках), дискретные частоты которого периодически размыты наличием слабого взаимодействия соседних блоков. Изученные дисперсионные уравнения для высокочастотного спектра могут быть легко обобщены на двумерные и трехмерные сверхрешетки с однокомпонентным волновым полем.

Упрощенному закону дисперсии в каждой мини-зоне приведено в соответствии эффективное

уравнение типа уравнения для огибающих, которое по виду совпадает с одномерным уравнением Шредингера в узельном представлении для модели сильной связи. Прделано тривиальное нелинейное обобщение, приводящее к дискретному варианту нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), допускающему солитонные решения. В одном из случаев нелинейного обобщения получена версия полностью интегрируемого НУШ на решетке, солитоны которого подчиняются гамильтоновой динамике.

Изучены колебания, локализованные у простейших дефектов одномерной сверхрешетки, когда параметр связи на одной границе (или на двух-трех границах) соседних блоков отличается от такового на всех остальных границах (стыках) блоков. При наличии локального дефекта в силу линейности уравнений колебаний в принципе возможны независимые как симметричные, так и антисимметричные относительно центра дефекта колебания. Кроме того, каждому типу колебаний может соответствовать либо синфазное, либо противофазное колебание соседних блоков. Таким образом, существует большое многообразие локальных колебаний, которым отвечают различные уравнения для локальных частот.

В заключительном разделе настоящей работы описаны блоховские осцилляции волнового пакета в сверхрешетке, параметры которой слабо зависят от координаты вдоль одномерной решетки (сверхрешетки в однородном внешнем поле). Обращено внимание на возможность экспериментального наблюдения подобного явления.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ СВЕРХРЕШЕТКИ

Изучается одномерная сверхрешетка, состоящая из периодически расположенных (вдоль оси x) слоев изотропных материалов двух видов (d_α — толщины слоев ($\alpha = 1, 2$), c_α — скорость волны в слое типа α , период сверхрешетки равен $d = d_1 + d_2$). Поле упругой (электромагнитной) волны $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, распространяющейся перпендикулярно плоскости слоев, определяется стандартным волновым уравнением. В системе изотропных блоков волны двух возможных поляризаций независимы, и можно ограничиться анализом динамических уравнений для скалярного поля $u^{(\alpha)}$:

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial t^2} - c_\alpha^2 \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^2} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1)$$

Скорость света в диэлектрике $c_\alpha = c/\sqrt{\varepsilon_\alpha}$ (c — скорость света в вакууме, ε_α — диэлектрические постоянные слоев сверхрешетки¹⁾), а в упругой среде скорость волны $c_\alpha = \sqrt{\mu_\alpha/\rho_\alpha}$ (μ_α и ρ_α — соответствующие упругие модули и плотности масс).

Сосредоточим свое внимание на упругой сверхрешетке. Тогда уравнения (1) следует решать при следующих граничных условиях: на всех границах блоков смещения $u^{(\alpha)}$ и напряжения $\sigma^\alpha = \mu_\alpha \partial u^{(\alpha)}/\partial x$ должны быть непрерывны.

Каждая из собственных мод колебаний, возникающих в периодической структуре с периодом d , характеризуется квазиволновым числом k , и собственные колебания поля в элементарной ячейке с номером n можно представить в виде

$$u_n(x) = u_0(x - nd)e^{iknd}. \quad (2)$$

Дисперсионные соотношения для рассматриваемой структуры были получены Рытовым как в случае оптической [5], так и в случае упругой [6] сверхрешетки. Они имеют следующий вид:

$$\cos kd = \cos q_1 d_1 \cos q_2 d_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2}{q_1} \right) \sin q_1 d_1 \sin q_2 d_2, \quad (3)$$

где $q_1 = \omega/c_1$, $q_2 = \omega/c_2$ (ω — частота). Как и следовало ожидать, это соотношение с точностью до обозначений совпадает с таковым, полученным Кронигом и Пенни [7] для квантовой частицы в периодическом потенциале.

Выражение (3) определяет неявную зависимость частоты от квазиволнового числа и позволяет легко описать спектр длинноволновых колебаний ($kd \ll 1$), для которых естественно получается звуковой спектр с усредненными модулями упругости $\langle \mu \rangle$ и плотностью $\langle \rho \rangle$. В работе [6] было показано, что $\langle \rho \rangle d = \rho_1 d_1 + \rho_2 d_2$, $d/\langle \mu \rangle = d_1/\mu_1 + d_2/\mu_2$. Исходя из такого определения $\langle \mu \rangle$, в котором содержатся лишь соотношения d_α/μ_α , представляется интересным рассмотреть предельный случай, который не является физически интересным в случае динамики квантовой частицы в периодическом потенциале, но который в приложении к сверхрешетке позволяет продемонстрировать наиболее характерные особенности ее спектра: $d_2 \rightarrow 0$ и

$\mu_2 \rightarrow 0$ при $d_2/\mu_2 = M = \text{const}$. При этом $d_1 \rightarrow d$, $k_2 d_2 = \omega d_2/c_2 = \sqrt{\rho_2 d_2} \omega \sqrt{d_2/\mu_2} \rightarrow 0$. Тогда закон дисперсии системы определяется следующим уравнением:

$$\cos kd = \cos z - Qz \sin z, \quad (4)$$

где $z = q_1 d = \omega d/c_1$, $Q = \rho_2 \mu_1 M/2\rho_1 d$. Полезно отметить, что уравнение (4) определяет закон дисперсии упругой сверхрешетки, составленной из периодически повторяющихся упругих блоков длиной d с параметрами μ_1 и c_1 , на границах которых нормальные напряжения непрерывны $[\sigma]^\pm = 0$ (т. е. $[\partial u/\partial x]^\pm = 0$), а упругие смещения претерпевают скачок, пропорциональный величине напряжений на границах блоков:

$$[u]^\pm = Q \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Набор подобных граничных условий при фиксированном Q используется при описании капиллярных явлений в твердых телах [8] или плоских дефектов в кристаллах [9]. Если параметр Q мал, то изучаемая система сводится к периодическому ряду упругих участков, слабо связанных между собой. Возможной реализацией подобной сверхрешетки может служить, например, цепочка пьезоэлектрических слоев, связанных между собой тонкими вакуумными прослойками. Тогда связь упругих колебаний в соседних участках осуществлялась бы электромагнитными колебаниями в вакуумных щелях. Нетрудно найти пьезоэлектрик, структура которого допускает как конструирование такой периодической системы слоев, так и независимое распространение вдоль сверхрешетки одной электроупругой волны определенной поляризации.

Вернемся к соотношению (4). Допустимые частоты колебаний сплошного спектра изучаемой системы могут быть качественно определены с помощью графического анализа уравнения (4), что иллюстрирует рис. 1: если величина $\cos z - Qz \sin z$ пробегает значения между ± 1 , корни уравнения пробегает значения в интервалах, отмеченных на оси абсцисс.

Заметим, что с ростом z разрешенные частоты локализуются в сужающихся интервалах вблизи значений $k_1 d = \pm m\pi$, где m — большое целое число²⁾. При условии $m^2 Q \gg 1$ закон дисперсии в m -й зоне легко находится.

¹⁾ Как показано в [4], спектр данной системы состоит из узких полос, внутри каждой из которых зависимостью ε_α от частоты можно пренебречь. Поэтому каждой полосе разрешенных частот можно поставить в соответствие диэлектрическую постоянную, характерную для соответствующей частоты.

²⁾ На сужение зон с ростом частоты обращалось внимание и ранее; в частности, это отмечено в [3]. Однако с последним находится в противоречии утверждение [10], что ширины зон в среднем не изменяются с ростом частоты.

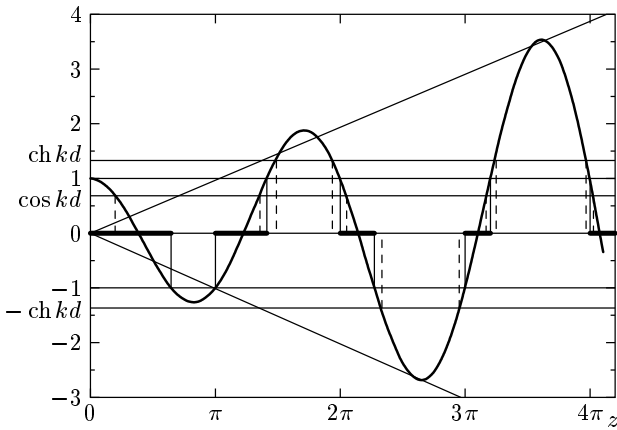


Рис. 1. Графическое решение уравнения (4): если величина $\cos z - Qz \sin z$ пробегает значения между ± 1 , корни уравнения, определяющие зоны сплошного спектра сверхрешеток, пробегают значения в интервалах, отмеченных на оси абсцисс

Действительно, вблизи нечетных $m = 2p + 1$ (см. на окрестность точки $z = 3\pi$ на рис. 1) можно с достаточной точностью написать ($c = c_1$)

$$\begin{aligned} \cos kd &= -1 + Qm\pi(z - m\pi) = \\ &= -1 + \frac{m\pi d}{c} Q \left(\omega - \frac{m\pi c}{d} \right), \end{aligned}$$

из чего следует

$$\omega = m\omega_0 + \frac{\Omega}{m}(1 + \cos kd), \quad (6)$$

где $\omega_0 = \pi c/d$, $\Omega = c/(\pi Qd)$. Аналогично, вблизи четных $m = 2p$ (см. на окрестность точки $z = 4\pi$ на рис. 1) можно записать

$$\begin{aligned} \cos kd &= 1 - Qm\pi(z - m\pi) = \\ &= 1 - \frac{m\pi d}{c} Q \left(\omega - \frac{m\pi c}{d} \right), \end{aligned}$$

из чего следует

$$\omega = m\omega_0 + \frac{\Omega}{m}(1 - \cos kd). \quad (7)$$

Объединяя (6) и (7), получаем законы дисперсии в m -й полосе:

$$\omega = m\omega_0 + \frac{2\Omega}{m} \begin{cases} \sin^2(kd/2), & m = 2p, \\ \cos^2(kd/2), & m = 2p + 1. \end{cases} \quad (8)$$

Легко сообразить, что выражение (8) — это спектр размерного квантования фононов в слое толщиной d , уровни которого за счет малой «прозрачности»

границ между слоями расщепились в мини-зоны. В работе [10], где в очередной раз было выведено дисперсионное соотношение (3), сделана попытка проанализировать характер зонного спектра сверхрешетки. Однако в предельном случае, близком к рассмотренному в настоящей публикации, их анализ неудовлетворителен, так как приводит к заключению, что ширины мини-зон не изменяются с ростом частоты.

Несколько замечаний, касающихся предложенной реализации упругой сверхрешетки в виде периодической стопки пьезоэлектрических слоев, разделенных тонкими вакуумными прослойками. При нормальном падении поперечной электромагнитной волны из вакуума на слой пьезоэлектрика статический пьезоэффект не «срабатывает» и необходимо учитывать релятивистский электромеханический эффект, пропорциональный малому параметру $(s/c)^2$. Дело в том, что интересующая нас мода колебаний пьезоэлектрика состоит в основном из упругой компоненты с небольшим (в меру параметра $(s/c)^2$) вкладом электромагнитной компоненты, а взаимодействие соседних слоев осуществляется электромагнитными колебаниями. Поэтому связь упругих колебаний в соседних пьезоэлектрических слоях чрезвычайно мала. В результате ширины мини-зон, для которых могут быть получены законы дисперсии типа (8), оказываются исчезающе малы. Следовательно, подобная сверхрешетка должна обладать практически дискретным спектром частот упругих волн, обусловленным резонансным прохождением электромагнитных волн через пьезоэлектрик и отвечающим спектру размерно квантованных стационарных упругих колебаний в отдельном слое. Реальное размытие дискретных частот в такой сверхрешетке будет связано не с возникновением регулярных мини-зон, а с процессами другой физической природы: неопределенностью волнового числа в сверхрешетке конечной длины, точностью строгой ее периодичности и диссипативными процессами, приводящими к затуханию звука в пьезоэлектрике.

Предложенная модель одномерной сверхрешетки и описанный вывод закона дисперсии (8) легко обобщаются на двумерный и трехмерный случаи, если изучаемое волновое поле однокомпонентно. Последнее условие элементарно выполняется для двумерной сверхрешетки, состоящей из блоков квадратного сечения, разделенных двумя взаимно перпендикулярными системами граничных плоскостей. В сечении такая сверхрешетка состоит из паркета квадратных участков упругих сред, разделенных плоско-

стями (или прямыми на плоскости $z = 0$) $x = n_1d$, $y = n_2d$, где $n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Если упругая волна поляризована вдоль оси z , то граничные условия на двух системах граничных плоскостей формулируются независимо в виде соотношений типа (5), где левые части следует понимать как $\omega = q_1c$, либо $\omega = q_2c$. Например,

$$q_1c = m_1\omega_0 + \frac{2\Omega}{m_1} \sin^2 \frac{k_x d}{2}, \quad m_1 = 2p_1, \quad (9)$$

либо

$$q_2c = m_2\omega_0 + \frac{2\Omega}{m_2} \cos^2 \frac{k_x d}{2}, \quad m_2 = 2p_2. \quad (10)$$

Закон дисперсии упругой волны в каждом блоке очевиден:

$$\omega^2 = (q_1^2 + q_2^2)c^2, \quad (11)$$

поэтому в предельном случае $m_1Q, m_2Q \gg 1$ законы дисперсии в высоколежащих полосах разрешенных частот имеют следующий вид:

1) $m_1 = 2p_1, m_2 = 2p_2$

$$\omega_{m_1 m_2}(\mathbf{k}) = \omega_0 \sqrt{m_1^2 + m_2^2} + \frac{2\Omega}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \left[\sin^2 \frac{k_x d}{2} + \sin^2 \frac{k_y d}{2} \right], \quad (12)$$

2) $m_1 = 2p_1 + 1, m_2 = 2p_2 + 1$

$$\omega_{m_1 m_2}(\mathbf{k}) = \omega_0 \sqrt{m_1^2 + m_2^2} + \frac{2\Omega}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \left[\cos^2 \frac{k_x d}{2} + \cos^2 \frac{k_y d}{2} \right], \quad (13)$$

3) $m_1 = 2p_1, m_2 = 2p_2 + 1$

$$\omega_{m_1 m_2}(\mathbf{k}) = \omega_0 \sqrt{m_1^2 + m_2^2} + \frac{2\Omega}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \left[\sin^2 \frac{k_x d}{2} + \cos^2 \frac{k_y d}{2} \right], \quad (14)$$

4) $m_1 = 2p_1 + 1, m_2 = 2p_2$ — аналогично (14) с заменой $m_1 \rightarrow m_2, k_x \rightarrow k_y$.

Спектр частот, описываемый формулами (12)–(14), эквивалентен спектру квантовой частицы в периодической двумерной структуре в модели сильной связи. Обобщение этого результата на прямоугольную двумерную сверхрешетку очевидно: возникнут два периода d_x и d_y и появятся два параметра Q_x и Q_y (или Ω_x и Ω_y).

Очевидно также обобщение полученного результата на случай трехмерного скалярного волнового

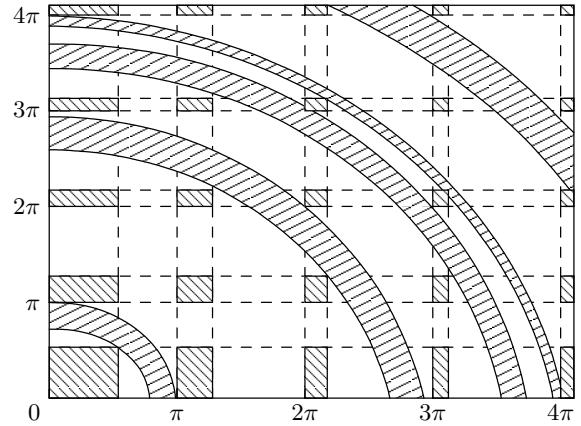


Рис. 2. Схематическое изображение взаимного расположения запрещенных и разрешенных зон в случае двумерной сверхрешетки при условии равных периодов в двух взаимно перпендикулярных направлениях (по обеим осям откладывается $q_1d = q_2d = (\omega/c)d$). Заштрихованные прямоугольные и квадратные участки, в которых могут находиться точки (q_1, q_2) , отвечают разрешенным частотам (см. выражение (11)). Заштрихованные полосы соответствуют запрещенным зонам спектра двумерной квадратной сверхрешетки

поля (это обобщение совпадает с трехмерной моделью сильной связи).

Основной особенностью спектра частот рассмотренной нами одномерной сверхрешетки является наличие широких интервалов запрещенных частот собственных колебаний (щелей в сплошном спектре). Проблема существования интервалов запрещенных частот ω в двумерной и трехмерной сверхрешетках решается не столь очевидным образом. Тем не менее легко убедиться, что по крайней мере в двумерной сверхрешетке такие интервалы имеются.

Выбрав двумерную прямоугольную сетку координат, отложим по одной из осей величину $q_1d = (\omega/c)d$, отмечая границы интервалов разрешенных соотношениями (12)–(14) частот. Прделаем аналогичную процедуру с $q_2d = (\omega/c)d$ для второй оси, после чего проведем систему параллельных координатным осям прямых (см. схематический рис. 2). Эти прямые выделяют на плоскости прямоугольные или квадратные участки, в которых могут находиться точки (q_1, q_2) , отвечающие в соответствии с (11) разрешенным частотам. На том же рисунке широкими дугами отмечены полосы запрещенных частот — щелей в сплошном спектре.

3. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В СВЕРХРЕШЕТКЕ

Вернемся к уравнению (8) и еще раз отметим, что это дисперсионное уравнение совпадает с законом дисперсии «блоховской» квазичастицы ($\psi_m(z+d) = \psi_m(z) e^{ikd}$), отвечающим в модели сильной связи следующему уравнению Шредингера:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = m\omega_0 \psi_n \pm \frac{\Omega}{2m} (2\psi_n \pm \psi_{n+1} \pm \psi_{n-1}), \quad (15)$$

где выбор знака зависит от номера зоны: верхний знак соответствует $m = 2p$ и нижний знак — $m = 2p + 1$. С точки зрения изучения спектра сверхрешетки уравнение (15) представляет собой уравнение для огибающей колебаний сверхрешетки, взятой в дискретных точках, и позволяет описать динамику пакета волн, отвечающих допустимым высоким частотам. Как обычно, порядок производной по времени в уравнениях для огибающей понижается.

Дискретное уравнение Шредингера (15) можно трактовать как динамическое уравнение для колебаний сверхрешетки в узельном представлении. Это позволяет нам элементарно перейти к обобщению наших исследований на предмет нелинейных возбуждений в сверхрешетке. Следуя схеме учета основных нелинейных эффектов в оптике, положим, что скорость волны c зависит от интенсивности колебаний:

$$c = c_0 + \gamma |\psi|^2, \quad \gamma = \text{const}. \quad (16)$$

Зависимость c от $|\psi|^2$ следует учитывать только в первом слагаемом в правой части уравнения (8). Тогда колебания в m -й полосе частот (для определенности $m = 2p$) будут подчиняться уравнению

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = m\omega_0 \psi_n - \frac{\Omega}{2m} (2\psi_n - \psi_{n+1} - \psi_{n-1}) + mg |\psi_n|^2 \psi_n, \quad (17)$$

где g — новый параметр, $g = \pi\gamma/d$.

Аналог уравнения (17) эксплуатируется в нелинейной оптике системы волноводов [11]. Среди явлений, изучаемых в нелинейной оптике и описываемых уравнением (17), наиболее интересным представляется существование и динамика оптических солитонов. Следовательно, можно использовать уравнение (17) для описания солитонных возбуждений в сверхрешетке. К сожалению, уравнение (17) не принадлежит к классу полностью интегрируемых и не имеет точных солитонных решений. И только переход к континуальному пределу, когда уравнение в конечных разностях (17) сводится к обычному НУШ

в частных производных, позволяет строить точные солитонные решения. Именно такого типа уравнение использовано в работе [12] для изучения нелинейных локализованных волн в периодических средах. Но в нашем случае используемое приближение узких полос с законами дисперсии (8) не позволяет перейти к такому пределу.

Однако в изучаемой сверхрешетке возможны иные проявления нелинейности. Важным моментом построения предложенной модели сверхрешетки является соотношение (5), в котором фигурирует феноменологический параметр Q , определяющий, в свою очередь, параметр Ω в (15). Этот параметр может зависеть от интенсивности колебаний. Допустим, что для параметра Q имеет место зависимость типа (16). Используем такое допущение, но предварительно упростим уравнение (15). Интересуясь случаем $m^2 Q \gg 1$, оставим в правой части этого уравнения только первые неисчезающие по параметру $1/(m^2 Q)$ слагаемые каждого типа:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = m\omega_0 \psi_n + \frac{\Omega}{2m} (\psi_{n+1} + \psi_{n-1}). \quad (18)$$

После этого вернемся к сформулированному допущению типа (16):

$$\Omega = \Omega_0 (1 + g_0 |\psi_n|^2), \quad g_0 > 0. \quad (19)$$

В результате, не накладывая на функцию ψ_n жестких требований нормировки, перепишем (18) в виде

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = m\omega_0 \psi_n + \frac{\Omega_0}{2m} (1 + |\psi_n|^2) (\psi_{n+1} + \psi_{n-1}). \quad (20)$$

Известно, что (20) при $\Omega_0 < 0$ есть точно интегрируемая версия НУШ на решетке [13, 14].

Предположим, что $Q < 0$, и введем новое безразмерное время $\tau = |\Omega_0|t/(2m)$; тогда (20) запишется в стандартной форме:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial \tau} = m\omega_* \psi_n - (\psi_{n+1} + \psi_{n-1})(1 + |\psi_n|^2), \quad (21)$$

где $\omega_* = 2m^2\omega_0/\Omega_0 = 2\pi^2 m^2 |Q|$.

Рассмотрим стационарное решение уравнения (21) типа

$$\psi_n(\tau) = \phi_n^\omega(\tau) \exp\{ikn - i\omega\tau - i\Theta\}, \quad (22)$$

где $\phi_n^\omega(\tau)$ — вещественная функция, а Θ — постоянная произвольная фаза. Солитонным решениям отвечает функция ϕ_n , исчезающая на бесконечности: $\phi_n = 0$ при $n \rightarrow \pm\infty$.

Если уравнение (21) имеет стационарное локализованное решение, перемещающееся вдоль цепочки со скоростью V , то следует ожидать, что аналогично ситуации с континуальным нелинейным уравнением Шредингера его вещественная амплитуда имеет вид

$$\phi_n(t) = \phi(n - Vt). \quad (23)$$

На этой основе в работе [15] предложено такое решение:

$$\phi(x) = A \operatorname{cn}[\beta(x - x_0, \kappa)], \quad (24)$$

где $A = \text{const}$, а $\operatorname{cn}(z, \kappa)$ — эллиптический косинус Якоби, параметр κ которого удовлетворяет неравенству $0 < \kappa < 1$. При $\kappa \ll 1$ эллиптический косинус переходит в тригонометрический косинус и уравнение (24) превращается в решение линейного уравнения. В обратном предельном случае ($\kappa \rightarrow 1$) имеет место переход $\operatorname{cn}(z, \kappa) \rightarrow 1/\operatorname{ch} z = \operatorname{sech} z$ и мы получаем решение

$$\psi_n(t) = \operatorname{sh} \beta \operatorname{sech}[\beta(n - Vt - x_0)] \times \exp(ikn - i\omega t + i\theta), \quad (25)$$

где x_0, θ — константы, а параметры β, V, ω и k связаны двумя формулами:

$$\omega = \omega_* - 2 \operatorname{ch} \beta \cos k, \quad (26)$$

$$V = \frac{2}{\beta} \operatorname{sh} \beta \sin k. \quad (27)$$

Итак, при определенном знаке параметра Q ($Q < 0$) в сверхрешетке возможно распространение солитонных возбуждений, перемещающихся с постоянной скоростью. В работе [16] показано, что движение солитона, описываемого решением (25), подчиняется гамильтоновой динамике. В частности, движение солитона регулируется тремя интегралами движения: его массой (играющей роль нормы волновой функции)

$$N = \sum_n \ln(1 + |\psi_n|^2), \quad (28)$$

энергией $\mathcal{H} = E + \Omega N$, где

$$E = - \sum_n (\psi_n \psi_{n+1}^* + \psi_n^* \psi_{n+1}), \quad (29)$$

и полным количеством движения солитона (отлича-

ющимся от полного квазиимпульса, который не сохраняется³⁾)

$$S = -i \sum_n (\psi_n^* \psi_{n+1} - \psi_n \psi_{n+1}^*) = -i \sum_n \psi_n^* (\psi_{n+1} - \psi_{n-1}). \quad (30)$$

Если солитонное решение действительно имеет вид (25), то интегралы движения инвариантны относительно непрерывных трансляций, поэтому их можно вычислить путем интегрирования, заменив в (28)–(30) суммы интегралами: $\sum_n \dots = \int dn \dots$. Тогда окажется, что

$$N = 2\beta, \quad E = -4 \operatorname{sh} \beta \cos k, \quad S = 4 \operatorname{sh} \beta \sin k. \quad (31)$$

Следовательно, три из четырех параметров β, V, ω и k определяются фиксированными интегралами движения, а четвертый (квазиволновое число k) остается свободным. Мы видим, что ширина солитона $\lambda = 1/\beta$ определяется только величиной N , а энергия солитона и его скорость являются периодическими функциями k (как и положено в однородной периодической структуре).

Конечно, следует понимать, что мы обсудили свойства точного солитонного решения приближенного уравнения, возникшего путем упрощения исходного НУШ на решетке (16), которое само справедливо в меру справедливости условия $m^2|Q| \gg 1$. Возмущения, обусловленные этим приближением, будут деформировать и, возможно, со временем разрушать солитонное решение. Однако для высокочастотных полос наличие большого параметра $m^2|Q| \gg 1$ гарантирует малость этих возмущений и подобные солитоны могут существовать, во всяком случае, как долгоживущие локализованные возбуждения сверхрешетки.

4. ЛОКАЛЬНЫЕ ДЕФЕКТЫ В СВЕРХРЕШЕТКАХ

Мы изучили спектр собственных колебаний сверхрешеток, характеризующийся серией сужаю-

³⁾ Оператор квазиимпульса выражается через оператор трансляции на один период одномерной цепочки \hat{T} формулой $\hat{q} = -i \ln \hat{T}$, поэтому полный квазиимпульс Q можно представить в виде суммы

$$Q = \sum_n \psi_n^* \hat{q} \psi_n = i \sum_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} (\psi_n^* \psi_{n+m} - \psi_n \psi_{n+m}^*).$$

Эта величина не является интегралом движения в ангармонической цепочке, описываемой уравнением (21).

щихся полос разрешенных частот и обладающий (в общем случае) запрещенными зонами (щелями в сплошном спектре). Рассмотрим теперь возможность возникновения колебательных состояний в запрещенных зонах. Такие колебания отвечают экспоненциально убывающим (увеличивающимся) с номером n решениям типа $u_n \propto \exp(\mp \kappa n d)$ ($k = i\kappa$), либо $u_n \propto (-1)^n \exp(\mp \kappa n d)$ ($k = i\kappa + \pi$). Очевидно, что подобные состояния могут иметь физический смысл только на координатной полуоси при условии, что выбирается исчезающее на бесконечности решение, отражающее некоторые граничные условия в начале координат.

Для решений первого типа ($k = i\kappa$) зависимость параметра κ от частоты находится из соотношения

$$\operatorname{ch} \kappa d = \cos z - Qz \sin z > 1, \quad (32)$$

а для второго типа ($k = i\kappa + \pi$) — из соотношения

$$-\operatorname{ch} \kappa d = \cos z - Qz \sin z < -1. \quad (32a)$$

Решения первого типа соответствуют частотам в интервалах $(2p - 1)\pi < z < 2p\pi$, а второго типа — в интервалах $2p\pi < z < (2p + 1)\pi$ (см. рис. 3).

Ясно, что подобные ситуации на полуоси возникают как следствие локального нарушения строгой периодичности в системе, т. е. наличия дефектов периодического упорядочения. Простейшим дефектом является отличие физических условий на одной из

гранич упругих блоков от таковых на остальных границах.

Допустим, граничное условие (5) на одном из стыков характеризуется параметром Q^* , отличным от Q : $Q^* = Q + \xi Q$. Пусть на границе стыков с номером $n = 0$ условие (5) имеет вид

$$[u_{n=0}]_+^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) Q^* \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right). \quad (33)$$

Будем интересоваться решением, антисимметричным относительно выбора знака n , и представим смещения u_n при положительных n в виде

$$u_n(x, t) = w(x - nd) \exp\{-\kappa nd - i\omega t\}, \quad n \geq 0, \quad (34)$$

тогда упругие напряжения определяются выражениями

$$\sigma_n(x, t) = \mu_1 w'_x(x - nd) \exp\{-\kappa nd - i\omega t\}.$$

Функцию $w(x)$ удобно задать следующим образом:

$$w(x) = a_0 \cos(qx - \theta), \quad (35)$$

где $q = \omega/c$ и $\theta = \text{const}$ — постоянная фаза.

Из граничных условий при $n = 0$ следует соотношение

$$e^{-\kappa d} = \cos z - Q^* z \sin z, \quad z = qd. \quad (36)$$

Комбинируя (36) с (32), (32a), получаем уравнение

$$\operatorname{sh} \kappa d = \xi Q z \sin z, \quad \xi = \frac{Q^* - Q}{Q}. \quad (37)$$

Уравнение (37) совместно с (32), (32a) определяет частоты колебаний, локализованных на таком дефекте. Локальные частоты определяются точками пересечения графиков правых частей (32), (32a) с графиком функции $f(z) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 z} = [1 + (\xi Q z)^2 \sin^2 z]^{1/2}$, определяемой условием (37). Поскольку $\kappa > 0$, решениям соответствуют частоты (значения z), определяемые уравнением⁴⁾

$$\cos z - Qz \sin z = \operatorname{sign}\{\xi Q z \sin z\} \times \sqrt{1 + (\xi Q z)^2 \sin^2 z}. \quad (38)$$

Схема графического решения уравнения (38) представлена на рис. 3. Изображены кривые, отвечающие левой и правой частям формулы (38), и указаны точки их пересечений, дающие искомые частоты.

Отметим, что таковые существуют при любом знаке параметра ξ . Частоты локальных колебаний,

⁴⁾ Уравнение (37) для локальных частот является предельным случаем более общего соотношения, полученного в [10].

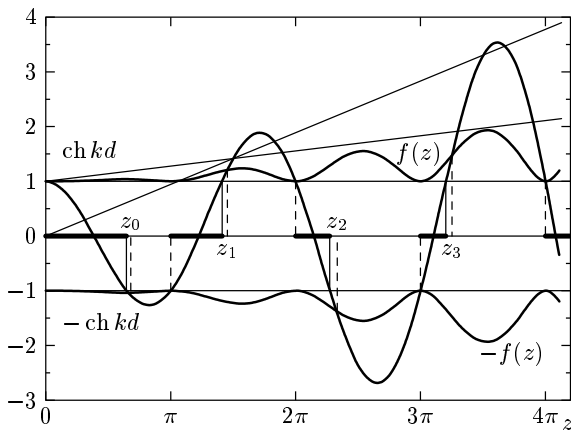


Рис. 3. Графическое нахождение корней уравнения (38): корни z_0, z_2, \dots и z_1, z_3, \dots отвечают двум типам колебаний (соответственно, решения типа $u_n \propto \exp(\mp \kappa n d)$, $k = i\kappa$ и $u_n \propto (-1)^n \exp(\mp \kappa n d)$, $k = i\kappa + \pi$). Частоты локальных колебаний, отвечающих разным знакам ξ , расположены в чередующихся интервалах между $z = 2p\pi$ и $z = (2p + 1)\pi$ ($p = 0, 1, 2, \dots$)

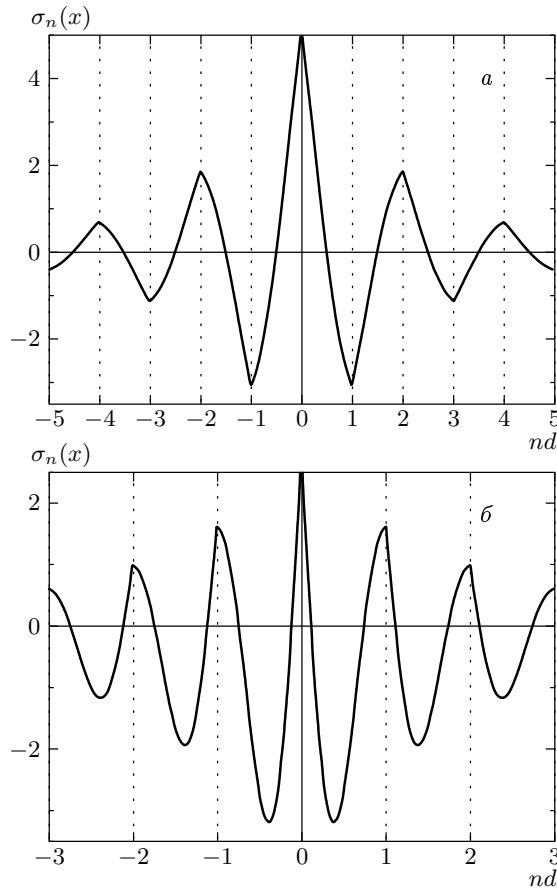


Рис. 4. Распределение напряжений вблизи дефекта сверхрешеток, сосредоточенного на одном стыке ($n = 0$). Схемы *a* и *b* отвечают двум типам локализованных состояний, соответствующих корням z_0, z_2, \dots и z_1, z_3, \dots на рис. 3

отвечающих разным знакам ξ , расположены в чередующихся интервалах между $z = 2p\pi$ и $z = (2p+1)\pi$ ($p = 0, 1, 2, \dots$). При этом локальные колебания, для которых $(2p - 1)\pi < z < 2p\pi$ (точки z_1 и z_3 на рис. 3), описываются монотонно убывающей с ростом номера элементарной ячейки функцией, а колебания с частотами $2p\pi < z < (2p + 1)\pi$ (точки z_0 и z_2 на рис. 3) описываются функцией, пропорциональной $(-1)^n \exp(-\kappa nd)$.

Графики смещений в обоих случаях приведены в публикации [4]. Расчет распределения соответствующих напряжений вблизи дефекта иллюстрируется рис. 4.

Таким образом, мы изучили локальное колебание вблизи дефекта в виде антисимметричного решения основного уравнения. Локальное колебание с четной собственной функцией при любом знаке ξ не может возникнуть на дефекте, локализованном

на одной границе. Допустим, что это стык с $n = 0$; на нем в случае четного относительно выбора знака n решения $[u]_{\pm}^+ = 0$ и $\sigma_0 = 0$, а потому возбуждение в виде стоячей волны с четной зависимостью от координаты x нечувствительно к величине параметра Q на стыке $n = 0$ и не отличается от колебания свободной границы сверхрешетки, проходящей по этому стыку. Свободная граница сверхрешетки соответствует разрезу по стыку $n = 0$, что эквивалентно условию $\sigma_0 = 0$, получающемуся в нашей модели при $\xi = \infty$ ($Q^* = \infty$). При этом возможны только однородные колебания ($\kappa = 0$) с частотами $\omega = (c/d)\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, локализованной волны у свободного конца сверхрешетки не существует. Значит невозможны колебания четного типа, если дефект сосредоточен на одном стыке. Подобные локализованные возбуждения возникают при изменении (возмущении) параметра Q по крайней мере у двух соседних стыков.

Перейдем к рассмотрению именно такой ситуации. Пусть на обеих границах ячейки между $n = 0$ и $n = 1$ имеют место одинаковые условия (33). Тогда, интересуясь решением, симметричным относительно «дефектной» ячейки, запишем смещения $u(x, t)$ при положительных n в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= w_0(x)e^{-i\omega t}, & 0 < x < d, \\
 u(x, t) &= w(x - nd)e^{-i\omega t}e^{\kappa nd}, & nd < x < (n + 1)d.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Для функции $w_0(x)$ естественно принять выражение

$$w_0(x) = a \cos q \left(x - \frac{d}{2} \right), \tag{40}$$

а функцию $w(x)$ можно взять в виде (35). Тогда удовлетворение граничным условиям при $n = 1$ и непрерывности напряжений на стыках при $n > 1$ приводит к соотношению

$$\frac{1}{2}[e^{-\kappa d} - 1] = \cos z - Q^* z \sin z, \quad z = qd. \tag{41}$$

Снова комбинируя (41) с (32), (32a), получаем формулу

$$e^{\kappa d} = 2\xi Q z \sin z - 1. \tag{42}$$

Для решений, соответствующих $k = \pi + i\kappa$, когда знаки смещений в соседних ячейках противоположны, соотношение (42) заменяется на

$$e^{\kappa d} = 2\xi Q z \sin z + 1. \tag{43}$$

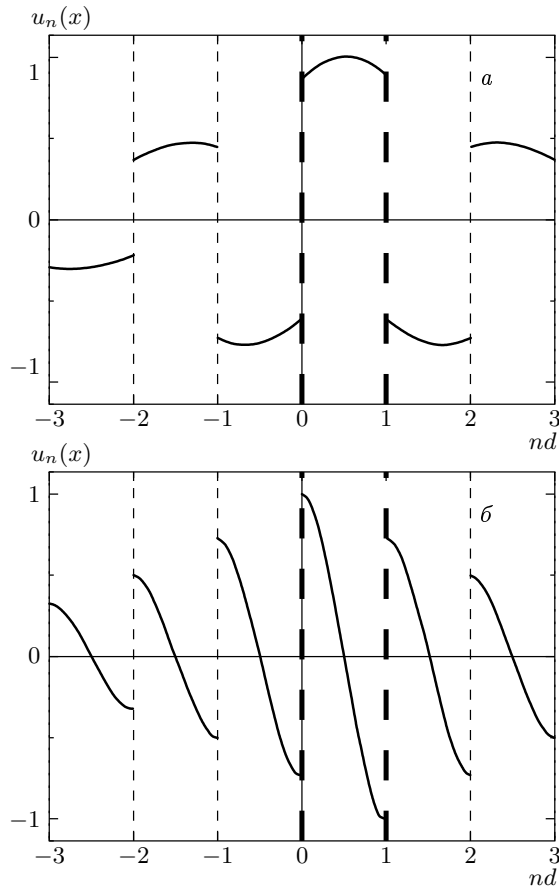


Рис. 5. Форма решений для функции $u_n(x)$, описывающей координатную зависимость смещений, локализованных вблизи дефектной ячейки при следующих условиях: а) $u_0(0) = u_1(d)$; б) $u_0(0) = -u_1(d)$

С помощью формул (42) или (43) легко построить выражение для $\text{ch}kd$, что позволяет записать трансцендентные уравнения для нахождения локальных частот в этих случаях:

$$\begin{aligned} \cos z - Qz \sin z &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (2\xi Qz \sin z \mp 1) + \frac{1}{(2\xi Qz \sin z \mp 1)} \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

где знак «-» соответствует синфазным колебаниям точек границы, знак «+» — колебаниям точек границы в противофазе. В данном случае двух соседних дефектных границ локализация колебаний в запрещенной зоне может происходить при любом знаке возмущения ξ .

Совершенно аналогично можно проанализировать условия возникновения локальных частот для антисимметричного вида функции смещений. На

рис. 5 приведены графики для смещений, локализованных вблизи дефектной ячейки.

Наконец, обсудим кратко возможность возникновения локальных частот вблизи более сложного нарушения регулярности сверхрешетки, при котором дефектными являются три стыка (например, $n = 0$ и $n = \pm 1$). На каждом из дефектных стыков будем предполагать соблюдение прежних граничных условий.

Рассмотрим симметричное колебание вблизи такого дефекта. Ясно, что при симметричном решении смещения описываются функцией, непрерывной на стыке $n = 0$, из чего автоматически следует, что напряжения на этом стыке равны нулю. Таким образом, дефектность стыка $n = 0$ никак не проявляется на свойствах изучаемого колебания. Частоты локальных колебаний определяются уравнением

$$\cos z - Qz \sin z = \frac{1}{2} \left\{ 2\xi Qz \sin z + \frac{1}{2\xi Qz \sin z} \right\}. \quad (45)$$

Как видно, уравнения для частот локальных колебаний вблизи такого дефекта имеют более простой вид, чем при наличии двух дефектных стыков. Важно отметить, что при таком дефекте существенно не только величина, но и знак возмущения: при $\xi Q > 0$ образование локальных состояний невозможно. Последнее становится очевидным при рассмотрении схемы графического решения уравнения (45).

Заметим, что во всех рассмотренных случаях, когда возникает локальное колебание, и дефект локализован более чем на одном стыке сверхрешетки, в щели появляются два дискретных уровня, возникающих одновременно, но существенно различающихся зависимостью от параметра дефекта ξ .

5. БЛОХОВСКИЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В ОДНОРОДНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Мы упоминали, что распространение оптических световых импульсов в системе параллельных световодов можно описывать дискретным уравнением Шредингера типа (14) в случае линейных пакетов либо уравнением типа (16) в случае солитонов. На основе этих уравнений строится теория движения волновых пакетов в одномерных системах, параметры которых слабо меняются вдоль этих систем. В частности, можно изучать волновое движение типа блоховских осцилляций пакета как квантовой частицы в однородном внешнем поле. Блоховские осцилляции оптического импульса описаны и экспериментально обнаружены [17, 18]. Поэтому не лишено

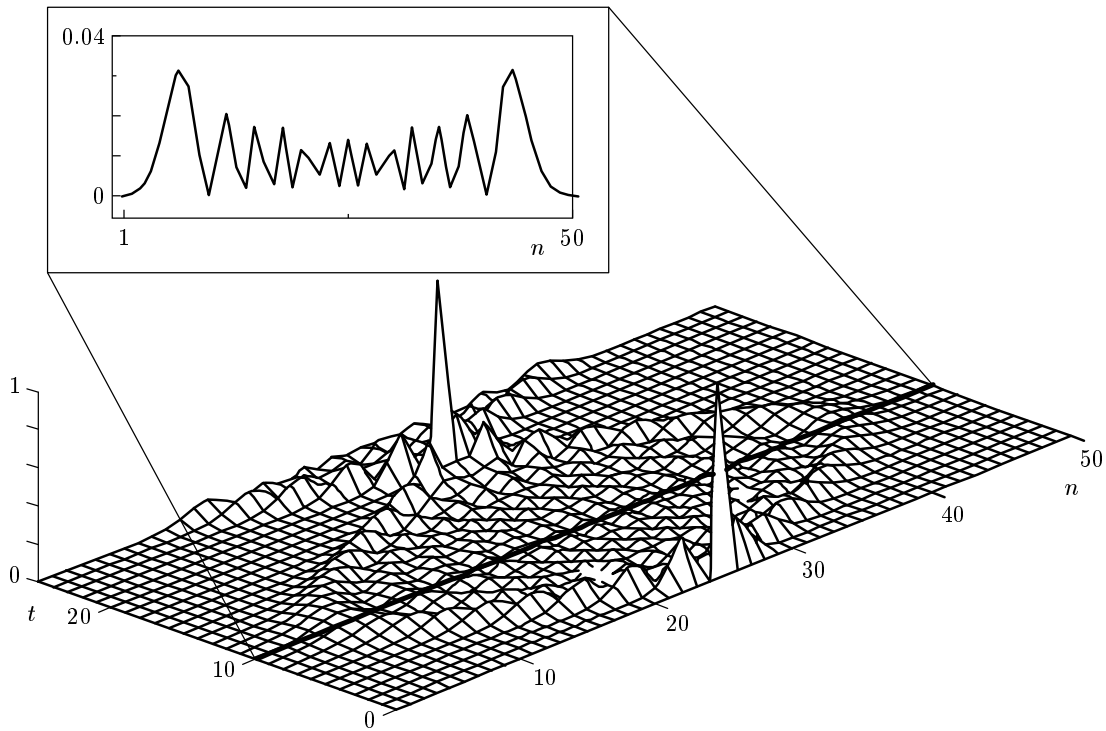


Рис. 6. Эволюция волнового пакета, испытывающего блоховские осцилляции, в случае очень узкого начального ($t = 0$) пакета в x -пространстве

основания обсуждение блоховских осцилляций волнового пакета в сверхрешетках.

Допустим, что физические характеристики составляющих сверхрешетки элементов слабо зависят от номера n , например, скорость волны меняется по такому правилу: $c = c_0 + \Delta c = c_0 \{1 + \delta c/c_0\}$, где Δc — малое изменение скорости волны при переходе от одного элемента к следующему. В экспериментах [17, 18] подобная неоднородность создавалась градиентом температуры, от которой зависит коэффициент преломления диэлектрика. Тогда параметр $m\omega_0$ в выражении (8) и уравнении (15) следует заменить на $m\omega_0 + \eta nd$, где η — малый градиент частоты. В результате в случае $m = 2p$ (случай $m = 2p + 1$ анализируется аналогично) возникает уравнение Шредингера в однородном поле:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = m\omega_0 \psi_n + \eta nd \psi_n + \frac{\Omega}{2m} (2\psi_n - \psi_{n+1} - \psi_{n-1}), \quad (46)$$

а выражение (8) превращается в функцию Гамильтона рассматриваемой частицы как функцию n и k .

Введем оператор номера узла, который в одно-

зонной модели⁵⁾ имеет вид $n = (i/d)\partial/\partial k$. Тогда уравнение (46) в k -представлении примет вид, согласованный с упомянутым гамильтонианом:

$$i \frac{\partial \psi(q)}{\partial t} = m\omega_0 \psi(q) + i\eta \frac{\partial \psi(q)}{\partial q} + \frac{2\Omega}{m} \psi(q) \sin^2 \frac{q}{2}, \quad (47)$$

где $q = kd$. Частица, подчиняющаяся уравнениям (46) или (47), испытывает так называемую динамическую локализацию [19], проявляющуюся в своеобразных осцилляциях с частотой, которую можно определить из следующих соображений. В уравнении (47) для стационарных состояний время и волновое число входят в виде комбинации $q + \eta t$. Так как в нашем случае стационарная собственная функция есть периодическая функция q с периодом 2π , то ей отвечает эквидистантный спектр частот с характерной частотой

$$\omega_B = \eta = m\Delta\omega_0 = m\omega_0 \frac{\Delta c}{c} = m \frac{\pi c}{d} \frac{\Delta c}{c}. \quad (48)$$

⁵⁾ Вопрос о роли межзонных переходов в теории блоховских осцилляций обсуждался в литературе [20]. В нашей модели типа «сильной связи» участвует только одна частота. Возникновение межзонных взаимодействий в похожей модели нелинейной оптической сверхрешетки учитывается при анализе устойчивости целевых самолокализованных колебаний (солитонов) [12].

Это и есть частота блоховских осцилляций волнового пакета в сверхрешетках.

Анализ эволюции волнового пакета, испытывающего блоховские осцилляции, изложен, например, в обзорах [21, 22]. Характер блоховских осцилляций существенно зависит от ширины пакета. Пакет с очень узким k -спектром Фурье (с хорошо определенным k) ведет себя как частица, функция Гамильтона которой совпадает с (8). Наличие внешнего однородного поля, действующего на частицу, приводит к зависимости волнового вектора (квазиимпульса) частицы от времени:

$$\frac{dk}{dt} = \eta. \quad (49)$$

В постоянном поле из формулы (49) следует закон движения центра тяжести пакета:

$$k = k_0 + \eta t. \quad (50)$$

Если подставить (50) в выражение для скорости частицы, вытекающее из закона дисперсии (8), то окажется, что скорость частицы периодически зависит от времени:

$$v = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sin kd = \sin(k_0 + \eta t)d. \quad (51)$$

Формула (51) и определяет блоховские осцилляции: центр тяжести пакета совершает колебания с частотой ω_B и амплитудой $A = \Omega d / (m\eta)$.

Если начальный пакет ($t = 0$) очень узкий в x -пространстве (например, локализован на одном узле $n = 0$), то его динамика иная: вначале с ростом времени возбуждение распространяется в обе стороны от центра пакета $n = 0$, однако, достигнув удаления A , останавливается и «откатывается» обратно, собираясь в первоначальный импульс в момент времени $t = 2\pi/\omega_B$, т. е. через период блоховских осцилляций (см. рис. 6).

Представляется, что оценка блоховской частоты $\omega_B \sim m(c/d)(\Delta c/c)$ и амплитуды $A \sim d(m^2 Q \Delta c/c)^{-1}$ вполне допускает возможность их наблюдения в акустических сверхрешетках.

Авторы благодарны В. Альшицу, А. Майеру и Э. Ганапольскому за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант № 167 за 1999 год).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, *Photonic Crystals*, Princeton UP (1995).

2. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, Наука, Москва (1973).

3. Pi-Gang Luan and Zhen Ye, *Phys. Rev. E* **63**, 66611 (2001).

4. А. М. Косевич, *Письма в ЖЭТФ* **74**, 633 (2001).

5. С. М. Рытов, *ЖЭТФ* **29**, 605 (1955).

6. С. М. Рытов, *Акуст. ж.* **2**, 71 (1956).

7. R. de L. Kronig and W. G. Penni, *Proc. Roy. Soc. London A* **130**, 499 (1931).

8. А. Ф. Андреев, Ю. А. Косевич, *ЖЭТФ* **81**, 1435 (1981).

9. L. J. Pyrak-Nolte, J. Xu, and G. M. Haley, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3650 (1992); А. М. Косевич, А. В. Тутов, *ФНТ* **19**, 1273 (1993) [*Low Temp. Phys.* **19**, 905 (1993)]; А. М. Kosevich and A. V. Tutov, *Phys. Lett. A* **213**, 265 (1996).

10. A. Figotin and V. Gorenstveig, *Phys. Rev. B* **52**, 180 (1998).

11. A. Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer-Verlag, Berlin (1989).

12. A. A. Sukhorukov and Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 083901 (2001).

13. M. A. Ablowitz and J. F. Ladik, *J. Math. Phys.* **17**, 1011 (1976).

14. L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer, Berlin (1987).

15. R. Schart and A. Bishop, *Phys. Rev. A* **43**, 6535 (1991).

16. А. М. Косевич, *ЖЭТФ* **119**, 995 (2001).

17. N. Petsch, P. Dannberg, W. Elflein et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4752 (1999).

18. R. Morandotti, U. Perschel, J. S. Aitchison et al., *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4756 (1999).

19. D. H. Dunlap and V. M. Kenkre, *Phys. Lett. A* **127**, 438 (1988).

20. M. Gluck, A. R. Kolovski, and H. J. Korsch, *Phys. Lett. A* **249**, 483 (1998); *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1534 (1999).

21. А. М. Косевич, *ФНТ* **27**, 699 (2001).

22. M. Gluck, A. R. Kolovski, and H. J. Korsch, submitted to *Phys. Rep.* (2001).