

МОДЕЛЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (ТРАЕКТОРИИ) РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ АТОМНЫХ СОСТОЯНИЙ НА ВЫХОДЕ МИКРОМАЗЕРА

*Г. П. Мирошниченко**

*Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики
(технический университет)
197101, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 28 марта 2002 г.

Метод стохастического рекуррентного соотношения использован для моделирования случайной последовательности (траектории) отсчетов детектора состояний атомов на выходе из одноатомного микромазера. Рассчитана случайная последовательность относительных частот щелчков измерителя на фиксированном интервале времени. Частоты хаотично меняются около среднего, не зависящего от времени уровня. Предположено, что эти средние уровни являются воспроизводимыми наблюдаемыми для каждой случайной траектории. Микромазер может скачкообразно переходить с одного среднего уровня относительной частоты на другой. Сделано предположение о том, что каждому измеренному среднему уровню частоты отсчетов соответствует определенный подансамбль состояний полевой моды. Предложен метод вычисления возможных средних относительных частот и соответствующих (средних) редуцированных матриц плотности моды ρ_{st} . Матрица ρ_{st} характерна для микромазера при его развитии вдоль заданной периодической траектории. Поиск ρ_{st} сводится к решению задачи на собственные значения для оператора развития на периоде. Развита аналитическая методика решения этой задачи. Матрица ρ_{st} является решением обратной задачи восстановления статистики полевой моды по статистике случайной траектории. На численном примере обсуждается рецепт выбора параметров оператора развития на периоде.

PACS: 42.50.-p, 42.50.Dv

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, благодаря высокому уровню экспериментальных возможностей в атомной физике и в квантовой оптике, многие фундаментальные положения квантовой механики непосредственно проверяются и находят практическое применение. Так, такие активно развивающиеся направления, как квантовая обработка информации, квантовые вычисления и связь, используют понятие перепутанного состояния квантовомеханических систем. Функционирование квантовых информационных и коммуникационных схем основано на совершении квантового измерения над информационными элементами, в процессе которого происходит редукция состояния. Роль кубитов играют отдельные атомы или ионы, захваченные в ловушках, а также одиноч-

ные фотоны. Эксперименты, в которых измерение выполняется над специально приготовленной индивидуальной квантовой системой, решают общетеоретические вопросы интерпретации основ квантовой теории [1].

Интересными возможностями в связи с этим обладает так называемый одноатомный микромазер [2]. Здесь индивидуальная квантовая система — выделенная мода микроволнового резонатора — на каждом периоде взаимодействует (и, следовательно, перепутывается) со второй квантовой системой — ридберговским атомом, который до влета в резонатор переводится на возбужденный (мазерный) уровень энергии. Когда атом вылетает из резонатора (и системы перестают взаимодействовать, но остаются в перепутанном состоянии), совершается квантовое измерение энергии атома. По этому измерению можно косвенно судить о состоянии квантованной моды на момент измерения. Процесс измерения повторя-

*E-mail: gpmirosh@yahoo.com, mirosh@mkk.ifmo.ru,

ется на каждом пролете атома, приводя, благодаря так называемому обратному действию прибора на измеряемый квантовый объект, к необычной динамике полевой моды. В литературе, посвященной данным вопросам, отмечается, что такие косвенные измерения служат основным источником информации о состоянии квантовой микроволновой моды резонатора.

Проблема связи статистических свойств генерируемой моды со статистикой последовательных отсчетов детекторов, селективных по состояниям вылетающих атомов, отражена во многих работах. В работе [3] представлены результаты численного моделирования динамики полевой моды микромазера, подверженного процессу квантовых измерений состояний атомов. Здесь использовано рекуррентное соотношение Филиповича [2] для вычисления редуцированной матрицы плотности (РМП) поля после каждого акта измерения. Такой расчет дает реализацию случайного процесса, представляющего собой последовательность отсчетов детектора и связанную с ней последовательность РМП. Этот метод моделирования будем называть методом стохастического рекуррентного соотношения (СРС). Схема расчета была предельно обобщена, входящие атомы следовали через равные промежутки времени, детектор имел стопроцентную эффективность, единственная используемая в расчетах случайная переменная моделировала результаты работы детектора, показывая, в каком состоянии — верхнем или нижнем — атом обнаружен измерителем. В [3] получены важные результаты, нашедшие качественное подтверждение в экспериментальной работе [4]. В этих работах показано, что в установившемся состоянии при определенном соотношении параметров в последовательности отсчетов детектора наблюдается несколько (в данных работах — два) квазистационарных состояния, скачкообразно сменяющих друг друга в случайные моменты времени. Такое поведение микромазера объясняется в рамках гипотезы квантовых скачков, которые он совершает из одного минимума эффективного потенциала Филиповича [2] в другой, близкий по глубине. Более сложные расчеты по методу СРС выполнены в работах [5, 6]. Здесь введены случайные переменные, учитывающие пуассоновский разброс времени ожидания между пролетами соседних атомов, неидеальность детекторов. В работе [5] впервые получена и экспериментально проверена формула, связывающая Q -параметр Мандела для числа фотонов полевой моды и аналогичный параметр для атомов, обнаруженных детектором в основном состоянии. СРС использова-

лись в работах [6] для моделирования измерительных схем, включающих классическое микроволновое поле и позволяющих изучить закономерности динамики фазы квантовой моды в процессе измерений в атомной подсистеме.

В серии работ [7–10] теория микромазера с учетом детектирования атомной подсистемы построена на основе временного «крупнозернистого» дифференциального управляющего уравнения, полученного в работе [7]. В работе [8] найдено нелинейное управляющее уравнение, описывающее динамику полевой моды в интервале времени между последовательными отсчетами детектора. В [9] получен линейный вариант управляющего уравнения для ненормированной условной РМП, а в [10] построен пропагатор для соответствующего подансамбля. В работах [8–10] сформулированы основные идеи нового направления — статистики атомных отсчетов, — позволяющего связать статистические свойства последовательности отсчетов селективного по атомным состояниям детектора со статистическими свойствами полевой моды. В этих работах получены формулы для совместной вероятности детектирования k атомов в основном и m атомов в возбужденном состоянии за заданный интервал времени наблюдения. С помощью этих формул найдены атомный Q -параметр Мандела для атомов в определенном энергетическом состоянии, выражения для корреляционных и кросскорреляционных функций для отсчетов детектора, разделенных паузой заданной длительности (безотносительно к состояниям атомов, обнаруженных в выбранном промежутке), выражения для плотности вероятности времени ожидания между двумя последовательными отсчетами. В этих работах подтверждаются результаты работы [5] и приводятся общие формулы связи двухатомных корреляционных функций с двухвременными корреляционными функциями интенсивности поля микромазера (для равных интервалов времени).

В последующих работах [11–15] идеи работ [8–10] были обобщены. Так, в работах [11, 12] изучено влияние непуассоновой накачки микромазера на селективную по состояниям статистику атомов, вылетающих из измерителя. Учет непуассоновости потребовал привлечения теории стохастических точечных процессов для описания статистики времен прибытия атомов накачки. В работе [13], в продолжение работ [6], получены формулы, связывающие статистику атомных отсчетов с временной эволюцией фазы поля внутри резонатора. В работе [14] с помощью линейного варианта управляющего уравнения получены новые формулы для статистических характе-

ристик атомных отсчетов (например, определена вероятность n отсчетов детектора для заданной их последовательности). Справедливость формул проверена с помощью численного решения управляющего уравнения. В работе [15] впервые была предпринята попытка определения спектра микромазера в состоянии, которое принадлежит подансамблю, когда РМП развивается между последовательными отсчетами детектора. Расчет выполнен в предположении малости эффективности детектора.

В нашей работе развивается альтернативный метод определения статистических характеристик поля микромазера по результатам статистической обработки отсчетов детектора атомных состояний. Метод основан на положениях квантовой теории измерений фон Неймана [16]. Акт квантового измерения приводит к селекции определенного квантовомеханического подансамбля состояний полевой моды. Разбиение на подансамбли определяется прибором и зависит от его параметров. Информация, извлекаемая в измерительном акте, может быть использована для более детального изучения состояния полевой моды в разные моменты времени. Так, согласно работам [3, 4], можно установить, в каком из минимумов потенциала Филиповича [2] находится квантовая мода в моменты наблюдения, и исследовать характеристики квантового скачка, перебрасывающего моду в конкурирующий минимум. Развиваемый метод основан на том, что в течение времени пребывания моды в определенном минимуме потенциала, успевают установиться средние статистические характеристики последовательности отсчетов детектора. По величине измеренной средней частоты щелчков селективного детектора можно выделить подансамбль состояний полевой моды и найти среднюю стационарную РМП подансамбля. В работе сделано предположение о том, что для поиска средней РМП подансамбля можно вместо случайной последовательности (траектории) отсчетов детектора использовать периодическую траекторию, обеспечивающую найденную среднюю частоту щелчков. Такая замена, как показано в работе, возможна благодаря слабой зависимости решений СРС от порядка следования результатов отсчетов детектора. Другими словами, случайные последовательные отсчеты можно в некоторых пределах переставлять местами так, чтобы случайная траектория заменилась на периодическую. В работе развит аналитический метод расчета стационарной РМП для периодической последовательности ρ_{st} (разд. 4). По существу, метод решает обратную задачу: по статистическим характеристикам последовательности отсчетов восстанав-

ливается РМП ρ_{st} подансамбля полевых состояний. С помощью ρ_{st} можно вычислить различные средние статистические характеристики полевой моды и атомного пучка, действующие на указанном интервале времени. В отмеченных выше работах эта задача решалась с помощью установившейся полевой РМП, получаемой без процедуры косвенных измерений $\rho^{(ss)}$ (точное определение $\rho^{(ss)}$ дано в разд. 3). Но статистические характеристики, полученные с помощью $\rho^{(ss)}$, могут быть правильными, если их наблюдать на больших интервалах времени так, чтобы микромазер многократно побывал во всех своих квазистационарных состояниях. Разработанный метод дает возможность более детального изучения статистических свойств полевой моды. Если микромазер обладает одним стационарным состоянием, а остальные состояния маловероятны, то, как показано в работе, вычисления, проведенные с помощью этих двух матриц, дают одинаковые результаты.

2. МОДЕЛЬ ОДНОАТОМНОГО МИКРОМАЗЕРА

Модель одноатомного микромазера основана на гамильтониане Джейнса–Каммингса H [17] и развита в работе [2]. Здесь

$$H = \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \omega_0 \hat{S}_3 + g (\hat{a}^+ \hat{S}_- + \hat{a} \hat{S}_+).$$

В этом выражении использованы операторы \hat{S}_+ , \hat{S}_- , \hat{S}_3 группы $SU(2)$,

$$S_3 = \frac{|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|}{2}, \quad S_- = |0\rangle\langle 1|, \quad S_+ = |1\rangle\langle 0|,$$

с общепринятыми правилами коммутации, бозе-операторы \hat{a}^+ , \hat{a} рождения и уничтожения квантов полевой моды. Здесь и далее ω — частота квантовой моды резонатора, ω_0 — частота атомного перехода, g — параметр атомно-полевого взаимодействия, $|0\rangle$, $|1\rangle$ — состояния основного и возбужденного атомных лазерных уровней, $\hbar = 1$. Далее рассмотрен случай $\omega = \omega_0$.

Согласно теории Филиповича [2], микромазер действует циклически, его период работы состоит из интервала времени τ взаимодействия атома с квантованной модой резонатора и интервала T ($T \gg \tau$) релаксации поля к планковскому распределению. Представим закон развития РМП квантовой моды на одном цикле аналитически [2]. Будем считать, что перед влетом в резонатор все атомы приготовлены в возбужденном состоянии. Обозначим через σ_{at} начальную матрицу плотности атома. Тогда перед

вылетом атома из резонатора по окончании взаимодействия моды РМП $\rho(t)$ вычисляется по формуле

$$\rho(\tau) = \text{Sp}_{at} [\exp(-iH\tau)\rho(0) \otimes \sigma_{at} \exp(iH\tau)].$$

Здесь Sp_{at} обозначает операцию взятия шпура по атомным состояниям. Для выбранных начальных условий, как следует из работы [18], каждая диагональ РМП развивается независимо. Рассмотрим динамику главной диагонали РМП поля — закона распределения вероятностей чисел фотонов n в базисе Фока. Это соотношение в матричном виде имеет вид

$$\rho_n(\tau) = \cos^2(g\tau\sqrt{n+1})\rho_n(0) + \sin^2(g\tau\sqrt{n})\rho_{n-1}(0),$$

$$\rho(t) = \sum_n \rho_n(t)|n\rangle\langle n|.$$

После вылета атома из резонатора главная диагональ РМП поля развивается согласно уравнению

$$\frac{d\rho_n(t)}{dt} = \gamma(n_b + 1)[(n + 1)\rho_{n+1}(t) - n\rho_n(t)] + \gamma n_b [n\rho_{n-1}(t) - (n + 1)\rho_n(t)].$$

Здесь γ — скорость релаксации поля, n_b — среднее планковское число фотонов в резонаторе. Сохраним обозначение для повышающих \hat{a}^+ и понижающих \hat{a} операторов, действующих теперь на фоковский вектор $|n\rangle\langle n|$ по правилу

$$a^+ |n\rangle\langle n| = \sqrt{n+1} |n+1\rangle\langle n+1|,$$

$$a |n\rangle\langle n| = \sqrt{n} |n-1\rangle\langle n-1|.$$

Тогда главную диагональ РМП поля после окончания цикла длительностью T можно представить с помощью оператора развития в виде (пренебрегается релаксацией поля на коротком интервале взаимодействия τ)

$$\rho(T) = W(T)(Q0 + Q1)\rho(0).$$

Здесь

$$W(T) = \exp(T\gamma L),$$

$$L = -(2n_b + 1)\hat{a}^+\hat{a} - n_b + (n_b + 1)\hat{a}\sqrt{\hat{a}^+\hat{a}} + n_b\hat{a}^+\sqrt{\hat{a}\hat{a}^+}, \quad (1)$$

$$Q0 = \hat{a}^+ \frac{\sin^2(g\tau\sqrt{\hat{a}^+\hat{a} + 1})}{\sqrt{\hat{a}^+\hat{a} + 1}}, \quad (2)$$

$$Q1 = \cos^2(g\tau\sqrt{\hat{a}^+\hat{a} + 1}). \quad (3)$$

Приведенное уравнение описывает главную диагональ РМП поля для полного ансамбля квантовых

состояний моды без проведения квантового косвенного измерения.

Для моделирования процесса измерения состояний вылетающих атомов разобьем полный ансамбль на три подансамбля и введем случайную переменную ξ , такую что $\xi = 0$, если детектор обнаружил атом в нижнем состоянии, $\xi = 1$, если атом найден в верхнем состоянии, и $\xi = 2$, если детектор не произвел отсчет в силу не равной единице эффективности. Пренебрежем длительностью процедуры измерения, момент измерения отнесем к моменту вылета атома из резонатора. Обозначим символом $\rho(l)$ вектор главной диагонали РМП в начале l -го цикла, удовлетворяющий условию нормировки

$$\text{Sp} \rho(l) = \sum_{n=0} \rho_n(l) = 1. \quad (4)$$

Здесь Sp — операция взятия шпура по состояниям поля. Обозначим символом $S(\xi, T)$ оператор развития главной диагонали РМП $\rho(l)$ для подансамбля, отвечающего выпавшему на l -м цикле значению переменной ξ и длительности цикла T . Имеем

$$\begin{aligned} S(\xi, T) &= W(T)D(\xi), \\ D(0) &= \varepsilon_0 Q0, \quad D(1) = \varepsilon_1 Q1, \\ D(2) &= (1 - \varepsilon_0)Q0 + (1 - \varepsilon_1)Q1. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_0$ — эффективности детектирования атомов в верхнем (нижнем) состояниях. Очевидно, $S(\xi, T)$ удовлетворяет условию (разбиение полного ансамбля на три подансамбля)

$$S(0, T) + S(1, T) + S(2, T) = W(T)(Q0 + Q1).$$

Вектор главной диагонали РМП, найденный на предыдущем цикле, является начальным для последующего цикла. После каждого акта измерения этот вектор необходимо перенормировать. С учетом сказанного выше получаем нелинейное СРС, описывающее динамику главной диагонали РМП в условиях проведения косвенного квантового измерения:

$$\rho(l+1) = \frac{S(\xi_l, T)\rho(l)}{\text{Sp} S(\xi_l, T)\rho(l)}. \quad (6)$$

Здесь символом ξ_l обозначено значение случайной переменной ξ , выпавшее на l -м цикле. Далее зависимость случайной переменной ξ от номера цикла работы микроазера, ξ_l , будет называться траекторией. Введем обозначение вероятности обнаружения детектором атома в нижнем состоянии на l -м цикле:

$$a_0 = \text{Sp} D(0)\rho(l), \quad (7)$$

аналогично для верхнего состояния

$$a_1 = \text{Sp } D(1)\rho(l). \quad (8)$$

Эти вероятности равны произведению соответствующих эффективностей детектора ε_0 , ε_1 и квантовомеханических вероятностей обнаружения атома в верхнем или нижнем состояниях, вычисляемых соответственно по формулам $\text{Sp } Q_0\rho(l)$ и $\text{Sp } Q_1\rho(l)$. Вероятности a_0 , a_1 используются для генерации на каждом цикле случайной переменной ξ .

3. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ РМП ПОЛЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ АТОМНОГО СОСТОЯНИЯ НА ВЫХОДЕ МИКРОМАЗЕРА

В эксперименте [4] измеряемой величиной являлась случайная последовательность отсчетов (щелчков) детектора, показывающая, в каком состоянии был обнаружен атом. Ее случайность связана с рядом причин. Атомный пучок имеет пуассоновскую статистику времен ожидания T атомов [2]:

$$P(T) = R \exp(-RT). \quad (9)$$

Здесь R — скорость инжектирования атомов, $P(T)$ — плотность вероятности времени ожидания. Случайными свойствами обладает детектор, в силу малой эффективности оставляющий часть вылетающих атомов без измерения. Случайным образом распределены результаты измерения — вылеты атомов в верхнем или нижнем состоянии. В работе [4] изучена статистика селективных по атомным состояниям отсчетов и приведены графики относительной частоты щелчков детектора, обнаружившего атом в верхнем (p_1) или в нижнем (p_0) состояниях на интервале наблюдения $\Delta t_{av} \approx 0.1$ с.

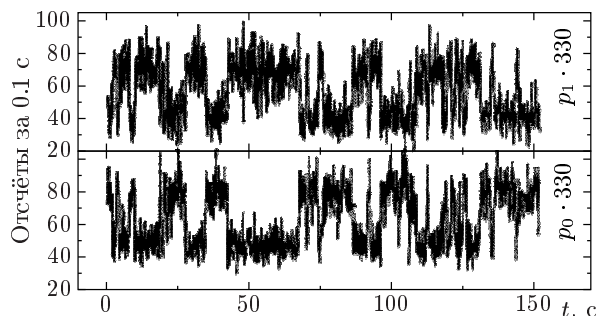


Рис. 1. Результаты эксперимента из работы [4]

На рис. 1 воспроизведен соответствующий рисунок из этой работы. Эти величины равны

$$p_0 = \frac{k}{\Delta t_{av} R}, \quad (10)$$

$$p_1 = \frac{m}{\Delta t_{av} R}. \quad (11)$$

Здесь k — число атомов, обнаруженных в нижнем состоянии, m — число атомов в верхнем состоянии из общего числа $\Delta t_{av} R$ пролетевших на интервале Δt_{av} атомов. Частоты определялись по выборке из примерно 300 пролетевших атомов путем прямого счета числа благоприятных исходов. Эксперимент проводился при $g\tau \approx 0.92$, $N_{ex} = R/\gamma \approx 200$, $R \approx 3300$ с⁻¹. Данные получены с помощью детектора, имеющего эффективность $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \approx 0.35$. Зависимость снималась после установления поля в резонаторе, а поэтому характерна для стационарного состояния микромазера, подверженного процессу измерения. Характерной особенностью случайной реализации является существование у микромазера в стационарных условиях нескольких (двух, как в работе [4]) средних относительных частот щелчков детектора, обнаруживающего атомы в верхнем (\bar{p}_1) и нижнем (\bar{p}_0) состояниях. Средние частоты сохраняются в течение достаточно заметных интервалов времени (десятьки секунд на рис. 1). Каждый такой интервал для краткости будем называть временем пребывания в определенном стационарном состоянии, t_{st} . Относительные частоты p_0 (10) и p_1 (11) являются случайными функциями и в течение времени пребывания хаотично меняются вблизи своих средних значений \bar{p}_0 и \bar{p}_1 . Между средними уровнями возможны резкие (квантовые, согласно названию статьи [4]) скачки. В процессе скачка среднее число фотонов моды резко меняется (в работе [4] с приблизительно 70 до примерно 140 и наоборот). Сам момент скачка совершенно непредсказуем, не исследованы причины и динамика скачка.

Для моделирования динамики РМП в присутствии измерений на каждом цикле действия микромазера требуется генерация случайных переменных, моделирующих пуассоновский характер входящего пучка (переменная T) и случайные результаты работы детектора (переменная ξ). Вектор $\rho(l+1)$ вычисляется по формуле (6), где T — выпавшее на l -м цикле значение времени ожидания. Результаты моделирования представлены на рис. 2. Здесь по оси абсцисс отложено время $t_r = t/\Delta t$ в относительных единицах, в качестве масштаба выбран элементарный временной интервал Δt . Количество интервалов Δt между соседними атомами случайно и ге-

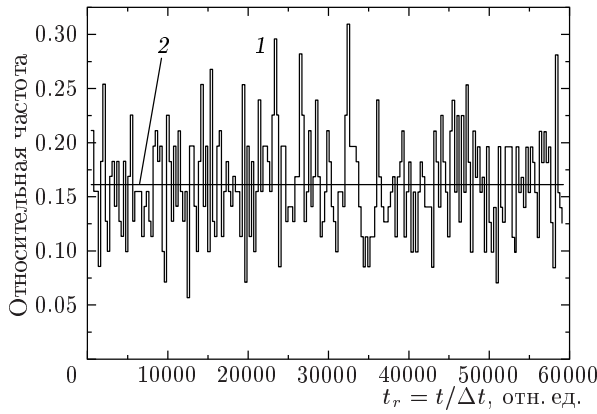


Рис. 2. Относительные частоты щелчков детектора для атомов, обнаруженных в основном состоянии. Времена ожидания случайны и распределены по закону Пуассона; 1 — относительная частота щелчков для основного состояния атомов p_0 , полученная на интервале $\Delta t_{av} = 284\Delta t$; 2 — сплошная горизонтальная линия — средний уровень частоты щелчков \bar{p}_0 . По оси абсцисс отложено время $t_r = t/\Delta t$ в единицах элементарного интервала $\Delta t = 1/4R$. Параметры расчета приводятся в тексте

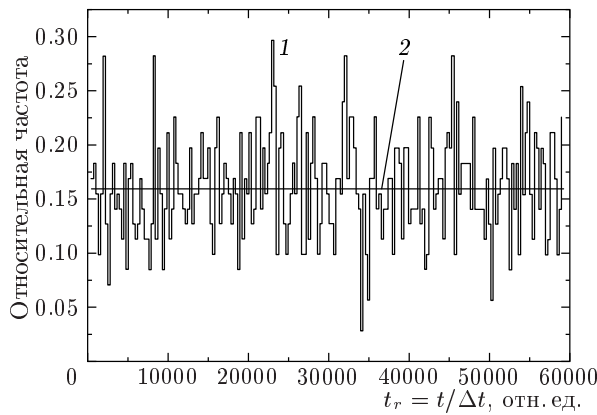


Рис. 3. Относительные частоты щелчков детектора для атомов, обнаруженных в основном состоянии. Для моделирования использован оператор развития W_F , средний по пуассоновскому распределению времен ожидания. Средний интервал времени между соседними атомами выбран $1/R = 4\Delta t$. Обозначения и параметры расчета те же, что и для рис. 2

нерируется с помощью распределения, близкого к пуассоновскому,

$$\bar{P}(s) = R\Delta t(1 - R\Delta t)^{s-1}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Здесь $\bar{P}(s)$ — вероятность ожидания s элементарных

интервалов между соседними атомами или времени $T = s\Delta t$. Интервал Δt является параметром распределения, его выбор, согласно работе [9], ограничен условием, обеспечивающим одноатомность,

$$\tau \ll \Delta t.$$

Рисунки 2, 3 построены для $\Delta t = 1/4R$. Для эксперимента [4] $\Delta t \approx 10^{-4}$ с, таким образом, зависимости, представленные на рис. 2 и 3, соответствуют примерно 5 секундам работы микромазера. Очевидно,

$$\frac{\bar{P}(s)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} P(T),$$

где $P(T)$ дается формулой (9). Кривая 1 на рис. 2 представляет зависимость относительной частоты щелчков p_0 (10), полученной на интервалах времени $\Delta t_{av} = N_{ex}/R = \gamma^{-1}$, от времени t_r . Интервал Δt_{av} , как и в работе [4], определяется временем жизни γ^{-1} полевой моды. Сплошная линия 2 на рис. 2 представляет средний установившийся уровень частоты \bar{p}_0 , полученный с помощью усреднения первой кривой по времени. При расчете использованы следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} N_{ex} &= 71, & \Delta t_{av} &= 284\Delta t, & n_b &= 0.1, \\ g\tau &= 0.92, & \varepsilon_0 = \varepsilon_1 &= \frac{1}{3}, & \Delta t &= \frac{1}{4R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Графики, приведенные на рис. 2, получены с помощью (6), когда источником стохастичности являются случайные переменные T и ξ . Кривая 1 является теоретической моделью (при наборе параметров (13)) экспериментальной кривой. Покажем, что случайную зависимость, обладающую теми же статистическими свойствами, можно получить более простым моделированием. Для этого усредним СРС (6) по ансамблю времен ожидания (12), воспользовавшись идеей работы [2]. Усредненные формулы имеют вид

$$W = \frac{R\Delta t \exp(R\Delta t L/N_{ex})}{I - (1 - R\Delta t) \exp(R\Delta t L/N_{ex})}, \quad (14)$$

$$S(\xi) = W D(\xi), \quad \xi = 0, 1, 2, \quad (15)$$

$$\rho(l+1) = \frac{S(\xi_l)\rho(l)}{\text{Sp } S(\xi_l)\rho(l)}. \quad (16)$$

Здесь I — единичный оператор. В пределе

$$W \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} W_F = \left(I - \frac{L}{N_{ex}} \right)^{-1} \quad (17)$$

получается результат Филиповича [2] для усредненного оператора развития W_F в релаксационном процессе. На рис. 3 представлены результаты расчета при тех же значениях параметров (13), но с использованием формул (14)–(16). СРС (16) описывает динамику микромазера под действием периодического атомного пучка с интервалом времени между атомами, равным $1/R$. Как следует из сравнения рис. 2 и 3, случайные зависимости ρ_0 от времени (кривые 1) на обоих рисунках близки, т. е. совпадают их средние уровни $\bar{\rho}_0$, а также близки значения их дисперсий (что проверено прямым вычислением). Это объясняется достаточно большим интервалом усреднения Δt_{av} , что приводит к сглаживанию кривой 1 на рис. 2. Представленное сравнение дает возможность изучать модель с использованием формул (14)–(16) без генерации пуассоновской переменной T , что упрощает анализ. Упомянутая во Введении установившаяся РМП $\rho^{(ss)}$, получаемая без процедуры квантовых измерений, в наших обозначениях удовлетворяет уравнению

$$\rho^{(ss)} = W_F(Q0 + Q1)\rho^{(ss)}. \quad (18)$$

4. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ РАЗВИТИЯ $S(\xi)$ И ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Как показывает эксперимент и численное моделирование, в микромазере в течение времени пребывания t_{st} устанавливаются и поддерживаются средние частоты $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_0$ щелчков селективного к атомным состояниям детектора. Значения этих частот определяются законом чередования последовательности отсчетов. Очевидно, одна и та же средняя относительная частота может получаться на множестве траекторий, среди которых простейшими являются периодические. Обозначим символом $\{\xi_j, 1 \leq j \leq L\}$ множество значений, которые принимает случайная переменная ξ на периоде L . Рассмотрим особенности динамики микромазера, выбрав в качестве оператора развития оператор периода

$$SL = \prod_{\{\xi_j, 1 \leq j \leq L\}} S(\xi_j).$$

Вектор главной диагонали РМП определяется в конце каждого периода. Нелинейное динамическое рекуррентное соотношение, описывающее развитие микромазера по периодической траектории, по аналогии с (16) имеет вид

$$\rho(p+1) = \frac{SL\rho(p)}{\text{Sp } SL\rho(p)}. \quad (19)$$

Здесь p — номер периода. В отличие от (16), уравнение (19) описывает развитие по навязанной (заданной) траектории. Все операторы SL имеют собственные числа, меньшие единицы, и, как следствие, не сохраняют шпур (в отличие от оператора в рекуррентном соотношении (18)). Тем не менее, благодаря нелинейности, соотношение (19) имеет стационарное решение. Запишем общее решение (19), применив метод Фурье. Для этого разложим начальный вектор $\rho(0)$ по собственным векторам оператора SL

$$\rho(0) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \rho_{\lambda}. \quad (20)$$

Здесь c_{λ} — коэффициенты разложения, а ρ_{λ} и λ — собственный вектор и собственное число оператора SL :

$$SL\rho_{\lambda} = \lambda\rho_{\lambda}. \quad (21)$$

Обозначим $\tilde{\lambda}$ максимальное собственное число в разложении (20) и получим решение (19) на периоде p в виде

$$\rho(p) = \left[\rho_{\tilde{\lambda}} + \sum_{\lambda \neq \tilde{\lambda}} \frac{c_{\lambda}}{c_{\tilde{\lambda}}} \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^p \rho_{\lambda} \right] \times \left[1 + \sum_{\lambda \neq \tilde{\lambda}} \frac{c_{\lambda}}{c_{\tilde{\lambda}}} \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^p \right]^{-1}. \quad (22)$$

В пределе имеем

$$\rho(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho_{\tilde{\lambda}}.$$

Из (22) следует, что стационарным вектором уравнения (19) может быть любой собственный вектор, входящий в разложение начального состояния и имеющий наибольшее собственное число. Как правило, начальный вектор (20) имеет ненулевую проекцию на собственный вектор с максимально возможным собственным числом λ_{max} оператора SL . Основным стационарным состоянием ρ_{st} (это состояние упоминалось во Введении) для периодической траектории естественно считать именно такой вектор

$$\rho_{st} = \rho_{\lambda_{max}}. \quad (23)$$

Выясним смысл собственного числа оператора периода SL (21). Для этого перепишем уравнение (19) для любого стационарного вектора ρ в виде

$$\rho = \frac{SL\rho}{\text{Sp } SL\rho} \quad (24)$$

и сравним его с (21). Видно, что для нормированного, согласно (4), собственного вектора собственное число равно

$$\lambda = \text{Sp} SL\rho. \quad (25)$$

Но величина $\text{Sp} SL\rho$ равна условной вероятности того, что L атомов последовательно обнаружены детектором в состояниях, для которых случайная переменная ξ принимает значения из множества $\{\xi_j, 1 \leq j \leq L\}$ (при условии, что начальное состояние поля было ρ). Назовем для краткости величину $\lambda = \text{Sp} SL\rho$ вероятностью периодической траектории периода L . Таким образом, задача на собственные значения (21) произведения операторов $S(\xi)$ приобретает особую значимость, так как ее решения дают дискретные (квантованные) уровни вероятности $\text{Sp} SL\rho = \lambda$ и возможные стационарные состояния поля $\rho = \rho_\lambda$ для периодической траектории. Стационарные состояния ρ_{st} (23) определяют вероятности детектирования атома в нижнем (7) или в верхнем (8) состояниях в конце каждого периода:

$$\bar{a}_0 = \text{Sp} D(0)\rho_{st}, \quad (26)$$

$$\bar{a}_1 = \text{Sp} D(1)\rho_{st}. \quad (27)$$

Эти вероятности подчиняются точному соотношению

$$\frac{\bar{a}_0}{\varepsilon_0} + \frac{\bar{a}_1}{\varepsilon_1} = 1. \quad (28)$$

Для периодической траектории средние относительные частоты щелчков детектора \bar{p}_1 и \bar{p}_0 можно вычислить с помощью усреднения по периоду $L = k + m + r$ траектории:

$$\bar{p}_1 = \frac{m}{L}, \quad (29)$$

$$\bar{p}_0 = \frac{k}{L}. \quad (30)$$

Здесь k — число атомов в нижнем состоянии, m — число атомов в верхнем состоянии, найденных на периоде длины L . Включенный детектор не обнаружил r атомов на периоде.

В работе [8] доказано важное свойство случайной последовательности отсчетов детектора — эргодичность (формула (2.36) в [8]). В наших обозначениях это соотношение имеет вид

$$\bar{\bar{p}}_0 = \text{Sp} D(0)\rho^{(ss)}. \quad (31)$$

Здесь $\bar{\bar{p}}_0$ — средняя относительная частота щелчков для нижнего состояния атомов, найденная на бесконечном интервале усреднения. Таким свойством обладает установившаяся РМП $\rho^{(ss)}$ (18). Покажем,

что основное стационарное состояние ρ_{st} (23), характерное для микромазера при его развитии по заданной периодической траектории, дает близкие значения для вероятностей (26), (27) и частот (29), (30). Для этой цели параметры $k, m, r, \varepsilon_1, \varepsilon_0$ задачи необходимо связать условием

$$\frac{\bar{p}_0}{\varepsilon_0} + \frac{\bar{p}_1}{\varepsilon_1} = \frac{k}{k+m+r} \frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{m}{k+m+r} \frac{1}{\varepsilon_1} = 1, \quad (32)$$

являющимся аналогом равенства (28).

Решим задачу на собственные значения (21) для оператора периода

$$SL = S^k(0)S^m(1)S^r(2) \quad (33)$$

и найдем собственные векторы ρ_λ и основное стационарное состояние ρ_{st} (23). Операторы $S(\xi)$ определены в (15), анализ выполняется для предельного случая $\Delta t \rightarrow 0$ (17). Для решения этой задачи используем метод линеаризации. Выполним ортогональное преобразование сдвига операторов \hat{a}^+, \hat{a} в формулах (1)–(3), (15), (17):

$$\hat{a}^+ \rightarrow \hat{a}^+ + \mu^+, \quad \hat{a} \rightarrow \hat{a} + \mu,$$

где μ^+, μ — числа, и линеаризуем оператор SL (33), оставив в нем линейные и квадратичные по \hat{a}^+, \hat{a} слагаемые. Область применимости метода линеаризации ограничена условием

$$g\tau < 1, \quad (34)$$

параметр Филиповича $\Theta = g\tau\sqrt{N_{ex}}$ может быть произвольным, но $N_{ex} > 1$. Как показывают численные расчеты, формулы метода линеаризации можно использовать и при больших, чем (34), значениях $g\tau$. Поэтому оценку (34) следует признать достаточно грубой. Выберем числа μ^+, μ из условия обращения в нуль линейных по \hat{a}^+, \hat{a} слагаемых в SL . Обозначим

$$\nu = \frac{\mu^+ \mu}{N_{ex}}$$

и получим следующие соотношения

$$\chi = \frac{\bar{p}_0}{\varepsilon_0}, \quad (35)$$

$$F(\nu) = (\sin^2(\Theta\sqrt{\nu}) - \chi)^2 [\nu(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + 1 - \varepsilon_1] + (\sin^2(\Theta\sqrt{\nu}) - \chi) \{ \nu[\chi(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) - 1 + \varepsilon_1\varepsilon_0] + (1 - \varepsilon_1)[\chi(2 - \varepsilon_0) - 1] \} + (1 - \varepsilon_0)(1 - \varepsilon_1)(1 - \chi)(\nu - \chi), \quad (36)$$

$$G(\nu) = \left\{ \frac{\nu (1 + \sin^2 (\Theta \sqrt{\nu}))^2}{(1 + \nu)^2} \varepsilon_0 \right\}^k \left\{ \frac{1 - \sin^4 (\Theta \sqrt{\nu})}{1 + \nu} \varepsilon_1 \right\}^m \times \left\{ \frac{\sin^2 (\Theta \sqrt{\nu}) [\nu(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + \varepsilon_1 - 1] + \nu(2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_0) + 1 - \varepsilon_1}{(1 + \nu)^2} (1 + \sin^2 (\Theta \sqrt{\nu})) \right\}^r. \quad (37)$$

Для получения формул (36), (37) необходимо преобразовать простые, но громоздкие алгебраические преобразования, поэтому их вывод не приводится. Здесь даны упрощенные выражения для функций $F(\nu)$ и $G(\nu)$, справедливые при малых $n_b \ll 1$ и больших $\Theta \gg 1$.

Нули функции $F(\nu)$ определяют значения параметра ν , при которых обращаются в нуль линейные по \hat{a}^+ , \hat{a} слагаемые в SL . Функция $F(\nu)$ имеет множество нулей. С каждым нулем связана серия близких к эквидистантным собственным чисел, расстояния между которыми зависят от номера серии. В каждой серии имеется собственный вектор основного состояния. Этот вектор локализован в пространстве Фока, положение его максимума определяется положением соответствующего нуля функции $F(\nu)$, а связанное с ним собственное число определяется значением функции $G(\nu)$ в выбранном нуле. Функции $F(\nu)$ и $G(\nu)$ связаны важным соотношением: положения максимумов функции $G(\nu)$ совпадают с нулями функции $F(\nu)$. Анализ квадратичных слагаемых показывает, что устойчивыми оказываются векторы, локализованные в так называемых зонах захвата [18], расположение которых на оси чисел ν задается двойным неравенством

$$\left(\frac{\pi}{2} \frac{1+2q}{\Theta} \right)^2 \leq \nu \leq \left(\frac{\pi}{2} \frac{2+2q}{\Theta} \right)^2, \quad q = 0, 1, \dots \quad (38)$$

Здесь целое число q — номер зоны захвата. Необходимо отметить, что функции $F(\nu)$ и $G(\nu)$ не зависят от порядка следования сомножителей в операторе периода SL (33) и определяют свойства пучка из $(r + m + k)!/r!m!k!$ периодических траекторий одного периода L . От перестановки сомножителей зависят коэффициенты квадратичной формы по операторам \hat{a}^+ , \hat{a} . Наибольший интерес представляет устойчивое основное состояние ρ_{st} (23), отвечающее максимальному собственному числу. При значениях параметров оператора SL (33), связанных соотношением (32), основное состояние локализовано в зоне захвата (38), расположенной в интервале $0 \leq \nu \leq 1$. Зоны захвата обладают важным свойством: их ме-

стоположение (38) не зависит от чисел k, m, r и эффективности детекторов.

Рассмотрим упрощенный случай совпадающих эффективностей детектора

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = \varepsilon.$$

Формулы (32), (35)–(37) упрощаются и принимают вид

$$\varepsilon = \frac{k + m}{k + m + r}, \quad (39)$$

$$\chi = \frac{\bar{p}_0}{\varepsilon} = \frac{k}{k + m}, \quad (40)$$

$$F(\nu) = (\sin^2 (\Theta \sqrt{\nu}) - \chi)^2 + (\sin^2 (\Theta \sqrt{\nu}) - \chi) \times [\chi(2 - \varepsilon) - 1 - \nu(\varepsilon + 1)] + (1 - \varepsilon)(1 - \chi)(\nu - \chi), \quad (41)$$

$$G(\nu) = \left[\frac{\nu (1 + \sin^2 (\Theta \sqrt{\nu}))^2}{(1 + \nu)^2} \right]^k \times \left[\frac{1 - \sin^4 (\Theta \sqrt{\nu})}{1 + \nu} \right]^m \times \left[\frac{2\nu + \cos^2 (\Theta \sqrt{\nu})}{(1 + \nu)^2} (1 + \sin^2 \Theta \sqrt{\nu}) \right]^r \times \varepsilon^{k+m} (1 - \varepsilon)^r. \quad (42)$$

Выведем из формулы (41) известный результат Филиповича. Для этого положим в (41) $k = 0, m = 0, \chi \neq 0$. Тогда из соотношения $F(\nu) = 0$ получаем уравнение

$$\sin^2 (\Theta \sqrt{\nu}) = \nu, \quad (43)$$

определяющее положения минимумов эффективного потенциала Филиповича. Этот результат становится понятным, если заметить, что при значениях чисел $k = 0, m = 0, \chi \neq 0$ оператор развития на период SL (33) становится кратным оператору $W_F(Q_0 + Q_1)$ (18). Вектор $\rho^{(ss)}$ является его собственным для собственного числа равного 1. Именно для этого оператора в работе [2] получен результат (43).

Для оправдания выбранного условия связи (32) заметим, что уравнение $F(\nu) = 0$ в этом случае всегда имеет корень ν , удовлетворяющий двум приближенным условиям

$$\sin^2(\Theta\sqrt{\nu}) \approx \chi, \quad \nu \approx \chi. \quad (44)$$

Это и есть искомый корень, определяющий устойчивое основное состояние ρ_{st} , отвечающее максимальному собственному числу оператора SL . Смысл приближенных равенств (44) состоит в следующем. Так как основное состояние представляет собой сильно локализованный вектор, то, согласно формулам (26), (2), (5), в приближении линеаризации

$$\bar{a}_0 = \text{Sp } D(0)\rho_{st} \approx \varepsilon \sin^2(\Theta\sqrt{\nu}). \quad (45)$$

Тогда, согласно (40), получаем связь вероятностей срабатывания селективного детектора (в конце каждого периода) \bar{a}_0 (26), \bar{a}_1 (27) и средних относительных частот щелчков детектора \bar{p}_0 (29), \bar{p}_1 (30) (аналог равенства (31)):

$$\bar{p}_0 \approx \bar{a}_0, \quad \bar{p}_1 \approx \bar{a}_1. \quad (46)$$

Второе приближенное равенство (44) определяет местоположение максимума вероятности чисел фотонов для основного состояния ρ_{st} в зависимости от фоковского числа n :

$$n = \nu N_{ex} \approx \frac{\bar{a}_0}{\varepsilon} N_{ex}. \quad (47)$$

Отношение \bar{a}_0/ε есть квантовомеханическая вероятность обнаружения атома в нижнем состоянии в конце каждого периода периодической траектории.

Найдем значения параметра Θ , для которого приближенные равенства (44) заменяются на точные. Для этого перепишем уравнение $F(\nu) = 0$ в форме, аналогичной уравнению Филиповича (43)

$$\sin^2(\Theta\sqrt{\nu}) = SN(\nu),$$

$$SN(\nu) = \frac{1}{2} \left\{ \nu(\varepsilon + 1) + 1 + \chi\varepsilon - \sqrt{[\nu(\varepsilon + 1) + 1 + \chi\varepsilon]^2 - 4[\nu(1 - \varepsilon + 2\varepsilon\chi) + \varepsilon\chi]} \right\}.$$

Подставим $SN(\nu)$ в выражение (42) и получим уравнение для огибающей $V(\nu)$ максимумов функции $G(\nu)$. Выражение для функции $V(\nu)$ не приводится из-за громоздкости, ее график представлен на рис. 4. Как видно из рис. 4, $V(\nu)$ имеет один максимум при значении ν , для которого выполняются два точных равенства

$$\nu = \chi, \quad SN(\nu) = \chi. \quad (48)$$

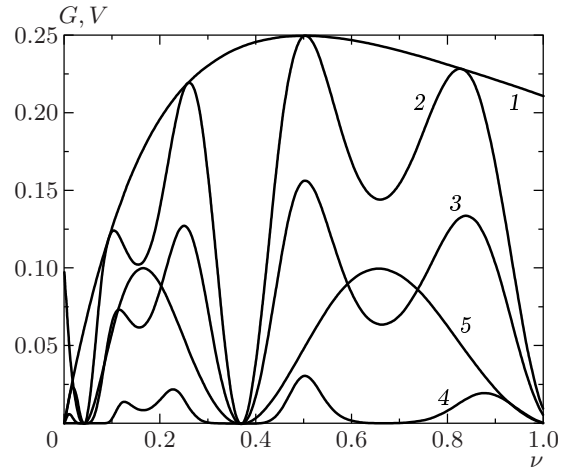


Рис. 4. Функция $G(\nu)$ и огибающая $V(\nu)$ для параметров $k = 1, m = 1, \chi = 0.5$: 1 — $V(\nu)$ для $r = 0, \varepsilon = 1$; 2 — $G(\nu)$ для $r = 0, \varepsilon = 1$; 3 — $G(\nu) \cdot 10$ для $r = 2, \varepsilon = 0.5$; 4 — $G(\nu) \cdot 10^2$ для $r = 20, \varepsilon = 0.091$; 5 — $\cos^2(\Theta\sqrt{\nu})/10$, приведен для выделения зон захвата. Остальные параметры расчета те же, что и для рис. 2

При значениях параметра

$$\Theta = -\frac{\arcsin \sqrt{\chi} + j\pi}{\sqrt{\chi}}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (49)$$

формулы (48) дают точное значение аргумента ν , при котором максимум огибающей совпадает с главным максимумом функции $G(\nu)$. Подставив (48), (49) в $G(\nu)$ (42), получим максимальное значение функции $G(\nu)$ — максимальное собственное число оператора периода (33) или максимальную вероятность периодической траектории периода $L = k + m + r$

$$\lambda_{max} \approx G_{max} = \bar{p}_0^k \bar{p}_1^m (1 - \bar{p}_0 - \bar{p}_1)^{L-k-m}. \quad (50)$$

Здесь \bar{p}_0, \bar{p}_1 определяются формулами (29), (30). Умножив (50) на статистический вес, получим выражение для полной вероятности пучка траекторий периода L

$$\text{Prob}(k, m, L) = \bar{p}_0^k \bar{p}_1^m (1 - \bar{p}_0 - \bar{p}_1)^{L-k-m} \times \frac{L!}{k!m!(L-k-m)!}, \quad (51)$$

представляющее двумерное биномиальное распределение. Эта формула обобщает (если использовать приближенное равенство (46)) соотношение (3) из работы [5] на случай неидеального детектора. В работе [5] аналог формулы (51) получен при условии,

что полевая мода находится в состоянии $\rho^{(ss)}$. В настоящее время формула (51) найдена для периодической траектории, при этом полевая мода находится в состоянии ρ_{st} (23).

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Как показывает эксперимент [4], последовательность отсчетов детектора — траектория ξ_l — является случайной функцией номера l пролетевшего атома. С помощью статистической обработки можно получить относительные частоты обнаружения атома в верхнем (нижнем) состоянии, а также относительную частоту пропускания атома включенным детектором на заданном промежутке времени (статистика отсчетов). В экспериментальной работе [4] эти величины вычислены на каждом интервале Δt_{av} вдоль случайной траектории. Найдено, что случайные реализации обладают характерным свойством: в стационарных условиях средние по времени пребывания t_{st} частоты щелчков детектора, отмечающих обнаружение нижнего или верхнего атомного состояния, \bar{p}_0 и \bar{p}_1 , перестают зависеть от времени.

Цель данной работы состоит в решении обратной задачи: по измеренным в эксперименте на данном отрезке времени средним относительным частотам \bar{p}_0 и \bar{p}_1 построить и решить динамическое (а не стохастическое) уравнение для РМП поля. Очевидно, что уравнение развития получится динамическим, если траектория отсчетов детектора будет задана (зафиксирована). Для этой цели в данной работе предлагается использовать периодическую траекторию. В разд. 3 показано, как можно избавиться от случайности, связанной с пуассоновской статистикой атомного пучка. Для этого использован метод работы [2] и СРС (6) заменено средним по распределению (12) времен ожидания СРС (16). Рекуррентное соотношение (16) соответствует периодическому атомному пучку с одинаковыми интервалами времени между атомами равными $1/R$. В разд. 3 отмечено, что при переходе от СРС (6) к СРС (16) сохраняются статистические свойства случайных частот p_0 и p_1 . При построении динамического рекуррентного соотношения (19) для нахождения стационарного вектора главной диагонали РМП ρ_{st} необходимо выбрать матрицу развития на период. Параметры матрицы периода SL (33) — целые числа k, m, L — выбираются по экспериментально найденным значениям средних относительных частот \bar{p}_0 и \bar{p}_1 по формулам (29), (30). Ниже приводится численный пример применения изложенной схемы. Статистическая обработка

случайной последовательности, по которой построены графики на рис. 2, дает следующие результаты:

$$\bar{p}_0 = \frac{k}{k+m+r} \approx 0.162, \quad \bar{p}_1 = \frac{m}{k+m+r} \approx 0.163.$$

Результат согласуется с формулой (32):

$$\bar{p}_0 + \bar{p}_1 \approx \varepsilon = \frac{1}{3}.$$

Для получения минимального периода можно выбрать

$$k = 1, \quad m = 1, \quad \chi = \frac{k}{k+m} = \frac{1}{2}.$$

Тогда период

$$L = \frac{k}{\bar{p}_0} \approx 6.$$

Параметры периодической траектории равны

$$k = 1, \quad m = 1, \quad r = 4.$$

Эти числа следует подставить в (33), решить задачу на собственные значения (21) и найти вектор главной диагонали РМП ρ_{st} для максимального собственного числа λ_{max} . Вектор ρ_{st} (23) является искомым решением обратной задачи. Его можно использовать для расчета статистических характеристик полевой моды микроазера, подверженного процессу квантовых измерений состояний атомной подсистемы в стационарных условиях. На рис. 5 представлены графики вектора главной диагонали РМП ρ_{st} для $k = 1, m = 1, 4$, и $r = 0, 20$. Кривые построены для значения Θ , удовлетворяющего формуле (49) для $j = 2$. Вектор ρ_{st} имеет вид одиночного пика, локализованного в зоне захвата (38) с номером $q = 1$.

Полученный вектор ρ_{st} описывает подансамбль состояний полевой моды, определяемый обнаруженным в течение времени пребывания t_{st} средним значением частоты \bar{p}_0 (\bar{p}_1). Областью локализации этого вектора является зона захвата с номером $q = 1$. Полный ансамбль полевых состояний в стационарных условиях описывает вектор $\rho^{(ss)}$ (18). График вектора $\rho^{(ss)}$ при том же значении Θ также приведен на рис. 5. Согласно теории Филиповича [2], при этом значении Θ вектор $\rho^{(ss)}$ имеет вид одиночного пика, локализованного в зоне $q = 1$. Другими словами, полный ансамбль полевых состояний в данных условиях определяется одним средним значением частоты \bar{p}_0 (\bar{p}_1). Но тогда графики $\rho^{(ss)}$ и ρ_{st} должны практически совпасть, что и демонстрирует рис. 5.

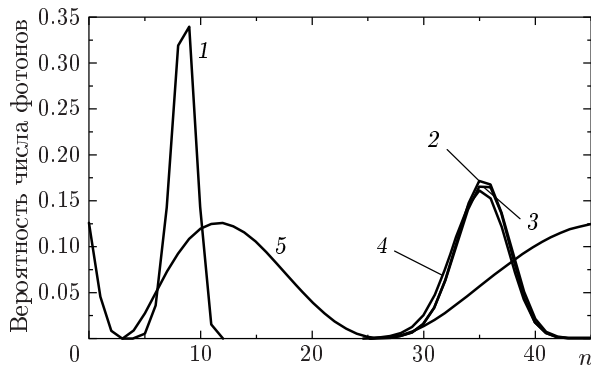


Рис. 5. Собственные векторы для максимального собственного числа оператора периода $SL = S^k(0)S^m(1)S^r(2)$ в зависимости от числа фотонов n : 1 — ρ_{st} для $k = 1, m = 4, r = 0$; 2 — ρ_{st} для $k = 1, m = 1, r = 0$; 3 — ρ_{st} для $k = 1, m = 1, r = 20$; 4 — $\rho^{(ss)}$; 5 — $\cos^2(g_T \sqrt{n})/8$, приведен для выделения зон захвата. Параметры расчета те же, что и для рис. 2

Как следует из рис. 4, не имеет особого значения, каким детектором — с малой эффективностью или высокой — зафиксированы параметры периодической траектории в эксперименте. Действительно, положения максимумов функции $G(\nu)$ на рис. 4 слабо зависят от эффективности. Это же свойство демонстрирует и рис. 5, где приводятся графики ρ_{st} для нескольких r (разные значения ε , формула (39)). С помощью высокоэффективного детектора можно обнаружить траектории с малыми временами пребывания t_{st} в стационарном состоянии.

В заключение отметим, что результаты, полученные в данной работе, справедливы в приближении метода линеаризации. Этот метод применим, когда зоны захвата (38) можно рассматривать изолированно друг от друга. Собственные векторы задачи (21) для оператора (33), локализованные в разных зонах, слабо перекрываются. Это тот случай, когда вероятность отрезка траектории слабо зависит от последовательности отсчетов, а определяется числом отсчетов. Небольшие изменения в порядке следования отсчетов, сохраняющие статистические характеристики реализации ξ_j , мало сказываются на векторе главной диагонали РМП поля. В этом случае использование соответствующей периодической траектории для решения обратной задачи оправдано.

Более сложная картина динамики микромазера в присутствии квантовых измерений наблюдается, когда условия применимости метода нарушаются. В этом случае зоны захвата (особенно с младшими

номераами) теряют индивидуальность. В стационарных условиях возможно наличие двух (или нескольких) конкурирующих средних относительных частот щелчков детектора. Вектор $\rho^{(ss)}$ может иметь несколько пиков, расположенных в разных зонах захвата (38). Траектория становится неустойчивой, возможны резкие скачки с одного среднего уровня частоты щелчков на другой. Эти скачки происходят в интервале времени гораздо меньшем, чем время пребывания t_{st} . Такой срыв может произойти из-за маловероятного события — критической флуктуации, когда случайная переменная, определяющая динамику микромазера (пуассоновская переменная T или переменная ξ , моделирующая порядок работы детектора) принимает подряд маловероятные значения. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
2. P. Filipowicz, J. Javanainen, and P. Meystre, *Phys. Rev. A* **34**, 3077 (1986).
3. P. Meystre and E. M. Wright, *Phys. Rev. A* **37**, 2524 (1988).
4. O. Benson, G. Raithel, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3506 (1994).
5. G. Rempe and H. Walter, *Phys. Rev. A* **42**, 1650 (1990).
6. C. Wagner, R. J. Brecha, A. Schenzle, and H. Walter, *Phys. Rev. A* **46**, K5350 (1992); C. Wagner, R. J. Brecha, A. Schenzle, and H. Walter, *Phys. Rev. A* **47**, 5068 (1993).
7. L. A. Lugiato, M. O. Scully, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **36**, 740 (1987).
8. H.-J. Briegel, B.-G. Englert, N. Sterpi, and H. Walter, *Phys. Rev. A* **49**, 2962 (1994).
9. U. Herzog, *Phys. Rev. A* **50**, 783 (1994).
10. C. Wagner, A. Schenzle, and H. Walter, *Opt. Comm.* **107**, 318 (1994).
11. U. Herzog, *Phys. Rev. A* **52**, 602 (1995).
12. U. Herzog, *Phys. Rev. A* **61**, 047801 (2000).
13. B.-G. Englert, T. Gantsog, A. Schenzle, C. Wagner, and H. Walther, *Phys. Rev. A* **53**, 4386 (1996).

14. D. B. Johnson and W. C. Schieve, Phys. Rev. A **63**, 033808 (2001).
15. R. R. McGowan and W. C. Schieve, Phys. Rev. A **59**, 778 (1999).
16. Von Neumann, *J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932).
17. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
18. I. P. Vadeiko, G. P. Miroshnichenko, A. V. Rybin, and J. Timonen, Opt. and Spectr. **89**, 300 (2000); G. P. Miroshnichenko, I. P. Vadeiko, A. V. Rybin, and J. Timonen, Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz. **72**, 647 (2000).