

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ПЫЛИНОК В ОБЛАКАХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНЫХ ЗАРЯДОВ

*В. А. Гундиенков, С. И. Яковленко**

*Институт общей физики Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 марта 2002 г.

С использованием координат Кассини численно исследовано решение уравнения Пуассона–Больцмана для облака зарядов, окружающих две заряженные пылинки, рассматриваемые как дебаевские атомы, образующие дебаевскую молекулу. Сила воздействия электрического поля на пылинку со стороны другой пылинки определялась интегрированием электростатического давления на поверхность пылинки. Показано, что силы притяжения возникают при выполнении следующих двух условий. Во-первых, дебаевский радиус (соответствующий плотности электронов на половине среднего расстояния между пылинками) должен быть примерно равен половине среднего расстояния между пылинками. При этом притяжение пылинок возникает на расстоянии, примерно равном среднему расстоянию между пылинками. Во-вторых, притяжение имеет место, если заряды одного из знаков сосредоточены преимущественно на пылинках. Если пылинки несут малую долю заряда одного из знаков, на всех расстояниях имеет место отталкивание пылинок.

PACS: 52.27.Lw

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование плазмы, в которой существенную роль играют заряженные частицы микронных размеров (так называемой пылевой плазмы), представляет интерес как фундаментального, так и прикладного характера (см. [1, 2] и цитированную там литературу). Особый интерес связан с наблюдением в пылевой плазме коллективных эффектов, обусловленных ее неидеальностью [3–6]. Часто свойства неидеальной плазмы рассматривают в так называемом однокомпонентном приближении. При этом один из зарядов как бы размазывается однородно по пространству, а поляризационные эффекты учитываются в некоторых случаях в виде поправок.

Физика процессов в пылевой плазме, по-видимому, принципиально иная. Объектом исследования должны быть в первую очередь пылинки, окруженные облаками зарядов с массами, много меньшими массы пылинки. Заряженная пылинка, окруженная облаком зарядов противоположного знака, является аналогом атома в кинетике газов. Вообще говоря, у такого «пылевого атома» зарядовая оболоч-

ка может быть термодинамически неравновесна. Однако мы здесь будем рассматривать ситуацию, когда распределение зарядов в оболочке является распределением Больцмана. Такой пылевой атом естественно называть дебаевским атомом [7], в отличие от томас-фермиевского атома, в котором зарядовой оболочкой является вырожденный электронный газ. Аналогично можно ввести понятие дебаевской молекулы [8, 9] и дебаевского кристалла. Свойства таких дебаевских систем математически задаются распределением Больцмана и уравнением Пуассона, т. е. уравнением Пуассона–Больцмана.

Согласно целому ряду экспериментов (см., например, [3–6]), пылинки микронных размеров в термоэмиссионной плазме, плазме газового разряда и ядерно-возбуждаемой плазме могут образовывать пространственные структуры. В связи с этим естественно предположить наличие сил притяжения, обусловленных поляризацией зарядовых оболочек дебаевских атомов. Однако достаточно убедительных теоретических результатов, демонстрирующих наличие притяжения дебаевских атомов, пока нет. Точное решение уравнения Пуассона–Больцмана показывает, что для заряженных плоскостей как в об-

*E-mail: syakov@kapella.gpi.ru

лаке электронов, так и в плазме всегда имеет место отталкивание, а не притяжение [10, 11]. Численные расчеты силы взаимодействия дебаевских атомов [8, 9] до недавнего времени были не вполне надежны, как и результаты приближенного аналитического рассмотрения [12, 13].

Проблема взаимодействия пылинок в пылевой плазме близка к проблеме взаимодействия коллоидных частиц в электролитах. Само понятие дебаевского радиуса пришло в плазму из теории электролитов. Однако, несмотря на то что физика коллоидных частиц в электролитах исследуется давно [10], вопрос о возникновении сил притяжения и там пока не вполне выяснен (по крайней мере, для случая, когда диаметр коллоидной частицы меньше дебаевского радиуса, см., например, [14–18]).

Ниже предпринята попытка достаточно надежно продемонстрировать, что поляризационные силы притяжения дебаевских атомов имеют место, и выявить условия, когда возникает притяжение. В методическом плане данная работа существенно отличается от других работ, посвященных рассмотрению взаимодействия заряженных пылинок в плазме и в электролитах.

Во-первых, в отличие от целого ряда работ (см., например, [10, 12–18]), мы рассматриваем ситуацию, когда суммарный заряд пылинок не пренебрежимо мал по сравнению с суммарным зарядом частиц плазмы (одного знака), окружающей пылинку. Более того, нами показано (предварительные результаты см. в [19]), что притяжение оказывается наиболее существенным в противоположном предельном случае, т. е. когда почти весь заряд одного из знаков сосредоточен на пылинках и зарядовые облака, соответственно, состоят из зарядов одного (противоположного) знака.

Во-вторых, в рассмотрении свойств дебаевской молекулы мы существенно опираемся на тот факт, что дебаевский атом имеет определенную структуру. В частности, даже если радиус пылинки много меньше дебаевского радиуса, ее заряд, как правило, не может быть приближенно рассмотрен как дельта-функция.

В-третьих, мы непосредственно вычисляем результирующую силу, действующую на пылинку со стороны другой пылинки и зарядовой оболочки, а не потенциальную энергию системы. Зависимость энергии взаимодействия пылинок от расстояния между ними определяется интегрированием этой силы. При этом решение уравнения Пуассона–Больцмана осуществляется в не очень распространенной системе координат, основанной на овалах Кассини [20, 21].

Это позволяет с большой точностью вычислять напряженность поля вблизи поверхности малой пылинки и надежно определить силу, действующую на пылинку.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Уравнение Пуассона–Больцмана

Ниже мы для конкретности будем рассматривать термоэмиссионную плазму и говорить о положительно заряженных пылинках и об электронной оболочке зарядов. Однако основные результаты справедливы также для пылевой плазмы электрических разрядов и плазмы, ионизируемой внешним источником жесткого излучения, когда пылинки заряжены отрицательно, а зарядовые оболочки состоят преимущественно из положительных ионов.

Пусть электронный газ, окружающий заряженные частицы, формируется за счет эмиссии электронов из пылинок, имеющих достаточно высокую температуру T . Кроме того, пылинки находятся в частично ионизованном газе. Для нахождения пространственных распределений потенциала ϕ , напряженности поля $-\nabla\phi$ и плотности заряда $\rho = e(N_i - N_e)$ следует решить уравнение Пуассона

$$\nabla(-\nabla\phi) = 4\pi\rho.$$

В этом уравнении плотности ионов N_i и электронов N_e определяются распределением Больцмана

$$N_i = N_{i0} \exp(-e\phi/T), \quad N_e = N_{e0} \exp(e\phi/T),$$

где N_{i0} , N_{e0} — плотности ионов и электронов в тех точках, где потенциал равен нулю, ∇ — гамильтонов векторный оператор.

Итак, уравнение Пуассона–Больцмана имеет вид

$$\Delta\phi = 4\pi e(N_{e0} \exp(e\phi/T) - N_{i0} \exp(-e\phi/T)), \quad (1)$$

где $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа; температура частиц и плазмы считается одинаковой.

2.2. Безразмерные величины

Будем измерять длину в единицах дебаевского радиуса $r_D = (T/4\pi e^2 N_{e0})^{1/2}$, соответствующего плотности электронов в тех точках, где потенциал равен нулю. Введем безразмерные величины — потенциал φ , напряженность поля \mathbf{E} и плотность электронов n_e — с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\phi e}{T}, & \mathbf{E} &= -\frac{\nabla\phi e r_D}{T}, \\ n_e &= r_D^3 N_e = n_D \exp \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

где $n_D = r_D^3 N_{e0}$.

Ниже мы при оценках, как правило, будем ориентироваться на условия экспериментов [3], в которых $N_{e0} = 2.5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T = 0.146 \text{ эВ} = 1700 \text{ К}$, а для характерных величин имеем $r_D = 18 \text{ мкм}$, $T/e = 0.146 \text{ В}$, $T/er_D = 80 \text{ В/см}$. При среднем радиусе пылинки $r_p = 0.4 \text{ мкм}$ ($r_0 = r_p/r_D = 2.23 \cdot 10^{-2}$) и ее заряде $Z_p e = 500e$ имеем напряженность поля на поверхности частицы $Z_p e/r_0^2 = 4.5 \cdot 10^4 \text{ В/см}$ ($E_0 = E(r_0) = 550$).

Для безразмерных величин уравнение (1) сводится к следующим уравнениям для безразмерного потенциала φ :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \exp\varphi - \delta \exp(-\varphi), \\ \nabla\mathbf{E} &= -(\exp\varphi - \delta \exp(-\varphi)), \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\delta = N_{i0}/N_{e0}$ — параметр, характеризующий дополнительную ионизацию газа. В силу квазинейтральности плазмы, $0 \leq \delta \leq 1$.

2.3. Граничные условия

Одиночную заряженную пылинку, окруженную облаком более легких зарядов, находящихся в термодинамическом равновесии, следуя [7], будем называть дебаевским атомом, а две или несколько пылинок — дебаевской молекулой [8, 9]. Рассмотрение дебаевского атома и дебаевской молекулы с формальной точки зрения отличается лишь геометрией задачи. При рассмотрении дебаевского атома, ориентируясь на сферически-симметричное электронное облако, можно обойтись решением одномерного уравнения Пуассона. При рассмотрении же двухатомной дебаевской молекулы можно считать задачу симметричной относительно оси x , соединяющей ядра (пылинки). Тогда достаточно рассмотреть двумерное уравнение (3) в плоскости координат xy . При этом существенное усложнение задачи при переходе к рассмотрению дебаевской молекулы связано с выбором граничных условий.

В реальной физической задаче задан заряд пылинок $Z_p e$ и их радиус r_p (о формировании заряда пылинки см. [22–24]). Следовательно, одним из граничных условий является условие для напряженности поля на поверхности пылинок S :

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi|_S. \quad (4)$$

При этом заряд частицы определяется выражением

$$Z_p = \frac{-r_D^2}{4\pi e} \int_S \nabla\phi \, ds, \quad z_p = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{E} \, ds. \quad (5)$$

Здесь z_p — безразмерный заряд частицы, он связан с зарядом частицы в единицах электронного заряда Z_p выражением

$$Z_p = 4\pi z_p n_D;$$

площадь поверхности измеряется в квадратах дебаевского радиуса.

Вторым граничным условием должно быть задание поверхности S' , на которой поле равно нулю:

$$\nabla\varphi|_{S'} = 0. \quad (6)$$

Нулевое значение электрического поля на границе следует из квазинейтральности рассматриваемой системы зарядов. Поверхность S' задает границу рассматриваемой дебаевской системы.

Основная цель рассмотрения дебаевской молекулы состоит в том, чтобы найти зависимость результирующей электростатической силы, действующей на пылинки, от расстояния d между ними. В этом случае удобнее исходить из других граничных условий [8, 9]. На поверхности пылинок задается не поле, а постоянный потенциал

$$\varphi|_S = \varphi_0 = \text{const.}$$

Из решения уравнения Пуассона–Больцмана находится напряженность поля \mathbf{E}_0 на поверхности пылинки. Результирующая сила определяется с помощью интеграла от электростатического давления по поверхности пылинки. Для того чтобы получить нужное значение заряда z_p (5), надо соответствующим образом изменить значение потенциала φ_0 .

В рассматриваемом случае сила взаимодействия пылинок направлена вдоль оси z и определяется выражением:

$$F = \frac{1}{8\pi} \int_S (\nabla\phi)^2 \Big|_S ds_z, \quad f = \int_S E_0^2 ds_z. \quad (7)$$

Здесь ds_z — проекция элемента поверхности ds на ось z , сила F связана с безразмерной силой f выражением

$$F = (T^2/8\pi e^2) f,$$

электрическое давление направлено наружу от поверхности пылинок.

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДЕБАЕВСКИХ АТОМОВ

3.1. Дебаевский атом

3.1.1. Уравнение Пуассона–Больцмана

Свойства дебаевской молекулы во многом определяются свойствами дебаевских атомов, образуя

щих эту молекулу. В частности, при большом расстоянии между пылинками дебаевская молекула должна распадаться на два независимых дебаевских атома. Этот факт будет использован ниже. Поэтому, прежде чем приступать к вычислению силы взаимодействия, рассмотрим некоторые свойства дебаевских атомов (см. также [25]).

В одномерном (т. е. плоском цилиндрически- или сферически-симметричном) случае уравнение (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^k} \frac{d}{dr} \left(r^k \frac{d\varphi}{dr} \right) &= \exp \varphi - \delta \exp(-\varphi), \\ \varphi|_{r=a_0} &= 0, \\ E(r)|_{r=a_0} &\equiv - \left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=a_0} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $k = 0, 1, 2$ соответственно для плоского, цилиндрически- и сферически-симметричного случаев; в зависимости от геометрии точка $r = 0$ соответствует началу плоского слоя, центру цилиндра или центру сферы. При этом одно из граничных условий задает границу дебаевского атома $r = a_0$, на которой поле равно нулю.

Ниже будет рассмотрен сферически-симметричный случай $k = 2$, моделирующий дебаевский атом, и плоский случай, позволяющий рассмотреть изменение потенциала вблизи поверхности пылинки [6–8]. В сферически-симметричном случае удобной характеристикой дебаевского атома является безразмерный заряд, содержащийся внутри сферы радиуса r , он определяется выражением

$$z(r) = r^2 E(r).$$

3.1.2. Дебаевский атом в облаке заряда одного знака

Случай $\delta = 0$, когда зарядовые оболочки состоят из частиц одного знака, соответствует, например, термоэмиссионной плазме [3] или такой ионизации газа, когда заряд одного из знаков полностью сосредоточился на пылинках (см., например, [24]). Величину a_0 мы выберем равной половине среднего расстояния между пылинками

$$a_0 = a_p \equiv \left(N_p^{-1/3} / 2r_D \right),$$

где N_p — плотность пылинок (см. рис. 1). Величина $N_p^{-1/3} / 2$ на 24% меньше радиуса Вигнера–Зейца $r_{WZ} \equiv (4\pi N_p / 3)^{-1/3}$.

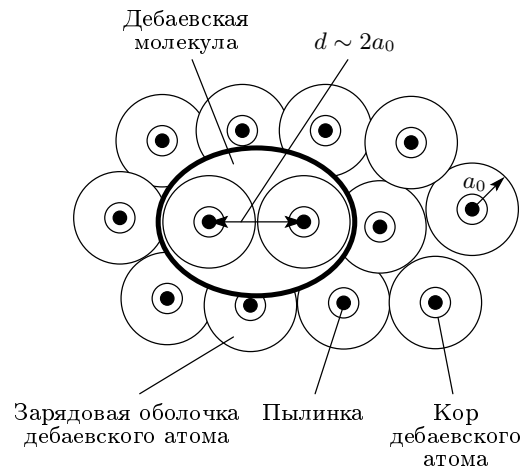


Рис. 1. Схема совокупности дебаевских атомов и дебаевская молекула

Будем рассматривать наиболее интересную ситуацию, когда радиус пылинки r_p много меньше расстояния между пылинками $r_0 = r_p / r_D \ll a_0$. В экспериментах [3] $N_p = 5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$, соответственно, $a_p = 0.755$, при этом условия малости радиуса пылинки выполняются:

$$a_p r_D / r_p = a_0 / r_0 = 34.$$

Результаты рассмотрения уравнения (8) для сферически-симметричного случая ($k = 2$) показывают [25, 26], что при не очень большом заряде

$$z_p \equiv Z_p e^2 / r_D T < a_0^3 / 3$$

малой частицы, $r_0 \ll a_0$, распределения заряда, поля и потенциала вокруг пылинки определяются соответственно выражениями

$$\begin{aligned} z(r) &= \frac{a_0^3}{3} \left[1 - \left(\frac{r}{a_0} \right)^3 \right], \quad E(r) = \frac{z(r)}{r^2}, \\ \varphi(r) &= \frac{a_0^3}{3} \left[\frac{a_0}{r} - \frac{3}{2} + \left(\frac{r}{2a_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

При большом заряде $z_p > a_0^3 / 3$ вдали от поверхности пылинки, при

$$r_0 - 3r_0^2 / a_0^3 > r > a_0,$$

по-прежнему справедливы выражения (9). Изменение зависимостей происходит вблизи поверхности ($r < r_0 - 3r_0^2 / a_0^3$), где наблюдается резкое уменьшение $z(r)$, $E(r)$ и $\varphi(r)$ (см. рис. 2, а также [25]). Иначе говоря, при большом заряде пылинки дебаевский

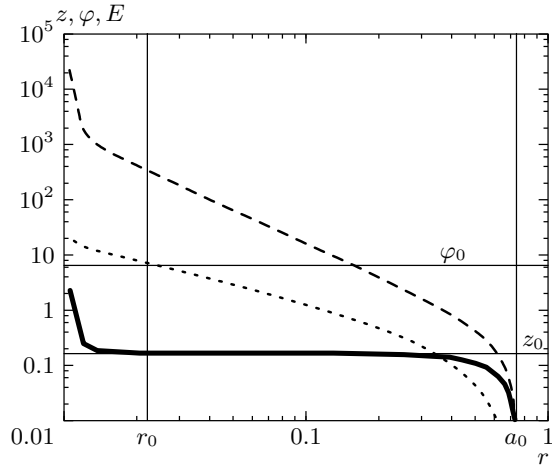


Рис. 2. Зависимости заряда z (сплошная кривая), напряженности поля E (пунктир) и потенциала φ (штриховая кривая) от расстояния до центра частицы r , измеренного в единицах дебаевского радиуса ($\delta = 0$). Радиус дебаевского атома $a_0 = a_p \equiv N_p^{-1/3}/2r_D = 0.755$ выбран для условий экспериментов [3]: $T = 1700$ К, $N_p = 5 \cdot 10^7$ см $^{-3}$, $N_{e0} = 2.5 \cdot 10^{10}$ см $^{-3}$, $r_D = 18$ мкм, $r_p = 0.4$ мкм, $r_0 = r_p/r_D = 2.23 \cdot 10^{-2}$

атом имеет некоторый кор из зарядовой оболочки вблизи поверхности пылинки. Заряд пылинки вместе с кором равен $z_{cor} \equiv a_0^3/3$. Экранировка этого «оставшегося» заряда имеет место на большом расстоянии r , близком к a_0 .

Условие большого заряда частицы

$$z_p \equiv Z_p e^2 / r_D T > z_{cor}$$

может быть переписано для заряда пылинки, измеренного в единицах электронного заряда:

$$Z_p > Z_{cor} \equiv \frac{\pi N_{e0}}{6 N_p}$$

Согласно измерениям [3], заряд пылинок велик:

$$Z_p = 500 > Z_{cor} = 262, \quad z_p = 0.273 > z_{cor} = 0.143.$$

Однако из расчетов следует (см. рис. 2), что при измеренных в [3] значениях плотности и температуры электронов для данного радиуса пылинок их заряд в состоянии теплового равновесия должен иметь значение $Z_p = 286$ ($z_p = 0.156$), меньшее измеренного $Z_p \approx 500$. Следовательно, либо измерения параметров плазмы существенно неточны, либо заряд пылинок в условиях экспериментов [3] неравновесен (см. также [24]).

3.1.3. Дебаевский атом в плазме

В случае $\delta \neq 0$, когда зарядовые облака состоят из частиц обоих знаков, радиус дебаевского атома по-прежнему определяется как расстояние $r = a_0$, на котором заряд пылинки полностью компенсируется свободными зарядами плазмы ($E(a_0) = 0$). Как и в случае $\delta = 0$, радиус дебаевского атома равен половине среднего расстояния между пылинками. При $\delta = 1$ может рассматриваться одна изолированная пылинка в бесконечном объеме плазмы. При $\delta \rightarrow 1$ радиус дебаевского атома стремится к бесконечности, $a_0 \rightarrow \infty$. Дело в том, что конечный заряд частицы z_0 может полностью компенсироваться квазинейтральной плазмой только при ее бесконечных размерах. Если $\delta < 1$, радиус дебаевского атома конечен.

Электронный и ионный безразмерные заряды, содержащиеся в зарядовой оболочке, определяются выражениями

$$z_{0e} = \int_{r_0}^{a_0} \exp(\varphi(r)) r^2 dr, \tag{10}$$

$$z_{0i} = \delta \int_{r_0}^{a_0} \exp(-\varphi(r)) r^2 dr, \quad z_0 = z_{0e} - z_{0i}.$$

Величина $\delta_1 \equiv z_{0i}/z_{0e}$ дает отношение свободно-го заряда ионов в дебаевском атоме к заряду электронов. Вообще говоря, величина δ_1 должна быть сложной функцией параметров δ , a_0 и φ_0 . Однако в тех случаях, когда основной вклад в интегрирование (10) вносит область малых значений потенциала $\varphi(r) \ll 1$, можно приближенно положить $\delta_1 \approx \delta$.

Зависимости z_{0e} , z_{0i} и δ_1 от δ иллюстрирует рис. 3. В результатах, представленных на рис. 3, величина a_0 для разных значений δ выбиралась максимально большой для радиуса пылинки, соответствующего экспериментам [3]:

$$r_0 = r_p/r_D = 2.23 \cdot 10^{-2}.$$

Это осуществлялось пристрелкой: при выборе значения a_0 больше того, которое представлено на рис. 3, заряд частицы становится бесконечно большим, $z(r_0) \rightarrow \infty$. Полученные зависимости $z(r)$, $\varphi(r)$ использовались для определения $z_0 = z(r_0)$, $\varphi_0 = \varphi(r_0)$ при $r_0 = 0.1$ (см. также рис. 4).

Видно, что с ростом δ за счет увеличения объема дебаевского атома растет число как положительных, так и отрицательных зарядов в его оболочке (см. рис. 3). В то же время число некомпенсированных

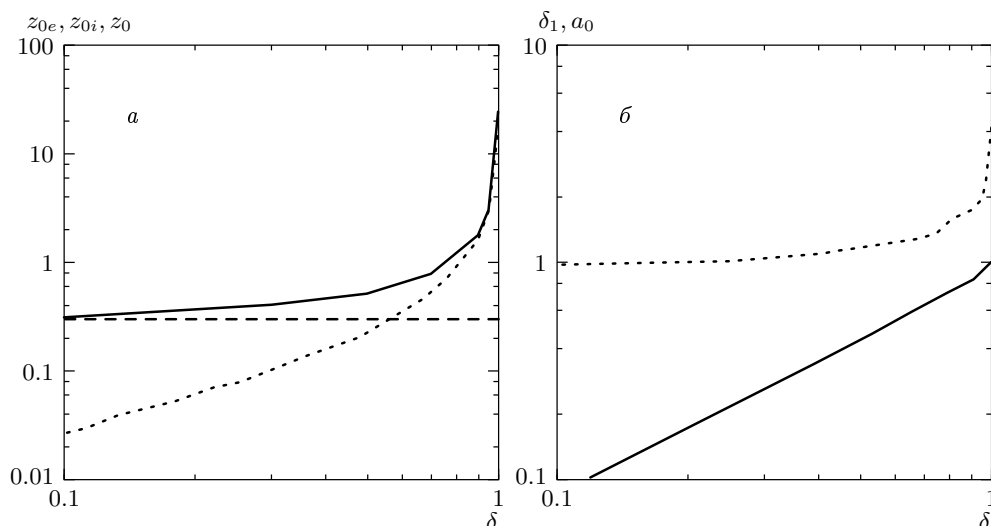


Рис. 3. Связь параметров, характеризующих пылевую плазму, с параметрами дебаевского атома: *a* — зависимости безразмерного заряда электронной z_{0e} (сплошная кривая) и ионной z_{0i} (пунктир) оболочек, а также некомпенсированного заряда оболочки $z_0 = z_{0e} - z_{0i}$ (штриховая кривая) от параметра δ ; *b* — зависимости параметра δ_1 , характеризующего отношение полного числа ионов в дебаевском атоме к числу электронов (сплошная кривая), и радиуса дебаевского атома a_0 (пунктир) от параметра δ , характеризующего отношение числа ионов к числу электронов на границе дебаевского атома. Параметры пылинки $r_0 = 0.1$, $\varphi(r_0) = 2.4$, $z(r) = 0.28$

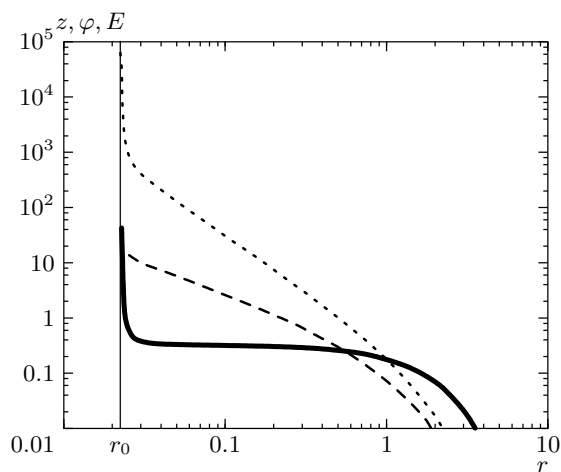


Рис. 4. Зависимости заряда z (сплошная кривая), напряженности поля E (пунктир) и потенциала φ (штриховая кривая) от расстояния до центра частицы r , измеренного в единицах дебаевского радиуса ($\delta = 0.999$). Радиус микрочастицы $r_0 = 2.23 \cdot 10^{-2}$ выбран для условий экспериментов [2]

зарядов $z_0 = z_{0e} - z_{0i}$ практически не меняется с изменением δ . В рассмотренной области параметров $\delta_1 \approx \delta$.

Как и в случае $\delta = 0$, при заданном значении r_0 величина a_0 не может быть сколь угодно большой

при сколь угодно большом значении заряда частицы z_0 . При большом значении $E_0 = z_0/r_0^2$ на расстоянии $r - r_0 \sim 1/E_0$ от поверхности частицы для зависимостей $z(r)$, $E(r)$, $\varphi(r)$ наблюдается резкое падение, обусловленное экранировкой зарядами противоположного знака (см. рис. 4). При этом величина a_0 ограничена некоторым предельным значением $a_{0max} \equiv a_0(E_0 \rightarrow \infty)$. Это предельное значение логарифмически растет при $\delta \rightarrow 1$:

$$a_{0max} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-\delta} + \frac{1}{2}$$

при $0.9 \leq \delta \leq 0.999$ (см. [25]).

В связи с тем, что дебаевский атом имеет кор, экранирующий заряд пылинки, рассматривая взаимодействие дебаевских атомов, нельзя придавать пылинке неэкранированное значение заряда.

3.2. О характере взаимодействия пылинок

3.2.1. О взаимодействии неполяризованных частиц

Если представить себе ситуацию, при которой оболочки дебаевских атомов, находящихся на расстоянии d , не взаимодействуют друг с другом, то между пылинками силы притяжения возникнуть не могут. Будут иметь место только силы отталкива-

ния. Действительно, для неполяризованных оболочек сила взаимодействия выражается в виде

$$f(d) = z_{eff}(d)z_p/d^2.$$

Здесь $z_{eff}(d) = E(d)d^2$ — суммарный заряд, находящийся внутри сферы радиуса d вокруг пылинки (некомпенсированная часть заряда пылинки). В силу квазинейтральности дебаевского атома $z_{eff}(r) \geq 0$ при $r > r_0$. Заряды одного знака отталкиваются:

$$z_{eff}(d)z_p \geq 0.$$

Для того чтобы возникли силы притяжения, необходима перестройка (поляризация) зарядовых оболочек. При этом на оси дебаевской молекулы должно возрасти число зарядов, притягивающих пылинку к центру молекулы.

3.2.2. О взаимодействии заряженных плоскостей

Уравнение Пуассона–Больцмана (4) в плоском случае ($k = 0$) допускает решение в квадратурах. Это позволяет рассмотреть силу взаимодействия плоскостей и определить требования к точности решения этого уравнения вблизи поверхности пылинки.

Рассмотрение показывает, что электростатическое взаимодействие как между плоскостями, окруженными облаком зарядов одного знака, так и между плоскостями, помещенными в плазму, приводит к расталкиванию этих плоскостей [10, 11]. Для иллюстрации рассмотрим случай $\delta = 0$, позволяющий получить простые аналитические выражения, которые понадобятся для оценки требований к точности расчета значений поля и потенциала вблизи поверхности пылинки.

Рассмотрим электростатическое давление на заряженную проводящую плоскость, находящуюся между двумя проводящими плоскостями (левой и правой) с такой же плотностью зарядов. При необходимости одну из плоскостей можно удалить на бесконечное расстояние.

Интегрирование уравнения Пуассона–Больцмана для плоского случая дает [11]

$$\varphi(x) = \ln(E^2 + E_1^2), \quad E(x) = E_1 \operatorname{tg}[(a_0 - x)E_1/2].$$

Величины $E_1 \equiv \exp(\varphi_1/2)$ и φ_1 связаны с a_0 соотношением

$$a_0 = \frac{2}{E_1} \operatorname{arctg} \frac{E_0}{E_1}.$$

Здесь x — расстояние до рассматриваемой плоскости, которая для простоты считается бесконечно тонкой, φ_1 — значение потенциала в точке a_0 , где напряженность поля равна нулю. При равной плотности зарядов на плоскостях a_0 равно половине расстояния между плоскостями.

Хотя потенциал слева и справа на проводящей плоскости одинаков, $\varphi(-0) = \varphi(0) = \varphi_0$, напряженности поля на поверхности рассматриваемой плоскости слева $E(-0) = E_{01}$ и справа $E(0) = E_{02}$ различаются. При этом возникает электростатическое давление p на плоскость:

$$p = E_{02}^2 - E_{01}^2.$$

Величина a_0 является монотонно убывающей функцией E_1 . Соответственно, если, например, расстояние до левой плоскости $2a_{01}$ больше расстояния до правой плоскости $2a_{02}$, то $E_{01} > E_{02}$ и $p < 0$. Иначе говоря, результирующая сила давления направлена в сторону наиболее удаленной плоскости. В частности, при удалении одной из плоскостей на бесконечное расстояние оставшиеся две плоскости будут расталкиваться.

Таким образом, притяжение пылинок может возникнуть лишь в неплоской геометрии.

3.2.3. О точности вычисления потенциала вблизи поверхности

При численном интегрировании уравнения Пуассона–Больцмана значение напряженности поля определяется в точках сетки, на которой строится разностная схема. Определяемое приближенно значение E_0 соответствует значению поля на расстоянии от поверхности пылинки порядка шага сетки. Рассмотрим, к какой погрешности определяемого давления приводит неточность в определении положения значения E_0 . Относительная погрешность давления, определяемого по точкам, отстоящим от плоскости на расстояния x и $-x$, в плоской геометрии дается выражением

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{|p - (E^2(-x) - E^2(x))|}{p}. \quad (11)$$

Как видно из рис. 5, если потенциал плоскости не мал, $\varphi_0 \gg 1$, даже на небольших расстояниях $x \sim 0.01$ величина $\Delta p/p$ составляет десятки процентов, в то время как разность потенциалов слева и справа, $\varphi(-x) - \varphi(x)$, практически равна нулю. Иначе говоря, при численном интегрировании необходима очень высокая точность в определении производной от потенциала вблизи поверхности частицы, что

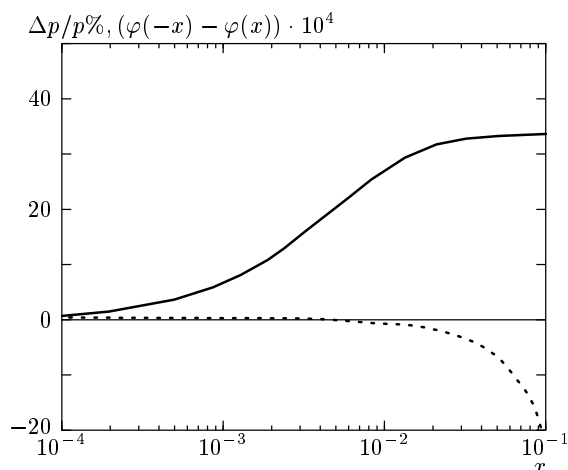


Рис. 5. Зависимости от расстояния до плоскости x погрешности в определении давления (см. (11)) на проводящую плоскость и разности потенциалов слева и справа от плоскости. Рассматриваемая плоскость находится между двумя другими заряженными плоскостями, все плоскости находятся под потенциалом $\varphi_0 = 10$. Половина расстояния до левой плоскости $a_0 = 6.27$, до правой $a_0 = 2.08$; при этом $p = 2$

требует очень мелкого шага сетки вблизи поверхности.

В то же время для точного нахождения величины силы, действующей на частицу, метод решения уравнения Пуассона–Больцмана должен обеспечивать максимальную точность именно в области вблизи поверхности пылинок. При этом основной интерес представляют расстояния между пылинками, намного превышающие их диаметр. В обычных системах координат трудно добиться достаточной точности в вычислении силы, действующей на малые пылинки.

4. МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУХЦЕНТРОВОЙ ЗАДАЧИ

4.1. Координаты Кассини

Мы использовали ортогональные координаты, построенные на основе известного овала Кассини [20, 21] для некоторого его частного случая.

Связь переменных u, v , задающих точку на овале Кассини с декартовыми координатами в квадранте $x > 0, y > 0$, определяется следующими выражения-

ми:

$$x(u, v) = \frac{d}{2\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{\exp 2u+2 \exp u \cos v+1} + \exp u \cos v+1}, \quad (12a)$$

$$y(u, v) = \frac{d}{2\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{\exp 2u+2 \exp u \cos v+1} - \exp u \cos v-1}. \quad (12b)$$

Для всей плоскости zy координатная сетка получается зеркальным отражением относительно осей z и y (d — расстояние между фокусами овалов, расположенными в точках $(-d/2, 0), (d/2, 0)$). Переменная $\infty > u > -\infty$ является некоторым аналогом радиальной переменной. При $u < 0$ кривая представляет собой два независимых овала; при $u = 0$ координатная линия представляет собой лемнискату Бернулли, т. е. овал с бесконечно узкой «талией». При $0.65 > u > 0$ имеет место овал с «талией», а при $u > 0.65$ овал имеет эллипсообразную форму. Переменная $\pi > v > 0$ аналогична углу в полярных координатах. При $v = 0$ точка лежит на луче $(d/2, \infty)$ по оси абсцисс; при $v = \pi$ геометрическое место точек приближается к углу, образуемому отрезком $(0, d/2)$ по оси абсцисс и лучом $(0, \infty)$ по оси ординат. Характер координатных линий иллюстрирует рис. 6. Использование координат (12) дает следующие важные преимущества. Во-первых, семейство овалов Кассини качественно соответствует картине эквипотенциалей для двух одинаково заряженных частиц, находящихся в фокусах овала. Во-вторых, область решения уравнения в этих координатах становится прямоугольной. В-третьих, плотность овалов экспоненциально сгущается к поверхности пылинок. Это позволяет использовать равномерную сетку даже при больших расстояниях между частицами малых размеров.

4.2. О методе решения

Не останавливаясь на деталях, приведем основные сведения о методе решения. Координатами Кассини особенно удобно пользоваться в ситуации, когда радиус пылинок r_0 много меньше как дебаевского радиуса, $r_0 \ll 1$, так и радиуса дебаевского атома, $r_0 \ll a_0$. Тогда, рассматривая область достаточно больших расстояний между частицами, $d > 5r_0$, малые пылинки можно считать овалами Кассини, близкими к окружностям. На малом овале удобно

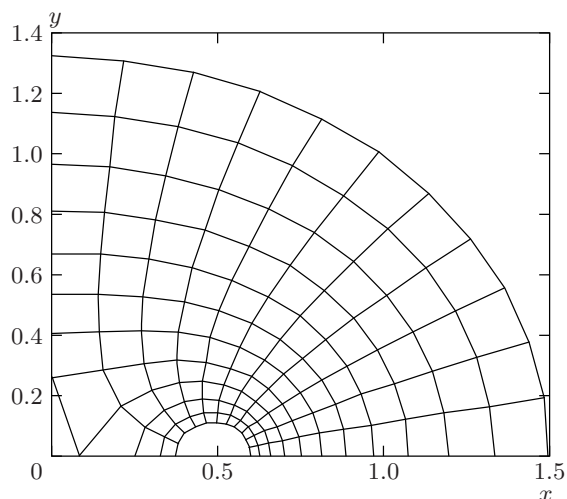


Рис. 6. Координаты Кассини для расстояния между фокусами $d = 1$, которое при $a_0 \approx 1$ примерно соответствует смене притяжения отталкиванием

задать значение потенциала φ_0 . В то же время облако зарядов, охватывающее пылинки, при $d < 5a_0$ описывается эллипсообразным овалом. На этом овале удобно задать нулевое значение поля.

Поверхность пылинки и внешняя поверхность, соответствующая границе дебаевской молекулы (где поле обращается в нуль), описываются в координатах (8) константами

$$\begin{aligned} u_{min} &= \ln \left(\frac{4r_0}{d^2} (d + r_0) \right), \\ u_{max} &= \ln \left(\frac{4a_0}{d^2} (d + a_0) \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Граничные условия (2) при этом имеют вид

$$\varphi|_{u=u_{min}} = \varphi_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=u_{max}} = 0. \tag{14}$$

Уравнение Пуассона–Больцмана (3) с граничными условиями (13), (14) решалось методом итераций Гаусса–Ньютона с использованием пакета программ MATLAB.

Характер изменения потенциала в координатах Кассини и в декартовых координатах иллюстрирует рис. 7.

Для расчета заряда и силы взаимодействия пылинок рассматривались трехмерные координаты, образованные вращением плоских координат (8) вокруг оси x . В этих координатах вычислялась сила

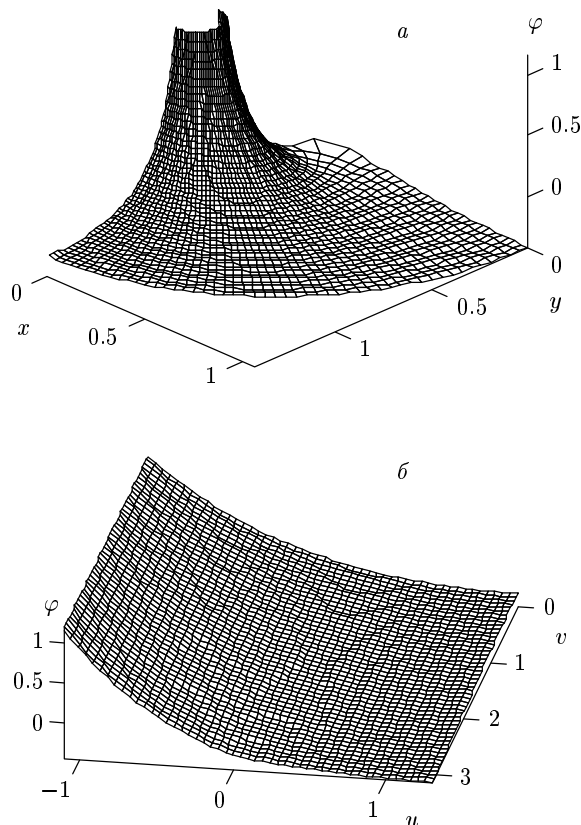


Рис. 7. Потенциальные поверхности в декартовых координатах $\varphi(x, y)$ (а) и в координатах Кассини $\varphi(u, v)$ (б). Решение для случая: $\delta = 0, d = 1, r_0 = 0.1, a_0 = 0.755, \varphi_0 = 1.16$

взаимодействия пылинок по формуле (7). Энергия взаимодействия пылинок вычислялась по формуле

$$U(d) = \int_d^\infty f(x) dx + \text{const}. \tag{15}$$

Обычно константа подбиралась так, чтобы в минимуме энергии $U(d)$ равнялась нулю,

$$\min(U(d)) = 0.$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

5.1. Дебаевская молекула в облаке зарядов одного знака ($\delta = 0$)

5.1.1. Выбор параметров расчетов

Расчеты проводились для таких параметров φ_0, r_0, a_0 , которые при $d \gg a_0$ соответствуют уединенному дебаевскому атому. Для этого сначала решалась

сферически-симметричная задача, в которой значения поля и потенциала в точке $r = a_0$ полагались равными нулю. Из решения этой задачи определялся потенциал φ_0 на частице заданного радиуса r_0 . Затем с этими значениями φ_0, r_0, a_0 решалась двухцентровая задача для $d = 10a_0$. Результаты решения для сферически-симметричной и для двухцентральной задачи совпадали с высокой точностью. В дальнейшей серии расчетов переходили к меньшим значениям d .

В серии расчетов, результаты которых представлены на рис. 8, мы ориентировались на параметры плазмы из работы [3] и положили $a_0 = 0.755$. Как показали расчеты, наиболее интересна область сравнительно больших расстояний $d \sim 2a_0$. Полагая, что при $d \sim 2r_0$ облако электронов вблизи поверхности пылинок поляризуется слабо, и для удобства вычислений мы взяли радиус частицы $r_0 = 0.1$ в пять раз больше, чем в эксперименте. Соответственно, потенциал $\varphi_0 = 1.16$, взятый из решения одноцентральной задачи для $r_0 = 0.1$, имеет значение, существенно меньшее потенциала на поверхности пылинки малого радиуса ($\varphi_0 = 6.5$ при $r_0 = 0.0223$). Иначе говоря, небольшой заряженный проводящий шарик был заменен проводящим шариком большего размера с зарядом, частично компенсированным зарядами электронного облака. Как показали расчеты, глубокие электронные оболочки действительно поляризуются слабо и такая замена оправдана (см. ниже).

5.1.2. Зависимость силы взаимодействия пылинок от расстояния

Для определения зависимости силы взаимодействия пылинок от расстояния d между ними проводились серии расчетов с заданными значениями φ_0, r_0, a_0 . При этом заряд частицы z_0 также оказывается функцией d . Поэтому проводились дополнительные расчеты со значениями φ_0 или a_0 , измененными таким образом, чтобы заряд частицы z_0 не зависел от d .

Расчеты показали, что при малых расстояниях между частицами, $d \sim r_0$, имеет место отталкивание. Это не согласуется с результатами численных расчетов [8, 9], в которых при $d \sim r_0$ имело место притяжение. По-видимому, в расчетах [8, 9] отмечавшаяся выше погрешность вычисления производной потенциала вблизи поверхности пылинки была высокой. К этой погрешности очень чувствительна результирующая сила. В действительности, ввиду того что близкие к поверхности пылинки зарядовые оболочки поляризуются слабо, на близких расстоя-

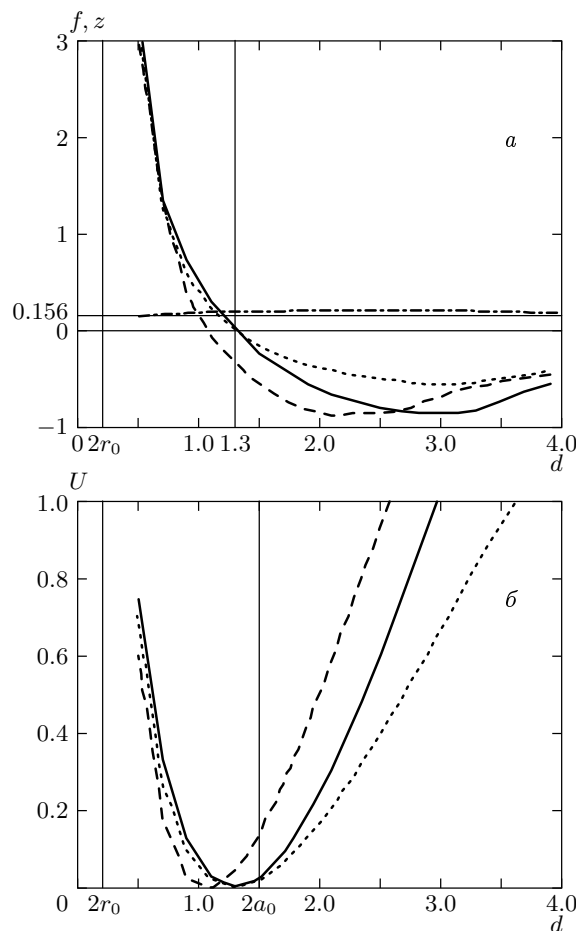


Рис. 8. Зависимости проекции силы на ось x (а) и потенциальной энергии взаимодействия пылинок (б) от расстояния d между ними для случая $\delta = 0$. Положительное значение силы соответствует отталкиванию пылинок, отрицательное — притяжению. Нормировка потенциальной энергии выбрана так, чтобы в минимуме энергия $U(d)$ равнялась нулю. Сплошные кривые соответствуют постоянному потенциалу на поверхностях пылинок $\varphi_0 = 1.16$; пунктир соответствует постоянному заряду пылинки $z_0 = 0.156$, обеспеченному подбором $\varphi_0(d)$, штрихи — постоянному заряду, обеспеченному подбором $a_0(d)$ при $\varphi_0 = 1.16$. На рис. а штрихпунктирная кривая дает зависимость заряда пылинки от расстояния d для случая постоянного потенциала $\varphi_0 = 1.16$

ниях отталкивание зарядов преобладает над поляризационным притяжением.

Большой интерес представляет равновесное расстояние между пылинками $d = d_0$, на котором происходит смена знака проекции силы. В расчетах, представленных на рис. 8, имеем $d_0 \approx 1.3$, что несколь-

ко меньше среднего расстояния между пылинками $2a_0 = 1.5$. Положение точки d_0 слабо зависит от того, какие величины (φ_0 , a_0 или z_0 , a_0) сохранялись в расчетах при изменении d . Изменение a_0 (при постоянных значениях z_0 , φ_0) влияет на значение d_0 более существенно. По-видимому, удержание постоянного заряда $z_0 = \text{const}$ за счет изменения потенциала частицы $\varphi_0 = \varphi_0(d)$ больше соответствует физике взаимодействия заряженных пылинок.

В связи с тем, что при $d \gg a_0$ задачу нельзя считать бинарной, мы приводим результаты расчетов лишь для сравнительно небольших значений $d < 4a_0$. При удалении частиц на расстояния $d > 2a_0$ становится существенным отталкивание от других частиц, окружающих две рассматриваемые частицы (см. рис. 1).

Зная силу притяжения пылинок $F(2a_0)$ на среднем межчастичном расстоянии $2a_0$, можно оценить электростатическое давление, сжимающее газ пылинок,

$$P_E \approx F(2a_0)N_p^{2/3} = (T^2/8\pi e^2) N_p^{2/3} f(2a_0) \quad (16)$$

и поверхностное натяжение «пылевой жидкости»

$$\sigma_E \approx FN_p^{1/3} = (N_p^{1/3}T^2/8\pi e^2) f(2a_0).$$

Сравнивая электростатическое давление на пылинки с газокINETическим давлением пылинок и газокINETическим давлением свободных электронов, получаем

$$P_E/N_pT = (T/8\pi e^2 N_p^{1/3}) f(2a_0),$$

$$P_E/N_eT = (T/8\pi e^2 N_e) N_p^{2/3} f(2a_0).$$

В условиях экспериментов [3] имеем

$$|f(2a_0)| \approx 0.2,$$

$$P_E = 9.7 \cdot 10^{-7} |f(2a_0)| \text{ Торр} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ Торр},$$

$$\sigma_E = 3.5 \cdot 10^{-9} |f(2a_0)| \text{ Н/м} \approx 7 \cdot 10^{-10} \text{ Н/м},$$

$$P_E/N_pT \approx 20, \quad P_E/N_eT \approx 0.04.$$

Следует, впрочем, отметить, что сравнение электростатического давления на пылинки с газодинамическим электронным давлением не позволяет сделать каких-либо существенных выводов, поскольку электроны не свободны, а находятся в электрическом поле пылинок. В то же время можно предположить, что газ дебаевских атомов в смеси с нейтральным газом, должен проявлять в условиях экспериментов [3] тенденцию к сжатию. Такого рода ситуация рассмотрена в работах [27–29]. Рассмотрение вопросов влияния взаимодействия дебаевских атомов на газодинамические свойства пылевой плазмы выходит за рамки данной работы.

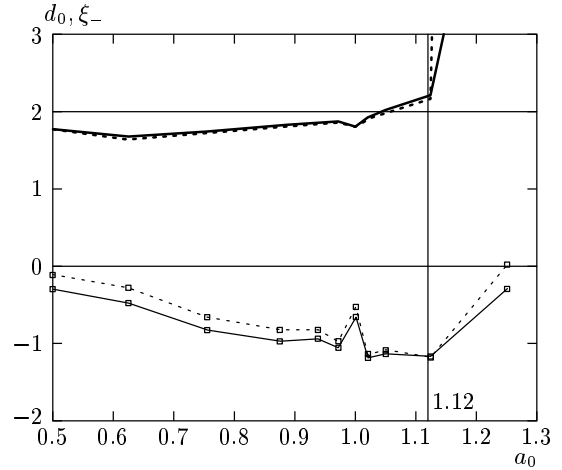


Рис. 9. Зависимости координаты d_0 точки смены знака силы (жирные кривые) и крутизны силы ξ в точке d_0 (тонкие кривые с квадратами) от размера дебаевского атома a_0 . Сплошные кривые соответствуют не зависящему от d потенциалу на поверхностях пылинок, который соответствует a_0 ; пунктир — постоянному заряду пылинки, обеспеченному подбором $\varphi_0(d)$

5.1.3. Зависимость от размера дебаевского атома

Было проведено несколько серий расчетов для различных значений a_0 (см. рис. 9). Расчеты показали, что притяжение имеет место лишь при $a_0 \leq 1$. Уже при $a_0 > 1.12$ точка смены знака силы удаляется на большое расстояние $d_0 > 4a_0$.

Условие $a_0 = a_p/r_D < 1$ можно переписать для размерных величин в виде

$$N_{e0} > N_{ecr} \equiv \frac{T}{\pi e^2} N_p^{3/2}. \quad (17)$$

Электростатические силы сжатия обращаются в нуль, когда $d_0 = 2a_0$, т. е. при $a_0 = 1$. Соответственно условие $a_0 = 1$ или $N_e = N_{ecr}$ является условием равновесия газа дебаевских атомов.

При этом условие большого заряда частицы, $z_p > 1/3$, может быть переписано для заряда пылинки в единицах электронного заряда следующим образом:

$$Z_p > Z_{ecr} \equiv \frac{\pi}{6} \frac{N_{ecr}}{N_p}.$$

В условиях эксперимента имеем $N_{ecr} = 4.4 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$ и $Z_{ecr} = 460$. Эти величины по порядку величины не отличаются от измеренных в экспериментах [3] $N_{e0} \approx 2.5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ и $Z_p \approx 500$.

Ввиду того что на основании рассмотрения двух дебаевских атомов нельзя определить глубину потенциальной ямы без учета воздействия других частиц, силу взаимодействия дебаевских атомов будем характеризовать крутизной в точке пересечения с осью абсцисс:

$$\xi = f'(d)|_{d=d_0} = U''(d)|_{d=d_0}.$$

Через величину ξ выражается частота колебаний пылинок вокруг положения равновесия

$$\omega = |\xi|^{1/2}\omega_0,$$

где $\omega_0 = v_T/a_p$, $v_T = \sqrt{2T/m_p}$ — тепловая скорость пылинок, m_p — их масса. В условиях экспериментов [3] имеем $m_p \approx 2 \cdot 10^{-12}$ г, $v_T \sim 0.5$ см/с, $a_p \approx 1.4 \cdot 10^{-3}$ см. Отсюда следует частота колебаний $\omega_0 = 357$ с $^{-1}$ и период колебаний $2\pi/\omega_0 = 18$ мс. Из рис. 9 видно, что наиболее сильная связь имеет место при $0.5 < a_0 < 1$. В этих условиях газ дебаевских атомов должен стремиться к сжатию (ср. [29]).

Для пылинок малого радиуса меньше и размер дебаевского атома. Например, максимальное значение радиуса дебаевского атома $a_{0max} \equiv a_0(z_0 \rightarrow \infty)$ как функция r_0 может быть аппроксимировано выражением $a_{0max} = 3r_0^{0.3}$ или $r_0 = (a_{0max}/3)^{10/3}$ при $r_0 < 0.02$ [25]. Поэтому радиус пылинки должен быть не слишком большим и не слишком маленьким. При $0.5 < a_{0max} < 1$ имеем условие $2.5 \cdot 10^{-3} < r_0 < 2.6 \cdot 10^{-2}$. В экспериментах [3] $r_0 = 2.23 \cdot 10^{-2}$ и это условие выполняется.

5.1.4. О влиянии размера пылинки

Как указано выше, в расчетах небольшой заряженный проводящий шарик заменяется проводящим шариком большего размера с зарядом, частично компенсированным свободными зарядами оболочки дебаевского атома. Возникает естественный вопрос, насколько такая замена адекватна. Для ответа на него было проведено несколько серий расчетов с разными значениями r_0 и, соответственно, φ_0 . При радиусах пылинки, малых по сравнению с радиусом дебаевского атома a_0 , различие результатов расчетов невелико. Например, в случае $a_0 = 0.755$ (см. рис. 10) при изменении радиуса пылинки в диапазоне $r_0 = 0.1-0.2$ (и выборе значения φ_0 , соответствующего данному значению r_0) отличия в положении точки смены притяжения отталкиванием $d_0 = 1.28$ имеют разброс менее 2%, что соответствует имеющейся точности расчета.

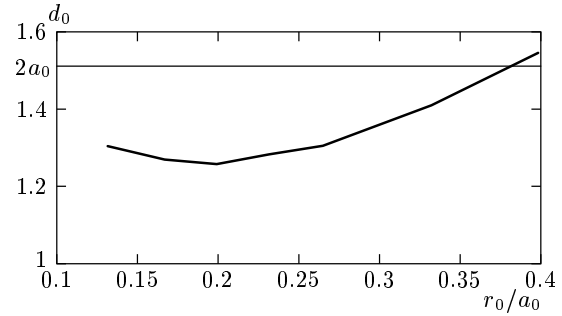


Рис. 10. Зависимость координаты d_0 точки смены знака силы от r_0/a_0 . Здесь r_0 можно рассматривать как радиус области, в которой пренебрегается поляризацией зарядового облака. Потенциал φ_0 для $r = r_0$ определялся при $a_0 = 0.755$

Существенное влияние размеров пылинки имеет место при $r_0 > 0.3a_0$. При $r_0 > 0.4$ поляризационное притяжение настолько уменьшается, что координата точки смены знака силы становится больше среднего межчастичного расстояния, $d_0 > 2a_0$. Из этого можно заключить, что существенный вклад в поляризационные силы вносят заряды, находящиеся на расстоянии $r \approx 0.3a_0$ от центра пылинки, а не только периферия дебаевского атома $r \approx a_0$. Иначе говоря, сила притяжения формируется за счет поляризации большинства электронов зарядовой оболочки. В связи с этим сложно надеяться на вычисление сил притяжения с помощью каких-либо приближенных методов.

5.2. Дебаевская молекула в облаке заряда обоих знаков ($\delta \neq 0$)

5.2.1. Зависимость силы взаимодействия пылинок от расстояния

В случае двух дебаевских атомов, находящихся в почти квазинейтральной плазме ($1 - \delta \ll 1$), расстояние между ними можно брать сколь угодно большим (см. рис. 1). Однако, для того чтобы взаимодействие можно было считать бинарным, необходимо выполнить условие $N_p^{-1/3} \gg 2a_0r_D$. Напомним, что радиус дебаевского атома при $1 - \delta \ll 1$ может существенно превышать дебаевский радиус, $a_0 > 1$ (см. выше и [25]).

Как и в случае $\delta = 0$, для определения зависимости силы взаимодействия пылинок от расстояния d проводились серии расчетов с заданными значениями φ_0 , r_0 , a_0 для дебаевского атома. При этом проводились дополнительные расчеты со значениями φ_0 или a_0 , измененными таким образом, чтобы заряд

Параметры расчетов для различных значений δ на рис. 11

Тип кривой, рисунок	δ	a_0	φ_0	z_0
Пунктирные кривые на рис. <i>a, б</i>	0.999	4.1	2.455	0.282
Штриховые кривые на рис. <i>a, б</i>	0.9	1.71	2.426	0.283
Штрих-пунктирные кривые на рис. <i>в, г</i>	0.7	1.288	2.413	0.272
Пунктирные кривые на рис. <i>в, г</i>	0.5	1.12	2.378	0.286
Штриховые кривые на рис. <i>в, г</i>	0.3	1.018	2.364	0.286
Сплошные толстые кривые <i>в, г</i>	0.1	0.94	2.292	0.279

частиц z_0 не зависел от d . Как и в случае $\delta = 0$, мы выбирали r_0 больше радиуса кора атома, моделируя пылинку проводящим шариком большего размера с зарядом, частично компенсированным свободными зарядами оболочки дебаевского атома. Тем самым поляризацией кора пренебрегалось.

В результатах, представленных на рис. 11, величина a_0 для разных значений δ (см. таблицу) выбиралась соответствующей предельно большому заряду для радиуса пылинки, соответствующего экспериментам [3]:

$$r_0 = r_p/r_D = 2.23 \cdot 10^{-2}.$$

Это осуществлялось пристрелкой: при выборе значения a_0 больше того, которое представлено в таблице, заряд частицы становится бесконечно большим, $z(r_0) \rightarrow \infty$. Полученные зависимости $z(r)$, $\varphi(r)$ использовались для определения $z_0 = z(r_0)$, $\varphi_0 = \varphi(r_0)$ при $r_0 = 0.1$.

При $1 - \delta \ll 1$ в рассмотренном диапазоне параметров притяжение пылинок обнаружить не удалось. Оно возникает лишь в тех случаях, когда заметную долю положительного заряда плазмы несут пылинки (при $\delta < 0.7$, см. рис. 11). При этом чем меньше доля зарядов плазмы, тем больше максимальная сила притяжения и глубина потенциальной ямы.

Ослабление сил притяжения с ростом δ имеет простое объяснение. Как следует из приведенных выше расчетов для $\delta = 0$, силы притяжения возникают за счет того, что электроны скапливаются вблизи оси x между центрами пылинок и обеспечивают притяжение к центру дебаевской молекулы. Это притяжение превышает силу отталкивания зарядов пылинок, экранированную внутренними слоями электронных оболочек дебаевских атомов. При $1 - \delta \ll 1$ эффект экранировки заряда пылинки

внутренними слоями электронных оболочек остается прежним. Однако притяжение к центру молекулы существенно ослабевает из-за того, что в этой области концентрируются не только электроны, но и положительные заряды, отталкивающие пылинки.

В случае малых значений заряда плазмы, $\delta \ll 1$, глубина потенциальной ямы довольно велика, порядка нескольких значений температуры. Однако следует помнить, что бинарное рассмотрение справедливо на расстояниях порядка диаметра дебаевского атома $2a_0$.

5.2.2. Об аналитических подходах

Изложенный выше вывод об отсутствии притяжения при $1 - \delta \ll 1$ не согласуется с данными недавних приближенных аналитических рассмотрений [12, 13] (см. рис. 11). Из результатов этих работ следует, что при $\delta = 1$ в области

$$r > \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = 1.93$$

при рассмотрении линеаризованного уравнения Пуассона–Больцмана имеет место притяжение пылинок.

Этот результат вызывает удивление. Дело в том, что в линейном приближении [12, 13] воздействие точечных зарядов (находящихся в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2) на плазму считается независимым, так что значение потенциала в точке \mathbf{r} определяется суммой экранированных потенциалов точечных зарядов:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|),$$

$$\Phi(x) = (z_p \sqrt{2}/x) \exp(-x/\sqrt{2}), \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = d.$$

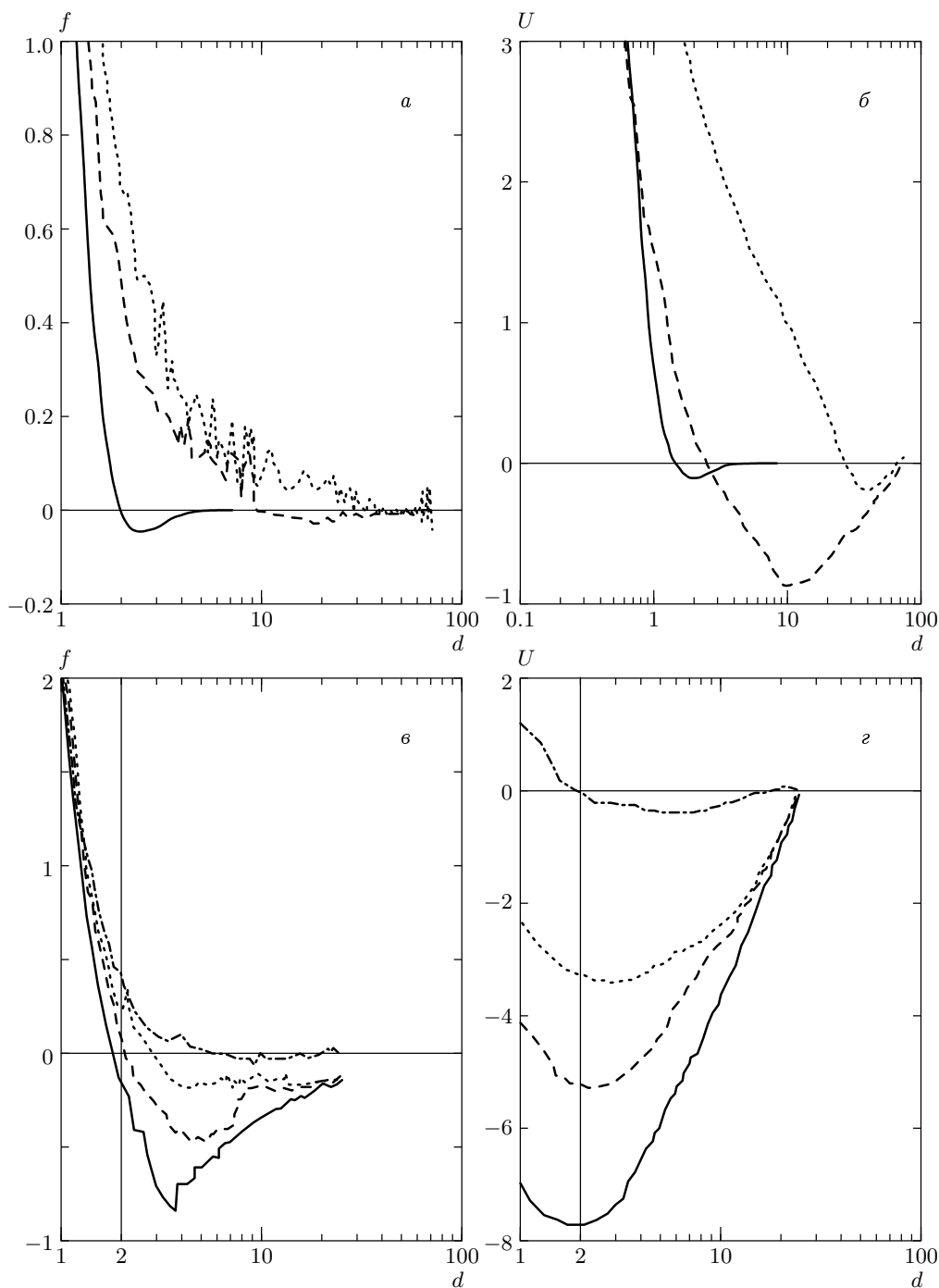


Рис. 11. Зависимости проекции силы на ось x ($a, в$) и потенциальной энергии U ($б, г$) взаимодействия пылинок от расстояния d между ними для разных значений $\delta \neq 0$ (см. таблицу). Во всех случаях $r_0 = 0.1$. Сплошные кривые соответствуют аналитическим выражениям работы [7]: $f(d) = \text{const}(1/d)(1 + d - d^2/2) \exp(-d)$; $U(d) = \text{const}(1/d^2)(1 - d/2) \exp(-d)$

Согласно простым соображениям, изложенным выше в разд. 3.2, в отсутствие перестройки зарядовой оболочки одной пылинки под воздействием дру-

гой пылинки для одноименно заряженных пылинок не могут иметь место силы притяжения. В линейном приближении [12, 13] должно быть

$$f(d) = -z_p \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \Big|_{x=d} = z_p^2 \frac{\sqrt{2} + d}{d^2} \exp\left(-\frac{d}{\sqrt{2}}\right) > 0, \quad (18)$$

что соответствует отталкиванию.

Неточность результатов [12, 13], по-видимому, связана со следующим обстоятельством. К силе (18), действующей непосредственно на пылинку, в работах [12, 13] прибавлена сила притяжения, действующая на электронную оболочку пылинки со стороны второй пылинки. Такое приближение было бы оправданным, если бы зарядовые оболочки пылинок были бы жестко связаны с зарядами пылинок какими-то другими силами. Однако таких сторонних жестких сил в рассматриваемой задаче нет. Наличие вычисленной в работах [12, 13] силы притяжения электронной оболочки одного заряда к другому заряду говорит лишь о том, что данная конфигурация зарядовой оболочки не является равновесной, а сила притяжения к другому заряду должна приводить к поляризации зарядовой оболочки, которая в работах [12, 13] не учтена. Нет никаких оснований складывать эту поляризующую силу с силой, действующей непосредственно на пылинку.

Здесь уместна аналогия с поляризационными силами притяжения атомов, существенными на больших расстояниях между ядрами по сравнению с размерами электронных оболочек. Как известно, для сферически-симметричных атомов поляризационное взаимодействие в первом порядке теории возмущений не имеет места. Оно возникает лишь во втором порядке теории возмущений, когда учитывается поляризация электронной оболочки одного атома зарядами другого атома. Обычный атом отличается от дебаевского атома лишь тем, что в нем электроны оболочки двигаются по квантовым, а не классическим законам. Природа же возникновения поляризационных сил у обычного атома и дебаевского атома одинакова.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги проведенного рассмотрения.

1. Дебаевский атом имеет следующую структуру: кор и электронная оболочка. При больших зарядах пылинки область электронного облака высокой плотности (кор) существенно экранирует большой заряд пылинки вблизи ее поверхности. В связи с этим, рассматривая взаимодействие дебаевских атомов, нельзя приписывать пылинке неэкранированное значение заряда. Заряд пылинки, экранирован-

ной кором, имеет универсальное значение, определяемое расстоянием между пылинками. Он экранируется электронной оболочкой дебаевского атома.

2. Силы притяжения обусловлены поляризацией зарядовых оболочек дебаевских атомов. В отсутствие поляризации отсутствует и притяжение. Сила притяжения формируется за счет поляризации большей части электронов зарядовой оболочки. Поляризация кора несущественна.

3. Силы притяжения пылинок возникают на сравнительно большом расстоянии, примерно равном среднему расстоянию между пылинками. При этом дебаевский радиус должен быть примерно равен половине среднего расстояния между пылинками.

4. Притяжение имеет место, если заряды одного из знаков сосредоточены преимущественно на пылинках. Если пылинки несут малую долю заряда одного из знаков, на всех расстояниях имеет место отталкивание пылинок.

5. При некотором соотношении между плотностью электронов и плотностью пылинок имеет место равновесие дебаевской «жидкости»: электростатические силы взаимодействия пылинок обращаются в нуль.

Ввиду того что силы притяжения возникают на больших расстояниях, корректно решить задачу о формировании пылевых жидкостей и кристаллов можно лишь, учитывая многочастичное взаимодействие пылинок. Однако на основании представленных здесь результатов можно сделать два важных вывода о критериях проявления коллективных явлений:

а) в случае термоэлектронной плазмы плотность электронов должна быть такой, чтобы дебаевский радиус примерно равнялся половине среднего расстояния между пылинками;

б) в плазме газового разряда и в ядерно-возбуждаемой плазме свойства источника ионизации и плотность пылинок должны быть согласованы так, чтобы основной (обычно отрицательный) заряд несли пылинки.

Авторы признательны А. Н. Ткачеву за обсуждение результатов данной работы и работ [12, 13], а также Ю. И. Сыцько за обсуждения вычислительных аспектов задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Фортов, И. Т. Якубов, *Неидеальная плазма*, Энергоатомиздат, Москва (1994).

2. Н. Н. Цытович, УФН **167**, 57 (1997).
3. В. Е. Фортов, А. П. Нефедов, О. Ф. Петров, А. А. Самарян, А. В. Чернышев, ЖЭТФ **111**, 467 (1997).
4. В. Е. Фортов, В. С. Филинов, А. П. Нефедов, О. Ф. Петров, А. А. Самарян, А. М. Липаев, ЖЭТФ **111**, 889 (1997).
5. В. Е. Фортов, В. И. Владимиров, Л. В. Депутатова, В. И. Молотков, А. П. Нефедов, В. А. Рыков, В. М. Торчинский, А. В. Худяков, ДАН **336**, 184 (1999).
6. А. П. Нефедов, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, УФН **167**, 1215 (1997).
7. А. Н. Ткачев, С. И. Яковленко, ЖТФ **69**, 53 (1999).
8. С. И. Яковленко, Письма в ЖТФ **25**(16), 83 (1999).
9. С. И. Яковленко, Кратк. сообщ. физ. ФИАН № 9, 3 (1999).
10. В. Derjagin and L. Landau, Acta Physicochimica U.R.S.S., **XIV**, 633 (1941).
11. С. И. Яковленко, Письма в ЖТФ **27**(9), 83 (2001).
12. Д. Н. Герасимов, О. А. Синкевич, Теплофизика высоких температур **37**, 853 (1999).
13. А. S. Ivanov, Phys. Lett. A **290**, 304 (2001).
14. A. M. Larsen and D. G. Grier, Nature (London) **385**, 230 (1997).
15. D. G. Grier, Nature (London) **393**, 621 (1998).
16. W. R. Bowen and A. O. Sharif, Nature (London) **393**, 663 (1998).
17. J. C. New, Phys. Rev. Lett. **82**, 1072 (1999).
18. M. Tokuyama, Phys. Rev. **59**, R2250 (1999).
19. В. А. Гундиенков, С. И. Яковленко, Кратк. сообщ. физ. ФИАН № 12, 3 (2001); Письма в ЖТФ **28**(10), 46 (2001).
20. *Математический энциклопедический словарь*, гл. ред. Ю. В. Прохорова, Изд-во «Большая российская энциклопедия», Москва (1995).
21. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1964).
22. А. Н. Ткачев, С. И. Яковленко, Письма в ЖТФ **25**(1), 52 (1999).
23. С. И. Яковленко, Письма в ЖТФ **26**(16), 47 (1999).
24. С. И. Яковленко, Письма в ЖТФ **26**(26), 38 (2000).
25. С. И. Яковленко, Кратк. сообщ. физ. ФИАН № 1, 3 (2002).
26. E. G. Gibson, Phys. Rev. **9**, 2389 (1996).
27. С. А. Майоров, А. Н. Ткачев, С. И. Яковленко, УФН **164**, 298 (1994).
28. S. A. Mayorov, A. N. Tkachev, S. I. Yakovlenko, Physica Scripta **51**, 498 (1995).
29. С. И. Яковленко, Изв. ВУЗов, Физика **38**, 3 (1995).