ЖЭТФ, 2002, том 122, вып. 5 (11), стр. 1093–1106

КАТАСТРОФА СБОРКИ В МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПОЛОЖЕНИЯХ РАВНОВЕСИЯ

Б. И. Сулейманов [*]

Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук
450077, Уфа, Россия

Поступила в редакцию 27 ноября 2001 г.

Исследованы решения уравнений $v_x + v^3 - tv + x = 0$ и $v_{xx} = v^3 - tv + x$, описывающие зарождения доменных стенок, которые происходят около точек сборки медленно меняющихся положений равновесия. Рассмотрены примеры, связанные с диффузией в плавно неоднородных средах.

PACS: 02.90.+p, 66.10.-b

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Дифференциальные уравнения в частных производных (УЧП)

$$L(S, D_S)u(S) = \sum_{i+j=1}^{2} A_{ij}(S)\frac{\partial^{i+j}u}{\partial s_1^i \partial s_2^j} G(S,u) \quad (S=(s_1,s_2)) \qquad (1.1)$$

описывают многочисленные явления в неоднородных средах. К сожалению, в общем случае их решения аналитическому исследованию не поддаются.

Явного решения нет даже у простейшего уравнения первого порядка

$$p\frac{\partial u}{\partial s_1} + q\frac{\partial u}{\partial s_2} = G(S,u) \quad (p>0, q>0 \text{ — постоянные}) \qquad (1.2)$$

для локального параметра стационарной плоской среды в заданном поле скоростей (p,q) [1, с.150, 158]. Еще сложнее исследование решений уравнений второго порядка, таких как стационарная часть

$$p_1\frac{\partial u}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} = G(S,u) \quad (p_1 \text{ — постоянная}) \qquad (1.3)$$

двумерного нелинейного уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + p_1\frac{\partial u}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} = G(S,u), \qquad (1.4)$$

в котором помимо случайного блуждания частиц учтен их дрейф с постоянной скоростью в одном из направлений [2, с. 44] (при отсутствии дрейфа первых производных $u(S)$ в стационарном уравнении диффузии

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} = G(S,u) \qquad (1.5)$$

нет), или нестационарное одномерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} = G(S,u). \qquad (1.6)$$

Но для рассматриваемых в данной статье плавных [3, 4] неоднородностей

$$A_{ij}(S) = h_{ij}(\varepsilon S), \quad G(S,u) = f(\varepsilon S, u) \quad \varepsilon \ll 1 \qquad (1.7)$$

ситуация иная: для описания решений (1.1), (1.7) и эквивалентных им УЧП

$$L(X, \varepsilon D_X)u(X) = f(X,u), \quad X = \varepsilon S, \qquad (1.8)$$

имеются эффективные методы (см. [4–15] и указанные там ссылки).

1.2. Решения УЧП (1.8) часто имеют асимптотические разложения

$$u = u_0(X) + \varepsilon u_1(X) + \varepsilon^2 u_2(X) + \ldots, \qquad (1.9)$$

в которых $u = u_0(X)$ есть медленно меняющиеся положения равновесия УЧП (1.1), (1.7):

$$f(X, u_0) = 0, \quad X = (x_1, x_2). \qquad (1.10)$$

[*] E-mail: bis@imat.rb.ru

Приведем лишь несколько из решаемых при их помощи начальных задач.

1) Пусть локальный параметр среды, являющийся решением УЧП (1.2), (1.7), при $s_1 = 0$ задан медленно меняющейся функцией $g(\varepsilon s_2)$. Тогда растяжения $x_1 = \varepsilon s_1$, $x_2 = \varepsilon s_2$ проблему описания данной среды сводят к решению задачи

$$\varepsilon\left(p\frac{\partial u}{\partial x_1} + q\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = f(x_1, x_2, u), \quad u|_{x_1=0} = g(x_2). \tag{1.11}$$

Если на интервале $0 \le x_1 \le K$ решение $u = u_0(X)$ предельного к УЧП (1.11) уравнения (1.10) единственно и удовлетворяет условию устойчивости

$$f_u(x_1, x_2, u_0(x_1, x_2)) < 0, \tag{1.12}$$

то вне бесконечно (при $\varepsilon \to 0$) малой окрестности прямой $x_1 = 0$ решение начальной задачи (1.11) имеет на этом интервале асимптотические разложения (1.9) [10].

2) При схожих ограничениях на функции $u(0, s_2)$ и $G(S, u)$ на бесконечно (при $\varepsilon \to 0$) малом расстоянии от прямой $x_1 = 0$ в ряд (1.9) разлагается решение начальной задачи для уравнения (1.6), (1.7) (см. разд. 2.3).

3) В случае функции стока (1.7) и начального значения $u|_{\zeta=0} = g(\varepsilon S)$ начальная задача для уравнения диффузии (1.4) заменой $X = \varepsilon S$ сводится к задаче

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \varepsilon p_1\frac{\partial u}{\partial x_1} - \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x_1, x_2, u), \quad u|_{\zeta=0} = g(X). \tag{1.13}$$

В тех же предположениях о $f(X, u)$ ее решение при $\zeta \gg 1$ выходит на асимптотическое решение вида (1.9) уравнения

$$\varepsilon p_1\frac{\partial u}{\partial x_1} - \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x_1, x_2, u). \tag{1.14}$$

4) Асимптотические разложения решения начальной задачи (1.13) есть сумма правой части (1.9) и ряда

$$\Pi_0(\zeta, X) + \varepsilon\Pi_1(\zeta, X) + \varepsilon^2\Pi_2(\zeta, X) + \ldots$$

из экспоненциально малых при $\zeta \gg 1$ (см. начало разд. 4.2) членов.

Отметим, что стремление решения задачи (1.13) к корню $u_0(X)$ при $\zeta \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ очевидно: согласно (1.12) это есть асимптотически устойчивое положение равновесия предельного к уравнению обыкновенного дифференциального уравнения (1.13) (ОДУ)

$$u_\zeta = f(X, u),$$

которое от других его решений отличается на экспоненциально малые при $\zeta \to \infty$ величины [16, с. 289]. По аналогичной причине к $u_0(X)$ стремятся решения задачи (1.11) и рассматриваемой в разд. 4 начальной задачи.

Вообще, частая представимость решений УЧП вида (1.8) рядами (1.9) объясняется именно тем, насколько часто корни уравнений (1.10) удовлетворяют условиям типа (1.12): так как для большинства гладких функций $f(X, u)$ обращение в нуль $f_u(X, u_0(X))$ возможно лишь на отдельных линиях плоскости X [17, 18], в областях, таких линий не содержащих, условие (1.12) выполнено примерно для половины из всех гладких функций $f(X, u)$.

Приведем еще пример краевых задач, который свидетельствует, что при выполнении данного условия асимптотические разложения (1.9) присущи решениям не только начальных задач. Пусть в замкнутой области G с гладкой границей dG уравнение (1.10) имеет три корня, из которых условию (1.12) удовлетворяют минимальный $u_0^1(X)$ и максимальный $u_0^3(X)$. Предположим, что $u(X, \varepsilon)$ в области G удовлетворяет эквивалентному УЧП (1.5), (1.7) уравнению

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x_1, x_2, u), \tag{1.15}$$

а на dG — одному из двух краевых условий

$$u|_{dG} = a(X) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{dG} = b(X), \tag{1.16}$$

где n — нормаль к dG. При выполнении еще некоторых условий по сторонам определяемой уравнением

$$\int\limits_{u_0^1(x_1,x_2)}^{u_0^3(x_1,x_2)} f(x_1, x_2, u)du = 0 \tag{1.17}$$

ударной кривой решения задач (1.15), (1.16) имеют два разных асимптотических разложения вида (1.9): в одном главный член есть $u_0^1(X)$, а во втором — $u_0^3(X)$ [11–13][1)].

1) Гладкий переход от одного из этих асимптотических разложений к другому происходит в окрестности кривой (1.17), размеры которой в переменных S конечны: в них подобные (вида сглаженных ударных волн) асимптотические решения УЧП (1.8) представляют собой доменные стенки [3].

1.3. В работах, посвященных решению физических задач (см., например, [3–5]), описываемые рядами (1.9) простые состояния упоминают лишь мимоходом. При этом, однако, игнорируется проблема, связанная с типичностью [17, 18] на плоскости X линий нулей $f_u(X, u_0(X))$ (они состоят из образуемых точками складки гладких участков, соединенных в точках сборки), а значит, и с типичностью потери пригодности асимптотических разложений (1.9) в точках складок и сборок $u_0(X)$.

Впрочем, для ОДУ вида (1.8) случай складки в решении предельного уравнения (1.10) уже довольно подробно проанализирован [19–23]. И понятно, что по схожей схеме случай этой особенности нужно исследовать и для решений УЧП (в разд. 4 такого сорта исследование проводится). В частности, ясно, что в окрестностях точек складки корней (1.10) поведение соответствующих решений УЧП (1.8) также описывается с помощью решений ОДУ Риккати

$$\Gamma_\xi = \xi - \Gamma^2, \tag{1.18}$$

или (при отсутствии в (1.8) первых производных) ОДУ Пенлеве

$$\Gamma_{\xi\xi} = \xi - \Gamma^2.$$

Случай же сборки, характерный лишь для УЧП, не рассматривался совсем. Между тем без его анализа трудно понять, во что асимптотические разложения (1.9) преобразуются «за» точкой сборки: ведь даже если «до» нее решение уравнения (1.10) было однозначно, то «за» ней — внутри области перехлеста корней (1.10) — оно уже трехзначно (см. разд. 2.2). Например, предположение об образовании при этом доменной стенки с фронтом, локализованным около определяемой из правила равенства площадей (1.17) кривой, для большинства случаев неверно: из проводимого в разд. 2, 3 и 5 анализа окрестностей точек сборки корней (1.10) следует, что образование такой доменной стенки характерно лишь для решений УЧП (1.8), не содержащих производных $u(X)$ первого порядка. А основной вывод из этого анализа состоит в том, что для решений большинства УЧП вида (1.8) типично формирование из них доменных стенок с фронтами, локализованными в исчезающе (при $\varepsilon \to 0$) узкой окрестности одной из границ области перехлеста корней уравнения (1.10).

Раздел 4 настоящей работы посвящен примеру, разбор которого проясняет вопрос о влиянии на формирующиеся «за» точкой сборки структуры членов УЧП (1.8) со вторыми производными[2)]. Но суть большей части рассуждений этого раздела и используемых ранее одинакова, и при первом чтении его можно пропустить.

2. ЭТАЛОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. В этом разделе показывается, что решения УЧП (1.8), имеющие асимптотические разложения (1.9), около точек сборки $u_0(X)$ описываются с помощью решений ОДУ Абеля

$$P(v, x) = v_x + v^3 - tv + x = 0 \tag{2.1}$$

или (если в УЧП (1.8) $h_{10}(X) = h_{01}(X) = 0$) одного из ОДУ

$$v_{xx} = v^3 - tv + x, \quad v_{xx} + v^3 - tv + x = 0, \tag{2.2}$$

и что главный член $g(x,t)$ асимптотических разложений при $x^2 + t^2 \to \infty$ используемых при этом решений (2.1) и (2.2) в областях их согласования [15] с асимптотическими разложениями (1.9) есть корень уравнения

$$g^3 - tg + x = 0. \tag{2.3}$$

2.2. Начнем с изложения некоторых выводов, содержащихся в книге [18].

1) На плоскости X типичны точки сборки X^*, для которых равны нулю три первых коэффициента рядов Тейлора гладких функций $f(X^*, u)$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial u^j}(X^*, u^*)(u - u^*)^j$$

в точках u^*, являющихся корнями уравнений $f(X^*, u) = 0$. Так как за счет x_1^* и x_2^* на разложения в точках $(X = X^*, u = u^*)$ функций $f(X, u)$ можно наложить не более двух ограничений, в их рядах Тейлора в этих точках

$$\begin{aligned} f(X,u) = {} & a(x_1 - x_1^*) + b(x_2 - x_2^*) + (u - u^*) \times \\ & \times [c(x_1 - x_1^*) + d(x_2 - x_2^*)] + e(u - u^*)^3 + \\ & + \sum_{i+j>1} c_{ij0}(x_1 - x_1^*)^i (x_2 - x_2^*)^j + (u - u^*) \times \\ & \times \sum_{i+j>1} c_{ij1}(x_1 - x_1^*)^i (x_2 - x_2^*)^j + \\ & + \sum_{k>3} c_{00k}(u - u^*)^k + \\ & + \sum_{k>1} (u - u^*)^k \sum_{i+j>0} c_{ijk}(x_1 - x_1^*)^i (x_2 - x_2^*)^j \end{aligned} \tag{2.4}$$

[2)] Об отношении доменных стенок — решений стационарного УЧП (1.14) — к решениям нестационарного уравнения диффузии (1.4), (1.7) сказано в Заключении.

наряду с постоянной e отличны от нуля и постоянные a, b, c, d.

2) Имеются такие постоянные c_{ij}^k [18, с. 45, 46, 52], что замены

$$u - u^* = \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij}^0 Y^i Z^j + U\left[1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} c_{ij}^1 Y^i Z^j\right] + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} U^k \sum_{i+j=0}^{\infty} c_{ij}^k Y^i Z^j, \quad (2.5)$$

$$Y = a(x_1 - x_1^*) + b(x_2 - x_2^*), \quad Z = c(x_1 - x_1^*) + d(x_2 - x_2^*)$$

переводят уравнение (1.10), определяемое рядом (2.4), в уравнение

$$\delta(Y, Z) + \sigma(Y, Z)U + eU^3 = 0, \qquad (2.6)$$

$$\delta(Y, Z) = Z + \sum_{i+j>1} \delta_{ij} Y^i Z^j, \\ \sigma(Y, Z) = Y + \sum_{i=j>1} \sigma_{ij} Y^i Z^j. \qquad (2.7)$$

3) При $e\sigma \geq 0$ уравнение (2.6) имеет единственный корень, а при $e\sigma < 0$ он единственен лишь вне интервала перехлеста

$$|\delta| < \frac{(-4\sigma^3)^{1/2}}{(27e)^{1/2}},$$

внутри которого решение (2.6) трехзначно. Трехзначен тут также и весь ряд (2.5).

2.3. В окрестности точки сборки нужно перейти к растянутым переменным. Так как главный член ряда (2.5), будучи решением уравнения (2.6), зависит и от δ, и от σ, после растяжений все три слагаемых из левой части этого уравнения, очевидно, должны быть сбалансированы: если порядок малости U в новых переменных будет ε^k, то $\delta(Y, Z)$ и $\sigma(Y, Z)$ должны в них быть соответственно порядка ε^{3k} и ε^{2k}. Из этого соображения и из вида рядов (2.5), (2.7) ясно, что растяжения следует вводить согласно соотношениям

$$Z = \varepsilon^{3k} z, \quad Y = \varepsilon^{2k} y, \quad u - u^* = \varepsilon^k V, \qquad (2.8)$$

где $k > 0$ — постоянная. В результате этих растяжений ряд (2.4) принимает вид разложения

$$f(X, u) = \\ = \varepsilon^{3k}\left(z + yV + eV^3 + \sum_{j>1} \varepsilon^{jk} P_j(z, y, V)\right), \qquad (2.9)$$

так что согласно общей идеологии метода согласования асимптотических разложений [15] k надо выбрать так, чтобы в переменных (2.8) левая часть УЧП (1.8) также была порядка ε^{3k}.

Операции дифференцирования по x_1 и x_2 в новых переменных в главном по параметру ε порядке представляют собой дифференцирование по переменной z:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{a}{\varepsilon^{3k}}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{c}{\varepsilon^{2k}}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{b}{\varepsilon^{3k}}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{d}{\varepsilon^{2k}}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Поэтому после замен (2.8) оператор $L(X, \varepsilon D_X)$ (см. (1.1), (1.7)) из левой части УЧП (1.8) в основном сводится к дифференцированию по z:

$$L(X, \varepsilon D_X) = \varepsilon \frac{M}{\varepsilon^{3k}}\frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{N}{\varepsilon^{6k}}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \ldots \qquad (2.10)$$

(в случае общего положения константы

$$M = ah_{10}(X^*) + bh_{01}(X^*)$$

и

$$N = a^2 h_{20}(X^*) + abh_{11}(X^*) + b^2 h_{02}(X^*)$$

нулю не равны, см. разд. 2.2). И, таким образом, k находится из уравнения

$$\min(1 - 2k, 2 - 5k) = 3k.$$

Решая его, получаем, что $k = 1/5$ и замены (2.8) переводят (1.8) в уравнение

$$M\frac{\partial V}{\partial z} - z - yV - eV^3 = O(\varepsilon^{1/5}),$$

предельным к которому является ОДУ первого порядка. Этот вывод, конечно, справедлив и при $N = 0$, важно лишь отличие от нуля постоянной M (для УЧП (1.2), (1.3) и (1.6) она равна, соответственно, $pa + qb$, $p_1 a$ и a).

А вот для УЧП (1.8), не содержащего производных первого порядка, постоянная M равна нулю. Из правых частей (2.9), (2.10) следует, что в этом случае $k = 1/4$ и замены (2.8) сводят такое УЧП (1.8) к уравнению вида

$$N\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - z - yV - eV^3 = O(\varepsilon^{1/4})$$

(для стационарного уравнения диффузии (1.15) $N = -a^2 - b^2$).

2.4 При указанном выборе постоянной k подстановка рядов

$$V = V_0(z, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{nk} V_n(z, y) \qquad (2.11)$$

в уравнения, получающиеся из УЧП (1.8) в результате преобразований (2.8), и приравнивание в результате членов при различных степенях ε определяют ОДУ для коэффициентов рядов (2.11). ОДУ для их главных членов имеют вид

$$M\frac{\partial V_0}{\partial z} - z - yV_0 - eV_0^3 = 0, \tag{2.12}$$

если в УЧП (1.8) входят первые производные $u(X)$, а если их нет, то вид

$$N\frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} - z - yV_0 - eV_0^3 = 0. \tag{2.13}$$

ОДУ (2.12) переводится в ОДУ (2.1) заменой

$$\begin{aligned} z &= -\left(\frac{M^3}{e}\right)^{1/5} x, \quad y = -(M^2 e)^{1/5} t, \\ V_0 &= -\left(\frac{M}{e^2}\right)^{1/5} v, \end{aligned} \tag{2.14}$$

а ОДУ (2.13) переводится в ОДУ (2.2) соответственно заменой

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{sgn}(e)\left(\frac{N^3}{e}\right)^{1/8} x, \\ y &= -\operatorname{sgn}(e)(Ne)^{1/4} t, \\ V_0 &= -\left(\frac{N}{e^3}\right)^{1/8} v. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Требование согласованности поведения асимптотических разложений (1.9) при $X \to X^*$ с поведением при $y^2 + z^2 \to \infty$ ряда (2.11) задает условия для асимптотики $V_n(z, y)$. Из правой части (2.9), в частности, следует, что главный член асимптотик $V_0(z, y)$ при $y^2 + z^2 \to \infty$ в области согласованности асимптотических разложений (1.9) и (2.11) есть корень уравнения, получающегося из ОДУ (2.12), (2.13) при замене членов с производными на нуль. Каждой из замен (2.14) и (2.15) этот корень переводится в корень (2.3).

3. СПЕЦИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (2.1)

3.1. При рассмотрении решений УЧП (1.8), главные члены $u_0(X)$ асимптотических разложений (1.9) которых имеют точки сборки, наиболее важно понять, во что ряды (1.9) трансформируются «за» этими точками. Поэтому из всех свойств соответствующего решения ОДУ (2.1) в первую очередь нас будет интересовать его поведение при $t \to \infty$.

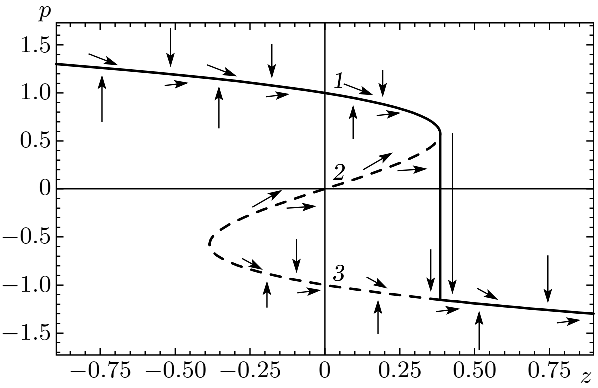

Рис. 1. Направления вектора фазовой скорости системы (3.3) (стрелки), изображение предела при $t = \infty$ рассматриваемого решения системы (3.3) (сплошная линия) и ветви *1, 2, 3* кривой $z = p - p^3$ (штриховые линии в местах их несовпадения со сплошной линией)

Замены

$$s = \frac{x}{|t|^{3/2}}, \quad v(x,t) = |t|^{1/2} r(s,t) \tag{3.1}$$

сводят решения эталонного ОДУ (2.1) к решениям

$$p(s,t) = r(s,t), \quad z = s \tag{3.2}$$

быстро-медленной автономной системы

$$|t|^{-5/2} p_s = \operatorname{sgn}(t) p - z - p^3, \quad z_s = 1, \tag{3.3}$$

что позволяет прояснить этот вопрос при помощи следующего рассуждения[3)].

Поскольку вектор фазовой скорости системы (3.3) $(t^{5/2}(p - p^3 - z), 1)$ имеет изображенные на рис. 1 направления (в отличие от ветви *2* кривой $z(p) = p - p^3$ на ее ветвях *1* и *3* выполнено условие устойчивости $(p - p^3 - z)'_p = 1 - 3p^2 < 0$), ясно, что при возрастании s от $-\infty$ до значения, соответствующего моменту исчезновения ветви *1*

$$s = s_0 = \frac{2}{3^{3/2}}, \tag{3.4}$$

соответствующее решение (3.2) системы (3.3) будет перемещаться вблизи этой ветви, а затем, сорвавшись в малую окрестность точки ($p = -2/3^{1/2}$, $z = s_0$) ветви *3*, при дальнейшем возрастании s будет всегда двигаться вблизи ветви *3*.

[3)] Оно сводится к конкретизации стандартного качественного анализа [24, с. 20–22] решений быстро-медленных систем общего вида.

Аналогичное рассуждение приводит к выводу, что для всех x главным членом асимптотики $v(x,t)$ при $t \to -\infty$ будет единственный корень уравнения (2.3): замены (3.1) переводят ОДУ (2.1) в уравнение

$$|t|^{-5/2} r_s = \operatorname{sgn}(t) r - r^3 - s, \qquad (3.5)$$

которое в пределе при $t \to -\infty$ переходит в кубическое уравнение

$$\operatorname{sgn}(t) r - r^3 - s = 0, \qquad (3.6)$$

имеющее при $t < 0$ лишь один корень $r = r_0(s)$. Поскольку

$$(\operatorname{sgn}(t) r - r^3 - s)'_r|_{r=r_0(s)} = \operatorname{sgn}(t) - 3r_0(s)^2 < 0, \quad (3.7)$$

возрастание s от $-\infty$ до ∞ будет, очевидно, сопровождаться движением описываемого решения ОДУ (3.5) вдоль этого корня (3.6).

3.2. Изложенные соображения позволяют сделать два вывода.

1) Главный член асимптотики $v(x,t)$ при $x^2 + t^2 \to \infty$ вне кривой «слипания» корней (2.3) $x = s_0 t^{3/2}$ совпадает с плавно меняющимся корнем (2.3).

2) Окрестность этой кривой «слипания» представляет собой ударный слой, при пересечении которого слева направо вдоль оси x значения $v(x,t)$ резко уменьшаются от величин $\sqrt{t/3}(1+o(1))$ до величин $-2\sqrt{t/3}(1+o(1))$.

Справедливость этих выводов была проверена с помощью численного моделирования поведения решения ОДУ (2.1), для которого предполагалось, что оно для любого t как при $x \to \infty$, так и при $x \to -\infty$ выходит на корень уравнения (2.3). Для моделирования, проводившегося на больших промежутках, $-L < x < L$, использовалась простейшая итерационная процедура

$$v_{new}(k) = v_{old}(k) + 0.05hP[v_{old}(k), k],$$

$$k = -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1,$$

в которой в качестве разностного аналога дифференциального оператора $P(v,x)$ из левой части (2.1) было выбрано отображение

$$P[v,k] = \frac{v_{k+1} - v_k}{h} + v_k^3 - tv_k + kh, \quad h = \frac{L}{N},$$

а нулевым приближением $v_{st}(k)$ при $k > 0$ ($k \le 0$) взята функция $g(kh,t)$, задаваемая определенным при всех отрицательных (неотрицательных) значениях x наибольшим (соответственно, наименьшим) из корней уравнения (2.3).

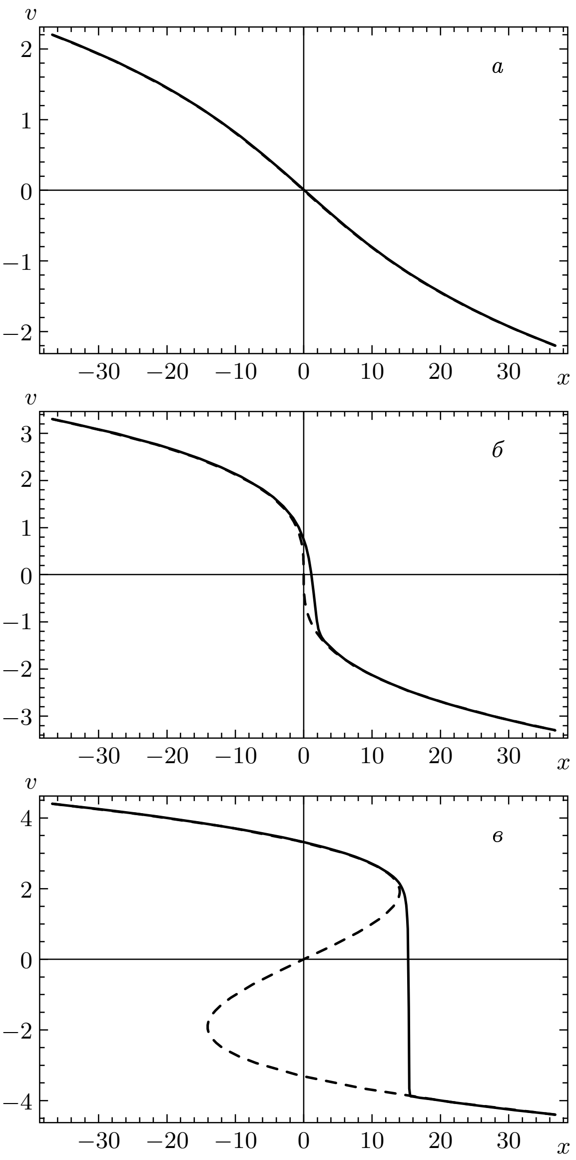

Рис. 2. Зависимости решения v уравнения (2.1) от x при различных t (сплошные линии) и графики корней кубического уравнения (2.3) в местах их несовпадения с графиками v (штриховые линии) в моменты $t = -11$ (*а*), 0 (*б*), 11 (*в*)

Результаты расчета по этой быстросходящейся процедуре, которые частично представлены на рис. 2, полностью подтверждают оба вывода.

3.3. Из изложенного выше и в монографии [24] следует, что по две стороны кривой $x = s_0 t^{3/2}$ полными асимптотическими разложениями $v(x,t)$ при $t \to \pm\infty$ являются ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_j(s)|t|^{(1-5j)/2},$$

где $r_0(s)$ — удовлетворяющие условию (3.7) корни кубического уравнения (3.6) (при $t>0$ разные для $s>s_0$ и для $s<s_0$), а $r_j(s)$ рекуррентно выражаются через $r_0(s)$ после подстановки в ОДУ (3.5) ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} r_j(s)|t|^{-5j/2} \tag{3.8}$$

и приравнивания в результате членов при разных степенях $|t|$.

Пригодные в окрестности прямой $t=0$ асимптотические разложения при $|x|\to\infty$ задаются рядом

$$v(x,t)=x^{1/3}\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\rho)x^{-5k/3}, \quad \rho=t/x^{2/3}, \tag{3.9}$$

где $g_0(\rho)$ — единственный корень уравнения

$$1-\rho g_0+g_0^3=0.$$

Из выписанных асимптотических разложений $v(x,t)$ при $t\to\pm\infty$ этот ряд получается после перехода в них от t и s к x и ρ. В самом деле, коэффициенты $r_n(s)$ асимптотического разложения (3.8) при $s\to\pm\infty$ имеют разложения

$$r_n(s)=\sum_{k=0}^{\infty} r_{nk}s^{(1-5k-2n)/3},$$

подстановки которых в произведения (3.8) на $|t|^{1/2}$ дают ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}|t|^{1/2-5k/2}s^{1/3-5k/3}\sum_{n=0}^{\infty} r_{nk}s^{-2n/3}= \\ =\sum_{k=0}^{\infty}x^{1/3-5k/3}\sum_{n=0}^{\infty} r_{nk}s^{-2n/3}.$$

После замены в последнем ряде $s^{-2/3}$ на $\operatorname{sgn}(t)\rho$ как раз и получается ряд (3.9).

3.4. Система ОДУ (3.3) при $t\gg 1$ очень похожа на систему ОДУ

$$\mu p_s=p-p^3-z, \quad z_s=p, \quad \mu\ll 1, \tag{3.10}$$

описывающую колебания осциллятора Ван-дер Поля [14, 24, 25]. Обе системы принадлежат общему классу быстро-медленных систем ОДУ, и, следуя, например [24], наше решение ОДУ (2.1) можно полностью описать и в окрестности кривой $x=s_0t^{3/2}$. К сожалению, соответствующие выкладки очень громоздки, и описание ударного слоя для рассматриваемого решения ОДУ (2.1) мы ограничим здесь примерно уровнем описания ударных слоев для решений (3.10) в книге [14] (оно фактически сводится к повторению изложенного в [14]).

В первом приближении скачок соответствующего решения $r(s,t)$ ОДУ (3.5) при переходе s через точку (3.4) задается сепаратрисным решением ОДУ

$$R_\sigma+\left(R-\frac{1}{3^{1/2}}\right)^2\left(R+\frac{2}{3^{1/2}}\right)=0, \\ \sigma=t^{5/2}\left(s-\frac{2}{3^{3/2}}\right)-T(t), \tag{3.11}$$

которое при $\sigma\to\infty$ экспоненциально убывает до значения $-2\cdot 3^{-1/2}$ и для которого при $\sigma\to-\infty$ справедлива асимптотика

$$R=\frac{1}{3^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}\sigma}-\frac{\ln|\sigma|}{3^{3/2}\sigma^2}+O\left(\frac{\ln^2|\sigma|}{\sigma^3}\right). \tag{3.12}$$

Асимптотики (3.11) и (3.12) определяют $R(\sigma)$ с точностью до функции $T(t)$, асимптотика которой при $t\to\infty$ находится лишь при построении приближений $r(s,t)$ более высокого порядка. При этом выясняется, что полное асимптотическое разложение

$$r_{int}(\sigma,t)=R(\sigma)+\ldots,$$

чьим главным членом является это сепаратрисное решение ОДУ (3.11), согласуется лишь с частью разложения (3.8), справедливой правее точки s_0 (соответствующее согласование проводится при $s\to s_0+0$ и $\sigma\to\infty$) — согласование при $\sigma\to-\infty$ асимптотического разложения $r_{int}(\sigma,t)$ и согласование при $s\to s_0-0$ части разложения (3.8), приближающей $r(s,t)$ левее точки s_0, проводятся с промежуточным разложением

$$r_{inm}(\nu,t)=\frac{1}{3^{1/2}}+\frac{w_1(\nu)}{t^{5/6}}+\frac{w_2(\nu)}{t^{5/3}}+\ldots, \tag{3.13}$$

которое зависит от своей масштабной переменной

$$\nu=t^{5/3}(s-s_0).$$

Его коэффициенты $w_j(\nu)$ однозначно находятся из рекуррентной последовательности ОДУ

$$\frac{dw_1}{d\nu}=-\nu-\sqrt{3}w_1^2, \tag{3.14}$$

$$\frac{dw_2}{d\nu}=-2\sqrt{3}w_1w_2-w_1^3, \tag{3.15}$$

$$\ldots$$

и из условий, накладываемых на поведение $w_j(\nu)$ при $\nu\to\infty$, следующих из согласования асимптотического разложения (3.13) с той частью ряда (3.8), что приближает $r(s,t)$ при $s<s_0$. ОДУ (3.14) растяжениями

$$\nu=-\frac{q}{3^{1/6}}, \quad w_1(\nu)=-\frac{\Gamma(q)}{3^{1/3}} \tag{3.16}$$

сводится к ОДУ (1.18) с независимой переменной q, общее решение которого

$$(\ln(c_1\mathrm{Ai}(q)+c_2\mathrm{Bi}(q)))'_q \tag{3.17}$$

представляет собой логарифмическую производную комбинации функций Эйри $\mathrm{Ai}(q)$ и $\mathrm{Bi}(q)$. Из известных [26] асимптотик $\mathrm{Ai}(q)$ и $\mathrm{Bi}(q)$ при $q\to\infty$ и условия согласованности асимптотических разложений (3.8) и (3.13) следует [20], что в решении (3.17) $c_2=0$ и, следовательно,

$$w_1(\nu)=-\frac{1}{3^{1/3}}\frac{\mathrm{Ai}'(q)}{\mathrm{Ai}(q)}. \tag{3.18}$$

Это решение гладко на интервале (ξ_0,∞), где ξ_0 — ближайший к точке $q=0$ нуль функции $\mathrm{Ai}(q)$, а при $q\to\xi_0$

$$w_1(\nu)=-\frac{(1+O((q-\xi_0)^2))}{3^{1/3}(q-\xi_0)}=\\ =\frac{(1+O((\nu+3^{-1/6}\xi_0)^2))}{3^{1/2}(\nu+3^{-1/6}\xi_0)}. \tag{3.19}$$

Соотношения (3.18), (3.19) и степенной характер асимптотики функции $w_2(\nu)$ при $\nu\to\infty$, диктуемый условием согласованности асимптотических разложений (3.8) и (3.13), однозначно определяют нужное решение ОДУ (3.15):

$$w_2(\nu)=\frac{1}{3^{7/6}\mathrm{Ai}(q)^2}\left[\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{Ai}'(k)^3}{\mathrm{Ai}(k)}dk-\right.\\ \left.-\int\limits_0^q\left(\frac{\mathrm{Ai}'(k)^3}{\mathrm{Ai}(k)}-\frac{\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2}{k-\xi_0}\right)dk-\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2\ln\left|\frac{q-\xi_0}{\xi_0}\right|\right].$$

Отсюда находим, что при $\nu\to-3^{-1/6}\xi_0$

$$w_2(\nu)=\frac{1}{3^{3/2}(\nu+3^{-1/6}\xi_0)^2}\times\\ \times\left[-\ln\left|\frac{\nu+3^{-1/6}\xi_0}{3^{-1/6}\xi_0}\right|+\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{Ai}'(k)^3}{\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2\mathrm{Ai}(k)}dk+\right.\\ \left.+\int\limits_{\xi_0}^0\left(\frac{\mathrm{Ai}'(k)^3}{\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2\mathrm{Ai}(k)}-\frac{1}{k-\xi_0}\right)dk\right]\times\\ \times(1+O((\nu+3^{-1/6}\xi_0)^2))). \tag{3.20}$$

Из оценок (3.19), (3.20) получаем, что требованию согласованности поведения асимптотического разложения (3.13) при $\nu\to-3^{-1/6}\xi_0$ с поведением разложения $r_{int}(\sigma,t)$ при $\sigma\to-\infty$ в главном по t порядке удовлетворяет следующая асимптотика $T(t)$

$$T(t)=-\frac{\xi_0}{3^{1/6}}t^{5/6}+\frac{5}{18}\ln t+\\ +\frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{\xi_0}{3^{1/6}}\right|+\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{Ai}'(k)^3}{\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2\mathrm{Ai}(k)}dk+\right.\\ \left.+\int\limits_{\xi_0}^0\left(\frac{\mathrm{Ai}'(k)^3}{\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2\mathrm{Ai}(k)}-\frac{1}{k-\xi_0}\right)dk\right]+o(1). \tag{3.21}$$

Действительно, согласование асимптотических разложений $r_{int}(\sigma,t)$ и $r_{inm}(\nu,t)$ проводится при значениях σ, которые имеют порядок больший, чем $O(\ln t)$. Поэтому вид определенной в (3.11) переменной σ и оценка (3.21) позволяют сделать вывод, что в процессе этого согласования при $\sigma\to-\infty$ величина

$$\sigma+T(t)+\frac{t^{5/6}\xi_0}{3^{1/6}}=t^{5/2}\left(s-\frac{2}{3^{1/2}}\right)+\frac{t^{5/6}\xi_0}{3^{1/6}}=\\ =t^{5/6}\left(\nu+\frac{\xi_0}{3^{1/6}}\right),$$

также стремится к $-\infty$, а значит, из (3.19) и (3.20) следует, что при этом

$$r_{inm}(\nu,t)=\frac{1}{3^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}\sigma}-\frac{\ln|\sigma|}{3^{3/2}\sigma^2}+\frac{1}{3^{3/2}\sigma^2}\times\\ \times\left[-3\left(T(t)+\frac{t^{5/6}\xi_0}{3^{1/6}}\right)+\frac{5}{6}\ln t+\right.\\ +\ln|3^{-1/6}\xi_0|+\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{Ai}'(k)^3}{\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2\mathrm{Ai}(k)}dk+\\ \left.+\int\limits_{\xi_0}^0\left(\frac{\mathrm{Ai}'(k)^3}{\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2\mathrm{Ai}(k)}-\frac{1}{k-\xi_0}\right)dk\right]+\ldots$$

Подставив в это соотношение вместо $T(t)$ правую часть асимптотики (3.21), мы получаем представление промежуточного асимптотического разложения $r_{inm}(\nu,t)$

$$r_{inm}(\nu,t)=\frac{1}{3^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}\sigma}-\frac{\ln|\sigma|}{3^{3/2}\sigma^2}+\ldots,$$

которое с точностью до не выписанных здесь слагаемых совпадает с суммой трех первых членов асимптотики (3.12) главного члена внутреннего асимптотического разложения $r_{int}(\sigma,t)$.

Таким образом, вычислив асимптотику (3.21), мы решили задачу описания поведения изучаемого решения ОДУ (3.5) в ударном слое в главном по t порядке. И тем самым на уровне главного члена асимптотического разложения завершили описание поведения при $x^2+t^2\to\infty$ нашего универсального специального решения ОДУ (2.1).

4. ПРИМЕР: ФОРМИРОВАНИЕ ДОМЕННОЙ СТЕНКИ ИЗ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (1.6), (1.7)

4.1. Рассмотрим решение УЧП, эквивалентного уравнению (1.6), (1.7)[4)]

$$\varepsilon u_\tau=\varepsilon^2 u_{\chi\chi}+f(\tau,\chi,u),\quad \varepsilon\ll 1, \tag{4.1}$$

значение которого в начальный момент времени известно:

$$u|_{\tau=0}=a(\chi). \tag{4.2}$$

Полагая, что точка $(\tau=\tau^*>0,\chi=\chi^*)$ есть точка сборки корней уравнения

$$f(\tau,\chi,u)=0 \tag{4.3}$$

общего положения и что при $\tau\le\tau^*$ это уравнение имеет единственный корень $u=u_0(\tau,\chi)$, для которого выполнено традиционное условие устойчивости

$$f_u(\tau,\chi,u_0(\tau,\chi))<0, \tag{4.4}$$

получаем, что на любом из промежутков $\delta<\tau<\tau^*-\delta$, границы которых определяются не зависящими от ε константами δ $(0<\delta<\tau^*/2)$, решение рассматриваемой краевой задачи разлагается в ряд вида (1.9):

$$u=u_0(\tau,\chi)+\varepsilon u_1(\tau,\chi)+\varepsilon^2 u_2(\tau,\chi)+\ldots \tag{4.5}$$

4.2. Ряд (4.5) не удовлетворяет начальному условию (4.2). Но при выполнении условия устойчивости (4.4) возникающая невязка стандартным образом [27, гл. 3] исправляется добавлением к правой части (4.5) ряда

$$\Pi u=\Pi_0(\zeta,\chi)+\varepsilon\Pi_1(\zeta,\chi)+\varepsilon^2\Pi_2(\zeta,\chi)+\ldots,\quad \zeta=\frac{\tau}{\varepsilon},$$

из экспоненциально малых при $\zeta\to\infty$ членов.

Последняя ссылка хотя и цитирует работу, посвященную не УЧП, а быстро-медленным системам ОДУ, корректна. Действительно, аналогично рассматриваемой в [27, гл. 3] ситуации, коэффициенты $\Pi_k(\zeta,\chi)$ поправочного ряда Πu есть решения последовательности начальных задач для ОДУ:

$$\frac{\partial\Pi_0(\zeta,\chi)}{\partial\zeta}=f(0,\chi,u_0(0,\chi)+\Pi_0(\zeta,\chi)),$$

$$\Pi_0 u(0,\chi)=a(\chi)-u_0(0,\chi),$$

$$\frac{\partial\Pi_k(\zeta,\chi)}{\partial\zeta}= \\ =f_u(0,\chi,u_0(0,\chi)+\Pi_0(\zeta,\chi))\Pi_k(\zeta,\chi)+G_k(\zeta,\chi),$$

$$\Pi_k(0,\chi)=-u_k(0,\chi),\quad k\ge 1,$$

где $G_k(\zeta,\chi)$ определенным образом выражаются через функции $\Pi_j(\zeta,\chi)$ $(j=0,1,\ldots,k-1)$. Экспоненциальная малость при $\zeta\to\infty$ решений этой последовательности задач показывается с помощью приведенных в [27] рассуждений: то, что в функцию $G_k(\zeta,\chi)$ входит слагаемое $\Pi_{k-2}(\zeta,\chi)''_{\chi\chi}$, не меняет экспоненциального характера ее малости при $\zeta\to\infty$, так как все производные $\Pi_{k-2}(\zeta,\chi)$ (являясь решениями задач Коши для ОДУ

$$\frac{\partial g}{\partial\zeta}-f_u(0,\chi,u_0(0,\chi)+\Pi_0(\zeta,\chi))g=H(\zeta,\chi)$$

с экспоненциально малыми при $\zeta\to\infty$ правыми частями) сами при $\zeta\to\infty$ экспоненциально малы [27, с.63].

4.3. Поведение решения начальной задачи (4.1), (4.2) в окрестности точки сборки (τ^*,χ^*) проанализировано в разд. 2 и 3. «За» этой же окрестностью оно образует доменную стенку. Асимптотика при $\varepsilon\to0$ сформировавшейся доменной стенки оказывается во многом похожей на асимптотику при $t\to\infty$ описанного специального решения ОДУ (2.1) по следующим причинам.

1) Фронт доменной стенки локализован в исчезающе малой окрестности одной из двух исходящих из (τ^*,χ^*) линий складки, являющихся границами области перехлеста корней (4.3), внутри которой решение (4.3) трехзначно.

2) «Полки» доменной стенки по разные стороны от малой окрестности ударной линии складки $\chi=\varphi(\tau)$ описываются двумя асимптотическими разложениями вида (4.5), главные члены которых есть наименьший $u_0^1(\tau,\chi)$ и наибольший $u_0^3(\tau,\chi)$ из трех корней уравнения (4.3). Являясь гладкими продолжениями через лучи $(\tau=\tau^*,\chi>\chi^*)$ и

[4)] Вполне естественным является рассмотрение неоднородности, скорости изменения которой по времени и пространственной переменной имеют одинаково малый порядок (см. [4], а также конец статьи [5], где в связи с задачей из теории горения упоминается и о решении УЧП (4.1)).

($\tau = \tau^*, \chi < \chi^*$) единственного при $\tau < \tau^*$ корня этого уравнения, оба эти корня внутри областей их гладкости удовлетворяют условию устойчивости (4.4).

3) Асимптотика доменной стенки по параметру ε в окрестности ударной линии складки $\chi = \varphi(\tau)$ также весьма напоминает асимптотику при $t \to \infty$ описанного решения ОДУ (2.1) в окрестности критической кривой $x = s_0 t^{3/2}$.

4.4. Следует отметить, что в структурах двух этих асимптотик имеется и довольно заметное отличие, состоящее в том, что вместо решения интегрируемого в квадратурах ОДУ (3.11) поведение уже сформировавшейся доменной стенки в окрестности ее фронта в главном по ε порядке описывается с помощью монотонного решения краевой задачи для неинтегрируемого ОДУ второго порядка.

Эта задача возникает после замены переменной

$$\eta = \frac{\chi - \varphi(\tau)}{\varepsilon} - \mu(\tau, \varepsilon), \qquad (4.6)$$

аналогичной приведенной в (3.11). Из вида уравнения, получающегося в результате такой замены из УЧП (4.1), видно, что главный член $U(\eta, \tau)$ внутреннего асимптотического разложения

$$u_{int}(\eta, \tau, \varepsilon) = U_0(\eta, \tau) + \ldots$$

рассматриваемого решения (4.1) удовлетворяет ОДУ второго порядка

$$-\varphi_\tau U_\eta - U_{\eta\eta} = f(\tau, \varphi(\tau), U), \qquad (4.7)$$

имеющему ровно два положения равновесия

$$U = U_0(\tau), \quad U = U_1(\tau),$$

которые являются кратным и, соответственно, простым корнями уравнения

$$\begin{gathered} f(\tau, \varphi(\tau), U) = 0, \\ f_U(\tau, \varphi(\tau), U_0(\tau)) = 0, \qquad (4.8) \\ f_U(\tau, \varphi(\tau), U_1(\tau)) < 0. \end{gathered}$$

Однако отмеченное различие не столь велико, поскольку нужное нам монотонное решение $U(\eta, \tau)$ ОДУ (4.7) есть аналог и своего рода «продолжение» рассмотренного выше монотонного сепаратрисного решения $R(\sigma)$ ОДУ (3.11), поэтому ясно, что к предельному значению $U_1(\tau)$ оно стремится экспоненциально:

$$U - U_1(\tau) = O(\exp(-c(\tau)|\eta|)), \quad c(\tau) < 0, \qquad (4.9)$$

и что его стремлению к предельному значению $U_0(\tau)$ отвечает асимптотика

$$U = U_0(\tau) + \frac{2\varphi'(\tau)}{f_2(\tau)\eta} - \frac{4}{f_2(\tau)}\left(1 + \frac{f_3(\tau)\varphi'(\tau)^2}{3f_2^2(\tau)}\right) \times \\ \times \frac{\ln|\eta|}{\eta^2} + \frac{\Delta(\tau)}{\eta^2} + O\left(\frac{\ln^2|\eta|}{|\eta|^3}\right). \qquad (4.10)$$

Здесь $f_2(\tau)$ и $f_3(\tau)$ — константы из ряда Тейлора

$$f(\tau, \varphi(\tau), U) = \frac{f_2(\tau)}{2}(U - U_0(\tau))^2 + \\ + \frac{f_3(\tau)}{6}(U - U_0(\tau))^3 + \ldots$$

правой части ОДУ (4.7) в точке $U = U_0(\tau)$, а $\Delta(\tau)$ — произвольная функция, которая без ограничения общности (за счет неопределенной пока функции $\mu(\tau, \varepsilon)$ в замене (4.6)) полагается равной нулю.

4.6. Соотношения (4.9), (4.10) определяют нужное нам решение ОДУ (4.7) лишь с точностью до сдвига фазы $\mu(\tau, \varepsilon)$, вычисление асимптотики которого при $\varepsilon \to 0$ совершенно аналогично вычислению асимптотики (3.21). Оно основано на факте существования промежуточного асимптотического разложения

$$u_{inm}(\tau, \lambda) = U_0(\tau) + \varepsilon^{1/3}\Upsilon_1(\tau, \lambda) + \\ + \varepsilon^{2/3}\Upsilon_2(\tau, \lambda) + \ldots, \qquad (4.11)$$

которое зависит от масштабной переменной

$$\lambda = \frac{\chi - \varphi(\tau)}{\varepsilon^{2/3}}. \qquad (4.12)$$

Здесь $U_0(\tau)$ — кратный корень уравнения (4.8), а остальные коэффициенты рекуррентно находятся из последовательности ОДУ, возникающей из уравнения (4.1) в результате замены (4.12), подстановки в получающееся при этом уравнение ряда (4.11) и последующего приравнивания членов при одинаковых степенях ε:

$$-\varphi_\tau \frac{\partial \Upsilon_1}{\partial \lambda} = \frac{f_{uu}}{2}\Upsilon_1^2 + f_\chi \lambda, \qquad (4.13)$$

$$-\varphi_\tau \frac{\partial \Upsilon_2}{\partial \lambda} = f_{uu}\Upsilon_1\Upsilon_2 + f_{\chi u}\lambda\Upsilon_1 + \\ + \frac{\partial^2 \Upsilon_1}{\partial \lambda^2} + \frac{f_{uuu}}{6}\Upsilon_1^3 - U_0'(\tau), \qquad (4.14)$$

$$\ldots$$

(f_χ, $f_{\chi u}$,f_{uu} и f_{uuu} — производные $f(\tau, \chi, u)$ при $\chi = \varphi(\tau)$, $u = U_0(\tau)$).

Уравнение (4.13) растяжениями

$$\Upsilon_1(\lambda) = -\left(\frac{4f_\chi\varphi_\tau}{f_{uu}^2}\right)^{1/3}\Gamma(\xi),$$
$$\lambda = r(\tau)\xi = -\left(\frac{2\varphi_\tau^2}{f_\chi f_{uu}}\right)^{1/3}\xi \tag{4.15}$$

сводится к уравнению (1.18), решение которого в данном случае есть функция

$$\Gamma(\xi) = (\ln|\mathrm{Ai}(\xi)|)'_\xi. \tag{4.16}$$

Оно гладко на интервале (ξ_0, ∞), левая граница которого есть первый нуль функции $\mathrm{Ai}(\xi)$: согласно (4.15) и (4.16) при $\lambda \to r(\tau)\xi_0$ имеем

$$\Upsilon_1(\xi) = \frac{2\varphi_\tau}{f_{uu}(\lambda - r(\tau)\xi_0)}(1+O((\lambda-r(\tau)\xi_0)^2)). \tag{4.17}$$

Нужное решение ОДУ (4.14) выписывается теперь при помощи процедуры, подобной той, что использовалась при выписывании решения ОДУ (3.15):

$$\Upsilon_2(\xi) = \frac{1}{\mathrm{Ai}(\xi)^2}\left[\int_0^\xi \left(\mathrm{Ai}(\kappa)^2 H(\tau,\kappa) - \frac{\Omega(\tau)}{\kappa-\xi_0}\right)d\kappa + \right.$$
$$\left. +\Omega(\tau)\ln\left|\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right| - \int_0^\infty \mathrm{Ai}(\kappa)^2 H(\tau,\kappa)d\kappa\right]. \tag{4.18}$$

В этой формуле

$$H(\tau,\kappa) = \left(\frac{2\varphi_\tau^2}{f_\chi f_{uu}}\right)^{1/3} \times$$
$$\times\left[\frac{2f_{\chi u}}{f_{uu}}\kappa\frac{\mathrm{Ai}'(\kappa)}{\mathrm{Ai}(\kappa)} - \frac{f_\chi}{\varphi_\tau^2}\left(\frac{\mathrm{Ai}'(\kappa)}{\mathrm{Ai}(\kappa)}\right)'' - \right.$$
$$\left. - \frac{2f_\chi f_{uuu}}{3f_{uu}^2}\left(\frac{\mathrm{Ai}'(\kappa)}{\mathrm{Ai}(\kappa)}\right)^3 - U_0'(\tau)\right],$$

а $\Omega(\tau)$ есть вычет функции $\mathrm{Ai}(\xi)^2 H(\tau,\xi)$ в точке ξ_0:

$$\Omega(\tau) = -2\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2\left(\frac{2f_\chi^2}{\varphi_\tau^4 f_{uu}}\right)^{1/3}\left(1+\frac{\varphi_\tau^2 f_{uuu}}{3f_{uu}^2}\right).$$

Из представления (4.18) функции Υ_2 получаем, что при $\lambda \to r(\tau)\xi_0$

$$\Upsilon_2(\xi) = \left[-\frac{4}{f_{uu}}\left(1+\frac{\varphi_\tau^2 f_{uuu}}{3f_{uu}^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\ln|\lambda - r(\tau)\xi_0|}{(\lambda-r(\tau)\xi_0)^2} + \frac{h(\tau)}{(\lambda-r(\tau)\xi_0)^2}\right]\times$$
$$\times(1+O((\lambda-r(\tau)\xi_0)^2)), \tag{4.19}$$

где

$$h(\tau) = \frac{4\ln|r(\tau)\xi_0|}{f_{uu}}\left[1+\frac{\varphi_\tau^2 f_{uuu}}{3f_{uu}^2}\right] +$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Ai}'(\xi_0)^2}\left(\frac{2\varphi_\tau^2}{f_\chi f_{uu}}\right)^{2/3}\times$$
$$\times\left[\int_0^{\xi_0}\left(\mathrm{Ai}(\kappa)^2 H(\tau,\kappa) - \frac{\Omega(\tau)}{\kappa-\xi_0}\right)d\kappa - \right.$$
$$\left. - \int_0^\infty \mathrm{Ai}(\kappa)^2 H(\tau,\kappa)d\kappa\right].$$

Члены промежуточного асимптотического разложения (4.11) имеют нарастающую особенность в точке $r(\tau)\xi_0$, в которой оно непригодно: правильным приближением в окрестности точки $\lambda = r(\tau)\xi_0$ как раз и является разложение $u_{int}(\nu,\tau,\varepsilon)$. Требование согласованности асимптотических разложений $u_{int}(\nu,\tau,\varepsilon)$ и $u_{inm}(\lambda,\tau,\varepsilon)$ и соотношений (4.10), (4.17), (4.19) позволяют заключить, что асимптотика $\mu(\tau,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ будет следующей:

$$\mu(\tau,\varepsilon) = \frac{r(\tau)\xi_0}{\varepsilon^{1/3}} - \frac{2}{3\varphi_\tau}\left(1+\frac{\varphi_\tau^2 f_{uuu}}{3f_{uu}^2}\right)\ln\varepsilon +$$
$$+\frac{f_{uu}h(\tau)}{2\varphi_\tau} + o(1).$$

Таким образом, мы получили описание сформировавшейся доменной стенки в главном порядке.

5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДУ (2.2)

5.1. На рис. 3 приведена часть результатов численных расчетов (они проводились с помощью итерационной процедуры, которая совершенно аналогична той, что описана в разд. 3.2), моделирующих поведение при разных t соответствующего специального решения первого из ОДУ (2.2). Из этих расчетов помимо монотонности и нечетности этого решения отчетливо видно, что вне единственной линии скачка асимптотика этого специального решения при $x^2 + t^2 \to \infty$ также задается плавно меняющимся корнем (2.3). Но только в данном случае скачок в асимптотике $v(x,t)$ при $t \to \infty$ происходит в окрестности луча $(x = 0, t \geq 0)$, который для описываемой уравнением (2.3) сборки образует так называемое множество Максвелла [17, с. 306]. По-

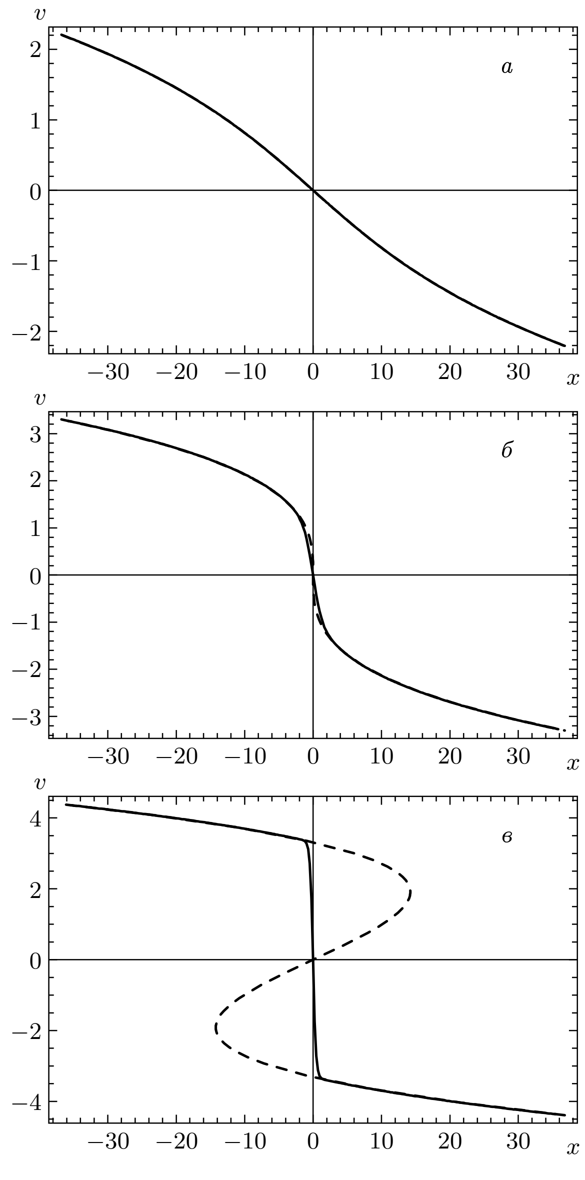

Рис. 3. Зависимости решения v первого из уравнений (2.2) от x при различных t (сплошные линии) и графики корней кубического уравнения (2.3) в местах их несовпадения с графиками v (штриховые линии) в моменты $t = -11$ (*а*), 0 (*б*), 11 (*в*)

этому[5)] при отсутствии в УЧП (1.1) производных $u(S)$ первого порядка следует ожидать, что «за» точками сборки корней (1.10) соответствующие решения УЧП (1.8) примут вид доменных стенок с фронтами, локализованными около определяемых правилом равных площадей (1.17) кривых.

Замены (3.1) первое из ОДУ (2.2) сводят к ОДУ

$$t^{-4} r_{ss} = r^3 - \mathrm{sgn}(t) r + s, \qquad (5.1)$$

главные члены асимптотического разложения

$$r_{out}(s,t) = r_0(s) + \sum_{j=1}^{\infty} t^{-4j} r_j(s), \qquad (5.2)$$

соответствующие решения которого при $t \to \infty$ для $s < 0$ (для $s > 0$) совпадают с наибольшим $r_{max}(s)$ (соответственно, с наименьшим $r_{min}(s)$) из корней кубического уравнения (3.7). При помощи стандартных для метода согласования рассуждений нетрудно показать, что в малой окрестности точки $s = 0$ сшивка этих двух частей асимптотического разложения (5.2) осуществляется внутренним разложением

$$r_{int}(y,t) = p_0(y) + \sum_{j=1}^{\infty} t^{-2j} p_j(y), \quad y = st^2, \qquad (5.3)$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентной последовательности ОДУ, возникающей после подстановки (5.3) в (5.1) и приравнивания членов при одинаковых степенях малого параметра t^{-2}. Эти уравнения дополняются условиями согласования поведения их решений при $y \to \pm\infty$ с поведением при $s \to 0$ внешних асимптотических разложений (5.2). В частности, ОДУ

$$(p_0)''_{yy} = p_0^3 - p_0$$

для нечетного по y главного члена асимптотического разложения (5.3) дополняется условием

$$\lim_{y \to \infty} p_0(y) = -1,$$

откуда находим, что

$$p_0(y) = -\operatorname{tg} \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

При $t \to -\infty$ описываемое решение ОДУ (2.2) также имеет асимптотическое разложение, которое задается заменами (3.1) и рядом (5.2). Только теперь для всех s главным членом $r_0(s)$ ряда (5.2) будет однозначный при $t < 0$ корень уравнения (2.7). А его асимптотическими разложениями при $|x| \to \infty$, пригодными в окрестностях прямой $t = 0$, являются ряды

$$v(x,t) = x^{1/3} \sum_{j=0}^{\infty} x^{-8j/3} g_j(\rho), \quad \rho = \frac{t}{x^{2/3}}, \qquad (5.4)$$

[5)] Множество Максвелла выделено тем, что на нем обращается в нуль интеграл

$$\int\limits_{g_1(x,t)}^{g_3(x,t)} (x - tg + g^3)\,dg,$$

пределы которого определяются двумя различными корнями (2.3).

где $g_0(\rho)$ — единственный корень уравнения

$$1 - \rho g + g^3 = 0.$$

Функция $v(x,t)$ представляет собой аналог решения Ильина уравнения Бюргерса [15, с. 287], описывающего влияние малой диссипации на зарождение ударных волн [15, 28]. Данное решение ОДУ (2.2) схожим образом описывает, например, зарождения доменных стенок, образуемых решениями краевых задач (1.15), (1.16).

5.2. Мы не можем указать какие-либо краевые задачи общего положения, приводящие к соответствующим специальным решениям второго из ОДУ (2.2). Нет пока и описания их равномерных при $x^2 + t^2 \to \infty$ асимптотик. Численные эксперименты подсказывают, что при $t \gg 1$ для решений второго из ОДУ (2.2) характерны области высокочастотных колебаний, исследование которых нужно проводить с помощью усреднения по Кузмаку–Уизему [29, 30].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конечно, основной вывод данной работы, который был сформулирован в конце введения, пока носит чисто теоретический характер. Но общность проведенных выше рассмотрений дает основание надеяться и на обнаружение согласующихся с ним экспериментальных фактов — теоретически образование в плавно неоднородных средах предсказываемых в этом выводе структур столь же закономерно, как, например, спонтанное образование ударных волн в газовой динамике.

В связи с только что сказанным наиболее интересным из выписанных в статье конкретных уравнений вида (1.8) представляется УЧП (1.14): оно, как уже отмечалось, эквивалентно стационарной части уравнения диффузии (1.4), (1.7). Правда, полностью изучить вопрос об отношении основного вывода данной статьи, касающегося решений стационарного УЧП (1.14), к решениям полного нестационарного уравнения (1.4), (1.7) непросто (см. посвященную близкой проблеме работу [13]). Однако некоторые достаточные условия, обеспечивающие выход решений, скажем, начальной нестационарной задачи (1.13) для соответствующих асимптотических решений стационарного УЧП (1.14), легко можно указать прямо сейчас.

Предположим, например, что на плоскости X есть лишь одна точка сборки решений уравнения (1.10) и что вне области перехлеста корень (1.10) единственен и удовлетворяет условию устойчивости (1.12). Он, очевидно, является аттрактором всех решений предельного к УЧП (1.14) ОДУ

$$u_\zeta = f(X, u).$$

Пусть внутри области перехлеста корней (1.10) начальная функция $g(X)$ в задаче (1.13) такова, что решение предельной начальной задачи

$$u_\zeta = f(X, u), \quad u|_{\zeta=0} = g(X),$$

притягивается внутри этой области к тому из трех корней (1.10), что определяет одну из «полок» доменной стенки — решения УЧП (1.14). Ясно, что для некоторых (достаточно больших) ζ это решение в виде ряда (1.9) будет здесь асимптотикой при $\varepsilon \to 0$ решения задачи (1.13). И для того чтобы соответствующее асимптотическое решение (1.14) при таких ζ представляло решение нестационарной задачи (1.13) для всех X, в последней в качестве начальной функции $g(X)$ достаточно взять гладкую функцию, которая меньше либо больше (в зависимости от ситуации), чем любой из корней (1.10).

Автор выражает признательность В. Э. Адлеру за помощь в проведении численных расчетов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00 01 00663) и Фонда ведущих научных школ (грант 00 15 96038).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис, *Элементы математической физики*, Наука, Москва (1973).
2. Ю. М. Свирежев, *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии*, Наука, Москва (1987).
3. А. Вл. Гуревич, Р. Г. Минц, УФН **142**, 61 (1984).
4. Л. А. Островский, Изв. ВУЗов: Радиофизика **17**, 395 (1973).
5. В. С. Берман, ПММ **42**, 450 (1978).
6. И. А. Молотков, С. А. Вакуленко, *Сосредоточенные нелинейные волны*, Изд-во ЛГУ, Ленинград (1988).
7. И. А. Молотков, С. А. Вакуленко, М. А. Бисярин, *Нелинейные локализованные волновые процессы*, Янус-К, Москва (1999).
8. Н. Н. Розанов, ЖЭТФ **80**, 96 (1981).

9. В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов, *Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур*, Наука, Москва (1987).

10. Т. Н. Сысоева, Вестник МГУ, Сер. 1, №1, 32 (1983).

11. П. Файф, У. Гринли, УМН **29**, 103 (1974).

12. Н. Н. Нефедов, Дифф. ур. **31**, 1142 (1995).

13. В. Ф. Бутузов, И. В. Неделько, Дифф. ур. **38**, 222 (1995).

14. Дж. Коул, *Методы возмущений в прикладной математике,* Мир, Москва (1972).

15. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, Москва (1987).

16. М. В. Федорюк, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва (1985).

17. Т. Постон, М. Стюарт, *Теория катастроф и ее приложения*, Мир, Москва (1980).

18. Р. Гилмор, *Прикладная теория катастроф*, ч. 1, Мир, Москва (1984).

19. R. Haberman, Stud. Appl. Math. **57**, 247 (1977).

20. R. Haberman, SIAM J. Appl. Math. **37**, 69 (1979).

21. D. C. Diminie and R. Haberman, J. Nonlinear Sci. **10**, 198 (2000).

22. O. M. Kiselev, J. Nonlinear Math. Phys. **8**, 65 (2001).

23. O. M. Kiselev and S. G. Glebov, Russian J. Math. Phys. **9**, 21 (2002).

24. Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания,* Наука, Москва (1975).

25. А. А. Дородницын, ПММ **XI**, 313 (1947).

26. М. Абрамовиц и др., *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).

27. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, Москва (1973).

28. В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, ПММ **65**, 458 (2001).

29. Г. Е. Кузмак, ПММ **XXIII**, 216 (1959).

30. М. В. Федорюк, ЖВМ и МФ **26**, 198 (1986).