

НЕЛИНЕЙНАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЗБУЖДЕНИЙ И ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В САМОМОДУЛИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

*А. С. Ковалев**, *И. В. Герасимчук***

*^a Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина
Национальной академии наук Украины
61103, Харьков, Украина*

*^b Институт теоретической физики, Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
61108, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 18 июня 2002 г.

Исследована нелинейная динамика систем с пространственно-периодическим основным состоянием. На примере синусоидальной модели Клейна–Гордона, описывающей решетку флаксонов в длинном джозефсоновском контакте во внешнем магнитном поле, а также несоизмеримую структуру адатомных цепочек на поверхности кристалла или поверхностного слоя атомов, описана динамика кинков на фоне периодической солитонной структуры. Показано, что при наличии пространственной периодичности основного состояния существует ограничение как сверху, так и снизу на скорость движущихся кинков.

PACS: 61.44.Fw, 63.10.+a, 63.20.Pw

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время основной интерес в теории нелинейных волн и солитонов перемещается в область исследования нелинейной динамики реальных физических систем с учетом их дискретности, внутренней структуры и пространственной неоднородности. Особый интерес вызывают слоистые вещества, в которых материальные параметры периодически модулированы в пространстве («модулированные системы»). Примерами таких сред являются слоистые кристаллы с многоатомной элементарной ячейкой (в частности, ВТСП-соединения), многослойные магнетики (многообещающие с точки зрения технологических применений), гофрированные волоконно-оптические световоды и т. д. Во всех перечисленных примерах пространственная периодичность приводит к зонной структуре спектра линейных волн и образованию щелей («запрещенных зон») в этом спектре. При учете нелинейности среды в запрещенных участках спектра возникает возможность существования специфических локализованных возбуждений — так называемых «щелевых

солитонов» [1–3]. К сожалению, исследование щелевых солитонов возможно лишь приближенными методами в малоамплитудном пределе в рамках упрощенных моделей.

В настоящей работе мы обращаем внимание на возможность существования щелевых солитонов другого происхождения, которые допускают точное аналитическое исследование в рамках так называемых интегрируемых моделей. Речь идет о системах, в которых все материальные параметры среды пространственно-однородны, но основное состояние — пространственно-периодично. Примеры таких систем многочисленны и хорошо известны. В длинном джозефсоновском контакте в магнитном поле, большем критического, основным состоянием является периодическая решетка флаксонов [4, 5]. Другой пример: из-за различия электронного состояния и, следовательно, упругих свойств в поверхностном слое атомов и в объеме поверхностные атомы могут образовывать несоизмеримую периодическую структуру, как например, на поверхности [111] золота [6, 7].

Аналогичные, но одномерные несоизмеримые структуры могут возникать в цепочках адатомов на бороздчатых поверхностях [110] кристаллов [8].

*E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua

**E-mail: igera@ukr.net

Примерами таких систем (которые ниже мы будем называть «само модулированными») являются антиферромагнетики с неоднородным обменно-релятивистским взаимодействием Дзялошинского и с основным состоянием в виде периодической геликоидальной структуры [9,10] и доменная структура в ферромагнетике при учете магнито-дипольного взаимодействия. В перечисленных примерах спектр линейных возбуждений также имеет щелевой характер, но солитонные возбуждения с частотами в щели этого спектра во многом отличны от таковых в обычных модулированных средах.

В настоящей работе в качестве первого шага исследована динамика простейших однопараметрических топологических солитонов типа «кинков» [11], распространяющихся в само модулированной среде, т. е. через периодическую решетку таких же кинков.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ И СПЕКТР ЛИНЕЙНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ НАД НИМ

Рассмотрим простой пример само модулированной системы: несоизмеримую структуру цепочки адатомов на поверхности кристалла или поверхностного атомного слоя. Взаимодействие поверхностных атомов будем учитывать в гармоническом приближении, считая, что в отсутствие поля подложки равновесное расстояние между атомами равно b и отличается от межатомного расстояния a в объеме среды. При этом влияние объема (подложки) на поверхностные адатомы можно моделировать периодическим потенциальным рельефом с периодом a . Для простоты этот рельеф выбираем в виде тригонометрической функции. (Обратным влиянием адатомов на объем пренебрегаем, т. е. считаем подложку абсолютно жесткой.) При этом потенциальная энергия системы имеет следующий вид:

$$U = \sum_n U_0 \left\{ 1 - \cos \frac{2\pi y_n}{a} \right\} + \sum_n \frac{\alpha}{2} (y_n - y_{n-1} - b)^2, \quad (1)$$

где y_n — координата n -го атома и α — упругая постоянная взаимодействия вдоль цепочки. Динамические уравнения для атомных смещений

$$\nu_n = y_n - an$$

в этой модели (модели Френкеля–Конторовой [12]) имеют вид

$$m\nu_{\tau\tau} + \frac{2\pi U_0}{a} \sin \frac{2\pi\nu_n}{a} + \alpha(2\nu_n - \nu_{n+1} - \nu_{n-1}) = 0. \quad (2)$$

В длинноволновом приближении в безразмерных переменных

$$u = \frac{2\pi\nu}{a}, \quad x = 2n\pi\sqrt{\frac{U_0}{\alpha a^2}}, \quad t = 2\tau\pi\sqrt{\frac{U_0}{ma^2}}$$

мы приходим к хорошо известному уравнению синус-Гордон [11]:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (3)$$

В том же приближении и в этих же переменных полная энергия системы (1) принимает вид

$$U = E_0 \int dx \left\{ \frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + (1 - \cos u) + \xi u_x \right\}, \quad (4)$$

где

$$E_0 = \frac{a}{2\pi} \sqrt{U_0 \alpha}$$

и несоизмеримость адатомной цепочки и подложки характеризуется безразмерным параметром

$$\xi = \sqrt{\frac{\alpha a^2}{U_0}} \frac{a - b}{a}.$$

В случае длинного джозефсоновского контакта поле $u(x)$ описывает разность фаз волновых функций сверхпроводников в контакте, а параметр ξ пропорционален внешнему магнитному полю, приложенному в плоскости контакта [13].

Последнее слагаемое ξu_x в выражении для энергии (4) имеет дивергентный вид и не меняет вид динамического уравнения (3). Но при изменении параметра ξ меняется потенциальная энергия системы и может измениться ее основное состояние. При $b = a$ основное состояние соответствует тривиальному решению (3) с $u \equiv 0$ и энергией $E = 0$. При $b \neq a$ ситуация сложнее.

Рассмотрим для определенности случай $b > a$ ($\xi < 0$). В этом случае кроме решения $u \equiv 0$ уравнение (3) допускает нетривиальные статические решения вида [4, 5]:

$$u_0(x) = \pi + 2\text{am} \left\{ \frac{x}{k}, k \right\}, \quad (5)$$

где $\text{am}(z, k)$ — эллиптическая амплитуда и k — модуль этой эллиптической функции. Решение (5) описывает «растянутую» систему с периодической цепочкой 2π -кинков (цепочку «одномерных дислокаций» в поверхностном слое или решетку флаксонов

в джоуфсоновском контакте) с расстоянием между ними $L = 2kK(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Собственная ширина кинка имеет величину порядка единицы, а в исходных размерных переменных — величину

$$\Lambda = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha a^2}{U_0}}.$$

Плотность энергии такой периодической структуры (в расчете на один период) равна

$$\varepsilon = \frac{U}{L} = E_0 \left\{ \frac{2}{k^2} \left[\frac{2E(k)}{K(k)} - 1 \right] - \frac{\xi\pi}{kK(k)} + 2 \right\}. \quad (6)$$

Здесь $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Плотность энергии ε зависит от параметра ξ несоизмеримости межатомного расстояния в цепочке и в подложке. При малых значениях этого параметра основное состояние системы однородно и периодическое решение (5) с большей энергией может существовать лишь при наличии давления, приложенного к цепочке на бесконечности. Однако при превышении параметром ξ критического значения $\xi_c = -4/\pi$, при котором

$$b_c = a + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{U_0}{\alpha}}, \quad (7)$$

минимуму энергии соответствует периодическое состояние (5) с модулем эллиптической функции, который определяется из уравнения

$$\frac{E(k)}{k} = \frac{\xi}{\xi_c}.$$

Малоамплитудные возбуждения на фоне нетривиального основного состояния с $w = u - u_0 \ll 1$ описываются следующим линейным уравнением:

$$w_{tt} - w_{xx} + \left(1 - 2\text{cn}^2 \left(\frac{x}{k}, k \right) \right) w = 0. \quad (8)$$

Периодические решения этого уравнения Ламэ для линейных волн над основным состоянием обсуждались в работе [14] (см. также [15]). Они выражаются через эллиптические эта- и зэта-функции:

$$w = \frac{\text{H}(x/k - \eta)}{\Theta(x/k)} \exp [i(qx - \omega t)], \quad (9)$$

а закон дисперсии линейных волн $\omega = \omega(q)$, где q — волновое число, в неявном виде записывается следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{k} \text{dn}(\eta, k), \quad q = \frac{i}{k} Z(\eta, k), \quad (10)$$

где дзэта-функция $Z(\eta, k)$ — чисто мнимая в данном случае. В отличие от закона дисперсии линейных волн над однородным основным состоянием $\omega^2 = 1 + q^2$, при периодическом основном состоянии (5) спектр линейных волн состоит из двух ветвей, разделенных щелью при $q = q_0 = \pi/L$ (см. рис. 1а). Первая голдстоуновская ветвь (I) описывает собственные колебания решетки кинков как эффективной цепочки ангармонически связанных квазичастиц. В длинноволновом пределе ($\omega, q \rightarrow 0$) закон дисперсии имеет «звуковой» вид $\omega = s_0 q$ и «скорость звука» в решетке кинков равна

$$s_0 = \frac{k'K(k)}{E(k)} < 1,$$

где $k' = \sqrt{1 - k^2}$. В случае низкой плотности кинков в несоизмеримой структуре $L \gg 1$ ($k' \ll 1$) легко найти зависимость от L :

$$s_0 = 2L \exp(-L/2).$$

В исходных размерных переменных она имеет вид

$$s_0 = \sqrt{\frac{\alpha a^2}{m}} \frac{2L}{\Lambda} \exp \left\{ -\frac{L}{2\Lambda} \right\}.$$

В противоположном пределе при $q \rightarrow q_0 = \pi/L$ и $\omega \rightarrow \omega_1 = k'/k$ линейная волна представляет собой противофазное колебание кинков и описывается функцией

$$w = \text{cn} \left(\frac{x}{k}, k \right) \sin(\omega_1 t).$$

Вторая (активационная) ветвь спектра (II) ограничена снизу частотой $\omega_2 = 1/k$ (при $q = q_0$), а соответствующее решение

$$w = \text{sn} \left(\frac{x}{k}, k \right) \sin(\omega_2 t)$$

описывает противофазные колебания областей между кинками при фиксированных позициях самих этих солитонов. При больших волновых числах $q \gg q_0$ спектр вновь приобретает звуковой вид, но со скоростью, большей s_0 (в наших обозначениях — единичной). Она соответствует предельной скорости линейных волн в однородной среде без солитонов. В пределе $L \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow 1$) нижняя ветвь линейных волн исчезает, а верхняя принимает вид

$$\omega = \sqrt{1 + q^2}, \quad \omega_2 \rightarrow 1.$$

Полезно переписать полученный закон дисперсии в терминах групповой скорости линейных волн

$$V_{gr} = \partial\omega/\partial q$$

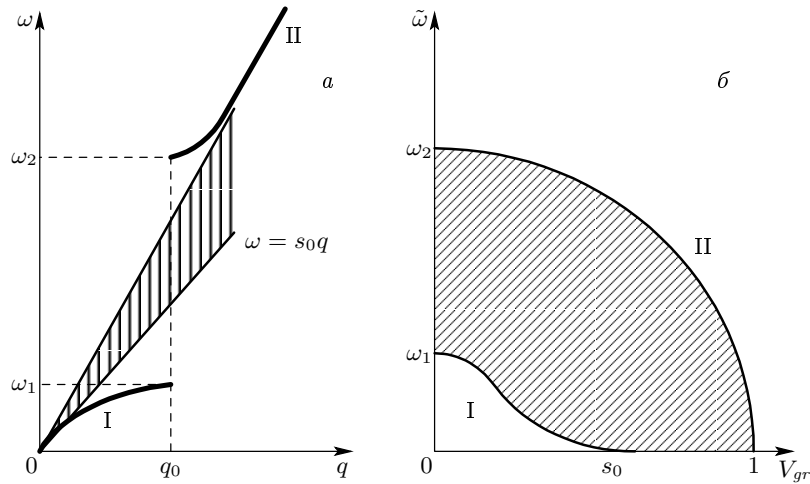


Рис. 1. *a* — Закон дисперсии линейных волн в само модулированной системе с периодическим основным состоянием; *б* — тот же закон дисперсии в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью линейных волн

и их частоты в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью:

$$\tilde{\omega} = \omega - qV_{gr}.$$

Он изображен на рис. 1б. Кривые I и II здесь отвечают нижней и верхней ветвям спектра на рис. 1а. Заштрихованная область между ними соответствует двухпараметрическим динамическим солитонам огибающей, которые мы в данной работе рассматривать не будем. Ниже мы ограничимся исследованием динамики кинков (однопараметрических топологических солитонов) в несоизмеримой структуре (периодической решетке кинков одного знака). Таким солитонным решениям на рис. 1б отвечает отрезок оси скоростей $s_0 < V_{gr} < 1$. На рис. 1а им отвечает заштрихованный сектор скоростей.

3. ДВИЖЕНИЕ КИНКА ЧЕРЕЗ СОЛИТОННУЮ РЕШЕТКУ

Рассмотрим распространение однопараметрического солитона (дополнительного кинка) при наличии периодического основного состояния (5), т.е. через периодическую решетку кинков одного знака. Для точного решения этой задачи проще всего использовать преобразование Дарбу, которое позволяет, используя известное «затравочное» решение (в нашем случае — решение (5) для основного состояния), находить более сложные решения. Особенно просто преобразование Дарбу использовать в случае, когда «затравочное» решение зависит лишь от одной переменной, как в нашем слу-

чае, где $u = u_0(x)$, и не зависит от времени. (Более сложные решения на фоне движущейся периодической структуры легко получаются с помощью преобразования Лоренца.) Сходная с нашей задача рассматривалась в работах [16, 17] для солитонов уравнения синус-Гордон, распространяющихся на фоне стоячей монохроматической волны $u_0 = u_0(\omega t)$, и в [18] для солитонов гиперболического уравнения синус-Гордон на фоне монохроматической волны.

Преобразование Дарбу для рассматриваемого нами уравнения синус-Гордон (3) хорошо известно [19]. Для компактизации записи этого преобразования удобно перейти от исходной полевой переменной $u(x, t)$ к новым величинам V и W , связанным с исходным полем u соотношениями

$$V = i(u_x + u_t), \quad W = \exp(iu), \quad (11)$$

и для которых уравнение (3) записывается в форме Лакса:

$$V_x - V_t = \frac{1}{2} \left(W - \frac{1}{W} \right), \quad (12)$$

$$W_x + W_t = VW. \quad (13)$$

Системе уравнений (12), (13) соответствует вспомогательная линейная задача для двух комплекснозначных функций $\psi_1(x, t)$ и $\psi_2(x, t)$. Если ввести столбец-функцию

$$\psi = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix},$$

то произвольному решению $u(x, t)$ (а следовательно,

и $V(x, t)$ и $W(x, t)$ сопоставляется переопределенная система уравнений [19]:

$$4\psi_x = \begin{vmatrix} V & \lambda + \frac{W}{\lambda} \\ \lambda + \frac{1}{W\lambda} & -V \end{vmatrix} \psi, \quad (14)$$

$$4\psi_t = \begin{vmatrix} V & \lambda - \frac{W}{\lambda} \\ \lambda - \frac{1}{W\lambda} & -V \end{vmatrix} \psi, \quad (15)$$

где, вообще говоря, комплексный параметр λ является параметром преобразования Дарбу. Исходное уравнение (3) является условием совместности системы уравнений (14), (15). Решение системы уравнений (14), (15) с заданным «затравочным» решением $u_0(x, t)$ (а следовательно, с заданными функциями $V_0(x, t)$ и $W_0(x, t)$) и с произвольным значением параметра λ позволяет построить новое решение $u(x, t)$ (или $V(x, t)$ и $W(x, t)$). Естественно, параметр λ должен быть выбран таким образом, чтобы новое решение $u(x, t)$ было вещественным. Если ввести обозначения

$$\sigma_1 = \lambda \frac{\psi_2}{\psi_1}, \quad \sigma_2 = \lambda \frac{\psi_1}{\psi_2}, \quad (16)$$

то связь нового и «затравочного» решений выражается формулами

$$V = -V_0 + \sigma_2 - \sigma_1, \quad W = W_0 \sigma_1 / \sigma_2. \quad (17)$$

При этом, воспользовавшись связью (11), легко найти окончательное соотношение между новым и старым решениями в исходных полевых переменных:

$$u(x, t) = u_0(x, t) - 2i \ln \frac{\psi_2(u_0, \lambda)}{\psi_1(u_0, \lambda)}. \quad (18)$$

Таким образом, основным моментом является решение системы (14), (15) линейных уравнений с переменными коэффициентами. В нашем случае задача упрощается, так как исходное решение для основного состояния $u = u_0(x)$ не зависит от времени, и уравнение (15) становится дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, в которое координата x входит как параметр. Для рассматриваемого периодического основного состояния (5) функции V_0 и W_0 выглядят следующим образом:

$$V_0 = \frac{2i}{k} \operatorname{dn} \left(\frac{x}{k}, k \right), \quad (19)$$

$$W_0 = \left\{ \operatorname{sn} \left(\frac{x}{k}, k \right) - i \operatorname{cn} \left(\frac{x}{k}, k \right) \right\}^2,$$

и система линейных уравнений (15) легко решается. Основной проблемой является правильный выбор параметра преобразования λ , при котором полученное новое решение $u(x, t)$ будет вещественным. Ниже мы убедимся, что к вещественному решению $u(x, t)$ приводит выбор λ в виде произвольного вещественного числа, а сам этот параметр характеризует скорость распространения солитона.

Решение уравнений (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a(x) \exp(\mu t) + b(x) \exp(-\mu t), \\ \psi_2 &= a(x) \frac{\lambda(4\mu - V_0)}{\lambda^2 - W_0} \exp(\mu t) - \\ &\quad - b(x) \frac{\lambda(4\mu + V_0)}{\lambda^2 - W_0} \exp(-\mu t), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\mu = \frac{1}{4} \sqrt{(\lambda + 1/\lambda)^2 - 4/k^2}.$$

Подставляя решение (20) в первую пару уравнений (14) и приравнявая нулю коэффициенты при $\exp(\pm \mu t)$, получаем уравнения для $a(x)$ и $b(x)$, решаемые в квадратурах и дающие следующий результат:

$$\begin{aligned} a(x) &= \exp \left\{ \mu \int_0^x \frac{\lambda^2 + W_0}{\lambda^2 - W_0} dx - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{V_0 W_0}{\lambda^2 - W_0} dx + C_1 \right\}, \\ b(x) &= \exp \left\{ -\mu \int_0^x \frac{\lambda^2 + W_0}{\lambda^2 - W_0} dx - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{V_0 W_0}{\lambda^2 - W_0} dx + C_2 \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из формул (16), (17) и унимодулярности функции W (см. (11)) следует унимодулярность функции ψ_2/ψ_1 . Легко проверить, что для выполнения этого требования необходимо выбрать константы интегрирования C_1 и C_2 таким образом, чтобы их разность была равна

$$C_1 - C_2 = i\pi/2.$$

Если в первом интеграле в (21) выделить вещественную и мнимую части и использовать соотношение

$$W_0 - W_0^* = 2V_0,$$

то выражение для отношения ψ_2/ψ_1 , определяющего новое решение (18) для $u(x, t)$, может быть преобразовано к виду

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} = \exp(i\rho) \frac{\exp(i\varphi) - i \exp(\vartheta)}{1 + i \exp(i\varphi + \vartheta)}, \quad (22)$$

где $\vartheta = 2\mu(t + f(x))$ и

$$f(x) = \frac{k^2}{4} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \int_0^x \frac{dx}{\operatorname{dn}^2(x/k, k) + (2k\mu)^2}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{dn}(x/k, k)}{2k\mu}, \\ \rho &= \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{sn}(x/k, k)\operatorname{cn}(x/k, k)}{2\operatorname{sn}^2(x/k, k) - (1 + \lambda^2)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если продифференцировать функцию $(\varphi \pm \rho)$ по координате, то после несложных манипуляций с эллиптическими функциями Якоби и последующего интегрирования можно преобразовать эти выражения к виду

$$\varphi \pm \rho = \mp \operatorname{am} \left(\frac{x}{k}, k \right) \pm \operatorname{am} \left(\frac{x \pm \Delta}{k}, k \right), \quad (25)$$

где фазовый сдвиг решения Δ зависит от параметров k и λ в неявном виде следующим образом:

$$\operatorname{sn} \left(\frac{\Delta}{k}, k \right) = \frac{2\lambda}{(1 + \lambda^2)k}. \quad (26)$$

Отметим, что во всех приведенных выше формулах мы полагали $\lambda > 1$. Это соответствует положительному значению f , т. е. движению солитона в отрицательном направлении.

В решении (22) функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$f(x) = \frac{x}{v} + \chi(x),$$

где среднее значение периодической функции $\chi(x)$ равно нулю. Наиболее важна линейно растущая с ростом координаты компонента функции $f(x)$, задающая среднюю скорость распространения солитона через несоизмеримую структуру:

$$v = \frac{4K(k)\lambda^2}{(\lambda^4 - 1)k^2} \left\{ \int_0^{K(k)} \frac{dz}{\operatorname{dn}^2(z, k) + (2k\mu)^2} \right\}^{-1}. \quad (27)$$

Таким образом, входящая в выражение (22) фаза

$$\vartheta = \frac{2\mu}{v}(x + vt) + 2\mu\chi(x)$$

описывает движение солитона в отрицательном направлении со средней скоростью v , которое сопровождается периодическими осцилляциями при прохождении движущегося солитона через точки расположения кинков солитонной решетки. Подставляя вы-

ражения (22) и (25) в формулу (18), находим окончательное решение для движения дополнительного солитона через солитонную решетку:

$$u(x, t) = \pi + 2\operatorname{am} \left(\frac{x}{k}, k \right) - 2i \ln \left\{ \frac{\exp(i\kappa_+) - i \exp(\vartheta + i\kappa)}{\exp(-i\kappa_+) + i \exp(\vartheta - i\kappa)} \right\}, \quad (28)$$

где для удобства введены обозначения

$$\kappa_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{am} \left(\frac{x \pm \Delta}{k}, k \right) - \operatorname{am} \left(\frac{x}{k}, k \right) \right\}. \quad (29)$$

Несмотря на громоздкость полученного решения (26)–(29), оно допускает простую физическую интерпретацию, и анализ его асимптотик не представляет труда.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Прежде всего рассмотрим асимптотики полученного решения. При $x \rightarrow \pm\infty$, когда $\vartheta \rightarrow \pm\infty$, из (28) следует

$$\begin{aligned} u(x \rightarrow -\infty, t) &\approx \pi + 2\operatorname{am} \left(\frac{x + \Delta}{k}, k \right), \\ u(x \rightarrow +\infty, t) &\approx \pi + 2\operatorname{am} \left(\frac{x - \Delta}{k}, k \right) + 2\pi. \end{aligned} \quad (30)$$

Слагаемое 2π в (30) в выражении для $u(x \rightarrow +\infty)$ соответствует появлению дополнительного 2π -кинка в исходной решетке солитонов. При этом из-за наличия этого дополнительного солитона вся исходная решетка несколько раздвигается на величину 2Δ , которая зависит от скорости движения этого солитона.

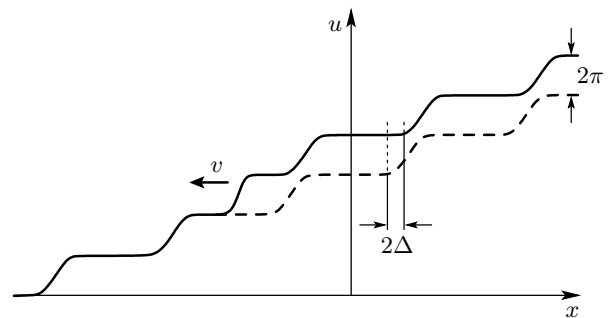


Рис. 2. Движение дополнительного кинка через решетку солитонов. Штриховая линия соответствует распределению поля $u_0(x)$ в исходной периодической несоизмеримой структуре

Описанная динамика схематически изображена на рис. 2. Здесь штриховой линией изображено распределение поля $u_0(x)$ в исходной периодической несоизмеримой структуре. Движущийся через решетку дополнительный кинк, имеющий на рисунке более крутой фронт (что соответствует скоростям, близким к единице), вызывает смещение всей структуры за ним на величину $2\Delta(v)$. Рассмотрим предельные случаи такого движения.

В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ (при этом $\mu \rightarrow \infty$) скорость кинка стремится к своему предельному значению $v \rightarrow 1$ (предельной скорости в лоренц-инвариантной модели (3)). При этом ширина кинка $l = v/2\mu$ стремится к нулю, и он превращается в сингулярную тэта-функцию Хэвисайда. Сдвиг фазы решения на бесконечности 2Δ обращается в нуль: сингулярный кинк с предельной скоростью движется через недеформированную исходную периодическую структуру и

$$u(+\infty) - u_0(+\infty) = 2\pi.$$

Интересна динамика кинка в периодической структуре при стремлении его скорости к минимальной скорости s_0 . В этом пределе $\mu \rightarrow 0$ и λ стремится к своему минимальному значению

$$\lambda_{min} = \frac{1 + k'}{k}.$$

При этом ширина движущегося кинка стремится к бесконечности, и он «расплывается». Его предельная скорость s_0 совпадает со «скоростью звука» длинноволновых колебаний исходной решетки кинков, а сдвиг фазы 2Δ стремится к величине $2\Delta = L$, т. е. к периоду исходной периодической структуры. Таким образом, вновь восстанавливается правильное чередование кинков самоодулированной структуры и сдвиг $u(+\infty) - u_0(+\infty)$ обращается в нуль.

Рассмотренный предел движения добавочного солитона со скоростями, близкими к скорости s_0 , допускает наглядную физическую интерпретацию в случае несоизмеримой структуры с большим периодом $L \gg 1$ (когда $k' \ll 1$). В этом пределе отдельные кинки можно рассматривать как слабовзаимодействующие квазичастицы, образующие одномерную цепочку. Решение уравнения (3) для изолированного кинка хорошо известно [11, 12]:

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (31)$$

Подставляя его в выражение (4) для полной энергии, находим энергию изолированного кинка:

$$E = E_0 \left\{ \frac{8}{\sqrt{1 - v^2}} + 2\pi\xi \right\}. \quad (32)$$

Скорость v в безразмерных переменных связана со скоростью V_k в исходных переменных очевидным соотношением:

$$v = \frac{V_k \sqrt{m}}{\sqrt{\alpha a^2}}.$$

Из выражения (32), во-первых, следует, что при малых скоростях $v \ll 1$ кинетическая энергия кинка имеет вид $E = MV_k^2/2$, а его эффективная масса равна

$$M = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{U_0}{\alpha a^2}} m. \quad (33)$$

Во-вторых, из (32) вытекает, что энергия изолированного статического солитона становится отрицательной при $\xi < -4/\pi$. Это критическое значение параметра несоизмеримости было получено нами выше из точного периодического решения (5). При больших значениях параметра несоизмеримости $|\xi| > |\xi_c|$ становится энергетически выгодным образование кинков. Однако их плотность остается конечной из-за их взаимного отталкивания. Энергия отталкивания двух кинков одинакового знака для уравнения синус-Гордон была вычислена в работе [20] и при расстоянии между кинками, намного превосходящем их размер, имеет следующий вид

$$U(\Delta) \approx 32E_0 \exp(-\Delta/\Lambda), \quad (34)$$

где Δ — расстояние между солитонами и Λ — характерная ширина кинка, введенная ранее.

Если представить координату N -го кинка в решетке солитонов в виде

$$y_N = LN + \zeta_N,$$

где L — расстояние между кинками в основном состоянии и ζ_N — малые смещения кинков, то для полной энергии системы (выше энергии основного состояния) получим

$$E = \sum_N \left\{ \frac{1}{2} M \left(\frac{d\zeta_N}{d\tau} \right)^2 + 32E_0 \exp \left(-\frac{L}{\Lambda} \right) \times \exp \left(-\frac{\zeta_N - \zeta_{N-1}}{\Lambda} \right) \right\}. \quad (35)$$

Эта энергия соответствует хорошо известной и полностью интегрируемой модели Тоды [21, 22]. Но мы ограничимся длинноволновым приближением, когда относительные колебания соседних кинков существенно меньше их ширины:

$$\zeta_N - \zeta_{N-1} \ll \Lambda.$$

В этом случае, переходя к непрерывной координате центров кинков $NL \rightarrow z$, в основном нелинейном приближении (учитывая лишь квадратичные по $\zeta(z, \tau)$ слагаемые) легко получить хорошо известное уравнение Буссинеска [11]:

$$M\zeta_{\tau\tau} - \frac{32E_0L^2}{\Lambda^2} \exp\left(-\frac{L}{\Lambda}\right) \times \\ \times \left\{ \zeta_{zz} + \frac{L^2}{12}\zeta_{zzzz} - \frac{L}{\Lambda}\zeta_z\zeta_{zz} \right\} = 0. \quad (36)$$

Несложно убедиться, что в пренебрежении дисперсионным ($\sim \zeta_{zzzz}$) и нелинейным ($\sim \zeta_z\zeta_{zz}$) слагаемыми полученное волновое уравнение описывает волны колебаний решетки кинков, распространяющиеся со скоростью

$$s_0 = \sqrt{\frac{\alpha a^2}{m}} \frac{2L}{\Lambda} \exp\left\{-\frac{L}{2\Lambda}\right\},$$

полученной нами выше из точного решения для линейных волн в несоизмеримой структуре.

Солитонное решение уравнения (36), описывающее «суперкинк» на фоне решетки кинков, имеет следующий вид [11]:

$$\zeta = -\sqrt{3}\Lambda \sqrt{\frac{V_k^2}{s_0^2} - 1} \times \\ \times \left\{ 1 + \text{th} \left[\sqrt{3} \sqrt{\frac{V_k^2}{s_0^2} - 1} \frac{z - V_k\tau}{L} \right] \right\}. \quad (37)$$

Ему соответствует участок оси скоростей $V_k > s_0$ на рис. 1б вблизи точки $V_k = s_0$. В пределе $V_k \rightarrow s_0$ имеем результат

$$\zeta(+\infty) - \zeta(-\infty) = 0,$$

полученный выше из точного решения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена динамика кинка, движущегося через несоизмеримую структуру — решетку кинков (динамика флаксона, движущегося через флаксонную решетку в длинном джозефсоновском контакте). Для описания такой динамики в рамках уравнения синус-Гордон найдено и исследовано точное аналитическое решение. В пределе большого периода решетки и малой скорости добавочного солитона предложено качественное физическое описание его динамики. Результаты могут быть использованы для теоретического описания

изменения плотности флаксонов в длинном джозефсоновском контакте при изменении приложенного магнитного поля.

Работа была выполнена при частичной поддержке программой INTAS (грант INTAS-99 № 0167).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. L. Mills and J. Trullinger, Phys. Rev. B **36**, 947 (1987).
2. O. A. Chubykalo, A. S. Kovalev, and O. V. Usatenko, Phys. Rev. B **47**, 3153 (1993).
3. A. B. Aceves and S. Wabnitz, Phys. Lett. A **141**, 37 (1989).
4. R. A. Ferrell and R. E. Prange, Phys. Rev. Lett. **40**, 479 (1963).
5. D. J. Scalapino, *The Theory of Josephson Tunneling, in Tunneling Phenomena in Solids*, ed. by E. Burstein and S. Lundqvist, Plenum Press, New York (1969), p. 477.
6. U. Harten, A. M. Lahee, J. P. Toennies, and Ch. Woll, Phys. Rev. Lett. **54**, 2619 (1985).
7. M. Mansfield and R. J. Needs, J. Phys.: Condens. Matter **2**, 2361 (1990).
8. O. Braun and Yu. S. Kivshar, Phys. Rep. **306**, 4 (1998).
9. В. Г. Барьяхтар, Т. К. Соболева, А. Л. Сукстанский, ФТТ **27**, 2428 (1985).
10. Е. П. Стефановский, А. Л. Сукстанский, ЖЭТФ **104**, 3434 (1993).
11. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
12. А. М. Косевич, *Теория кристаллической решетки*, Вища школа, Харьков (1988).
13. И. О. Кулик, И. К. Янсон, *Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах*, Наука, Москва (1970).
14. P. Lebwohl and M. Stephen, Phys. Rev. **163**, 376 (1967).
15. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis*, Cambridge University Press, New York (1940), Chap. XXIII.

16. В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, Н. С. Новожилова, ЖЭТФ **89**, 2174 (1985).
17. В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, ФММ **65**, 868 (1988).
18. А. С. Ковалев, Н. Е. Кулагин, Препринт 14-87 ФТИНТ АН УССР, Харьков (1987).
19. М. А. Салль, ТМФ **52**, 227 (1982).
20. А. С. Ковалев, А. Д. Кондратюк, А. И. Ландау, Препринт 26-89 ФТИНТ АН УССР, Харьков (1989).
21. Н. Toda, Prog. Theor. Phys. Suppl. **45**, 174 (1970).
22. Н. Toda, Prog. Theor. Phys. Suppl. **59**, 1 (1976).