

# КВАНТОВАЯ СТЕПЕННАЯ ПОПРАВКА К ЗАКОНУ НЬЮТОНА

Г. Г. Кирилин\*, И. Б. Хрипович\*\*

Институт ядерной физики им. Г. И. Буджера Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет  
630000, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 19 августа 2002 г.

Найден вклад гравитонов в однопетлевую квантовую поправку к закону Ньютона. Эта поправка приводит к взаимодействию, убывающему с расстоянием как  $1/r^3$ . В поправке численно доминирует вклад гравитонов. Показано, что прежние расчеты этого вклада в обсуждаемый эффект неверны.

PACS: 04.60.-m

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о поправках к закону Ньютона, возникающих в общей теории относительности, отнюдь не нов. Классические релятивистские поправки к этому закону были найдены уже давно Эйнштейном, Инфельдом и Гофманом [1], а также Эддингтоном и Кларком [2]. (Относительно простой вывод релятивистских поправок содержится в учебнике [3].) Впоследствии этот результат был воспроизведен Ивасики с помощью фейнмановских диаграмм [4]. Таким образом, вопрос о классических поправках к закону Ньютона решен окончательно<sup>1)</sup>.

Заметим, что общая структура релятивистской классической поправки к потенциалу взаимодействия двух тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , которая была бы квадратична по ньютоновской гравитационной постоянной  $k$ , заранее ясна. Действительно, величина  $km/c^2$  ( $c$  — скорость света) имеет размерность длины, так что с учетом требования симметрии по перестановке  $m_1 \leftrightarrow m_2$  эта поправка должна иметь

вид

$$U_{cl} = a_{cl} \frac{k^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^2 r^2}. \quad (1)$$

Безразмерная константа  $a_{cl}$ , найденная в указанных работах, равна  $1/2$ .

Есть еще одна комбинация констант, линейная по  $k$ , которая пригодна для конструирования степенной поправки к ньютоновскому потенциалу. Речь идет о

$$\frac{k\hbar}{c^3} = l_p^2,$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $l_p = 1.6 \cdot 10^{-33}$  см — планковская длина. Ясно, что такая поправка, имеющая, разумеется, квантовую природу, должна выглядеть следующим образом:

$$U_{qu} = a_{qu} \frac{k^2 \hbar m_1 m_2}{c^3 r^3}. \quad (2)$$

Остается найти численную константу  $a_{qu}$ . Несмотря на крайнюю малость квантовой поправки, ее исследование представляет несомненный методический интерес: речь идет о замкнутом расчете эффекта, возникающего в высшем порядке неперенормируемой квантовой теории гравитации.

Причина, по которой эта задача имеет замкнутое решение, такова. Фурье-образ функции  $1/r^3$  равен

$$\int d\mathbf{r} \frac{\exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = -2\pi \ln q^2. \quad (3)$$

\*E-mail: g\_kirilin@mail.ru

\*\*E-mail: khriпович@inp.nsk.su

<sup>1)</sup> Впрочем, ошибочные работы на эту тему продолжают появляться и сейчас. Мы имеем в виду статьи [5], где утверждается, что классические релятивистские поправки к уравнениям движения двух тел, находящихся на большом расстоянии друг от друга, существенно зависят от внутренней структуры этих объектов. Мы полагаем, что это утверждение критики не выдерживает.

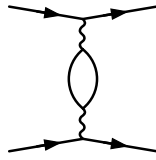


Рис. 1. Фотонная (нейтринная) петля

Эта сингулярность по передаваемому импульсу  $q$  означает, что обсуждаемую поправку могут генерировать лишь диаграммы с двумя безмассовыми частицами в промежуточном состоянии в  $t$ -канале. Число таких диаграмм второго порядка по  $k$  конечно, а их логарифмическая по  $q^2$  часть вычисляется однозначно.

Подобные диаграммы с фотонами и безмассовыми нейтрино в петле (см. рис. 1) были вычислены в работах Радковского [6], Каппера, Даффа и Хальперна [7], Каппера и Даффа [8], Даффа и Лю [9]. Этот вклад в численный множитель  $a_{qu}$  составляет

$$a_1 = \frac{4 + N_\nu}{15\pi}, \quad (4)$$

где  $N_\nu$  — число безмассовых двухкомпонентных нейтрино.

Что же касается вклада в эффект от гравитонного обмена, то он рассматривался в работах Донохью [10–13], Музинича и Вокоса [14], Хамбера и Лю [15], Ахундова, Белуччи и Шеха [16]. Однако никакого количественного согласия между результатами этих работ нет, отличаются даже предсказания для знака поправки.

Мы полагаем, что правильный результат для квантовой поправки к закону Ньютона достаточно интересен с теоретической точки зрения. В этом состоит цель нашего исследования. Среди предыдущих работ по этому вопросу расчет данной поправки наиболее подробно изложен в [11, 16]. Наш подход — прямой расчет фейнмановских диаграмм, выбор полевого оператора гравитационного поля и калибровки — такой же, как и в [10–13, 16]. Это позволяет относительно подробно сравнить расчеты отдельных вкладов в эффект. Сравнение показало, что в [10–13, 16], учтены не все диаграммы, а рассмотренные вклады вычислены неверно. Ниже, при обсуждении конкретных вкладов в поправку, мы еще будем возвращаться к сравнению с предшествующими работами, включая [14, 15]. А пока отметим очевидную ошибку в [10–13, 16]: там формула Фурье-преобразования функции  $1/r^3$  (см. (3)) содер-

жит  $\pi^2$  вместо  $\pi$ , причем ошибка эта сохраняется и в окончательном ответе.

Некоторые из рассмотренных диаграмм дают также вклад и в классическую релятивистскую поправку. Для проверки своих расчетов мы параллельно вычислили эти классические вклады и сравнили их с соответствующими результатами работы [4]. Что касается этих классических вкладов, у нас имеется полное согласие с [4] для каждой диаграммы в отдельности.

## 2. ПРОПАГАТОРЫ И ВЕРШИНЫ

Ниже используется система единиц, в которой  $c = 1, \hbar = 1$ .

В качестве полевого оператора  $h_{\mu\nu}$  гравитационного поля выбираем отклонение метрики  $g_{\mu\nu}$  от плоской:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (5)$$

$$\kappa^2 = 32\pi k = 32\pi l_p^2.$$

Используется калибровка, в которой пропагатор гравитона равен

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta}(q) = i \frac{P_{\mu\nu,\alpha\beta}}{q^2 + i0}, \quad (6)$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}).$$

Тензор  $P_{\mu\nu,\alpha\beta}$  удобно представить в виде [17]

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta} = I_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta},$$

где

$$I_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta})$$

— своеобразный единичный оператор, обладающий свойством

$$I_{\mu\nu,\alpha\beta} t_{\alpha\beta} = t_{\mu\nu}$$

для любого симметричного тензора  $t_{\alpha\beta}$ . Отметим следующее полезное тождество:

$$P_{\alpha\beta,\kappa\lambda} P_{\kappa\lambda,\gamma\delta} = I_{\alpha\beta,\gamma\delta}. \quad (7)$$

Пропагатор скалярной частицы обычный:

$$G(p) = i \frac{1}{p^2 + i0}. \quad (8)$$

Вершина взаимодействия скалярной частицы с одним гравитоном равна (см. рис. 2a)

$$V_{\alpha\beta}(p, p') = -i \frac{\kappa}{2} [p_\alpha p'_\beta + p'_\alpha p_\beta - \delta_{\alpha\beta} (pp' - m^2)]. \quad (9)$$

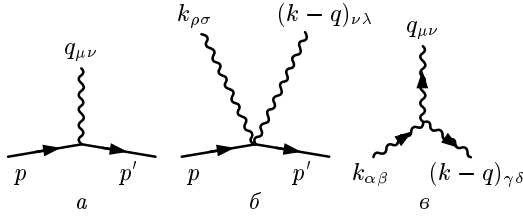


Рис. 2. Вершины

Контактное взаимодействие скалярной частицы с двумя гравитонами (см. рис. 2б) выглядит следующим образом:

$$V_{\kappa\lambda,\rho\sigma} = i\kappa^2 \left[ I_{\kappa\lambda,\alpha\delta} I_{\delta\beta,\rho\sigma} (p_\alpha p'_\beta + p'_\alpha p_\beta) - \frac{1}{2} (\delta_{\kappa\lambda} I_{\rho\sigma,\alpha\beta} + \delta_{\rho\sigma} I_{\kappa\lambda,\alpha\beta}) p_\alpha p'_\beta + \frac{(p' - p)^2}{4} \left( I_{\kappa\lambda,\rho\sigma} - \frac{1}{2} \delta_{\kappa\lambda} \delta_{\rho\sigma} \right) \right]. \quad (10)$$

С нашей точностью можно пренебречь в этом выражении последним слагаемым, пропорциональным  $(p' - p)^2$ .

Заметим, что в работах [11, 16] вершина (10) ошибочно приведена с вдвое меньшим коэффициентом, т. е.  $\kappa^2/2$  вместо  $\kappa^2$ .

Стоит указать здесь следующие полезные тождества:

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta} [p_\alpha p'_\beta + p'_\alpha p_\beta - \delta_{\alpha\beta} (pp' - m^2)] = p_\alpha p'_\beta + p'_\alpha p_\beta - \delta_{\alpha\beta} m^2, \quad (11)$$

$$P_{\alpha\beta,\kappa\lambda} P_{\gamma\delta,\rho\sigma} V_{\kappa\lambda,\rho\sigma} = V_{\alpha\beta,\gamma\delta}. \quad (12)$$

Что же касается трехгравитонной вершины (см. рис. 2в), которая имеет наиболее сложный вид, то, следуя [11], представим ее в виде

$$V_{\mu\nu,\alpha\beta,\gamma\delta} = -i \frac{\kappa}{2} \sum_i v_{\mu\nu,\alpha\beta,\gamma\delta}^i, \quad (13)$$

$$^1 v_{\mu\nu,\alpha\beta,\gamma\delta} = P_{\alpha\beta,\gamma\delta} \left[ k_\mu k_\nu + (k - q)_\mu (k - q)_\nu + q_\mu q_\nu - \frac{3}{2} \delta_{\mu\nu} q^2 \right],$$

$$^2 v_{\mu\nu,\alpha\beta,\gamma\delta} = 2q\lambda q\sigma [I_{\lambda\sigma,\alpha\beta} I_{\mu\nu,\gamma\delta} + I_{\lambda\sigma,\gamma\delta} I_{\mu\nu,\alpha\beta} - I_{\lambda\mu,\alpha\beta} I_{\sigma\nu,\gamma\delta} - I_{\lambda\nu,\alpha\beta} I_{\sigma\mu,\gamma\delta}],$$

$$^3 v_{\mu\nu,\alpha\beta,\gamma\delta} = q\lambda q\mu (\delta_{\alpha\beta} I_{\lambda\nu,\gamma\delta} + \delta_{\gamma\delta} I_{\lambda\nu,\alpha\beta}) + q\lambda q\nu (\delta_{\alpha\beta} I_{\lambda\mu,\gamma\delta} + \delta_{\gamma\delta} I_{\lambda\mu,\alpha\beta}) - q^2 (\delta_{\alpha\beta} I_{\mu\nu,\gamma\delta} + \delta_{\gamma\delta} I_{\mu\nu,\alpha\beta}) - \delta_{\mu\nu} q\lambda q\sigma (\delta_{\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\lambda\sigma} + \delta_{\gamma\delta} I_{\alpha\beta,\lambda\sigma}),$$

$$^4 v_{\mu\nu,\alpha\beta,\gamma\delta} = 2q\lambda [I_{\sigma\nu,\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\lambda\sigma} (k - q)_\mu + I_{\sigma\mu,\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\lambda\sigma} (k - q)_\nu - I_{\sigma\nu,\gamma\delta} I_{\alpha\beta,\lambda\sigma} k_\mu - I_{\sigma\mu,\gamma\delta} I_{\alpha\beta,\lambda\sigma} k_\nu] + q^2 (I_{\sigma\mu,\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\sigma\nu} + I_{\sigma\nu,\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\sigma\mu}) + \delta_{\mu\nu} q\lambda q\sigma (I_{\alpha\beta,\lambda\rho} I_{\rho\sigma,\gamma\delta} + I_{\gamma\delta,\lambda\rho} I_{\rho\sigma,\alpha\beta}),$$

$$^5 v_{\mu\nu,\alpha\beta,\gamma\delta} = [k^2 + (k - q)^2] \times \left( I_{\sigma\mu,\alpha\beta} I_{\gamma\delta,\sigma\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} P_{\alpha\beta,\gamma\delta} \right) - k^2 \delta_{\gamma\delta} I_{\mu\nu,\alpha\beta} - (k - q)^2 \delta_{\alpha\beta} I_{\mu\nu,\gamma\delta}.$$

В этой вершине с нашей точностью также можно пренебречь структурой  $^5 v_{\mu\nu,\alpha\beta,\gamma\delta}$ .

Заметим, что в работах [11, 16] вершина (13) ошибочно выписана с противоположным знаком. Наш знак подтверждается следующими соображениями: для физических гравитонов с импульсами  $k$  и  $k - q$  вершина (13) должна согласоваться в пределе  $q \rightarrow 0$  с взаимодействием (9) гравитона со скалярной частицей.

### 2.1. Простые петли

Удобно начать с диаграмм, для которых фейнмановские интегралы содержат только два знаменателя.

Простейшая из них, рис. 3а, вообще пропущена в [10–13, 16]. Ее расчет затруднений не вызывает, достаточно использовать тождество (12) и перейти к нерелятивистскому пределу в обеих двухгравитонных вершинах. Результат для этого вклада в квантовую поправку имеет вид

$$U_{qu1} = -\frac{22}{\pi} \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3}. \quad (14)$$

Расчет следующей диаграммы (рис. 3б) и диаграммы, полученной из нее при перестановке скалярных частиц, также достаточно прост и приводит к следующему результату:

$$U_{qu2} = \frac{26}{3\pi} \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3}. \quad (15)$$

Результат работы [11] для этого вклада отличается от (15) только неправильной степенью  $\pi$ . Соответствующий результат работы [16] совсем иной.

Что же касается вклада диаграмм на рис. 3в,  $g$  с поляризационным оператором гравитона, то нам мало что остается добавить к работам [10–13] в отношении способа их расчета, и нечего добавить вообще к самому результату (который используется также в работах [14, 16]). Но для полноты изложения приведем здесь вкратце этот расчет.

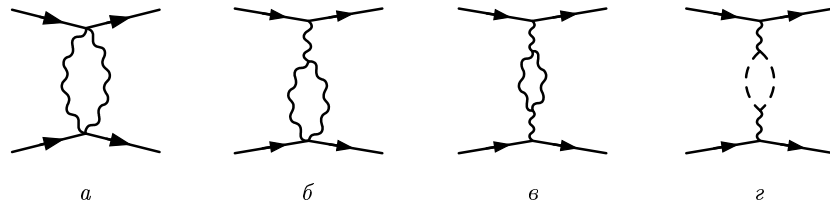


Рис. 3. Простые петли

Эффективный лагранжиан, возникающий при размерной регуляризации суммы этих двух расходящихся графиков, с гравитонами и векторными духами, полученный 'т Хофтом и Вельтманом [17], равен

$$L = -\frac{1}{16\pi^2} \ln |q^2| \left( \frac{1}{120} R^2 + \frac{7}{20} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right). \quad (16)$$

В линейном приближении тензор Риччи и скалярная кривизна внешнего гравитационного поля, входящие в это выражение, выглядят как

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta} (q^2 I_{\mu\nu, \alpha\beta} + q_\mu q_\nu \delta_{\alpha\beta} - q_\mu q_\alpha \delta_{\nu\beta} - q_\nu q_\alpha \delta_{\mu\beta}) = \frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta} r_{\mu\nu, \alpha\beta},$$

$$R = \kappa h_{\alpha\beta} (q^2 \delta_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta) = \kappa h_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}.$$

Соответствующий вклад в поляризационный оператор гравитона составляет

$$\Pi_{\alpha\beta, \gamma\delta} = -\frac{\kappa^2}{8\pi^2} \ln |q^2| \times \left( \frac{1}{120} r_{\alpha\beta} r_{\gamma\delta} + \frac{7}{80} r_{\mu\nu, \alpha\beta} r_{\mu\nu, \gamma\delta} \right). \quad (17)$$

Мы учли здесь две возможности отождествления  $R_{\mu\nu}$  и  $R$  с верхним или нижним внешним гравитоном. Дальнейший расчет очевиден. Заметим только, что суммирование по  $\mu, \nu$  удобно проводить в последнюю очередь. В итоге этот вклад в квантовую поправку к потенциалу равен

$$U_{qu3} = -\frac{43}{30\pi} \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3}. \quad (18)$$

Заметим, что диаграммы на рис. 3в, г рассчитывались в других переменных,  $\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (1/2)\delta_{\mu\nu}h$ , в работах [15, 18, 19], а также в работе [6], использующей для описания гравитации швингеровскую теорию источников.

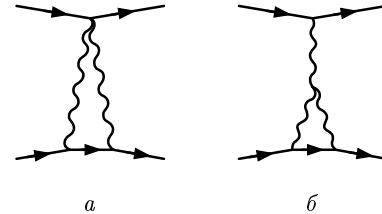


Рис. 4. Треугольные диаграммы

### 3. ТРЕУГОЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ

Основная формула для треугольных диаграмм на рис. 4а, б такова (мы удерживаем в ней лишь члены, сингулярные по  $|q|$ ):

$$i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-q)^2((p-k)^2 - m^2)} = \frac{1}{32\pi^2 m^2} \left( \frac{\pi^2 m}{\sqrt{|q^2|}} + \ln |q^2| \right). \quad (19)$$

Ее удобно получить, вычисляя сначала мнимую часть левой стороны равенства в  $t$ -канале, а затем восстанавливая правую сторону с помощью дисперсионного соотношения. Первое слагаемое в правой части формулы (19) генерирует  $1/r^2$  в координатном представлении и дает вклад в классическую релятивистскую поправку. Мы удерживаем это слагаемое в формуле (19), чтобы проверять расчеты путем сравнения с соответствующими результатами работы [4].

Наш ответ для вклада более простых диаграмм типа диаграммы на рис. 4а равен

$$U_{qu4} = \frac{28}{\pi} \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3}. \quad (20)$$

Этот вклад также пропущен в работах [11, 16].

Гораздо более громоздким является расчет диаграмм типа представленной на рис. 4б. Он дает

$$U_{qu5} = -\frac{29}{3\pi} \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3}. \quad (21)$$

Соответствующий вклад, полученный в работе [16], отличается от (21) только знаком и неверной степенью  $\pi$ . Результат работы [11] для этого вклада совсем иной.

#### 4. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ

Выражения для матричных элементов, соответствующих четырехугольным диаграммам на рис. 5а, б, можно представить в виде

$$M_s = i \frac{\kappa^4}{16m_1 m_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[a - b(D_1 + D_2)]^2}{k^2(k-q)^2 D_1 D_2}, \quad (22)$$

$$D_1 = k^2 - 2(p_1 k), \quad D_2 = k^2 + 2p_2 k, \\ a = 2(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2, \quad b = (p_1 p_2),$$

$$M_u = i \frac{\kappa^4}{16m_1 m_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[a' + b'(D_1 + D'_2)]^2}{k^2(k-q)^2 D_1 D'_2}, \quad (23)$$

$$D'_2 = k^2 - 2(p_2 + q, k), \quad b' = (p_1, p_2 + q), \\ a' = 2(p_1, p_2 + q)^2 - m_1^2 m_2^2.$$

В числителях этих интегралов удобно выделить такие структуры, которые сокращают один или оба знаменателя  $D_1, D_2 (D'_2)$ . Когда сокращается один знаменатель, остается треугольная диаграмма типа представленной на рис. 4а:

$$M_{1s} = i \frac{\kappa^4}{16m_1 m_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2 (k-q)^2} \times \\ \times \left\{ b^2 \left( \frac{2(p_2 k)}{D_1} - \frac{2(p_1 k)}{D_2} \right) - 2ab \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) \right\}, \quad (24)$$

$$M_{1u} = i \frac{\kappa^4}{16m_1 m_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2 (k-q)^2} \times \\ \times \left\{ b'^2 \left( -\frac{2(p'_2 k)}{D_1} - \frac{2(p_1 k)}{D'_2} \right) + \right. \\ \left. + 2a'b' \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D'_2} \right) \right\}. \quad (25)$$

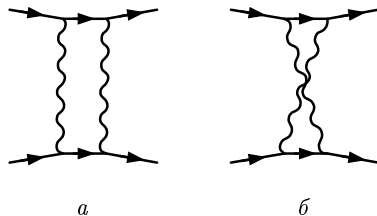


Рис. 5. Четырехугольные диаграммы

Легко показать, что с интересующей нас точностью выражения (24) и (25) взаимно сокращаются.

Выражения, в которых отсутствуют два знаменателя,

$$M_{2s} = i \frac{\kappa^4}{16m_1 m_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2b^2}{k^2(k-q)^2}, \quad (26)$$

$$M_{2u} = i \frac{\kappa^4}{16m_1 m_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2b'^2}{k^2(k-q)^2}, \quad (27)$$

соответствуют диаграммам типа рис. 3а. Эти вклады в сумме дают следующий результат для обсуждаемого эффекта:

$$U_{qu5} = -\frac{8}{\pi} \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3}. \quad (28)$$

Теперь остаются «неприводимые» части диаграмм рис. 5а, б. Эти неприводимые матричные элементы удобно находить, вычисляя сначала их мнимые части, в  $s$ - и  $u$ -каналах, соответственно, а затем восстанавливая вещественные части через дисперсионные соотношения. Результаты таковы (мы отбрасываем члены, несингулярные по  $|q^2|$ ):

$$M_{0s} = i \frac{\kappa^4 a^2}{16m_1 m_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\ \times \{ (k^2 - \lambda^2)((k-q)^2 - \lambda^2) \times \\ \times (k^2 - 2p_1 k)(k^2 + 2p_2 k) \}^{-1} = \quad (29)$$

$$= -\frac{\kappa^4 a^2}{(16m_1 m_2)^2 |q^2| \pi^2} \times \\ \times \left[ -1 + \frac{s - 2(m_1 + m_2)^2}{6m_1 m_2} \right] \ln \frac{|q^2|}{\lambda^2}, \quad (30)$$

$$M_{0u} = i \frac{\kappa^4 a'^2}{16m_1 m_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\ \times \{ (k^2 - \lambda^2)((k-q)^2 - \lambda^2) \times \\ \times (k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2(p_2 + q, k)) \}^{-1} = \quad (31)$$

$$= -\frac{\kappa^4 a'^2}{(16m_1 m_2)^2 |q^2| \pi^2} \left[ 1 + \frac{u - (m_1 - m_2)^2}{6m_1 m_2} \right] \times \\ \times \ln \frac{|q^2|}{\lambda^2}. \quad (32)$$

$$\times \ln \frac{|q^2|}{\lambda^2}. \quad (33)$$

В этих формулах  $s = (p_1 + p_2)^2$  и  $u = (p_1 - p_2 - q)^2$ . Выражения (29), (31) сходятся в ультрафиолетовом пределе, но они расходятся в инфракрасном пределе и зависят от «массы гравитона»  $\lambda$ . Как обычно, такое поведение непосредственно связано с необходимостью сокращения инфракрасной расходимости

в диаграммах тормозного излучения (разумеется, в данном случае речь идет о гравитационном тормозном излучении). Сумма неприводимых четырехугольных диаграмм содержит слагаемое, пропорциональное  $\ln |q^2|$ , которое генерирует следующую квантовую поправку к ньютоновскому потенциалу:

$$U_{qu7} = -\frac{23}{3\pi} \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3}. \quad (34)$$

Стоит отметить, что в отличие от предыдущих вкладов, где  $|q^2|$  определял инфракрасное обрезание для ультрафиолетово расходящихся интегралов, здесь  $|q^2|$  является верхним пределом для интегралов, расходящихся инфракрасно.

Для четырехугольных диаграмм мы также проверили, что наши результаты для генерируемых ими классических поправок полностью согласуются с полученными в [4].

Вклады четырехугольных диаграмм в квантовую поправку вообще пропущены в работах [10–13, 16], хотя диаграммы рис. 5а, б рассматриваются в [20] с иной точки зрения.

С другой стороны, ни в [14], ни в [15] мы не смогли найти никакого упоминания об «инфракрасном» вкладе типа (33). На самом деле в [15] задача о классических и квантовых поправках рассматривалась в других переменных,  $\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (1/2)\delta_{\mu\nu}h$ . Легко показать, что выражения для четырехугольных диаграмм в точности одинаковы в обеих переменных,  $\psi$  и  $h$ . Однако вклады этих диаграмм, вычисленные в [15], не согласуются ни с классическими, полученными в [4] (где явно показано, что эти вклады одинаковы в обеих переменных  $\psi$  и  $h$ ), ни с нашими результатами для квантовых поправок, будь то (28) или (34), или их сумма.

Наконец, еще несколько слов о работе [14]. Подход, развиваемый в ней, выглядит весьма интересным и многообещающим. Однако результаты для квантовых поправок, представленные там, не согласуются с нашими (впрочем, они не согласуются и с результатами работ [10–13, 15, 16]). Отсутствие деталей в [14] не позволяет сказать с определенностью, в чем источник расхождений. Впрочем, возникает впечатление, что в работе [14] по крайней мере не учтен тот факт, что треугольные диаграммы генерируют не только классические, но и квантовые поправки. Иными словами, представляется, что в работе [14] не учитывается второе слагаемое в формуле (19).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате полученные вклады, (14), (15), (18), (20), (21), (28), (33), приводят к следующему выражению для квантовой поправки к ньютоновскому потенциалу, обусловленной двухгравитонным обменом:

$$U(r) = -\frac{km_1m_2}{r} \left( 1 + \frac{121}{10\pi} \frac{k\hbar}{c^3 r^2} \right). \quad (34)$$

Заметим, что найденная полная поправка усиливает, а не ослабляет обычное ньютоновское притяжение.

Мы признательны С. Дизеру и М. Дж. Даффу за то, что они привлекли наше внимание к работам [6, 9, 19] и за интересные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 01-02-16898), программы поддержки Ведущих научных школ (грант 00-15-96811), Министерства образования (грант Е00-3.3-148) и Федеральной программы Интеграция-2002.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, L. Infeld, and B. Hoffmann, *Ann. Math.* **39**, 65 (1938).
2. A. Eddington and G. Clark, *Proc. Roy. Soc.* **166**, 465 (1938).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988), §106.
4. Y. Iwasaki, *Progr. Theor. Phys.* **46**, 1587 (1971).
5. K. A. Kazakov, *Class. Quant. Grav.* **18**, 1039 (2001); E-print archives hep-th/0009073; *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **104**, 232 (2002); E-print archives hep-th/0107080; hep-th/0111074; *Class. Quant. Grav.* **19**, 3017 (2002); E-print archives hep-th/0201246.
6. A. F. Radkowski, *Ann. Phys.* **56**, 319 (1970).
7. D. M. Capper, M. J. Duff, and L. Halpern, *Phys. Rev. D* **10**, 461 (1974).
8. D. M. Capper and M. J. Duff, *Nucl. Phys. B* **44**, 146 (1974).
9. M. J. Duff and J. T. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2052 (2000); E-print archives, hep-th/0003237.
10. J. F. Donoghue, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2996 (1994); E-print archives gr-qc/9310024.

11. J. F. Donoghue, Phys. Rev. D **50**, 3874 (1994); E-print archives gr-qc/9405057.
12. J. F. Donoghue, in *Advanced School on Effective Theories*, ed. by F. Cornet and M. J. Herrero, World Scientific, Singapore (1996); E-print archives gr-qc/9512024.
13. J. F. Donoghue, in *Proc. Eighth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, ed. by T. Piran and R. Ruffini, World Scientific, Singapore (1999); E-print archives gr-qc/9712070.
14. I. J. Muzinich and S. Vokos, Phys. Rev. D **52**, 3472 (1995); E-print archives hep-th/9501083.
15. H. Hamber and S. Liu, Phys. Lett. **357B**, 51 (1995); E-print archives hep-th/9505182.
16. A. Akhundov, S. Belucci, and A. Shiekh, Phys. Lett. **395B**, 19 (1998); E-print archives gr-qc/9611018.
17. G. 't Hooft and M. Veltman, Ann. Inst. H. Poincare A **20**, 69 (1974).
18. D. M. Capper, G. Leibbrandt, and M. Ramon Medrano, Phys. Rev. D **8**, 4320 (1973).
19. J. F. Donoghue and T. Torma, Phys. Rev. D **54**, 4963 (1996); E-print archives hep-th/9602121.