

ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА МАКРОСКОПИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ КОМПОЗИТОВ. ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

А. А. Снарский^{a*}, М. В. Шамонин^b, М. И. Женировский^a

^a Национальный технический университет
03056, Киев, Украина

^b H. ROSEN Engineering GmbH
D-49811 Lingen (Ems), Germany

Поступила в редакцию 5 августа 2002 г.

Рассмотрены различные теоретические модели (метод самосогласованного поля, метод локальной линеаризации, метод теории перколяции, аналитическое решение линейной задачи в упорядоченной среде) для расчета магнитостатических свойств двухфазных композитов, одна из фаз которых является ферромагнитной. Найдены концентрационная и полевая зависимости эффективной магнитной проницаемости. Предложен метод, позволяющий определить коэрцитивную силу и остаточную намагниченность как функции концентрации ферромагнитной фазы. Проведен численный эксперимент для композитов с периодическим расположением включений круговой формы, и дано сравнение с результатами аналитического подхода к вычислению эффективной магнитной проницаемости.

PACS: 41.20.Cz, 51.60.+a, 75.50.-y

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучению магнитных свойств композитов, содержащих ферромагнитные включения, посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ (см., например, [1–6]). Этот интерес вызван тем, что возможности чистых (однофазных, однородных, гомогенных) материалов в значительной мере исчерпаны. Большое место в создании новых материалов уделяется разработке макроскопически неоднородных сред, свойствами которых можно управлять в весьма широких пределах [7].

В зависимости от структуры, концентрации фаз и их локальных свойств в ряде случаев возможно создание композитов с наперед заданными комбинациями свойств, не присущими отдельным фазам. Такие материалы широко используются в различных электротехнических приложениях. Например, магнитомягкие порошковые композиты, сочетающие в себе ферромагнитные свойства металлических частиц и эластичность полимерной (немагнитной) мат-

рицы, находят применение в качестве экранирующих элементов и в широкополосных системах связи.

Основной задачей теоретического описания любого композитного материала является установление зависимости его эффективных свойств от концентрации, геометрической структуры расположения фаз и их локальных физических свойств.

В работе будут рассмотрены эффективные свойства двухфазных композитов в том случае, когда одна из фаз является ферромагнитной, $\mathbf{V} = \mu_1(\mathbf{H})\mathbf{H}$, а вторая — некоторая линейная среда, $\mathbf{V} = \mu_2\mathbf{H}$ (обычно это полимерная матрица, $\mu_2 = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн·м⁻¹). В таких композитах [1] наблюдают сложные нелинейные зависимости отклика всего образца на внешнее магнитное поле, резкие концентрационные зависимости эффективных коэффициентов, связанные с их перколяционным поведением. Наличие описанных выше особенностей делает вычисление эффективных свойств композита весьма сложной задачей теоретической физики, решение которой возможно либо для простого геометрического расположения фаз (слои, упорядоченные шарики), либо в определенных приближениях, гра-

*E-mail: asnar@yandex.ru

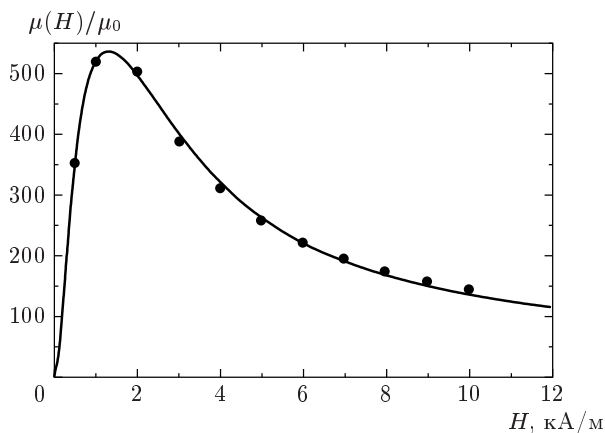


Рис. 1. Зависимость относительной магнитной проницаемости в ферромагнитной нелинейной фазе от магнитного поля: точки — значения магнитной проницаемости для конкретного материала; сплошная кривая — аналитическая функция (см. Приложение), аппроксимирующая экспериментальные точки

ницы применимости которых трудно оценить.

Однако, кроме упомянутых сложностей, в магнитных композитах имеют место, по крайней мере, еще две принципиальные особенности.

Первая связана со специфической нелинейностью локальной магнитной проницаемости (рис. 1). В зависимости от значения напряженности локального магнитного поля магнитная проницаемость ферромагнитной фазы может быть как порядка, так и много больше магнитной проницаемости немагнитной фазы, их отношение — параметр неоднородности — изменяется от величин порядка единицы до тысячи. Поскольку в неоднородной среде величины магнитного поля в разных местах могут различаться значительно, существенно отличаться друг от друга будут и параметры неоднородности. Этот означает, что, вообще говоря, такую двухфазную среду нельзя считать ни слабо, ни сильно неоднородной.

Вторая особенность связана с тем, что в некоторых случаях нельзя пренебречь гистерезисом в магнитной фазе, что требует, как будет показано ниже, при теоретическом описании таких композитов введения явлений, аналогичных термоэлектрическим, т. е. следует рассматривать системы с двумя термодинамическими силами (электрическим полем и градиентом температуры) и с двумя потоками (плотностью тока и плотностью потока тепла).

Среди всевозможных структур двухфазных сред, однородных в среднем, будут рассмотрены две структуры. Первый тип структуры —

случайно-неоднородная среда с равноправным расположением фаз; дискретной моделью такой структуры, если пренебречь формой включений, является сетка с узлами (или связями) со свойствами первой и второй фаз. Второй тип — среда с периодически расположенными включениями одной фазы в матрице другой. В этом случае равноправия фаз нет; образно говоря, черные шарики в белой среде и белые в черной при изменении концентрации друг в друга не переходят.

В п. 2.1 статьи рассмотрены эффективные свойства случайно-неоднородных сред в случае, когда гистерезисом можно пренебречь. В п. 2.2 предложен метод вычисления эффективных коэффициентов и коэрцитивной силы случайно-неоднородного ферромагнитного композита. В разд. 3 изучаются эффективные свойства двумерного композита с периодически расположенными включениями круговой формы. В этом случае достаточно решить уравнения Максвелла совместно с нелинейными материальными уравнениями для одной элементарной ячейки и затем провести усреднение. В разд. 4 приведены результаты численного моделирования. Мы использовали метод конечных элементов, который в последние годы стал основным инструментом в математическом моделировании инженерных и фундаментальных задач электромагнетизма (см., например, [8, 9]). Преимущества метода конечных элементов перед альтернативными численными методами решения уравнений в частных производных (метод конечных разностей, метод граничных элементов) заключаются в простом моделировании сложных границ, простом обобщении аппроксимаций высшего порядка, эффективной дискретизации и использовании разреженных матриц.

2. СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫЕ РАЗУПОРЯДОЧЕННЫЕ СРЕДЫ

2.1. Ферромагнитная фаза с нулевой петлей гистерезиса

Основной характеристикой неоднородных сред являются эффективные кинетические коэффициенты. В рассматриваемом здесь случае это эффективная магнитная проницаемость μ_{eff} и эффективное магнитное сопротивление λ_{eff} , связывающие между собой, по определению, средние по объему напряженность магнитного поля $\langle \mathbf{H} \rangle$ и магнитную индукцию $\langle \mathbf{B} \rangle$:

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mu_{eff} \langle \mathbf{H} \rangle, \quad \langle \mathbf{H} \rangle = \lambda_{eff} \langle \mathbf{B} \rangle, \quad (1)$$

где $\langle \dots \rangle = V^{-1} \int \dots dV$ — среднее значение величины в объеме V . Предполагается, что размер, по которому происходит усреднение (порядка $V^{1/3}$), во всех направлениях много больше корреляционного радиуса, т.е. что в такой среде имеет место самоусреднение — значения эффективных кинетических коэффициентов не зависят от реализации случайной структуры расположения фаз.

Наиболее удачным приближением при вычислении эффективных кинетических коэффициентов, позволяющим учесть влияние включений одной фазы на другую практически во всем диапазоне концентраций, является приближение самосогласованного поля Бруггемана–Ландауера (effective medium theory, ЕМТ) [10, 11]. Большое число вариантов ЕМТ дано в [12]. В линейном случае ЕМТ дает хорошее приближение для всех значений концентрации и отношений локальных кинетических коэффициентов за исключением непосредственной близости к порогу протекания при больших значениях неоднородности. В нелинейном случае приближение ЕМТ неприменимо и должно быть обобщено. Одно из таких обобщений предложено в работах [13, 14], в которых оно было применено для случая нелинейности степенного типа (так называемая сильная нелинейность [15, 16]).

Вычислим λ_{eff} . Основное приближение в методе работ [13, 14] состоит в том, что, считая локальное поле \mathbf{B} внутри включений не зависящим от координат (это имеет место только для включений формы эллипсоида и в том случае, когда можно пренебречь взаимодействием включений), предполагаем, что величина λ в нелинейной фазе, $\lambda_1 = \lambda_1(\mathbf{B})$, может быть заменена некоторой постоянной $\tilde{\lambda}_1$:

$$\tilde{\lambda}_1 = \langle \lambda_1(\mathbf{B}) \rangle_1, \quad (2)$$

где усреднение берется по объему нелинейной фазы, $\langle \dots \rangle = (1/V_1) \int \dots dV$.

Второе приближение заключается в замене, которая в терминах, используемых в данной работе, имеет вид

$$\tilde{\lambda}_1 = \langle \lambda_1(\mathbf{B}) \rangle_1 \rightarrow \lambda_1 \left(\sqrt{\langle \mathbf{B}^2 \rangle_1} \right). \quad (3)$$

Двухфазная среда с коэффициентами $\lambda_1(\mathbf{B}(\mathbf{r}))$ и $\lambda_2 = 1/\mu_0$ (вторая фаза немагнитная) заменяется на двухфазную среду с $\lambda_1 \left(\sqrt{\langle \mathbf{B}^2 \rangle_1} \right)$ и λ_2 , т.е. такую, в которой локальное значение λ_1 не зависит от локального поля $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$. При заданном внешнем поле $\langle \mathbf{B} \rangle$ вся первая фаза имеет один и тот же коэффициент $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1$, определяемый величиной $\langle \mathbf{B}^2 \rangle_1$.

Таким образом, с одной стороны, для определения λ_{eff} двухфазной среды с коэффициентами $\tilde{\lambda}_1$ и λ_2 можно воспользоваться стандартным ЕМТ-приближением:

$$\lambda_{eff}^{(3D)} = \frac{1}{2} \left\{ (3p-2)\tilde{\lambda}_1 + (1-3p)\lambda_2 + \sqrt{\left[(3p-2)\tilde{\lambda}_1 + (1-3p)\lambda_2 \right]^2 + 8\lambda_2\tilde{\lambda}_1} \right\}, \quad (4)$$

где p — концентрация ферромагнитной фазы, а, с другой стороны, для определения $\langle \mathbf{B}^2 \rangle_1$ можно воспользоваться равенством $\langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle \cdot \langle \mathbf{H} \rangle$ (см., например, [17]), из которого следует

$$\lambda_{eff} \langle \mathbf{B} \rangle^2 = p\lambda_1 \langle \mathbf{B}^2 \rangle_1 + (1-p)\lambda_2 \langle \mathbf{B}^2 \rangle_2,$$

где $\langle \dots \rangle_{1,2}$ — усреднение по первой или второй фазе. Окончательно получаем

$$\langle \mathbf{B}^2 \rangle_1 = \frac{\langle \mathbf{B} \rangle^2}{p} \frac{\partial \lambda_{eff}}{\partial \tilde{\lambda}_1}. \quad (5)$$

В двумерном случае вместо (4) имеем

$$\lambda_{eff}^{(2D)} = \frac{1}{2} \left\{ (2p-1) (\tilde{\lambda}_1 - \lambda_2) + \sqrt{\left[(2p-1) (\tilde{\lambda}_1 - \lambda_2) \right]^2 + 4\lambda_2\tilde{\lambda}_1} \right\}. \quad (6)$$

Подстановка (4) или (6) в (5) дает нелинейное уравнение для определения величины $\langle \mathbf{B}^2 \rangle_1$. Находя ее и подставляя в (4) или (6), получаем λ_{eff} как функцию внешнего магнитного поля $\langle \mathbf{B} \rangle$, концентрации и параметров функции нелинейности.

Аналогично для μ_{eff} имеем [18, 19]

$$\mu_{eff}^{(3D)} = \frac{1}{4} \left\{ (3p-1)\tilde{\mu}_1 + (2-3p)\mu_2 + \sqrt{\left[(3p-1)\tilde{\mu}_1 + (2-3p)\mu_2 \right]^2 + 8\mu_2\tilde{\mu}_1} \right\}, \quad (7)$$

$$\mu_{eff}^{(2D)} = \frac{1}{2} \left[(1-2p) (\mu_2 - \tilde{\mu}_1) + \frac{1}{2} \sqrt{(1-2p)^2 (\mu_2 - \tilde{\mu}_1)^2 + 4\mu_2\tilde{\mu}_1} \right], \quad (8)$$

где $\mu_2 = \mu_0$, а вместо (5) использовано аналогичное соотношение для $\langle \mathbf{H}^2 \rangle_1$:

$$\langle \mathbf{H}^2 \rangle_1 = \frac{\langle \mathbf{H} \rangle^2}{p} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \tilde{\mu}_1}. \quad (9)$$

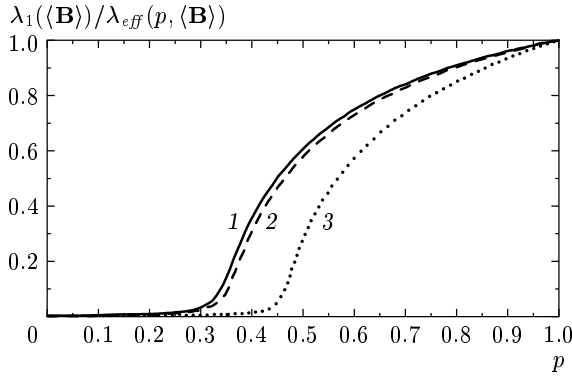


Рис. 2. Зависимость эффективного магнитного сопротивления λ_{eff} от концентрации ферромагнитной фазы при разных значениях приложенной к образцу магнитной индукции $\langle B \rangle$: 1 — 0.15 Тл; 2 — 0.2 Тл; 3 — 0.5 Тл

На рис. 2 показана полученная описанной выше процедурой зависимость $(\lambda_{eff}/\lambda_1)^{-1}$ от концентрации ферромагнитной фазы. Как видно из рисунка, резкое изменение (рост) кривых при малых $\langle B \rangle$ происходит вблизи трехмерного порога протекания, равного $1/3$ в рамках ЭМТ-приближения. При увеличении $\langle B \rangle$ значение концентрации, при котором происходит резкий рост, смещается вправо, что является, по-видимому, артефактом метода. Для значений $\langle B \rangle$ больших 0.5 Тл нам не удалось найти гладких решений системы нелинейных уравнений. Аналогично проводится расчет для μ_{eff} в трех- и двумерном случаях, подробности см. в [18, 19]. Как и для λ_{eff} , на кривой концентрационной зависимости наблюдается резкий рост μ_{eff} . Однако, в отличие от λ_{eff} , удастся найти решения системы нелинейных уравнений для всех значений приложенных к образцу полей $\langle H \rangle$.

2.2. Ферромагнитная фаза с ненулевой петлей гистерезиса. Метод локальной линейаризации

В случае ферромагнитной фазы с ненулевой петлей гистерезиса однозначное определение как локальной, так и эффективной магнитных проницаемостей, вообще говоря, невозможно. Локальное значение магнитной проницаемости теряет свою однозначность, ее значение теперь зависит от предыстории намагничивания образца. Поэтому полное решение задачи — нахождение эффективной магнитной проницаемости и зависимости $\langle B \rangle$ от $\langle H \rangle$ — возможно лишь при известной «истории» намагничивания.

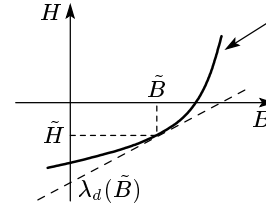


Рис. 3. Иллюстрация к методу локальной линейаризации. Для каждого значения \tilde{B} нелинейная зависимость $H = H(B)$ (сплошная линия) заменяется на линейную (штриховая линия), пересекающую ось H в точке $\lambda_d(\tilde{B})$. Стрелкой показана спинка петли гистерезиса

Но даже в этом случае (например, образец вначале был доведен до технического насыщения, после чего размагничивание идет по так называемой спинке петли гистерезиса, см. стрелку на рис. 3) возникает нестандартная ситуация для определения эффективных характеристик. А именно, при $H = 0$ имеется ненулевое значение B , в чем собственно и заключается наличие остаточной намагниченности. Мы приведем здесь метод, при помощи которого вычислим эффективные коэффициенты композита, когда одна из фаз имеет петлю гистерезиса. Также найдем зависимость коэрцитивной силы H_c (остаточной намагниченности B_r) композита от концентрации ферромагнитной фазы и значения коэрцитивной силы h_c (значения остаточной намагниченности b_r) в этой фазе.

Этот метод, для определенности назовем его методом локальной линейаризации (LL-метод), был применен ранее для вычисления эффективной проводимости композитов с сильной нелинейностью [20].

Первое приближение в LL-методе заключается в локальной линейаризации уравнения

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{B})\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

для определенного значения индукции \tilde{B} (рис. 3), когда локальная нелинейность (10) заменяется при $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}$ на линейаризованную. При этом получаем

$$\mathbf{H} = \lambda_d(\tilde{\mathbf{B}})\mathbf{B} + \Lambda(\tilde{\mathbf{B}}), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{\mathbf{B}}) &= \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{B}}) - \lambda_d(\tilde{\mathbf{B}})\tilde{\mathbf{B}} = \\ &= [\lambda(\tilde{\mathbf{B}}) - \lambda_d(\tilde{\mathbf{B}})]\tilde{\mathbf{B}}, \end{aligned} \quad (12)$$

а

$$\lambda_d(\tilde{\mathbf{B}}) = \left. \frac{dH(B)}{dB} \right|_{B=\tilde{B}}. \quad (13)$$

Далее будем считать, что поле $\langle H \rangle$ было доведено до значений технического насыщения ферромагнитной фазы, после чего оно уменьшается. Таким образом, среда «находится» на верхней возвратной части петли гистерезиса, если рассматривать петлю гистерезиса в осях H (абсцисса) и B (ордината).

При определении эффективных коэффициентов в системе с законами типа (11), связывающими локальные поле и индукцию,

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \lambda_e \langle \langle \mathbf{B} \rangle \rangle \langle \mathbf{B} \rangle + \Lambda_e, \quad (14)$$

необходимо определить величину Λ_e (при нашем выборе истории образца она равна эффективной коэрцитивной силе H_c всего образца), а λ_e вычислять как для линейных законов (например ЭМТ).

Формально выражение (14) означает, что при нулевой индукции ($\langle \mathbf{B} \rangle = 0$ в (14)) в композите существует не равное нулю поле, т.е. имеет место еще один кроме $\langle \mathbf{B} \rangle$ фактор, вызывающий поле. Для определения Λ_e проведем аналогию между (11) и термоэлектрической средой:

$$\mathbf{e} = \rho \mathbf{j} - \frac{\alpha}{\kappa} \mathbf{q}, \quad (15)$$

где α — коэффициент термоэдс, ρ — удельное сопротивление, κ — удельная теплопроводность, $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ — поток тепла. Закон (15) имеет место при малой термоэлектрической добротности ($T\alpha^2/\rho\kappa \ll 1$, где T — температура). Сравнивая (15) с (14), видим, что аналогия имеет место, если $(\alpha/\kappa)\mathbf{q} = \text{const}$ в каждой фазе. Поскольку в каждой из фаз отношение α/κ не зависит от координат, необходимо, чтобы и величина \mathbf{q} не зависела от координат в каждой из фаз. Легко увидеть, что последнее возможно только при $\kappa_1 = \kappa_2$, что приводит к

$$\mathbf{q} = \text{const} \quad (16)$$

для всего образца. Это второе приближение LL-метода.

Будем считать, что условие (16) выполнено, тогда соотношения (11)–(14), описывающие нелинейную среду после локальной линеаризации, с точностью до замены обозначений

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\kappa} \mathbf{q} &\leftrightarrow \Lambda_1, & -\frac{\alpha_e}{\kappa} \mathbf{q} &\leftrightarrow \Lambda_e, \\ \rho_1 &\leftrightarrow \lambda_d \left(\tilde{\mathbf{B}} \right), & \rho_2 &\leftrightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\mu_0}, & \rho_e &\leftrightarrow \lambda_e \end{aligned} \quad (17)$$

совпадают с термоэлектрической системой, где ρ_e — эффективное сопротивление термоэлектрической линейной системы с локальными соотношениями (15):

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \rho_e \langle \mathbf{j} \rangle - \frac{\alpha_e}{\kappa} \mathbf{q}. \quad (18)$$

Эффективные коэффициенты ρ_e и α_e , согласно стандартному ЭМТ-методу [21] (см. также [22]), в трехмерном случае связаны соотношением

$$\alpha_e(3D) = p\alpha_1 \frac{\rho_e + 2\rho_2}{\rho_e + 2[p(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1]}, \quad (19)$$

где ρ_e — эффективное удельное сопротивление в среде с $\rho_1 = \lambda_d$, $\rho_2 = \lambda_2$, которое в рамках ЭМТ-приближения определяется из уравнения

$$p \frac{\rho_e - \rho_1}{\rho_e + 2\rho_1} + (1-p) \frac{\rho_e - \rho_2}{\rho_e + 2\rho_2} = 0. \quad (20)$$

Находя из (20) величину ρ_e , подставляя ее в (19) и после этого подставляя α_e из (19) в (18), с учетом замены обозначений (17) и того, что $H_c = \Lambda_e$, $h_c = \Lambda_1$, получаем

$$H_c^{(3D)} = h_c p \frac{\lambda_e + 2\lambda_2}{\lambda_e + 2[p(\lambda_2 - \lambda_d) + \lambda_d]}, \quad (21)$$

где, согласно (20),

$$\lambda_e^{(3D)} = \frac{1}{2} \left\{ (1-3p)\lambda_2 + (3p-2)\lambda_d + \sqrt{[(1-3p)\lambda_2 + (3p-2)\lambda_d]^2 + 8\lambda_d\lambda_2} \right\}, \quad (22)$$

а h_c — локальная коэрцитивная сила ферромагнитной фазы.

Теперь, подставляя (21) и (22) в (14) и полагая $\tilde{\mathbf{B}} = \langle \mathbf{B} \rangle$, с учетом (1) получаем

$$\lambda_{eff}^{(3D)} = \frac{p(2\lambda_2 + \lambda_e)(\lambda - \lambda_d)}{2p(\lambda_2 - \lambda_d) + 2\lambda_d + \lambda_e} + \lambda_e. \quad (23)$$

Для двумерного случая вместо (20), (22) получаем

$$p \frac{\rho_e - \rho_1}{\rho_e + \rho_1} + (1-p) \frac{\rho_e - \rho_2}{\rho_e + \rho_2} = 0, \quad (24)$$

$$\lambda_e^{(2D)} = \frac{1}{2} \left\{ (2p-1)(\lambda_d - \lambda_2) + \sqrt{[(2p-1)(\lambda_d - \lambda_2)]^2 + 4\lambda_d\lambda_2} \right\}, \quad (25)$$

а вместо (21), (23) имеем

$$H_c^{(2D)} = h_c p \frac{\lambda_e + \lambda_2}{p(\lambda_2 - \lambda_d) + \lambda_d + \lambda_e}, \quad (26)$$

$$\lambda_{eff}^{(2D)} = \frac{p(\lambda_2 + \lambda_e)(\lambda - \lambda_d)}{p(\lambda_2 - \lambda_d) + \lambda_d + \lambda_e} + \lambda_e. \quad (27)$$

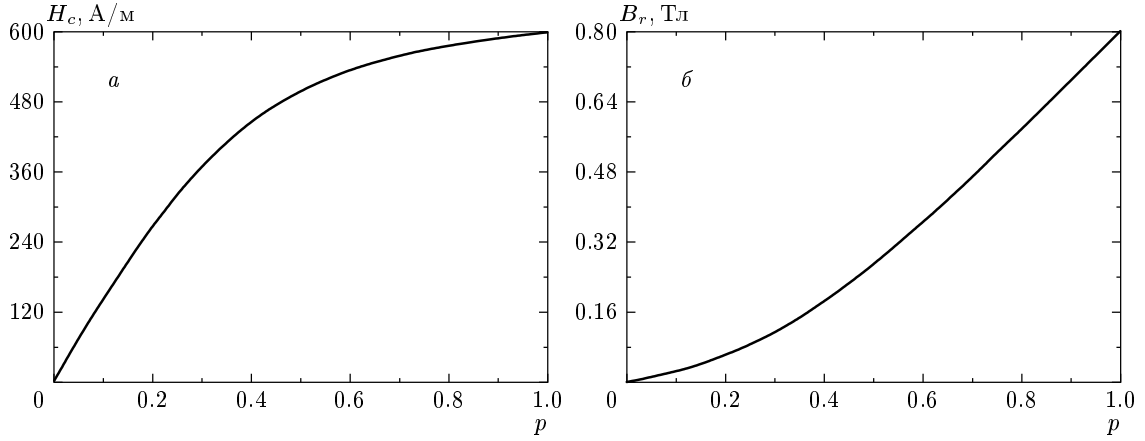


Рис. 4. Зависимости коэрцитивной силы H_c (а) и остаточной намагниченности B_r (б) образца от концентрации ферромагнитной фазы с локальными коэрцитивной силой $h_c = 600$ А/м (а) и остаточной намагниченностью $b_r = 0.8$ Тл (б)

Совершенно аналогично вычисляются эффективная магнитная проницаемость μ_{eff} и остаточная намагниченность B_r . Здесь мы приведем только результат:

$$\mu_{eff}^{(3D)} = \frac{p\mu_e(2\mu_e + \mu_0)(\mu - \mu_d)}{2p\mu_e(\mu_d - \mu_0) + 2\mu_0\mu_e + \mu_d\mu_0} + \mu_e, \quad (28)$$

$$\mu_{eff}^{(2D)} = \frac{p\mu_e(\mu_e + \mu_0)(\mu - \mu_d)}{p\mu_e(\mu_d - \mu_0) + \mu_0(\mu_e + \mu_d)} + \mu_e, \quad (29)$$

$$B_r^{(2D)} = \frac{pb_r\mu_e(\mu_e + \mu_0)}{p\mu_e(\mu_d - \mu_0) + \mu_0(\mu_e + \mu_d)}, \quad (30)$$

$$B_r^{(3D)} = \frac{pb_r\mu_e(2\mu_e + \mu_0)}{2p\mu_e(\mu_d - \mu_0) + 2\mu_0\mu_e + \mu_d\mu_0}, \quad (31)$$

где

$$\mu_e^{(3D)} = \frac{1}{4} \left[3p(\mu_d - \mu_0) + 2\mu_0 - \mu_d + \sqrt{[3p(\mu_d - \mu_0) + 2\mu_0 - \mu_d]^2 + 8\mu_d\mu_0} \right], \quad (32)$$

$$\mu_e^{(2D)} = \frac{1}{2} \left[(2p - 1)(\mu_d - \mu_0) + \sqrt{[(2p - 1)(\mu_d - \mu_0)]^2 + 4\mu_d\mu_0} \right], \quad (33)$$

$$\mu_d = \frac{dB(H)}{dH}, \quad (34)$$

b_r — остаточная намагниченность в ферромагнитной фазе и, как и в (23), (27), положено $\vec{H} = \langle \mathbf{H} \rangle$.

На рис. 4а приведена зависимость коэрцитивной силы H_c от концентрации ферромагнитной фазы с

локальной коэрцитивной силой h_c , а на рис. 4б — зависимость остаточной намагниченности B_r от концентрации ферромагнитной фазы с локальной остаточной намагниченностью b_r .

2.3. Ферромагнитная фаза с нулевой петлей гистерезиса вблизи порога протекания

Вернемся теперь к задаче о вычислении μ_{eff} в безгистерезисном случае. Следует ясно понимать, что использованное выше для вычисления μ_{eff} обобщение ЕМТ-приближения и LL-метода, содержит ряд существенных допущений, которые сложно обосновать (например, (3)) и влияние которых на конечный результат не очевидно. Применение метода теории перколяции основано на использовании модели перколяционной структуры и не требует допущений такого типа.

Как мы увидим ниже, применение теории перколяции при данном виде нелинейности локальной магнитной проницаемости (см. выше рис. 1) возможно при весьма строгих ограничениях на параметры задачи. Хотя область параметров, для которых справедливы результаты теории перколяции, оказывается сравнительно небольшой, теория перколяции позволяет получить зависимости для μ_{eff} , свободные от предположений типа (3) и, тем самым, показать, насколько эти предположения влияют на результат вычислений.

Для расчета μ_{eff} методом теории перколяции воспользуемся моделями теории перколяционной структуры [23–28] выше порога протекания, ниже его и на самом пороге протекания (т. е. в области размазки).

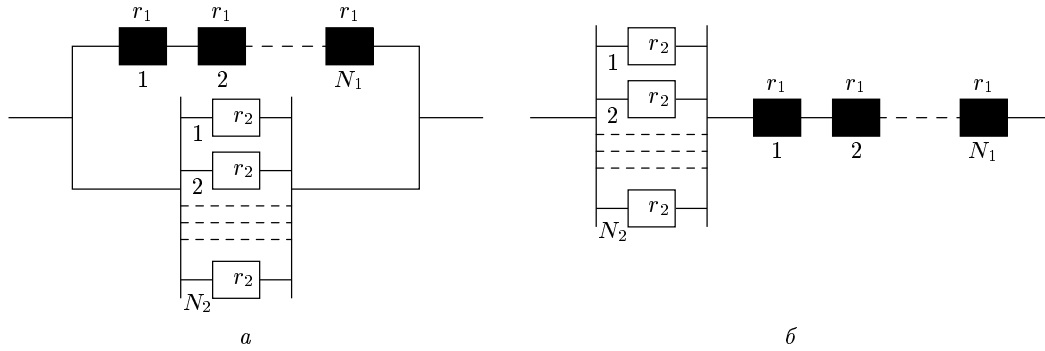


Рис. 5. Иерархическая модель перколяционной структуры. Основные элементы структуры: *a* — выше порога протекания — мостик, состоящий из сопротивлений из хорошо проводящей фазы («черные сопротивления»), соединенных последовательно; *б* — ниже порога протекания — прослойка, состоящая из сопротивлений из плохо проводящей фазы, соединенных параллельно

Так как в значительном числе работ по теории перколяции описаны процессы в перколяционной структуре в терминах протекания тока, мы сначала получим все выражения в этих терминах, а потом воспользуемся аналогией между задачами о стационарном распределении плотности электрического тока j в среде с проводимостями σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 \gg \sigma_2$) и стационарными распределениями индукции магнитного поля \mathbf{B} в среде с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 ($\mu_1 \gg \mu_2$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 &\leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 &\leftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} &\leftrightarrow \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \\ \mathbf{H} = -\operatorname{grad} \psi &\leftrightarrow \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \\ \mu_1(H) &\leftrightarrow \sigma_1(E), \quad \mu_2 \leftrightarrow \sigma_2, \end{aligned} \quad (35)$$

где E — напряженность электрического поля, φ и ψ — соответственно потенциалы электрического и магнитного полей.

Рассмотрим вначале вычисление эффективной магнитной проницаемости в случайно-неоднородной среде выше порога протекания p_c ($p > p_c$) и вне области размазки Δ . Согласно [24–28], простейшая модель перколяционной структуры в объеме с характерным размером порядка корреляционного радиуса ξ , учитывающая конечное отношение $\mu_2/\mu_1 \ll 1$ (магнитное поле «протекает» по фазе как с большим значением магнитной проницаемости, так с малым), состоит из двух элементов (рис. 5). В «токовой» терминологии полный ток J , протекающий через корреляционный объем, проходит 1) по мостику, состоящему из N_1 сопротивлений из хорошо проводящей фазы, соединенных последовательно, и 2) через прослойку, состоящую из N_2 сопротивлений из

плохо проводящей фазы, соединенных параллельно. Падение напряжения на мостике, $\Delta\varphi_1$, и прослойке, $\Delta\varphi_2 (= \Delta\varphi_1)$, следующим образом выражается через среднее по объему поле $\langle E \rangle$:

$$\langle E \rangle \xi = \Delta\varphi = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1, \quad (36)$$

где $\Delta\varphi$ — разница потенциалов на корреляционном объеме. Мы предполагаем, что основное падение напряжения происходит на главных элементах перколяционной структуры — мостике и прослойке. Обозначив минимальный размер в системе через a_0 (характерный размер неоднородности), для локальных полей на мостике и в прослойке можно записать

$$E_1 = \frac{\Delta\varphi_1}{a_0 N_1}, \quad E_2 = \frac{\Delta\varphi_2}{a_0}. \quad (37)$$

Тогда токи, протекающие через мостик, J_1 и J_2 , с учетом «закона Ома», $j_1 = \sigma_1(E_1)E_1$ и $j_2 = \sigma_2 E_2$, и (36), (37) равны

$$J_1 = a_0^2 j_1 = a_0^2 \sigma_1 \left(\frac{\xi \langle E \rangle}{a_0 N_1} \right) \frac{\xi \langle E \rangle}{a_0 N_1}, \quad (38)$$

$$J_2 = a_0^2 N_2 j_2 = a_0 N_2 \sigma_2 \xi, \quad (39)$$

где поперечное сечение мостика принято равным a_0^2 и зависимость второй фазы от поля опущена, так как она линейна ($\mu_2 = \mu_0$). Учитывая, что полный ток J через корреляционный объем связан со средней по объему плотностью тока $\langle j \rangle$ формулой $J = \langle j \rangle \xi^2$ и что $J = J_1 + J_2$, получаем

$$\langle j \rangle = \frac{a_0 \langle E \rangle}{\xi N_1} \sigma_1 \left(\frac{\xi \langle E \rangle}{a_0 N_1} \right) + \frac{a_0}{\xi} N_2 \sigma_2 \langle E \rangle. \quad (40)$$

Корреляционная длина ξ увеличивается при приближении к порогу протекания ($p \rightarrow p_c$) по закону

$$\xi = a_0 |\tau|^{-\nu}, \quad \tau = (p - p_c)/p_c, \quad (41)$$

где τ — близость к порогу протекания, а ν — критический индекс корреляционной длины, в трехмерном случае $\nu = 0.9$. Количество элементов в мостике и прослойке, N_1 и N_2 , растет при приближении к p_c по законам

$$N_1 = |\tau|^{-\alpha_1}, \quad N_2 = |\tau|^{-\alpha_2}, \quad (42)$$

где, согласно модели перколяционной структуры [23–28], в трехмерном случае

$$\alpha_1 = t - \nu, \quad \alpha_2 = q + \nu, \quad (43)$$

где в трехмерном случае $t = 2.0$, $q = 0.7$ — критические индексы проводимости выше и ниже порога протекания. Подставляя (41)–(43) в (40), получаем

$$\langle j \rangle = [\sigma_1 \langle E \rangle \tau^{t-2\nu} \tau^t + \sigma_2 \tau^{-q}] \langle E \rangle, \quad (44)$$

где выражение в квадратных скобках — эффективная удельная проводимость в нелинейном случае.

Переходя к обозначениям задачи об относительной эффективной магнитной проницаемости и подставляя численные значения критических индексов, получаем

$$\mu_{eff}^{(3D)}(\langle H \rangle) = \mu_1 (\langle H \rangle \tau^{0.2}) \tau^2 + \mu_0 \tau^{-0.7}. \quad (45)$$

Аналогично вычисляется эффективная магнитная проницаемость волокнистого композита поперек волокон (двумерная задача):

$$\mu_{eff}^{(2D)}(\langle H \rangle) = \mu_1 (\langle H \rangle \tau^{t_2-\nu_2}) \tau^{t_2} + \mu_0 \tau^{-q_2}, \quad (46)$$

где $t_2 = q_2 = 1.33$, $\nu_2 = 4/3$.

Поскольку в двумерном случае критические индексы проводимости (t) и корреляционной длины (ν) практически равны друг другу, а μ_1 при несверхсильных полях, как правило, много больше μ_0 , выражение (46) может быть приближенно переписано в виде

$$\mu_{eff}^{(2D)}(\langle H \rangle) = \mu_1 (\langle H \rangle) \tau^{t_2}, \quad (47)$$

означающем, что зависимость $\mu_{eff}^{(2D)}$ от поля тождественна таковой для чистой фазы, а зависимость от близости к порогу протекания такая же, как и для линейного композита. Необходимо напомнить, что выражения (46) и (47) справедливы только в области применимости теории протекания и вне области размазки.

Для нахождения эффективных свойств магнитных композитов методом теории перколяции ниже порога протекания необходимо использовать обратную к $\mu_1(H)$ функцию $\lambda_1(B(H)) = 1/\mu_1(H)$. Используя модели перколяционной структуры [28] и про-

дя расчеты, аналогичные приведенным выше, для трехмерного случая получаем

$$\langle H \rangle = \left(\frac{|\tau|^q}{\mu_0} + \lambda_1 (\langle B \rangle |\tau|^{-2\nu}) |\tau|^{-t} \right) \langle B \rangle \quad (48)$$

и для двумерного случая —

$$\langle H \rangle = \left(\frac{|\tau|^{q_2}}{\mu_0} + \lambda_1 (\langle B \rangle |\tau|^{-\nu_2}) |\tau|^{-t_2} \right) \langle B \rangle. \quad (49)$$

Выражение (48) определяет эффективный коэффициент $\lambda_{eff}(\langle B \rangle)$ обратный к $\mu_{eff}(\langle H \rangle)$. Как и в стандартной (линейной) теории перколяции, выражения для эффективных коэффициентов выше и ниже порога протекания справедливы, с одной стороны, при $|\tau| \ll 1$, с другой, при $|\tau| > \Delta$. Последнее условие означает, что вторые слагаемые в (45), (46) и в (48), (49) много меньше первых. Таким образом, например для трехмерного случая, из (45) следует критерий применимости перколяционного описания при $p > p_c$ и вне области размазки:

$$\mu_1 (\langle H \rangle \tau^{0.2}) \tau^2 > \mu_0 \tau^{-0.7}. \quad (50)$$

Это условие можно записать в виде

$$k_1 (\langle H \rangle \tau) > 1, \quad (51)$$

где

$$k_1^{(3D)}(\langle H \rangle \tau) = \mu_1 (\langle H \rangle \tau^{0.2}) \tau^{2.7} / \mu_0. \quad (52)$$

Аналогично для двумерного случая имеем

$$k_1^{(2D)}(\langle H \rangle \tau) = \mu_1 (\langle H \rangle \tau^{t_2-\nu_2}) \tau^{t_2+q_2} / \mu_0. \quad (53)$$

Еще одно условие применимости теории перколяции следует из требования сильной неоднородности локальных свойств фаз. Только в случае большой неоднородности мостик ($p > p_c$) и прослойка ($p < p_c$) могут быть теми элементами перколяционной структуры, которые определяют критическое поведение эффективных коэффициентов. Так как отношение $\mu_1(H)/\mu_0$ при очень больших полях стремится к единице (среда становится однородной), рассматриваемое условие означает, что локальное поле в первой фазе не должно быть меньше некоторого значения H^* , такого что $\mu_1(H^*)/\mu_0 \gg 1$. Наиболее важно это условие для поля в мостике: $H_1 = \langle H \rangle \tau^{t-\nu(D-1)}$ (см. (37)) ($D = 2$ или 3 соответственно для двумерного или трехмерного случая). Таким образом, второе условие применимости перколяционного подхода можно записать в виде

$$k_2 (\langle H \rangle \tau) < 1, \quad (54)$$

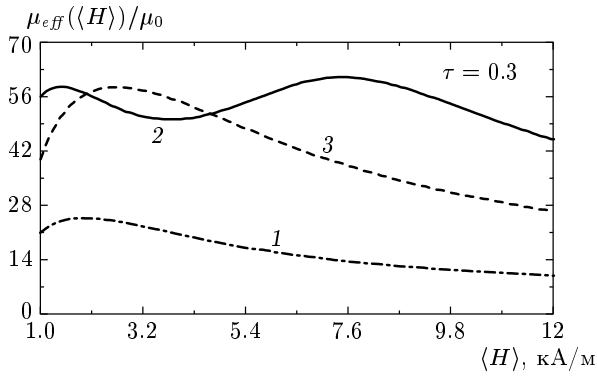


Рис. 6. Зависимости относительной эффективной магнитной проницаемости выше порога протекания, полученные при $\tau = 0.3$ методом теории перколяции (1), методом локальной линеаризации (2) и методом работ [13, 14] (3)

где

$$k_2(\langle H \rangle \tau) = \frac{\langle H \rangle}{H^*} \tau^{t-\nu(D-1)}, \quad D = 2, 3. \quad (55)$$

Рассмотрим теперь поведение эффективной магнитной проницаемости на самом пороге протекания, т. е. в области размазки. Найти величину области размазки можно, приравняв друг другу первое и второе слагаемые в (45), (46) или в (48), (49). Легко видеть, что все варианты приводят (как и должно быть) к одному и тому же значению Δ . Таким образом, уравнение для определения Δ можно записать в виде

$$\mu_1(\langle H \rangle \Delta^{t-\nu(D-1)}) \Delta^{t+q} / \mu_0 = 1, \quad D = 2, 3. \quad (56)$$

Как и должно быть, для нелинейной задачи величина области размазки Δ зависит от $\langle H \rangle$. Решая уравнение (56), подставляя полученное значение Δ в главное слагаемое в (45), (46), находим μ_{eff} в области размазки:

$$\mu_{eff}(\langle H \rangle \Delta) = \mu_1(\langle H \rangle \Delta^{t-\nu(D-1)}) \Delta^t, \quad D = 2, 3. \quad (57)$$

Для сравнения результатов теории перколяции с методами работ [13, 14] и LL-методом рассмотрим зависимость μ_{eff} от $\langle H \rangle$ выше порога протекания (рис. 6). Численное решение нелинейного уравнения (56) для выбранной нами зависимости $\mu_1(H)$ (см. рис. 4) дает значение $\Delta \approx 0.1$ при $1000 \text{ А/м} < \langle H \rangle < 4000 \text{ А/м}$, которое возрастает от 0.1 до 0.15 при изменении $\langle H \rangle$ от 4000 А/м до 12000 А/м. Как видно из рис. 6, все три метода при

$\tau = 0.3$ дают качественное совпадение. Наличие волнообразного поведения μ_{eff} , по-видимому, является артефактом LL-приближения в этой области параметров.

3. НЕОДНОРОДНЫЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ СРЕДЫ

Структуры с периодически расположенными включениями являются не менее интересными объектами. Они интенсивно изучаются как теоретически [29–34], так и экспериментально (см., например, [6]).

Численный расчет локальных полей и эффективных сред со случайно расположенными включениями даже в линейном случае практически невозможен — необходимо проводить расчет для размеров области больших корреляционного радиуса, т. е. содержащих большое число включений, причем, так как здесь идет речь о включениях конкретной формы, пусть даже простейшей — сферической, задачу нельзя свести к сеточной, т. е. включения нельзя заменить набором «бесформенных» связей или узлов, поскольку форма включений сильно влияет на распределение поля, а следовательно, и на проводимость. При периодическом расположении включений такой расчет достаточно проводить только для одной элементарной ячейки.

Зависимость эффективной магнитной проницаемости можно найти, воспользовавшись полученным в [29] решением линейной задачи об эффективной проводимости среды с периодически расположенными включениями круговой формы. Согласно [29], эффективная проводимость с точностью до 1% может быть представлена как

$$\sigma_e = \sigma_1 \left(\alpha - \frac{\pi R^2}{4a^2} \delta \right) \left(\alpha + \frac{\pi R^2}{4a^2} \delta \right)^{-1}, \quad (58)$$

где

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3}(gR^4)^2 \delta^2 - \frac{1}{63}(gR^4)^4 \delta^2 - \frac{9}{5} \left(\delta^2 + \frac{4}{5 \cdot 11 \cdot 13^2} \right) (gR^4)^6 \delta^2, \quad (59)$$

$$\delta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad g = \frac{1}{20a^4} K^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (60)$$

$$K \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1.85407,$$

R — радиус включений круговой формы с проводимостью σ_2 , $2a$ — размер элементарной (квадратной)

ячейки, $K(1/\sqrt{2})$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $1/\sqrt{2}$. Концентрация хорошо проводящей фазы (σ_1) $p = 1 - \pi R^2/4a^2$. Выражение для σ_e (58) справедливо а) во всем диапазоне изменения концентрации $1 - \pi/4 \leq p \leq 1$ хорошо проводящей фазы при $|\delta| \leq 0.7$, т.е. при $\sigma_1/\sigma_2 \leq 5.67$; б) в диапазоне концентраций $0.291 \leq p \leq 1$ для любого отношения σ_1/σ_2 .

Повторяя расчеты, изложенные в пп. 2.1, 2.2, для двумерного случая вместо ЕМТ-приближения везде используем формулу (58). Так, вместо формулы (6) пользуемся выражением (58), где делаем следующие замены:

$$\frac{1}{\sigma_e} \rightarrow \lambda_{eff}, \quad \delta = \frac{1/\tilde{\lambda}_1 - 1/\lambda_2}{1/\tilde{\lambda}_1 + 1/\lambda_2}, \quad \frac{1}{\sigma_1} \rightarrow \tilde{\lambda}_1.$$

Далее, вместо (8) пишем (58) с аналогичными заменами:

$$\sigma_e \rightarrow \mu_{eff}, \quad \delta \rightarrow \frac{\tilde{\mu}_1 - \mu_2}{\tilde{\mu}_1 + \mu_2}, \quad \sigma_1 \rightarrow \tilde{\mu}_1,$$

и вместо (25) используем (58) с заменами

$$\frac{1}{\sigma_e} \rightarrow \lambda_e, \quad \delta \rightarrow \frac{1/\lambda_d - 1/\lambda_2}{1/\lambda_d + 1/\lambda_2}, \quad \sigma_1 \rightarrow \frac{1}{\lambda_d}.$$

Необходимо отметить, что использование здесь линейной задачи для определения эффективных свойств в нелинейной задаче LL-методом требует дополнительного оправдания по сравнению с изложенным выше. Дело в том, что рассматриваемая структура случайно расположенных шариков (или окружностей) обладает в среднем кубической симметрией и, как известно [35], оставляет для проводимости, являющейся тензором второго ранга, единственную возможность — вырождение в скаляр. В нелинейном случае это, вообще говоря, не так [36]. Особенно яркий пример различия нелинейных свойств (вольт-амперной характеристики) вдоль и поперек сетки с периодически расположенными нелинейными связями приведен в [30]. Используемые здесь LL-метод и метод работ [13, 14] не могут описать такую нелинейную «анизотропию», точнее, не могут позволить вычислить эффективный тензор более высокого ранга, который, в общем случае, необходим для описания нелинейных эффективных свойств. При обсуждении результатов численного эксперимента мы остановимся на вопросе о различии свойств при различных направлениях внешнего поля. Здесь же мы приводим результаты численного моделирования (рис. 7). Как хорошо известно (см., например, [12]), ЕМТ-приближение для круговых включений совпадает с ЕМТ-приближением точечной задачи, что и дает возможность определить

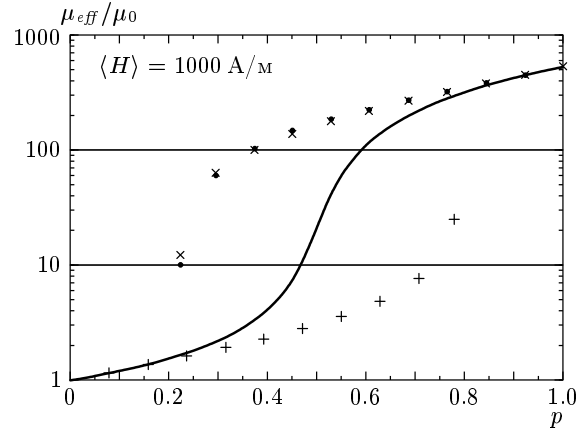


Рис. 7. Различия в концентрационном поведении относительной эффективной магнитной проницаемости в упорядоченной и случайной средах: сплошная кривая — теоретический расчет при помощи LL-метода с применением ЕМТ-приближения, случайно-неоднородная среда; прямые кресты — численный счет, ферромагнитные круговые включения в немагнитной матрице, упорядоченная среда; косые кресты — численный счет, немагнитные круговые включения в ферромагнитной матрице, поле направлено вдоль диагонали квадрата (см. рис. 8), упорядоченная среда; точки — численный счет, немагнитные круговые включения в ферромагнитной матрице, поле направлено параллельно стороне квадрата (см. рис. 8), упорядоченная среда

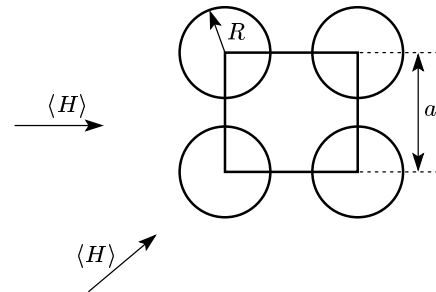


Рис. 8. Направления внешнего поля

концентрационную зависимость эффективных коэффициентов во всем диапазоне концентраций. Реальные среды, например со сферическими включениями, имеют геометрические ограничения на максимальную концентрацию включений. В рассматриваемом случае периодического расположения круговых включений ферромагнитной фазы их концентрация не может превышать $p_{max} = \pi/4 \approx 0.785$. Естественно, концентрационная зависимость эффек-

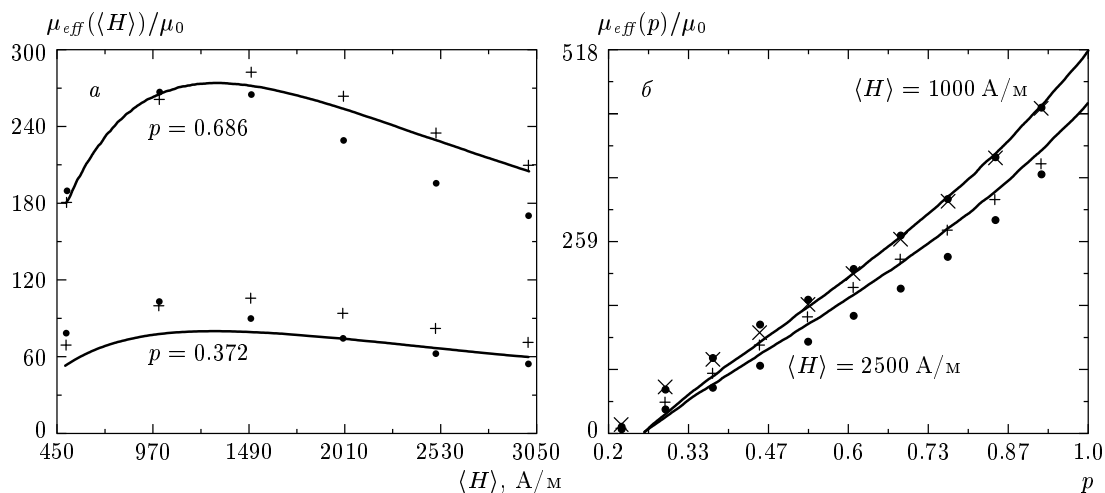


Рис. 9. Численный эксперимент. Немагнитные круговые включения в ферромагнитной матрице. Зависимости относительной эффективной магнитной проницаемости от внешнего поля $\langle \mathbf{H} \rangle$ при разных его направлениях (а) и от концентрации p ферромагнитной фазы при разных направлениях внешнего поля $\langle \mathbf{H} \rangle$ (б), см. рис. 8: сплошная кривая — LL-метод в рамках работы [29]; точки — поле направлено параллельно стороне квадрата (см. рис. 8); кресты — поле направлено вдоль диагонали квадрата (см. рис. 8)

тивной магнитной проницаемости для двух принципиально разных структур (ферромагнитные включения в немагнитной матрице и немагнитные включения в ферромагнитной матрице) не переходят друг в друга.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для композита с упорядоченной структурой для некоторых направлений поля $\langle \mathbf{H} \rangle$ из соображений симметрии достаточно решить уравнения Максвелла в пределах одной (элементарной) ячейки и потом провести по ней усреднение. Если соединить центры четырех соседних окружностей прямыми линиями, то они образуют квадрат со стороной a . Мы рассматривали два возможных направления поля (рис. 8). В первом случае внешнее среднее поле $\langle \mathbf{H} \rangle$ направлено параллельно стороне этого квадрата, во втором — вдоль его диагонали (рис. 8). В первом случае длина стороны ячейки $a/2$ (разность потенциалов $-\langle H \rangle a/2$ между сторонами, перпендикулярными к направлению \mathbf{H}), во втором — $a\sqrt{2}$ (разность потенциалов $\langle H \rangle a\sqrt{2}$). Для численного решения уравнений Максвелла мы использовали реализацию метода конечных элементов, описанную в работе [37]. Эта программа хорошо зарекомендовала себя при решении похожих задач магнитостатики в нелинейных ферромагнетиках, показав отличное согласие с экспериментальными результатами [38]. Расчеты проводи-

лись на стандартном персональном компьютере и время расчета для заданной концентрации ферромагнитной фазы p и заданного внешнего поля $\langle \mathbf{H} \rangle$ составляло в зависимости от p и $\langle \mathbf{H} \rangle$ от 5 до 45 мин.

Важно отметить, что изотропия рассматриваемой среды при воздушных включениях в ферромагнитную матрицу имеет место строго только в линейном случае. В нелинейном ее нет, поэтому для двух выбранных направлений внешнего поля существуют разные зависимости, что хорошо видно из рис. 9, на котором кроме теоретического расчета при помощи LL-метода на основе работ [29] приведены результаты численного эксперимента для немагнитных включений при разных направлениях поля. Мы видим, что разница между полевыми зависимостями μ_{eff} (рис. 9а) для различных направлений поля достигает 15 % и что LL-метод дает хорошее для аналитического метода совпадение с численным экспериментом (особенно для концентрационной зависимости, рис. 9б).

Для ферромагнитных включений в немагнитной матрице анизотропия практически не наблюдается. Также в этом случае исчезающе мала зависимость эффективной магнитной проницаемости от внешнего поля \mathbf{H} и его ориентации в пространстве. На рис. 10 приведены графики, полученные при теоретическом расчете методом локальной линейаризации на основе работы [29], и численный счет для ферромагнитных включений.

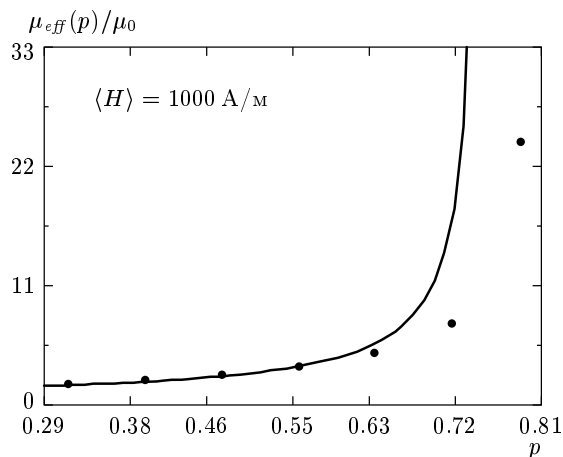


Рис. 10. Зависимость относительной эффективной магнитной проницаемости от концентрации p ферромагнитных круговых включений: сплошная кривая — теоретический расчет LL-методом на основе работы [29]; точки — численный эксперимент

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из изложенного выше, различные приближенные методы дают результаты, качественно одинаковые и количественно близкие (см., например, рис. 6). Различные структуры — случайно неоднородные и упорядоченные (с периодически расположенными включениями) — описываются принципиально различными закономерностями (см. рис. 7). Переход от линейного случая к нелинейному также увеличивает различие — появляется анизотропия эффективных свойств (см. рис. 9а). Примененные в работе приближенные аналитические методы основаны на использовании известных выражений для эффективных параметров μ_{eff} , λ_{eff} в линейном случае и, в принципе, не могут описать возникающую анизотропию нелинейных свойств. В рассмотренном нами случае анизотропия магнитных свойств для периодически расположенных немагнитных включений в ферромагнитной матрице (см. рис. 9а) и ферромагнитных включений в немагнитной матрице незначительна.

Интересно исследовать влияние небольшого беспорядка, вносимого малыми смещениями центров включений, однако эта задача выходит за рамки настоящей статьи и заслуживает отдельного рассмотрения.

Выражаем благодарность Пак-Минг Хью (Р.-М. Нуй) и Д. Кальону (D. Kalyon) за предоставление отпечатков работ. Один из авторов (А. А. С.)

благодарен Н. ROSEN Engineering GmbH за гостеприимство во время работы над статьей и В. П. Холоду за помощь в подгонке выражения (П.1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Зависимость, показанная на рис. 4, описывается уравнением

$$\mu_1(H) = \mu_0 \left(1 + 1.56993 \cdot 10^6 \frac{\text{th}(5.39 \cdot 10^{-4} H)}{H} - 257731 \frac{\text{th}(3.25 \cdot 10^{-3} H)}{10^{-2} H} \right), \quad (\text{П.1})$$

где H берется в А/м.

Чтобы получить $\lambda_1(B)$, необходимо численно решить нелинейное уравнение

$$\mu_1(H)H = B, \quad (\text{П.2})$$

найти $H(B)$, после чего положить

$$\lambda_1(B) = \frac{H(B)}{B} \quad (\text{П.3})$$

и для аналитических выражений полученную кривую аппроксимировать зависимостью

$$\lambda_1(B) = 267.404 \left\{ \frac{\arctg(296.322B) + \text{tg}(0.9B)}{B} + 0.03 [1 + \text{tg}^2(0.92B)] \right\}, \quad (\text{П.4})$$

где B берется в Тл.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. J. Fiske, H. S. Gokturk, and D. M. Kalyon, J. Mat. Sci. **32**, 5551 (1997).
2. H. Gokturk, T. Fiske, and D. M. Kalyon, J. Appl. Phys. **71**, 5598 (1993).
3. E. Ganshina, A. Granovsky, V. Gushin, M. Kuzmichov, P. Podrugin, A. Kravetz, and E. Shipil, Physica A **241**, 45 (1997).
4. С. О. Гладков, Письма в ЖТФ **26**, 50 (2000).
5. V. Masheva, M. Grigorova, D. Nihtianova, J. E. Schmidt, and M. Mikhov, J. Phys. D **32**, 1595 (1999).
6. Э. С. Горкунов, В. А. Захаров, А. И. Ульянов, А. А. Чулкина, Дефектоскопия **3**, 31 (2001).

7. *Proc. Int. Conf. on Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media*, Vol. 3, ed. by W. L. Mochan and R. G. Barrera; *Physica A* **207** (1994); Vol. 4, ed. by A. M. Dykhne, A. N. Lagarkov, and A. K. Sarychev, *Physica A* **241** (1997); Vol. 5, ed. by P. M. Hui, P. Sheng, and L.-H. Tang, *Physica B* **279** (2000).
8. K. J. Binns, P. J. Lawrenson, and C. W. Trowbridge, *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields*, J. Wiley & Sons, Chichester, England (1992).
9. N. Ida, *Numerical Modeling for Electromagnetic Non-destructive Evaluation*, Chapman & Hall, London (1995).
10. D. A. Bruggeman, *Ann. der Phys.* **24**, 636 (1935).
11. R. Landauer, *J. Appl. Phys.* **23**, 779 (1952).
12. М. И. Швидлер, *Статистическая гидродинамика пористых сред*, Недра, Москва (1985).
13. P. M. Hui, Y. F. Woo, and W. M. V. Wan, *J. Phys. C* **7**, L593 (1995).
14. P. M. Hui, P. Cheung, and Y. R. Kwong, *Physica A* **241**, 301 (1997).
15. S. W. Kenkel and J. P. Straley, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 767 (1982).
16. J. P. Straley and S. W. Kenkel, *Phys. Rev. B* **29**, 6299 (1984).
17. А. М. Дыхне, *ЖЭТФ* **59**, 110 (1970).
18. В. В. Бакаев, А. А. Снарский, М. В. Шамонин, *ЖТФ* **71**, 84 (2001).
19. В. В. Бакаев, А. А. Снарский, М. В. Шамонин, *ЖТФ* **72**, 129 (2002).
20. А. А. Snarskii and M. I. Zhenirovsky, *J. Phys. B* **322**, 84 (2002).
21. I. Webman, J. Jortner, and M. H. Cohen, *Phys. Rev. B* **16**, 2959 (1977).
22. Б. Я. Балагуров, *ФТП* **16**, 259 (1982).
23. А. А. Снарский, *ЖЭТФ* **91**, 1405 (1986).
24. А. Е. Морозовский, А. А. Снарский, *ЖЭТФ* **95**, 1844 (1989).
25. А. Е. Морозовский, А. А. Снарский, *Письма в ЖЭТФ* **52**, 871 (1990).
26. А. Е. Морозовский, А. А. Снарский, *ЖЭТФ* **102**, 683 (1992).
27. A. E. Morozovsky and A. A. Snarskii, *Int. J. Electron.* **78**, 135 (1995).
28. А. А. Snarskii, А. Е. Morozovsky, А. Kolek, and А. Kusy, *Phys. Rev. E* **53**, 5596 (1996).
29. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, *ЖЭТФ* **117**, 978 (2000).
30. D. J. Bergman, *Physica A* **270**, 8 (1999).
31. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, Москва (1984).
32. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова Думка, Киев (1986).
33. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, *ЖТФ* **71**, 106 (2001).
34. Б. Я. Балагуров, *ЖЭТФ* **120**, 668 (2001).
35. Дж. Най, *Физические свойства кристаллов*, Мир, Москва (1967).
36. А. М. Сатанин, А. А. Снарский, К. В. Слипченко, И. В. Бессуднов, *ЖТФ* **68**, 5 (1998).
37. D. C. Carpenter, *Materials Evaluation* 877 (2000).
38. M. Shamonin, M. Klank, O. Hagedorn, and H. Dötsch, *Appl. Opt.* **40**, 3182 (2001).