

# ПЛОТНОСТЬ КВАЗИЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ В МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ NS-СИСТЕМАХ

*П. М. Островский\*, М. А. Скворцов, М. В. Фейгельман*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
117940, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 сентября 2002 г.

Квазиклассическая теория эффекта близости предсказывает образование щели  $E_g \sim \hbar D/L^2$  в спектре возбуждений диффузного контакта нормальный металл–сверхпроводник (NS). Мезоскопические флуктуации приводят к появлению состояний, аномально локализованных в нормальном металле и плохо связанных со сверхпроводящим берегом, что создает ненулевую плотность состояний при энергиях ниже  $E_g$ . В предлагаемом обзоре рассматривается поведение плотности квазичастичных состояний под квазиклассической щелью для различных геометрий NS-системы (особое внимание уделяется SNS-контактам), а также для задачи о сверхпроводнике с малой концентрацией магнитных примесей, в которой возникает аналогичное явление. Изложение в основном ведется в рамках полностью микроскопического метода суперсимметричной  $\sigma$ -модели; в этом методе ненулевая плотность состояний возникает за счет инстантонных конфигураций с нарушенной суперсимметрией. Кроме того, дан обзор результатов альтернативного подхода, исходящего из идеи универсальности спектров случайных гамильтонианов заданной симметрии. В ситуациях, изученных обоими методами, они дают совпадающие результаты. К таковым относится точное выражение для средней плотности состояний NS-системы в окрестности  $E_g$ . В пределах одно- и двумерной  $\sigma$ -моделей подщелевая плотность состояний найдена с экспоненциальной точностью. Рассмотрен также случай контактов с плохой прозрачностью NS-границы. Показано, что при достаточно малой прозрачности количество подщелевых состояний оказывается много больше единицы.

PACS: 73.21.-b, 74.50.+r, 74.80.Fr

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. Введение</b> .....	400	4.2. Нульмерное действие	416
<b>2. Общая теория</b> .....	403	4.3. Классификация «хвостов»	417
2.1. Классический подход	403	4.4. «Сильный хвост»	419
2.2. Вывод $\sigma$ -модели	404	<b>5. Неуниверсальная плотность состояний</b>	421
2.3. Параметризация многообразия $Q$ -матрицы	406	5.1. Широкий SNS-контакт	421
2.4. Седловые точки	407	5.2. Сверхпроводник с магнитными примесями	422
2.5. Параметризация флуктуаций	408	5.3. Предел малых энергий	423
<b>3. Контакт с идеальными границами</b>	409	<b>6. Заключение</b>	425
3.1. Одноинстантанное решение	409	Приложение А. Параметризация матрицы $W$	426
3.2. Точное решение вблизи порога	411	Приложение Б. Интегралы типа Эйри	427
3.3. Метод случайных матриц	413	Литература	427
<b>4. Контакт с туннельными границами</b>	414		
4.1. Действие для границы	414		

\*E-mail: ostrov@itp.ac.ru

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Мезоскопические свойства металлов проявляются, когда длина когерентности электронов проводимости сравнивается с характерными размерами образца [1]. Наиболее ярко эти свойства наблюдаются в образцах малого размера и поэтому всегда сопровождаются сильными мезоскопическими флуктуациями.

Другим когерентным, но не размерным, эффектом является сверхпроводимость. Она обусловлена куперовским притяжением между электронами. Такое притяжение приводит к перестройке основного состояния электронной системы и кардинально меняет низкоэнергетические свойства металла. В современных экспериментах удается удовлетворить обоим условиям одновременно, что приводит к явлениям мезоскопической сверхпроводимости. При этом наиболее интересные и разнообразные эффекты наблюдаются в гибридных структурах, состоящих из сверхпроводящих и нормальных частей. В мезоскопическом пределе в таких структурах устанавливается глобальная когерентность, приводящая к явлениям, известным под общим названием «эффекта близости». Качественно эти явления сводятся к подавлению сверхпроводимости в сверхпроводящих частях и к появлению некоторых сверхпроводящих свойств в нормальных областях.

Одним из характерных примеров является эффект Джозефсона. При туннелировании через слой изолятора куперовские пары частично сохраняют свою когерентность и таким образом могут переносить сверхток через такой слой. Если же два сверхпроводящих контакта соединены областью нормального металла, то аналогичный эффект имеет более сложную микроскопическую природу. Фундаментальным явлением в этом случае является андреевское отражение [2].

При падении электрона на границу раздела сверхпроводник – нормальный металл с нормальной стороны невозможен его переход в сверхпроводник, потому что данной энергии в спектре сверхпроводника соответствует щель. Однако в этом случае возможен процесс андреевского отражения: электрон отражается от нормального металла, превращаясь в дырку, а в сверхпроводник уходит куперовская пара. По-другому этот процесс можно рассматривать как туннелирование куперовской пары из сверхпроводника в нормальный металл. Хотя при этом притяжение между электронами пропадает, их совместное состояние является отчасти когерентным. Если нормальный слой достаточно тонок, то такая пара

может попасть во второй сверхпроводник, перенося тем самым сверхток. Эта ситуация соответствует некоторой электронной траектории, соединяющей два сверхпроводящих берега: пройдя по этой траектории, электрон при андреевском отражении превращается в дырку, которая повторяет путь электрона в противоположном направлении, и после повторного андреевского отражения траектория замыкается. Такие траектории разрешены, когда на их протяжении укладывается целое число длин волн — так возникают андреевские состояния [3]. Эти состояния образуют дискретный спектр и располагаются симметрично относительно уровня Ферми (в отсутствие тока).

На этом примере видно, как близость сверхпроводника приводит к изменению низкоэнергетического спектра нормального металла. Аналогичные явления, также обусловленные андреевским отражением, могут происходить и в более простом случае одного контакта сверхпроводника и нормального металла. При этом в нормальной области также будут возникать андреевские состояния, изменяя спектр нормального металла. Характер этих изменений существенно зависит от классической динамики электронов в нормальной части контакта. Например, если нормальная область имеет прямоугольную форму и не содержит примесей, то в ней будут существовать сколь угодно длинные траектории электронов между двумя андреевскими отражениями. Это приводит к образованию уровней с произвольно малой энергией, а следовательно, к отсутствию щели в спектре. Однако плотность состояний все же будет линейно стремиться к нулю при приближении к энергии Ферми [4, 5]. В общем случае спектр такого типа возникает, когда классическая динамика электронов в нормальной области интегрируема.

Противоположный предел хаотичной динамики реализуется, например, в случае большой плотности потенциальных (немагнитных) центров рассеяния — примесей. При таких условиях движение электронов будет диффузным. Однако наивная попытка определить характер спектра, изучая вероятность траекторий различной длины, приводит к неверному результату [6]. Действительно, при хаотичном движении всегда можно найти сколь угодно длинные траектории, тем не менее в спектре будет наблюдаться щель. Причина ошибки состоит в неучете эффектов квантовой интерференции. Дело в том, что квазиклассические диффузные траектории представляют собой ломаные линии: электрон последовательно рассеивается на большом количестве примесей. Для двух достаточно длинных траекторий почти навер-

няка найдется общая примесь. А значит, кроме двух соответствующих андреевских состояний имеются еще как минимум два: электрон, летящий по первой траектории, после рассеяния на общей примеси переходит на вторую траекторию, а после андреевского отражения дырка на той же примеси возвращается на первую траекторию, и наоборот. Из-за эффектов квантовой интерференции между описанными процессами низколежащие андреевские уровни нельзя описывать на наивном языке простых траекторий. Адекватная квазиклассическая техника давно известна [7, 8] и опирается (в диффузном случае) на уравнение Узаделя [9]. Качественно результат сводится к появлению щели в плотности состояний величиной порядка  $\hbar/\tau_c$ , где  $\tau_c$  — характерное время диффузии между двумя андреевскими отражениями [4, 10–12]. Оно определяется силой и концентрацией примесей, размерами нормальной области и прозрачностью границы со сверхпроводником.

Однако такая квазиклассическая теория не учитывает мезоскопические флуктуации. На качественном уровне можно считать, что коэффициент диффузии флуктуирует и это приводит к отклонению величины щели в каждом конкретном образце от ее среднего значения. В результате усреднения по возможным конфигурациям примесей вместо строгого обращения плотности состояний в нуль будет наблюдаться ее резкое уменьшение при соответствующей энергии, а при меньших энергиях она будет экспоненциально малой.

Можно сделать следующее общее утверждение. Если положение края спектра определяется физической величиной, которая может флуктуировать, то при усреднении по этим флуктуациям появится «хвост» плотности состояний в запрещенной области. Подобный «хвост» был впервые рассмотрен И. М. Лифшицем в обычном полупроводнике [13]. На сегодняшний день известно много примеров подобного рода флуктуационных эффектов в различных системах, см., например, [14–16].

Существует чисто феноменологический метод работы с неупорядоченными системами — теория случайных матриц [17–19]. В рамках этой теории гамильтониан является случайной матрицей, причем различные матричные элементы считаются некоррелированными (исключая связи за счет дополнительных симметрий гамильтониана). В главном порядке по большому размеру матрицы средняя плотность состояний случайного гамильтониана представляет собой «вигнеровский полукруг»:

$$\langle \rho(E) \rangle = \delta^{-1} \sqrt{1 - E^2/E_0^2},$$

где  $E_0$  — ширина зоны, а  $\delta$  — среднее расстояние между уровнями в центре зоны.

Теория случайных матриц нашла широкое применение [20] для описания спектральных свойств мезоскопических систем благодаря свойству универсальности. Последнее проявляется в том, что, несмотря на различие на уровне микроскопического гамильтониана, спектры мезоскопических систем с хаотической динамикой и случайных матриц с одинаковыми  $\delta$  статистически совпадают. Впервые это было показано Ефетовым [21] на примере парного коррелятора уровней энергии диффузной металлической гранулы. При этом обе системы рассматриваются вдали от края зоны, когда среднюю плотность состояний можно считать не зависящей от энергии.

Вблизи края зоны средняя плотность состояний в ансамбле Вигнера–Дайсона в квазиклассическом приближении обращается в нуль корневым образом. При учете поправок к квазиклассике появляется экспоненциальный убывающий хвост при энергиях  $|E| > E_0$ . В диффузной NS-системе край спектра вблизи щели также корневой. Если предположить, что форма хвоста полностью определяется квазиклассическим поведением плотности состояний вблизи края щели (гипотеза универсальности), то можно распространить результат теории случайных матриц на случай диффузной NS-системы. Это было сделано в работе [22].

Другой случай появления экспоненциально малого хвоста плотности состояний — сверхпроводник с магнитными примесями. Наличие магнитных примесей подавляет сверхпроводимость. Если их концентрация не очень большая, то щель в спектре становится меньше по сравнению со сверхпроводником без примесей, но не обращается в нуль. Однако концентрация примесей может флуктуировать в пространстве, и, таким образом, есть ненулевая вероятность обнаружить уровень энергии ниже средней величины щели. Вычисление такого хвоста плотности состояний было сделано в работе [23, 24]. При этом использовалась техника нелинейной суперсимметричной  $\sigma$ -модели.

Существует несколько методов вычисления электронных свойств в системах с беспорядком. В обычной статистической физике основной величиной, определяющей свойства системы, является производящий функционал  $Z[J] = \int e^{-S[\Phi, J]} D\Phi$ . Различные корреляционные функции, в том числе и плотность состояний, выражаются через логарифмические производные от этого функционала по источникам  $J$ . Если в системе присутствует беспорядок, то все корреляционные функции нужно по нему усреднять,

т. е. требуется брать среднее значение от  $\ln Z$ . Однако логарифм — нелинейная функция, и его усреднение в общем случае затруднительно. Один из способов обойти эту трудность — метод реплик — был предложен в работе [25]. Он состоит в том, что вместо одной системы рассматривается  $n$  ее копий (реплик). Производящий функционал при этом равен  $Z^n$ . Если удастся усреднить его по беспорядку при произвольном значении  $n$  и сделать по  $n$  аналитическое продолжение к точке  $n = 0$ , то можно воспользоваться формулой  $\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} (Z^n - 1)/n$ .

Однако вычисление производящего функционала в общем виде при произвольном числе реплик часто оказывается достаточно сложным. Эта трудность снимается в методе суперсимметричной  $\sigma$ -модели [26]. Его суть состоит в добавлении к физическим полям такого же количества грасмановых (антикоммутирующих) полей. При произвольном действии системы производящий функционал оказывается равным единице, и корреляционные функции определяются обычными вариационными производными этого функционала вместо логарифмических.

Квазиклассическое приближение (уравнение Узаделя) соответствует вычислению производящего функционала методом перевала. Соответствующая седловая точка в действии нелинейной  $\sigma$ -модели суперсимметрична, т. е. имеет одинаковый вид по коммутирующим и грасмановым переменным. Экспоненциально малый вклад от редких мезоскопических флуктуаций соответствует другим, несуперсимметричным седловым точкам — инстантонам. Впервые такое вычисление было проделано в работе [16] для плотности состояний на высоком уровне Ландау в двумерной системе в магнитном поле. Применимость метода перевала вблизи инстантонов обеспечивалась большим номером уровня Ландау. В случае диффузных NS-систем соответствующим большим параметром будет число проводящих каналов на границе между нормальным металлом и сверхпроводником.

Обобщение  $\sigma$ -модели для диффузных NS-систем было предложено в работе [27] и коротко излагается ниже. Там же было сделано указание на то, что подщелевая плотность состояний соответствует инстантонам в этой модели. Инстантонная конфигурация, ответственная за появление хвоста плотности состояний в однородном сверхпроводнике с магнитными примесями [28], была найдена в [23, 24]. Анализ инстантонов и вычисление плотности квазилокализованных состояний в гибридных системах были проделаны в [29]. В частности, оказалось, что суще-

ствуют два инстантона, дающие вклад в подщелевую плотность состояний. При энергиях, не слишком близких к порогу, основную роль играет один из этих инстантонов, что позволяет найти плотность состояний с экспоненциальной точностью. В случае, когда  $\sigma$ -модель становится эффективно нульмерной (не очень низкие энергии), удалось также вычислить и предэкспоненциальный множитель, при этом получается такая же зависимость плотности состояний от энергии, как в теории случайных матриц. Применимость этих результатов обеспечивается большой величиной кондактанса нормальной области.

Дальнейшее развитие этот метод получил в работе [30]. В частности, удалось отказаться от инстантонного приближения и получить точное выражение для плотности состояний как выше, так и ниже критической энергии, описывающее всю переходную область. И в этом случае по форме зависимость плотности состояний от энергии совпадает с феноменологическим предсказанием теории случайных матриц. Также был рассмотрен случай длинного одномерного SINIS-контакта с неидеальными границами между нормальной и сверхпроводящими частями. Плохая прозрачность границ приводит к подавлению эффекта близости и уменьшению квазиклассической щели. Когда кондактанс границы становится меньше некоторого критического значения, происходит переход к другому классу универсальности. Плотность состояний растет корневым образом при приближении энергии к порогу сверху. Во флуктуационной области около порога эта расходимость сглаживается и переходит в убывающий экспоненциальный хвост, выражение для которого было приведено в [30]. В отличие от всех ранее упомянутых случаев, когда в области флуктуационного хвоста в среднем оказывалось лишь порядка одного состояния, количество подщелевых состояний в последнем случае параметрически большое, поэтому он был назван сильным хвостом. Из-за недостатка места в [30] был приведен лишь конечный результат для сильного хвоста. Этот пробел будет восполнен в данном тексте.

Ниже будет приведен обзор результатов, полученных в рамках метода нелинейной суперсимметричной  $\sigma$ -модели для мезоскопических сверхпроводящих систем. Материал организован следующим образом.

В разд. 2 мы сначала рассмотрим квазиклассический подход к вычислению плотности состояний. Свойства квазиклассического решения потребуются нам в дальнейшем для описания возможных инстантонов  $\sigma$ -модели. Затем будет дан краткий вывод

$\sigma$ -модели для сверхпроводника. Одним из основных результатов этого раздела является параметризация седлового многообразия и классификация возможных инстантонов.

В разд. 3 решается задача об NS-системе с абсолютно прозрачными границами. Будет получено точное выражение плотности состояний вблизи края спектра. В конце раздела коротко обсуждается применение теории случайных матриц к задаче об NS-контакте.

Раздел 4 посвящен обобщению результатов на случай границы с произвольной прозрачностью. Строится классификация возможных хвостов плотности состояний в зависимости от прозрачности. Отдельно рассматривается случай сильного хвоста.

Раздел 5 посвящен системам, которые нельзя описать в рамках нульмерной  $\sigma$ -модели. Речь идет о достаточно больших в поперечном размере SNS-контактах, когда размер инстантона гораздо меньше размера системы. Также рассматривается задача о сверхпроводнике с магнитными примесями. В конце раздела с логарифмической точностью вычисляется плотность квазилокализованных состояний в SNS-контакте глубоко под щелью.

## 2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

### 2.1. Квазиклассический подход

Для начала рассмотрим квазиклассический метод вычисления плотности состояний в NS-системе с прозрачными границами. Функция Грина для сверхпроводника несет информацию как о быстрых осцилляциях электронов, формирующих куперовские пары, так и об относительно медленном движении пары как целого. Усреднение запаздывающей функции Грина по быстрым модам приводит в диффузном случае к уравнению Узаделя<sup>1)</sup> [9]:

$$D\nabla(\hat{g}_R(\mathbf{r})\nabla\hat{g}_R(\mathbf{r})) + i[\tau_z E + i\tau_x \Delta, \hat{g}_R(\mathbf{r})] = 0, \quad \hat{g}_R^2(\mathbf{r}) = 1. \quad (2.1)$$

Здесь  $\hat{g}_R(\mathbf{r})$  является матрицей  $2 \times 2$  в пространстве Намбу,  $\tau_i$  — матрицы Паули, действующие в пространстве Намбу,  $D$  — коэффициент диффузии; энергия  $E$  отсчитана от уровня Ферми. В угловой параметризации  $\hat{g}(\mathbf{r}) = \tau_z \cos \theta + \tau_x \sin \theta$  уравнение Узаделя имеет вид

$$D\nabla^2 \theta + 2iE \sin \theta + 2\Delta \cos \theta = 0. \quad (2.2)$$

<sup>1)</sup> Фаза параметра порядка положена равной нулю.

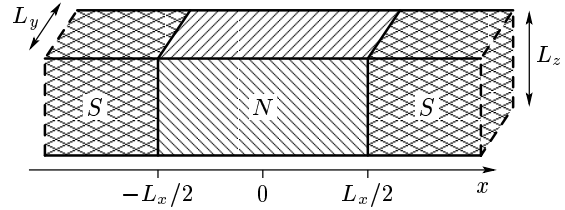


Рис. 1. SNS-контакт длиной  $L_x$ . Поперечные размеры:  $L_y$  и  $L_z$

Будем пренебрегать эффектом близости в сверхпроводнике и зафиксируем в нем  $\Delta = \text{const}$ , в то время как в области нормального металла положим величину  $\Delta$  равной нулю. Если размер нормальной области превышает сверхпроводящую длину когерентности  $\xi$ , то щель в спектре имеет порядок энергии Таулесса, которая, по предположению, много меньше  $\Delta$ , поэтому в сверхпроводнике можно положить  $\theta = \pi/2$ .

В нормальной области NS-системы уравнение Узаделя принимает вид

$$D\nabla^2 \theta + 2iE \sin \theta = 0. \quad (2.3)$$

Граничные условия требуют равенства  $\theta = \pi/2$  на границе со сверхпроводником (идеальная граница) и  $\nabla_n \theta = 0$  на свободной границе нормального металла.

Усредненная по беспорядку плотность состояний выражается следующим образом ( $\nu$  — плотность состояний на одну проекцию спина):

$$\langle \rho(E, \mathbf{r}) \rangle = \nu \text{Re tr}(\tau_z \hat{g}(\mathbf{r})) = 2\nu \text{Re} \cos \theta = 2\nu \text{Im} \text{sh} \psi, \quad (2.4)$$

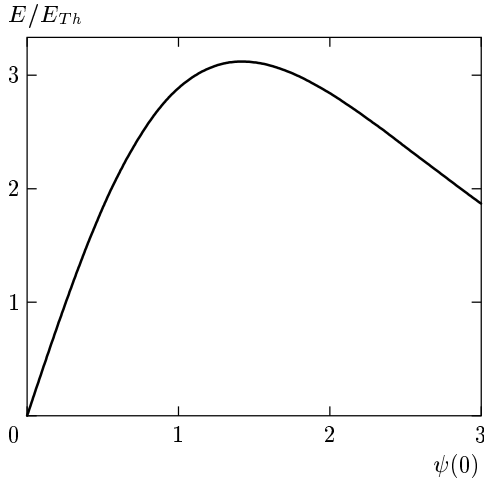
где сделана замена  $\theta = \pi/2 + i\psi$ , превращающая уравнение (2.3) в уравнение с действительными коэффициентами:

$$D\nabla^2 \psi + 2E \text{ch} \psi = 0. \quad (2.5)$$

В качестве примера рассмотрим одномерный SNS-контакт длиной  $L_x$ , изображенный на рис. 1. В этом случае уравнение (2.5) легко интегрируется и получается выражение энергии через значение  $\psi$  в середине контакта:

$$\sqrt{\frac{E}{E_{Th}}} = \int_0^{\psi(0)} \frac{d\psi}{\sqrt{\text{sh} \psi(0) - \text{sh} \psi}}, \quad E_{Th} = \frac{D}{L_x^2}. \quad (2.6)$$

График этой функции приведен на рис. 2. Видно, что величина  $\psi$  действительная (т. е. плотность состояний нулевая) только при энергии, меньшей определенного порогового значения  $E_g = 3.12E_{Th}$ . Это и есть таулессовская щель [10, 11].



**Рис. 2.** Зависимость  $E/E_{Th}$  от значения  $\psi$  в середине одномерного контакта (формула (2.6)). Максимум функции соответствует пороговому значению энергии  $E_g \approx 3.12E_{Th}$ . Ниже порога уравнение Узаделя имеет два решения, одно из которых расходится при  $E \rightarrow 0$

На примере одномерного контакта можно установить следующие общие свойства решений уравнения Узаделя. Уравнение (2.5) имеет два действительных решения при  $E < E_g$ . Меньшее из них будем обозначать  $\psi_1(\mathbf{r})$ , а большее —  $\psi_2(\mathbf{r})$ . При  $E = E_g$  эти решения совпадают:  $\psi_{1,2}(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r})$ . При  $E > E_g$  имеются два комплексных решения уравнения Узаделя; из них выбирается то, которое дает положительную плотность состояний. Под щелью из физических соображений выбирается  $\psi_1(\mathbf{r})$ , поскольку при стремлении энергии к нулю  $\psi_2(\mathbf{r})$  неограниченно возрастает. Однако ниже мы покажем, что решение с  $\psi_2(\mathbf{r})$  возможно как флуктуация, которая и оказывается ответственной за ненулевую плотность состояний при энергиях  $E < E_g$ .

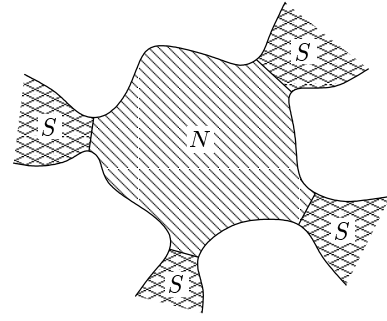
В дальнейшем нам понадобится нормированная разность решений уравнения Узаделя при стремлении энергии к пороговой ( $V$  — объем нормальной области):

$$f_0(\mathbf{r}) = \lim_{E \rightarrow E_g} \frac{\psi_2(\mathbf{r}) - \psi_1(\mathbf{r})}{\sqrt{\int (\psi_2(\mathbf{r}) - \psi_1(\mathbf{r}))^2 \frac{d\mathbf{r}}{V}}}. \quad (2.7)$$

Функция  $f_0(x)$  подчиняется линейному уравнению, которое можно получить, взяв предел по энергии в разности уравнений Узаделя для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ :

$$D\nabla^2 f_0 + 2E_g f_0 \text{sh } \psi_0 = 0. \quad (2.8)$$

Выражения для плотности состояний будут зави-



**Рис. 3.** Контакт между нормальной гранулой и сверхпроводниками. Основные результаты разд. 2 и 3 получены в рамках нульмерной  $\sigma$ -модели для контакта произвольной формы

сеть от геометрии системы лишь через два численных параметра

$$\begin{aligned} c_1 &= \int \frac{d\mathbf{r}}{V} f_0(\mathbf{r}) \text{ch } \psi_0(\mathbf{r}), \\ c_2 &= \int \frac{d\mathbf{r}}{V} f_0^3(\mathbf{r}) \text{ch } \psi_0(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

В частности, для одномерного SNS-контакта (рис. 1)  $c_1 \approx 1.15$ ,  $c_2 \approx 0.88$ .

Ниже рассмотрим контакт произвольной геометрии (рис. 3), предполагая при этом, что он имеет единственный характерный масштаб длины. В этом случае плотность состояний вблизи порога может быть найдена в рамках приближения нульмерной  $\sigma$ -модели (см. разд. 2.4). В случае контакта, размер которого вдоль границы со сверхпроводниками значительно превышает расстояние между ними, помимо двух решений уравнения Узаделя, описанных выше, существуют также решения, имеющие вид инстантона вдоль длинного направления. Этот случай требует особого рассмотрения, что будет сделано в разд. 5.1.

## 2.2. Вывод $\sigma$ -модели

Для нахождения инстантонных поправок к квазиклассической плотности состояний коротко приведем вывод эффективной суперсимметричной теории поля ( $\sigma$ -модель Ефетова [26]) для сверхпроводящих систем [27]. Состояния электрона в сверхпроводнике описываются гамильтонианом Боголюбова–де Жена, который является матрицей  $2 \times 2$  в пространстве Намбу:

$$\mathcal{H} = \tau_z \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + U(\mathbf{r}) \right) + \tau_x \Delta(\mathbf{r}). \quad (2.10)$$

Плотность состояний выразим через функцию Грина

$$\rho(E, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im tr} \int d\mathbf{r}' G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E). \quad (2.11)$$

Функцию Грина, в свою очередь, будем вычислять с помощью функционального интеграла<sup>2)</sup>:

$$G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = -i \frac{\int u(\mathbf{r})u^+(\mathbf{r}')e^{-S[u]} \mathcal{D}u^* \mathcal{D}u}{\int e^{-S[u]} \mathcal{D}u^* \mathcal{D}u}, \quad (2.12)$$

где действие дается выражением

$$S[u] = -i \int d\mathbf{r} u^+(\mathbf{r})(E + i0 - \mathcal{H})u(\mathbf{r}). \quad (2.13)$$

Чтобы в дальнейшем провести усреднение по беспорядку, нужно избавиться от нормировочного интеграла в знаменателе (2.12). С этой целью введем дополнительно к полю  $u$  грассманово (антикоммутирующее) поле  $\chi$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \chi \\ u \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = -i \int u(\mathbf{r})u^+(\mathbf{r}')e^{-S[\Phi]} \mathcal{D}\Phi^* \mathcal{D}\Phi, \quad (2.15)$$

$$S[u] = -i \int d\mathbf{r} \Phi^+(\mathbf{r})(E + i0 - \mathcal{H})\Phi(\mathbf{r}). \quad (2.16)$$

Поле  $\Phi$  состоит из четырех компонент, оно принадлежит произведению пространства Намбу и суперсимметричного пространства Ферми–Бозе (FB). После усреднения по беспорядку нужно будет написать эффективное действие для медленных мод в  $\langle \Phi \Phi^+ \rangle$ . Кроме того, нужно еще учесть медленные моды в куперовском канале  $\langle \Phi \Phi^T \rangle$  и  $\langle \Phi^* \Phi^+ \rangle$ . С этой целью уже сейчас сделаем дополнительное удвоение полей [26] (мы следуем обозначениям, принятым в [31]):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi \\ i\tau_y \Phi^* \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Полученное пространство будем называть пространством частица–дырка (PH). Вектор  $\psi$  состоит из

<sup>2)</sup> Символ  $\mathcal{D}u^* \mathcal{D}u$  нужно понимать следующим образом:  $\mathcal{D}u^* \mathcal{D}u = \prod_n \prod_{k=1,2} \pi^{-1} d\text{Re } u_n^{(k)} d\text{Im } u_n^{(k)}$ . Здесь  $u_n^{(k)}$  — коэффициенты разложения  $k$ -й компоненты вектора  $u(\mathbf{r})$  по ортонормированному базису функций.

частичного (верхнего) и дырочного блоков. Матрицы Паули в пространстве PH обозначим через  $\sigma_i$ . Введем операцию зарядового сопряжения супервекторов и суперматриц:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= (C\psi)^T, \quad \bar{A} = CA^T C^T, \\ C &= -\tau_x \begin{pmatrix} i\sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}_{FB}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Усреднение по примесям в (2.15) приводит к действию следующего вида:

$$S[\psi] = -i \int d\mathbf{r} \left[ \bar{\psi} \left( \Lambda(E+i0) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu - i\tau_y \Delta(\mathbf{r}) \right) \psi + \frac{(\bar{\psi}\psi)^2}{4\pi\nu\tau} \right], \quad (2.19)$$

где введено обозначение  $\Lambda = \sigma_z \tau_z$ . Член четвертой степени нужно расцепить при помощи преобразования Хаббарда–Стратоновича. Для этого вводится матричное суперполе  $Q$  размером  $8 \times 8$ . Преобразование приводит к следующему действию:

$$S[\psi, Q] = -i \int d\mathbf{r} \times \left[ \bar{\psi} \left( \Lambda(E+i0) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu - i\tau_y \Delta(\mathbf{r}) + \frac{iQ}{2\tau} \right) \psi + \frac{\pi\nu}{8\tau} \text{str } Q^2 \right]. \quad (2.20)$$

Мера функционального интегрирования по новому полю  $Q$  определяется из условия суперсимметрии:  $\int \exp(-\text{str } Q^2) \mathcal{D}Q = 1$ .

В результате интеграл по полям  $\psi$  стал гауссовым и его можно взять. Однако есть одна сложность, состоящая в том, что не все компоненты  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  независимы. Когда было введено пространство PH (формула (2.17)), новые переменные не добавились, а только по-другому были перегруппированы старые. Действие, усредненное по  $\psi$ , имеет вид

$$S[Q] = \int d\mathbf{r} \text{str} \left\{ \frac{\pi\nu}{8\tau} Q^2 - \frac{1}{2} \ln \left[ \sigma_z(E+i0) - \tau_z \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right) - \tau_x \Delta + \frac{i\tau_z}{2\tau} Q \right] \right\}. \quad (2.21)$$

Указанное обстоятельство привело к тому, что перед логарифмом появился коэффициент 1/2, а также к необходимости наложить условие самосопряженности на  $Q$ :

$$Q = \bar{Q}. \quad (2.22)$$

Очевидной седловой точкой действия (2.21) является  $Q = \Lambda$ . Приближение  $\sigma$ -модели состоит в нахождении седлового решения, медленно зависящего от координат. С этой целью полагаем  $Q = e^{-iU/2} \Lambda e^{iU/2}$  и оставляем в действии главные члены по градиентам  $Q$ , энергии  $E$  и по величине параметра порядка  $\Delta$ . Результатом такого разложения является действие  $\sigma$ -модели [27, 29]

$$S[Q] = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \times \text{str} [D(\nabla Q)^2 + 4iQ(\Lambda(E + i0) + i\tau_x \Delta)], \quad (2.23)$$

$$Q^2 = 1,$$

а выражение для плотности состояний принимает вид

$$\langle \rho(E, \mathbf{r}) \rangle = \frac{\nu}{4} \text{Re} \int \text{str}(k \Lambda Q(\mathbf{r})) e^{-S[Q]} \mathcal{D}Q. \quad (2.24)$$

Здесь введено обозначение для нарушающей суперсимметрию матрицы [26]:

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{FB}. \quad (2.25)$$

### 2.3. Параметризация многообразия $Q$ -матрицы

Суперматрица  $Q$  имеет размер  $8 \times 8$  и содержит в общем случае 32 комплексных коммутирующих параметра и столько же антикоммутирующих (грасмановых) параметров. Условие  $Q = \bar{Q}$  уменьшает их количество вдвое. По построению  $\sigma$ -модели матрица  $Q$  обладает такой же структурой собственных значений как  $\Lambda$ :

$$Q = e^{-iU/2} \Lambda e^{iU/2},$$

что уменьшает количество независимых параметров до 8 комплексных и 8 грассмановых. В этом разделе мы построим параметризацию коммутирующей части  $Q$ -матрицы.

Условие самосопряженности для  $Q$  приводит к антисамосопряженности для  $U$ :  $U + \bar{U} = 0$ . Кроме того, наложим естественное условие  $\{\Lambda, U\} = 0$ , так как только такие генераторы могут «повернуть» матрицу  $\Lambda$ . В отсутствие грассмановых переменных матрицы  $Q$  и  $U$  распадаются на два независимых сектора (FF и BB). Операция зарядового сопряжения действует по-разному в этих секторах, что приводит к их различной топологии. Матрица  $U$  содержит следующие генераторы:

$$U^{FF}: \quad \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \tau_x \quad \sigma_z \tau_y$$

$$U^{BB}: \quad \sigma_x \tau_z \quad \sigma_y \tau_z \quad \sigma_z \tau_x \quad \sigma_z \tau_y$$

FF-сектор порождается четырьмя генераторами, которые попарно антикоммутируют. Поэтому топологически он представляет собой 4-мерную комплексную сферу  $S_4$ . Генераторы BB-сектора разбиваются на две пары, внутри которых они антикоммутируют, а между парами — коммутируют, т. е. BB-сектор представляет собой произведение двух двумерных комплексных сфер. Сферические углы выберем следующим образом:

$$Q^{FF} = \tau_z \cos \theta_F [\sigma_z \cos k_F + \sin k_F (\sigma_x \cos \chi_F + \sigma_y \sin \chi_F)] + \sin \theta_F (\tau_x \cos \varphi_F + \tau_y \sin \varphi_F), \quad (2.26)$$

$$Q^{BB} = [\sigma_z \cos k_B + \tau_z \sin k_B (\sigma_x \cos \chi_B + \sigma_y \sin \chi_B)] \times [\tau_z \cos \theta_B + \sigma_z \sin \theta_B (\tau_x \cos \varphi_B + \tau_y \sin \varphi_B)]. \quad (2.27)$$

Отметим еще дополнительную симметрию многообразия  $Q^{BB}$  — матрица не изменяется при одновременной инверсии обеих сфер:  $(\theta_B, \varphi_B, k_B, \chi_B) \rightarrow (\pi - \theta_B, \varphi_B + \pi, \pi - k_B, \chi_B + \pi)$ . В результате BB-сектор оказывается топологически эквивалентным факторизованному произведению  $S_2 \times S_2/Z_2$ .

Общее требование сходимости  $\sigma$ -модели накладывает условие компактности FF-сектора и некомпактности BB-сектора, что уменьшает количество независимых переменных до 4 действительных в FF-и BB-секторах.

Подставляя матрицу  $Q$  в уравнение (2.23), находим явное представление действия через введенные углы:

$$S = \frac{\pi\nu}{2} \int d\mathbf{r} (\mathcal{L}^{FF} - \mathcal{L}^{BB}),$$

$$\mathcal{L}^{FF} = D [(\nabla \theta_F)^2 + \sin^2 \theta_F (\nabla \varphi_F)^2 + \cos^2 \theta_F (\nabla k_F)^2 + \cos^2 \theta_F \sin^2 k_F (\nabla \chi_F)^2] + 4iE \cos \theta_F \cos k_F - 4\Delta \sin \theta_F \cos \varphi_F, \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}^{BB} = D [(\nabla \theta_B)^2 + \sin^2 \theta_B (\nabla \varphi_B)^2 + (\nabla k_B)^2 + \sin^2 k_B (\nabla \chi_B)^2] + 4iE \cos \theta_B \cos k_B - 4\Delta \sin \theta_B \cos k_B \cos \varphi_B.$$

Углы  $\theta$  и  $\varphi$  в обоих секторах имеют смысл узде-левского угла и фазы параметра порядка. Для определения седловых конфигураций этого действия при нулевой разности фаз на контакте мы можем сразу положить  $\varphi_F = \varphi_B = 0$ . На седловом решении углы  $\chi_{F,B}$  не зависят от координат и являются полностью циклическими: действие не зависит от  $\chi_{F,B}$ .



Угол  $k_F$  также равен нулю на седловом решении. В ВВ-секторе удобно сделать замену переменных

$$\theta_B = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad k_B = \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (2.29)$$

В терминах углов  $\theta_F, \alpha, \beta$  действие имеет простой вид:

$$S[\theta_F, \alpha, \beta] = 2S_0[\theta_F] - S_0[\alpha] - S_0[\beta], \quad (2.30)$$

$$S_0[\theta] = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} [D(\nabla\theta)^2 + 4iE \cos\theta - 4\Delta \sin\theta]. \quad (2.31)$$

#### 2.4. Седловые точки

Вариация действия (2.31) приводит к уравнению (2.2). Таким образом, седловая точка описывается уравнением Узаделя по каждой из трех переменных ( $\theta_F, \alpha$  и  $\beta$ ). Согласно разд. 2.1, уравнение Узаделя имеет два решения:  $\theta_1(\mathbf{r})$  и  $\theta_2(\mathbf{r})$ . (Исключение составляет ситуация, когда размер контакта вдоль границы со сверхпроводниками значительно превышает расстояние между ними; этот случай будет рассмотрен отдельно в разд. 5.1.) Так как при  $E = E_g$  решения  $\theta_1(\mathbf{r})$  и  $\theta_2(\mathbf{r})$  совпадают, мода, переводящая  $\theta_1(\mathbf{r})$  в  $\theta_2(\mathbf{r})$ , смягчается вблизи порога. В результате этого функциональный интеграл по  $Q(\mathbf{r})$  становится обычным интегралом по суперматрице  $Q$ , т. е. происходит переход к нульмерной  $\sigma$ -модели.

Итак, в нульмерном случае существует в общей сложности  $2^3 = 8$  седловых решений. Если выбрать решение  $\theta_1$  во всех трех переменных  $\theta_F, \alpha$  и  $\beta$ , то автоматически получим, что  $\theta_B = \theta_1, \theta_F = \theta_1$  и  $k_B = 0$ , т. е. FF- и ВВ-сектора будут тождественны друг другу. После разложения действия (2.28) до второго порядка по флуктуациям около такой седловой точки оказывается, что супердетерминант этой квадратичной формы равен единице, что является прямым следствием FF–ВВ-симметрии решения. Функциональный интеграл (2.24) при этом сводится к (2.4). Таким образом, квазиклассика получается из  $\sigma$ -модели в перевальном приближении около суперсимметричной седловой точки.

Высшие порядки разложения действия вблизи суперсимметричного перевала соответствуют пертурбативным поправкам к квазиклассическому ответу. Они были проанализированы в работе [27], где показано, что их учет приводит к перенормировке  $E_g$ . При этом плотность состояний ниже перенормированного значения щели по-прежнему обращается

в нуль. Средняя плотность состояний оказывается конечной во всем диапазоне энергий лишь при учете других седловых точек — инстантонов. Иными словами, нужно использовать второе решение уравнения Узаделя в одной или нескольких переменных  $\theta_F, \alpha$  и  $\beta$ .

Плотность состояний обращается в нуль, когда  $\text{Re}\theta_{1,2} = \pi/2$ . Это равенство справедливо для обоих узаделевских решений при  $E < E_g$ . Как же инстантон может дать вклад в подщелевую плотность состояний? Дело в том, что квадратичное действие вблизи инстантонной седловой точки содержит отрицательное собственное значение, а значит, в интеграле по флуктуациям вблизи инстантона возникает мнимая единица и, как следствие, появляется ненулевая плотность состояний под щелью.

Перейдем к обсуждению возможных инстантонов в нульмерном случае. Сначала отметим очевидное неравенство:

$$S_0[\theta_1] > S_0[\theta_2]. \quad (2.32)$$

Чтобы действие (2.30) на инстантоне было положительным, необходимо зафиксировать  $\theta_F = \theta_1$ . Ниже, в разд. 3.2, мы покажем, что седловая точка  $\theta_F = \theta_2$  не может быть достигнута путем деформации контура интегрирования по переменным FF-сектора при условии сходимости  $\sigma$ -модели. Итак, остаются три нестандартных седловых решения в ВВ-секторе:  $(\alpha, \beta) = (\theta_2, \theta_1)$ ,  $(\alpha, \beta) = (\theta_1, \theta_2)$  и  $(\alpha, \beta) = (\theta_2, \theta_2)$ . На первый взгляд, первые два решения нарушают симметрию по углу  $\chi_B$ . На самом деле, эта симметрия восстанавливается за счет того, что существует целое седловое кольцо, которому принадлежат обе эти точки. Различные точки этого кольца различаются величиной угла  $\chi_B$ . В частности, точки  $(\alpha, \beta) = (\theta_2, \theta_1)$  и  $(\alpha, \beta) = (\theta_1, \theta_2)$  получаются одна из другой изменением угла  $\chi_B$  на  $\pi$ . Это кольцо мы будем называть первым инстантоном. Третье решение  $(\alpha, \beta) = (\theta_2, \theta_2)$  представляет собой изолированную седловую точку. Назовем ее вторым инстантоном.

Оба инстантонных решения могут быть представлены в виде

$$Q_0 = e^{-iU_0/2} \Lambda e^{iU_0/2} = \Lambda e^{iU_0}, \quad (2.33)$$

где

$$U_0^{FF} = \sigma_z \tau_y \theta_F, \quad (2.34)$$

$$U_0^{BB} = \sigma_z \tau_y \theta_B + \tau_z k_B (\sigma_y \cos \chi_B - \sigma_x \sin \chi_B).$$

При этом на кольце первого инстантона

$$\begin{aligned} \theta_F &= \frac{\pi}{2} + i\psi_1(\mathbf{r}), & \theta_B &= \frac{\pi}{2} + i\frac{\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r})}{2}, \\ k_B &= i\frac{\psi_2(\mathbf{r}) - \psi_1(\mathbf{r})}{2}, & \chi_B &\in [0, 2\pi), \end{aligned} \quad (2.35)$$

а на втором инстантоне

$$\theta_F = \frac{\pi}{2} + i\psi_1(\mathbf{r}), \quad \theta_B = \frac{\pi}{2} + i\psi_2(\mathbf{r}), \quad k_B = 0. \quad (2.36)$$

Инстантонное действие может быть легко найдено вблизи квазиклассического края спектра  $E_g$ . Воспользуемся тем, что на пороге оба решения уравнения Узаделя совпадают:  $\theta_{1,2}(\mathbf{r}) = \theta_0(\mathbf{r}) = \pi/2 + i\psi_0(\mathbf{r})$ . При  $E \rightarrow E_g$  их разница пропорциональна функции  $f_0(\mathbf{r})$ , определенной в (2.7).

Для вычисления действия на инстантоне подставим  $\theta(\mathbf{r}) = \pi/2 + i\psi_0(\mathbf{r}) + igf_0(\mathbf{r})$  в выражение (2.31) и разложим его по  $g$  и безразмерной энергии  $\varepsilon$ , отсчитанной от порога,

$$\varepsilon = \frac{E_g - E}{E_g}. \quad (2.37)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} S_0[\theta] &= S_0[\theta_0] + \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} \left[ 2gf_0 (D\nabla^2\psi_0 + E_g \operatorname{ch} \psi_0) + \right. \\ &+ g^2 f_0 (D\nabla^2 f_0 + 2E_g f_0 \operatorname{sh} \psi_0) - 4E_g \varepsilon g f_0 \operatorname{ch} \psi_0 + \\ &\left. + \frac{2}{3} E_g g^3 f_0^3 \operatorname{ch} \psi_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Первое слагаемое под интегралом обращается в нуль в силу уравнения Узаделя (2.5), а второе — в силу (2.8). Таким образом, можно представить  $S_0$  в виде кубического многочлена от  $g$ :

$$S_0[\theta] = \text{const} + \frac{\pi E_g}{2\delta} \left[ -2c_1 \varepsilon g + \frac{c_2}{3} g^3 \right]. \quad (2.39)$$

Здесь введено среднее расстояние между уровнями  $\delta = (\nu V)^{-1}$ . Полученное выражение имеет два экстремума:

$$g_{\pm} = \pm \sqrt{\tilde{\varepsilon}}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{2c_1}{c_2} \varepsilon, \quad (2.40)$$

которые соответствуют двум решениям уравнения Узаделя ( $g_+$  соответствует решению  $\theta_2(\mathbf{r})$ , а  $g_-$  — решению  $\theta_1(\mathbf{r})$ ). Подставляя их в (2.30), получим для действия первого инстантона

$$S_0 = S_0[\theta_1] - S_0[\theta_2] = \frac{4}{3} \tilde{G} \tilde{\varepsilon}^{3/2}, \quad (2.41)$$

где мы обозначили

$$\tilde{G} = \frac{\pi c_2 E_g}{2\delta}. \quad (2.42)$$

Для плоского контакта (рис. 1) эта величина имеет порядок безразмерного кондактанса нормальной области:  $\tilde{G} \approx 0.34 G_N$ ,  $G_N = 4\pi\nu D L_y L_z / L_x$ .

Согласно уравнению (2.30), действие второго инстантона,  $S_2$ , в два раза превышает действие первого инстантона,  $S_1$ . Поэтому их относительный вклад в плотность состояний определяется величиной  $S_1$ . При  $S_1 \gg 1$  вклад второго инстантона экспоненциально подавлен по сравнению со вкладом первого, который, в свою очередь, также экспоненциально мал. Этот режим, соответствующий энергиям достаточно далеким от порога, будет рассмотрен в разд. 3.1. Строго при  $E = E_g$  действие  $S_1$  обращается в нуль. Поэтому в окрестности порога существует флуктуационная область, определяемая неравенством  $|\varepsilon| \lesssim \tilde{G}^{-2/3}$ , где  $S_1 \lesssim 1$ , так что вклады обоих инстантонов оказываются одного порядка и их невозможно разделить.

Точное решение, учитывающее оба инстантона во всей области энергий, будет приведено в разд. 3.2.

## 2.5. Параметризация флуктуаций

Для того чтобы применить метод перевала с найденной нами седловой точкой, нужно взять интеграл по всем возможным флуктуациям  $Q$ -матрицы около инстантона. С этой целью в матричной форме разложим действие до второго порядка вблизи седла, а потом предложим параметризацию, диагонализующую квадратичную форму действия.

Введем матрицу  $W$ , которая будет описывать флуктуации:

$$\begin{aligned} Q &= e^{-iU_0/2} e^{-iW/2} \Lambda e^{iW/2} e^{iU_0/2}, \\ \{\Lambda, W\} &= 0, \quad W + \bar{W} = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Теперь нужно матрицу  $Q$ , выраженную через  $W$ , подставить в действие (2.23) и разложить его до второго порядка по  $W$ . Будем считать, что  $\Delta = 0$ , так как работать с этим действием мы собираемся только в нормальной области. Квадратичная часть действия выглядит так:

$$\begin{aligned} S^{(2)}[W] &= \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \times \\ &\times \text{str} \left[ D(\nabla W)^2 + \frac{D}{4} [\nabla U_0, W]^2 - 2iE\Lambda Q_0 W^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Матрица  $W$ , так же как и  $Q$ , содержит 8 коммутирующих и столько же грассмановых параметров. Ее полная параметризация, в которой действие (2.44) оказывается диагональным, приведена в Приложении А. Четверки действительных переменных  $a, b, c, d$  и  $m, n, p, q$  параметризуют соответственно FF- и ВВ-секторы матрицы  $W$ , а восемь грассмановых переменных  $(\lambda, \mu, \zeta, \varkappa, \eta, \gamma, \xi, \omega)$  параметризуют антикоммутирующую часть матрицы  $W$ . Будучи выраженной через новые переменные, квадратичная по флуктуациям вблизи решения  $(\theta_F, \alpha, \beta)$  часть действия принимает вид

$$S^{(2)} = (a \hat{O}_{\theta_F \theta_F}^+ a) + (b \hat{O}_{\theta_F \theta_F}^- b) + (c \hat{O}_{\theta_F \theta_F}^+ c) + (d \hat{O}_{\theta_F \theta_F}^+ d) + (m \hat{O}_{\alpha\beta}^+ m) + (n \hat{O}_{\alpha\beta}^- n) + (p \hat{O}_{\beta\beta}^- p) + (q \hat{O}_{\alpha\alpha}^- q) + (\lambda \hat{O}_{\alpha\theta_F}^+ \eta) + (\mu \hat{O}_{\beta\theta_F}^+ \gamma) + (\varkappa \hat{O}_{\beta\theta_F}^- \omega) + (\zeta \hat{O}_{\alpha\theta_F}^- \xi). \quad (2.45)$$

Здесь введены операторы  $\hat{O}_{\alpha\beta}^\pm$ , действующие согласно формуле

$$(a \hat{O}_{\alpha\beta}^\pm b) = \frac{\pi\nu}{8} \int dr a(\mathbf{r}) \left[ -D\nabla^2 - \frac{D}{4} (\nabla\alpha \pm \nabla\beta)^2 - iE(\cos\alpha + \cos\beta) \right] b(\mathbf{r}). \quad (2.46)$$

Операторы  $\hat{O}$  обладают дискретным спектром, так как флуктуации происходят в ограниченном пространстве нормальной области. Обозначим собственные значения оператора  $\hat{O}_{\alpha\beta}^\pm$  через  $(\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm)_n / \delta$ , где  $n$  пробегает значения от 0 до  $\infty$ . Из уравнения (2.46) следует, что расстояние между первым возбужденным и основным состояниями любого оператора  $\hat{O}$  имеет порядок  $(\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm)_1 - (\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm)_0 \sim E_g$ . Энергия основного состояния операторов  $\hat{O}^+$  имеет масштаб  $E_g$ . Основное состояние оператора  $\hat{O}_{\theta_1\theta_2}^-$  имеет нулевую энергию, а его собственная функция с точностью до нормировки есть  $\sin((\theta_1 - \theta_2)/2)$ . Строго на пороге при  $E = E_g$  энергии основных состояний операторов  $\hat{O}_{\theta_1\theta_1}^-$  и  $\hat{O}_{\theta_2\theta_2}^-$  также равны нулю. При отходе от порога в сторону уменьшения энергии величина  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^-)_0$  становится положительной, а  $(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0$  — отрицательной. При этом в пределе  $E_g - E \ll E_g$  выполняется неравенство  $|(\mathcal{E}_{\alpha\beta}^-)_0| \ll E_g$ .

Спектр операторов  $\hat{O}$  определяет массы  $\mathcal{E}_n$  различных флуктуаций вблизи инстантонных седловых решений. В зависимости от их величины можно выделить следующие три типа флуктуаций.

1) Нулевые моды. К строго нулевым модам относятся грассмановы голдстоуновские моды, восстанавливающие нарушенную седловым решением суперсимметрию (мода  $\zeta\xi$  для первого инстантона и моды  $\zeta\xi, \varkappa\omega$  для второго инстантона), а также голдстоуновская мода  $n$ , восстанавливающая симметрию первого инстантона по углу  $\chi_B$ . Нулевые моды соответствуют основному состоянию оператора  $\hat{O}_{\theta_1\theta_2}^-$ .

2) Мягкие моды. К ним относятся флуктуации переменных  $b, p$  и  $q$ , а в случае первого инстантона также мода  $\varkappa\omega$ , которые отвечают основным состояниям операторов  $\hat{O}_{\theta_1\theta_1}^-$  и  $\hat{O}_{\theta_2\theta_2}^-$ . При  $E \rightarrow E_g$  масса мягких мод стремится к нулю.

3) Жесткие моды. Они имеют массу порядка энергии Таулесса и выше, так что их флуктуации малы по параметру  $E_g/\delta \sim G_N \gg 1$ . Это неравенство обеспечивает применимость метода перевала. К жестким модам относятся все собственные состояния операторов  $\hat{O}^+$  и возбужденные состояния операторов  $\hat{O}^-$ .

### 3. КОНТАКТ С ИДЕАЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Переходим к рассмотрению контакта с идеальными границами между сверхпроводником и нормальным металлом. Сначала рассмотрим контакт при энергиях близких (но не слишком) к пороговой,  $\tilde{G}^{-2/3} \ll (E_g - E)/E_g \ll 1$ , для которого справедливо приближение нульмерной  $\sigma$ -модели. В этой области энергий основной вклад в плотность состояний дает первый инстантон. Главная экспонента в выражении для плотности состояний дается формулой (2.41). Теперь мы вычислим предэкспоненциальный множитель. Затем построим более полную теорию и учтем вклад второго инстантона, в результате чего будет получен точный (разумеется, в перевальном приближении по жестким модам, контролируемом параметром  $\tilde{G} \gg 1$ ) ответ, описывающий среднюю плотность состояний как ниже, так и выше пороговой энергии, включая всю флуктуационную область. По форме полученное выражение совпадает с предсказаниями теории случайных матриц для края спектра, что служит микроскопическим обоснованием предположения, выдвинутого в работе [22].

#### 3.1. Одноинстантонное решение

В этом разделе мы найдем вклад первого инстантона в среднюю плотность состояний. Будем рабо-

тать вблизи квазиклассического края спектра  $E_g$ , но вне флуктуационной области:  $\tilde{G}^{-2/3} \ll \varepsilon \ll 1$ , когда можно пренебречь вкладом второго инстантона. Согласно классификации разд. 2.4, на первом инстантоне  $(\theta_F, \alpha, \beta) = (\theta_1, \theta_2, \theta_1)$  действие (2.45) обладает нулевой модой в переменной  $n$ , грассмановой нулевой модой  $\zeta\xi$  и мягкими модами в переменных  $b, p, q, \varkappa$ . Все остальные моды являются жесткими.

Неравенство  $\tilde{G} \gg 1$  гарантирует, что, интегрируя по жестким флуктуациям, можно не учитывать предэкспоненту в формуле (2.24). Тогда интегрирование становится тривиальными и дает супердетерминант квадратичной формы (2.45):

$$\sqrt{\frac{\det \hat{O}_{\theta_1\theta_2}^+ \det' \hat{O}_{\theta_1\theta_2}^-}{\det \hat{O}_{\theta_1\theta_1}^+ \det' \hat{O}_{\theta_1\theta_1}^-}} = 1 + O(\varepsilon). \quad (3.1)$$

Здесь штрих означает исключение низшего собственного значения, а равенство следует из оценки  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^\pm)_n - (\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^\pm)_n = O(\varepsilon)$  (для собственных значений  $\mathcal{E}^-$  выполняется неравенство  $n > 0$ ) и асимптотики  $(\mathcal{E}_{\alpha\beta}^\pm)_n \propto n^2 E_g$ , справедливой при  $n \gg 1$ . Таким образом, жесткие флуктуации не дают вклада в плотность состояний в рассматриваемом пределе.

Остаются мягкие и нулевые моды. Отметим, что нулевые моды в переменных  $n$  и  $\zeta\xi$  ведут себя по-разному при отклонении от инстантонного решения. Нулевая мода в переменной  $n$  соответствует повороту на угол  $\chi_B$  и остается безмассовой при любых (необязательно седловых) несовпадающих значениях  $\alpha$  и  $\beta$ . С другой стороны, грассманова нулевая мода  $\zeta\xi$  приобретает массу при отклонении решения от инстантонного. Такое поведение связано с необходимостью удовлетворить условию  $\int e^{-S[Q]} DQ = 1$ , что было бы невозможно, если бы грассманова нулевая мода оставалась строго голдстоуновской при отходе от седлового решения.

Итак, в переменных  $\zeta$  и  $\xi$  недостаточно ограничиться квадратичным действием (2.45), а нужно провести разложение до следующего порядка по флуктуациям. Можно показать<sup>3)</sup>, что в третьем порядке  $\zeta$  и  $\xi$  запутываются только с переменной  $q$ . По остальным мягким модам  $b, p$  и  $\varkappa$  можно взять гауссов интеграл, воспользовавшись тем, что рассмотрение ведется вне флуктуационной области. В

<sup>3)</sup> На самом деле, собственное значение  $(\mathcal{E}_{\alpha\theta_F}^-)_0$  зависит как от  $q$ , так и от  $b$  (см. (A.4)). Однако, если учесть в действии член порядка  $b\zeta\xi$ , то это приведет к появлению в предэкспоненте формулы (3.5) слагаемого  $\tilde{b}\tilde{q}$ , которое не обладает необходимой мнимостью и не дает вклада в плотность состояний.

возникающем супердетерминанте вклад коммутирующих переменных в точности сокращает вклад грассмановых.

В результате остается интеграл по переменным  $n, \zeta\xi$  и  $q$ . Собственная функция соответствующих операторов  $\hat{O}^-$  вблизи порога есть  $f_0(x)$ , так что можно выделить координатную зависимость:  $n = \tilde{n}f_0(x)$  и т.д. В действии необходимо удерживать член  $\tilde{q}^2(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0/\delta$ , происходящий из уравнения (2.45), а также член, пропорциональный  $\tilde{\zeta}\tilde{\xi}\tilde{q}$  и снимающий вырождение грассмановой нулевой моды.

Для вычисления минимального собственного значения оператора  $\hat{O}_{\theta_2\theta_2}^-$  в главном порядке по отклонению от порога можно воспользоваться функцией  $f_0$ , поскольку она является собственной функцией операторов  $\hat{O}^-$  при  $E = E_g$ , соответствующей нулевому собственному значению. Подставляя  $\theta_2 = \pi/2 + i\psi_0 + i\sqrt{\varepsilon}f_0$  в формулу (2.46) и раскладывая по  $\sqrt{\varepsilon}$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0}{\delta} &= \\ &= \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} f_0 \left[ -D\nabla^2 - 2E_g \operatorname{sh}(\psi_0 + \sqrt{\varepsilon}f_0) \right] f_0 = \\ &= -\frac{\tilde{G}}{2} \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для вычисления члена в действии, пропорционального  $\tilde{\zeta}\tilde{\xi}\tilde{q}$ , достаточно воспользоваться выражением (2.45), дающим  $\tilde{\zeta}\tilde{\xi}(\mathcal{E}_{\theta_1\alpha}^-)_0/\delta$ , при вычислении которого нужно учесть отличие угла  $\alpha$  от инстантонного решения  $\theta_2$ , обусловленное флуктуацией  $q$ . Пользуясь формулой (A.4), положим  $\alpha = \theta_2 - i\tilde{q}/\sqrt{2}f_0$ . Разлагая по  $\tilde{q}$  аналогично (3.2), получим

$$\frac{(\mathcal{E}_{\theta_1\alpha}^-)_0}{\delta} = \frac{\tilde{G}\tilde{q}}{4\sqrt{2}}. \quad (3.3)$$

Теперь посчитаем предэкспоненту в (2.24). Для усредненной по объему плотности состояний нужно вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{4} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(k\Lambda Q) &= \\ &= \frac{\nu}{2} \int d\mathbf{r} \left[ 2 \cos \theta_F + \cos \alpha + \cos \beta \right] = \\ &= -\frac{i\nu}{2} \int d\mathbf{r} \left[ 3 \operatorname{sh}(\psi_0 - \sqrt{\varepsilon}f_0) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh}(\psi_0 + (\sqrt{\varepsilon} - \tilde{q}/\sqrt{2})f_0) \right] = \\ &= \operatorname{const} + \frac{ic_1\tilde{q}}{2\sqrt{2}\delta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь мы выделили мнимую константу, которая не дает вклада в плотность состояний<sup>4)</sup>. При вычислении предэкспоненты (3.4) были опущены грассмановы переменные  $\zeta$  и  $\xi$ , которые, таким образом, остались лишь в действии. Можно показать, что вклад опущенных членов мал по параметру  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ .

С учетом (3.2)–(3.4) получим для плотности состояний

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= e^{-S_0} \operatorname{Re} \int \frac{d\tilde{n} d\tilde{q}}{\pi} d\tilde{\zeta} d\tilde{\xi} \frac{ic_1 \tilde{q}}{2^{3/2} \delta} \times \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{\tilde{G}}{2} \left( -\sqrt{\tilde{\varepsilon}} \tilde{q}^2 + \frac{\tilde{q} \tilde{\zeta} \tilde{\xi}}{2\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= -\frac{c_1 \tilde{G}}{16\pi\delta} e^{-S_0} \operatorname{Im} \int d\tilde{n} d\tilde{q} \tilde{q}^2 \exp \left( \frac{\tilde{G}}{2} \sqrt{\tilde{\varepsilon}} \tilde{q}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Чтобы проинтегрировать по нулевой моде  $\tilde{n}$ , воспользуемся соотношением (A.4):

$$\begin{aligned} n &= 2i \sin k_B \chi_B = (\psi_1 - \psi_2) \chi_B = -2\sqrt{\tilde{\varepsilon}} f_0 \chi_B, \\ \tilde{n} &= -2\sqrt{\tilde{\varepsilon}} \chi_B, \quad \int d\tilde{n} = 4\pi\sqrt{\tilde{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для сходимости интеграла по  $\tilde{q}$  нужно выбрать контур интегрирования вдоль мнимой оси, что дает нам необходимую мнимую единицу. Подставляя инстантонное действие (2.41), окончательно получаем для плотности состояний

$$\langle \rho \rangle = \frac{c_1}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{8\tilde{G}\sqrt{\tilde{\varepsilon}}}} \exp \left( -\frac{4}{3} \tilde{G} \tilde{\varepsilon}^{3/2} \right), \quad (3.7)$$

где величины  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{G}$  определены в (2.37), (2.40), (2.42). Результат (3.5) описывает поведение средней плотности состояний вне флуктуационной области при  $\tilde{G}^{-2/3} \ll \varepsilon \ll 1$ .

Найдем также плотность состояний выше порога. В этой области  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}} = i\sqrt{|\tilde{\varepsilon}|}$ . Инстантонное решение нам не нужно, поскольку основной вклад в интеграл (2.24) теперь дает окрестность суперсимметричной седловой точки  $\theta_F = \alpha = \beta = \theta_1 = \pi/2 + i\psi_0 - \sqrt{|\tilde{\varepsilon}|} f_0$ . Интеграл по флуктуациям обращается в единицу, а предэкспонента имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \frac{\nu}{4} \operatorname{Re} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(k\Lambda Q) = \\ &= 2\nu \operatorname{Im} \int d\mathbf{r} \operatorname{sh} \left( \psi_0 + i\sqrt{|\tilde{\varepsilon}|} f_0 \right) = \frac{2c_1}{\delta} \sqrt{|\tilde{\varepsilon}|}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

<sup>4)</sup> Коэффициент при  $\tilde{q}$  тоже мнимый, однако в дальнейшем (см. (3.5)) интегрирование по  $\tilde{q}$  будет проводиться вдоль мнимой оси, поэтому плотность состояний получится именно из оставленного члена.

Два результата для плотности состояний выше и ниже пороговой энергии «сшиваются» — значения слева и справа от флуктуационной области оказываются одного порядка:

$$\langle \rho \rangle \Big|_{\varepsilon \sim \pm G_N^{-2/3}} \sim \frac{1}{\tilde{G}^{1/3} \delta}. \quad (3.9)$$

Еще одно характерное свойство подщелевой плотности состояний (3.7) состоит в том, что полное число уровней под щелью не зависит от  $G_N$  и оказывается порядка единицы:

$$\mathcal{N} \sim \int_0^{E_g} \langle \rho(E) \rangle dE \sim \frac{E_g}{\tilde{G}\delta} \sim 1. \quad (3.10)$$

В разд. 4 будет видно, что для контакта с туннельными границами это свойство может нарушаться в пределе так называемого сильного хвоста.

### 3.2. Точное решение вблизи порога

Теперь перейдем к вычислению плотности состояний с учетом второго инстантона. Ответ, который мы получим, будет точным во всей флуктуационной области около критической энергии.

Выше было показано, что жесткие моды не дают вклада в плотность состояний. Поэтому в общем случае остается 8 квази нулевых мод, отвечающих минимальным собственным значениям операторов  $\hat{O}^- : b, n, p, q, \zeta\xi, \varkappa\omega$  (так как мы ищем точное решение, разделение на нулевые и мягкие моды, имевшее место на седловых решениях, теряет смысл). Учтем координатную зависимость с помощью  $n = \tilde{n}f_0(x)$  и т. д., а вместо переменных  $\tilde{b}, \tilde{p}$  и  $\tilde{q}$  введем симметричные переменные, интерполирующие между обоими решениями уравнения Узаделя:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2} + i\psi_0 + iuf_0, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + i\psi_0 + ivf_0, \\ \theta_F &= \frac{\pi}{2} + i\psi_0 + iw f_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Теперь необходимо разложить действие до кубических членов по квази нулевым переменным. Вычисления, аналогичные (2.39), (3.2) и (3.3), приводят к следующему выражению для действия:

$$\begin{aligned} S &= \tilde{G} \left[ \tilde{\varepsilon}(u + v - 2w) - \frac{u^3 + v^3 - 2w^3}{3} - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\zeta}\tilde{\xi} \frac{u + w}{4} - \tilde{\varkappa}\tilde{\omega} \frac{v + w}{4} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Восемь экстремумов этого действия (по два по каждой из переменных  $u, v, w$ ) соответствуют суперсимметричному седлу и различным инстантонам. Аналогично (3.4) получим для предэкспоненты

$$\frac{\nu}{4} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(k\Lambda Q) = -\frac{ic_1}{2\delta}(u + v + 2w). \quad (3.13)$$

Теперь нужно установить правильную меру интегрирования. Связь между переменными  $u, v, w$  и  $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{b}$  следует из соотношений (А.4). Поскольку мера интегрирования по  $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{b}$  тривиальна (см. (А.5)), заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}Q &= \frac{1}{\pi^2} d\tilde{b} d\tilde{p} d\tilde{q} d\tilde{n} d\tilde{c} d\tilde{\xi} d\tilde{x} d\tilde{\omega} = \\ &= \frac{4i}{\pi^2} du dv dw d\tilde{n} d\tilde{c} d\tilde{\xi} d\tilde{x} d\tilde{\omega}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Интеграл по нулевой моде  $\tilde{n}$  берется аналогично (3.6):  $\int d\tilde{n} = 2\pi|u - v|$ . После интегрирования по  $\tilde{n}$  и грассмановым переменным получаем для плотности состояний

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \frac{c_1 \tilde{G}^2}{4\pi\delta} \times \\ &\times \operatorname{Re} \int du dv dw |u-v|(u+w)(v+w)(u+v+2w) \times \\ &\times \exp \left[ -\tilde{G} \left( \tilde{\varepsilon}(u+v-2w) - \frac{u^3+v^3-2w^3}{3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Сделаем масштабное преобразование переменных интегрирования, чтобы исключить  $\tilde{G}$ :  $(u, v, w) \rightarrow (2\tilde{G})^{-1/3}(u, v, w)$  и перейдем к новым переменным  $l = (u + v)/2, m = (u - v)^2/2$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \frac{1}{8\pi^2 \Delta_g} \times \\ &\times \operatorname{Re} \int_0^\infty dm \int dl dw (w+l)(w^2 + 2lw + l^2 - m) \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{w^3}{3} + \epsilon w + \frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon &= (2\tilde{G})^{2/3} \tilde{\varepsilon} = \frac{E_g - E}{\Delta_g}, \\ \Delta_g &= \frac{c_2^{1/3} (\delta^2 E_g)^{1/3}}{2\pi^{2/3} c_1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

На этом этапе нужно выбрать контуры интегрирования по  $w$  и  $l$ . Интеграл (3.16) сходится, если контур интегрирования по  $l$  стремится к бесконечности в заштрихованных областях, а по  $w$  — в светлых (см. рис. 4). Это, однако, справедливо, только

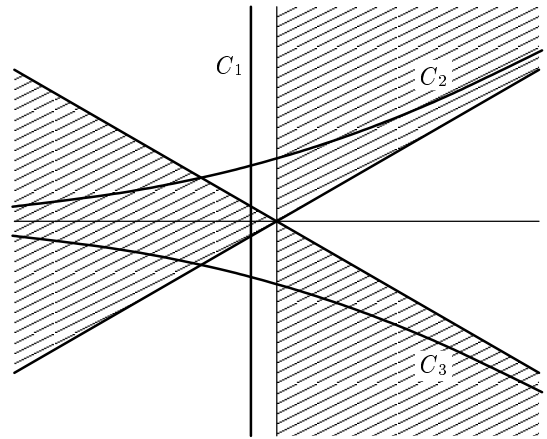


Рис. 4. Возможные контуры интегрирования по  $w$  и  $l$ . Правильный выбор:  $C_1$  для  $w$  и  $C_3$  — для  $l$

когда в действии можно ограничиться разложением до третьего порядка по  $w$  и  $l$ . В области, достаточно далекой от нуля, сходимость определяется свойствами выражения (2.31): контур  $w$  должен стремиться к бесконечности вдоль мнимой оси (компактность FF-сектора), а  $l$  — по действительной (некомпактность ВВ-сектора). Основной вклад в интеграл, тем не менее, дает окрестность нуля, поэтому будем брать его с кубическим действием в бесконечных пределах, сместив контур по  $w$  влево ( $C_1$  на рис. 4). Для  $l$  возникают две возможности:  $C_2$  и  $C_3$ . Правильный выбор определяется условием положительности плотности состояний, что соответствует контуру  $C_3$  для  $l$ .

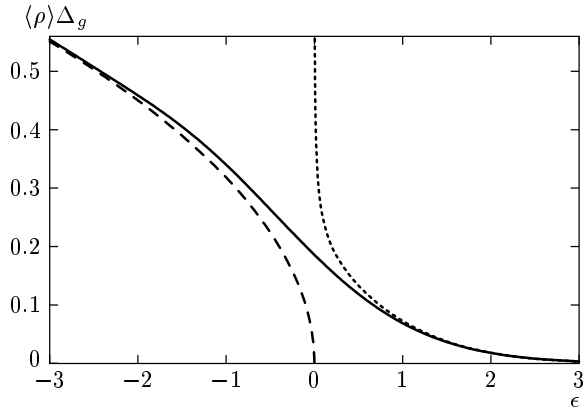
Вычисление интеграла (3.16) приведено в Приложении Б. Результатом этого вычисления является следующее выражение для плотности состояний:

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \frac{1}{\Delta_g} \left[ -\epsilon \operatorname{Ai}^2(\epsilon) + [\operatorname{Ai}'(\epsilon)]^2 + \right. \\ &\left. + \frac{\operatorname{Ai}(\epsilon)}{2} \left( 1 - \int_\epsilon^\infty dy \operatorname{Ai}(y) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

где величина  $\epsilon$  определена в (3.17). Эта зависимость изображена на рис. 5 вместе с асимптотиками (3.8) и (3.7).

Одноинстантонное приближение справедливо в пределе  $\epsilon \gg 1$ . Если подставить в формулу (3.18) асимптотическое выражение для функции Эйри<sup>5)</sup>,

<sup>5)</sup> Асимптотика функции Эйри при  $x \rightarrow \infty$  имеет вид  $\operatorname{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi x^{1/4}}} e^{-2x^{3/2}/3}$ .



**Рис. 5.** Точная зависимость (3.18) плотности состояний  $\langle \rho \rangle$  (в единицах  $1/\Delta_g$ ) от приведенной энергии  $\epsilon$  (3.17) (сплошная линия). Размер флуктуационной области порядка единицы. Асимптотика плотности состояний над щелью (3.8) (штриховая линия) и под щелью (3.7) (пунктирная линия)

то первые два члена в скобках сократятся, а интеграл окажется много меньше единицы. В итоге уравнение (3.18) в точности совпадет с выражением (3.7).

Функциональная зависимость (3.18) совпадает с предсказаниями (формула (3.21) ниже) теории случайных матриц для края спектра в случае ортогонального ансамбля [32]. Такое совпадение неудивительно ввиду эквивалентности теории случайных матриц и нульмерной  $\sigma$ -модели [26]. В рассматриваемом нами случае «нульмеризация»  $\sigma$ -модели вблизи порога происходит на стадии перехода к квазиулевым переменным (3.11) с фиксированной координатной зависимостью, задаваемой функцией  $f_0$ . Подробнее применение теории случайных матриц для NS-систем обсуждается в разд. 3.3.

Результаты этого и предыдущего разделов применимы в случае, когда нормальная область имеет произвольную форму и присоединена идеальными контактами к произвольному числу сверхпроводников с одинаковыми фазами (рис. 3). Необходимо только, чтобы было справедливым приближение нульмерной  $\sigma$ -модели. Критерий, определяющий эффективную размерность задачи в важном частном случае плоского SNS-контакта, будет дан в разд. 5.1.

### 3.3. Метод случайных матриц

Теория случайных матриц была предложена Вигнером [17] в 1951 году для описания свойств ядерных

спектров. Его идея заключалась в том, что статистические свойства спектра сложного и не известного нам ядерного гамильтониана не изменяются, если заменить все матричные элементы случайными числами. В дальнейшем теория случайных матриц была развита в работах Дайсона [18] и Меты [19].

В простейшем случае теория случайных матриц формулируется для так называемых гауссовых ансамблей, когда эрмитовой случайной матрице  $H$  размера  $N \times N$  ставится в соответствие статистический вес

$$\mathcal{P}(H) \propto \exp\left(-\frac{\pi^2}{2N\delta^2} \text{tr} H^2\right). \quad (3.19)$$

Средняя плотность состояний для распределения (3.19) в пределе  $N \rightarrow \infty$  имеет вид вигнеровского полукруга:

$$\langle \rho(E) \rangle_{RMT} = \frac{1}{\delta} \sqrt{1 - \frac{\pi^2 E^2}{4N^2 \delta^2}}, \quad (3.20)$$

обращаясь в нуль при  $|E| > E_0 \equiv (2/\pi)N\delta$ . Согласно теории случайных матриц статистические свойства спектра в центре зоны при  $|E| \ll E_0$  определяются только средним расстоянием  $\delta$  между уровнями и симметрией гамильтониана  $H$  (ортогональной, унитарной или симплектической [19]).

В 1965 году Горьков и Элиашберг [33] предложили применить теорию случайных матриц для описания статистических свойств уровней энергии в неупорядоченных металлических гранулах. Однако теория оставалась феноменологической вплоть до 1982 года, когда Ефетов [21] с помощью суперсимметричной  $\sigma$ -модели вычислил парный коррелятор уровней в металлической грануле,  $R_2(\omega) = \delta^2 \langle \rho(E)\rho(E + \omega) \rangle$ , и показал, что он совпадает с предсказаниями теории случайных матриц в нульмерном пределе  $\omega \ll E_{Th}$ . В дальнейшем гипотеза универсальности, гласящая, что локальные спектральные свойства хаотических систем вблизи центра зоны определяются только симметрией гамильтониана, а не его микроскопическими свойствами, была доказана для широкого класса ансамблей случайных матриц [34].

В 1997 году Алтланд и Цирнбауэр [35] предложили обобщение трех стандартных ансамблей Вигнера и Дайсона на случай смешанных NS-систем, введя еще четыре симметричных класса, учитывающих зеркальную симметрию уравнений Боголюбова–де Женя. В своем рассмотрении они, однако, ограничились системами, в которых средний фазовый множитель равен нулю:  $\langle e^{i\phi} \rangle = 0$ , где  $\phi$  — фаза электрона, набираемая за счет процессов андреевского

отражения. Такая ситуация реализуется, например, в коре сверхпроводящего вихря или в SNS-контакте с разностью фаз  $\pi$ . При указанном условии эффект близости не приводит к образованию щели в спектре нормальной области, но возможно проявление специфических сверхпроводящих корреляций на энергиях очень близких к энергии Ферми (на «расстоянии» порядка  $\delta$ ).

Если же средний по системе сверхпроводящий параметр порядка не обращается в нуль, то происходит подавление плотности состояний на ферми-поверхности до нуля и образование (в квазиклассическом приближении) щели при  $E = E_g$ . Возникающие вблизи щели состояния не могут быть описаны с помощью теории случайных матриц в центре вигнеровского полукруга (3.20) даже с использованием новых симметричных классов [35]. В 2001 году Вавилов с соавт. [22] обратили внимание на то, что как квазиклассическая плотность состояний в NS-системах вблизи порога, так и плотность состояний для вигнеровского полукруга одинаковым (корневым) образом зависят от расстояния до порога. На этом основании они впервые предложили использовать теорию случайных матриц на краю спектра для описания околопороговых состояний в NS-системах.

Вигнеровский полукруг (3.20) описывает среднюю плотность состояний вдали от порогов  $\pm E_0$ . Поправки к нему становятся существенными на расстоянии одного уровня от порога, т. е. при  $|E| - E_0 \sim \Delta_0$ , где  $\Delta_0 = (\delta^2 E_0 / 2\pi^2)^{1/3}$ . В запрещенной области  $|E| > E_0$  возникает ненулевая средняя плотность состояний, при этом

$$\int_{E_0}^{\infty} \langle \rho(E) \rangle dE \sim 1,$$

т. е. фактически вся плотность состояний вне вигнеровского полукруга обеспечивается флуктуациями положения низшего уровня энергии. Универсальные свойства спектра случайных матриц вблизи его края исследованы в работах [32]. В частности, точный профиль средней плотности состояний вблизи порога  $E = E_0$  принимает универсальный вид в терминах безразмерной величины  $x = (E - E_0) / \Delta_0$ :

$$\langle \rho(E) \rangle = \frac{1}{\Delta_0} \left[ -x \text{Ai}^2(x) + [\text{Ai}'(x)]^2 + \delta_{\beta,1} \frac{\text{Ai}(x)}{2} \left( 1 - \int_x^{\infty} dy \text{Ai}(y) \right) \right], \quad (3.21)$$

где  $\beta = 1$  ( $\beta = 2$ ) для ортогонального (унитарного) класса симметрии.

Доказательство применимости теории случайных матриц для описания края спектра в NS-системе было впервые получено в работе [30] с помощью метода суперсимметричной  $\sigma$ -модели. В этой работе в пределе нульмерной  $\sigma$ -модели, справедливой в достаточно близкой окрестности порога, было получено выражение (3.18), в точности совпадающее с результатом (3.21) для ортогональной симметрии.

#### 4. КОНТАКТ С ТУННЕЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В этом разделе рассмотрим NS-контакт (рис. 3) с неидеальными границами. С уменьшением прозрачности границы квазичастицы больше времени проводят в нормальной области между двумя андреевскими отражениями и щель в плотности состояний, соответственно, становится меньше. В туннельном пределе, когда прозрачность каждого канала между сверхпроводниками и нормальной частью контакта мала, щель открывается при энергии  $E_g = G_T \delta / 8\pi$ . Вблизи  $E_g$  квазиклассическая плотность состояний обращается в нуль пропорционально  $\sqrt{|\varepsilon|}$ , при удалении от порога достигает максимума, а затем начинает убывать по закону  $1/\sqrt{|\varepsilon|}$  (см. далее (4.30)), все более напоминая сингулярность типа БКШ.

Форма хвоста при этом тоже меняется, но полное количество квазилокализованных состояний по-прежнему остается порядка единицы. Качественная картина меняется при  $G_T \ll G^{1/4}$  (здесь  $G$  — характерный кондактанс нормальной части контакта, его строгое определение будет дано ниже). В этом пределе среднее число уровней на участке корневого роста плотности состояний выше энергии  $E_g$  оказывается порядка единицы, так что весь этот участок попадает в область сильных флуктуаций. Одновременно количество подщелевых состояний начинает расти. Этот режим, который мы называем сильным хвостом, будет рассмотрен в разд. 4.4.

##### 4.1. Действие для границы

Если граница между сверхпроводником и нормальным металлом идеальна, то матрица  $Q$  непрерывна при переходе из одной области в другую. Если же граница неидеальна, то граничные условия становятся сложнее [36, 37]. Их, однако, можно учесть автоматически, если добавить к действию  $\sigma$ -модели дополнительный граничный член. Он имеет следующий вид [26, 38]:



$$S_{boundary} = -\frac{1}{4} \sum_i N_i \text{str} \ln \left[ 1 - \frac{\Gamma_i}{2} + \frac{\Gamma_i}{4} \{Q, Q^{(i)}\} \right]. \quad (4.1)$$

Индекс «*i*» нумерует присоединенные к нормальной области сверхпроводники,  $N_i$  — полное число проводящих каналов в  $i$ -м контакте для одной проекции спина. Для границы с площадью  $S$  число каналов  $N = \pi\nu v_0 S$ , где  $v_0$  — фермиевская скорость,  $\Gamma_i$  — прозрачность одного канала, которую мы для простоты считаем одинаковой для всех каналов данного контакта,  $Q^{(i)}$  — значение матрицы  $Q$  в нормальной области вблизи  $i$ -го контакта,  $Q_S$  — значение матрицы  $Q$  в сверхпроводнике. Пользоваться выражением (4.1) можно только при условии, что матрица  $Q^{(i)}$  постоянна вдоль границы каждого контакта. Такое условие будет удовлетворяться автоматически для плоского SNS-контакта (рис. 1), в общем случае (рис. 3) нужно требовать малости размеров контактов по сравнению с характерными размерами нормальной части.

В нашей параметризации по-прежнему сохраня-

ется разделение переменных (2.30), а в выражении для  $S_0$  появится дополнительное слагаемое:

$$S_0[\theta] = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} [D(\nabla\theta)^2 + 4iE \cos \theta] - \frac{1}{2} \sum_i N_i \ln \left( 1 + \gamma_i \sin \theta^{(i)} \right), \quad (4.2)$$

где  $\gamma_i = \Gamma_i / (2 - \Gamma_i)$ . Под  $\theta^{(i)}$  мы понимаем значение угла  $\theta$  внутри нормальной области вблизи  $i$ -го контакта. Это значение, как уже было указано, не зависит от координат вдоль границы. Именно это обстоятельство позволяет нам использовать для первого слагаемого в действии координатное представление, а для второго — представление каналов. В дальнейшем будем использовать верхний индекс «*i*» для значений различных полей вблизи  $i$ -го контакта.

Вся классификация инстантонов, которая была сделана ранее в разд. 2.4, сохраняется. В разложении по флуктуациям необходимо дополнить действие (2.44) граничным членом:

$$S^{(2)}[W] = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \text{str} \left[ D(\nabla W)^2 + \frac{D}{4} [\nabla U_0, W]^2 - 2iE\Lambda Q_0 W^2 \right] + \frac{1}{4} \sum_i N_i T_i \text{str} \left( \frac{\tau_x Q_0}{1 + T_i \tau_x Q_0} \widetilde{W}^{(i)} \frac{1}{1 + T_i \tau_x Q_0} \widetilde{W}^{(i)} \right). \quad (4.3)$$

Здесь мы ввели обозначение  $\widetilde{W} = e^{-iU_0/2} W e^{iU_0/2}$  и  $T_i = (2 - \Gamma_i - 2\sqrt{1 - \Gamma_i}) / \Gamma_i = \gamma_i - 2\sqrt{1 - \gamma_i^2} / \gamma_i$ . Параметризация  $\widetilde{W}$ , которая диагонализует это действие, остается такой же, как раньше (Приложение А), но в операторе  $\hat{O}_{\alpha\beta}^\pm$  тоже появится граничный член:

$$\left( a \hat{O}_{\alpha\beta}^\pm b \right) = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \left[ D(\nabla a(\mathbf{r})) (\nabla b(\mathbf{r})) - a(\mathbf{r}) \left( \frac{D}{4} (\nabla\alpha \pm \nabla\beta)^2 + iE(\cos\alpha + \cos\beta) \right) b(\mathbf{r}) \right] + \sum_i \frac{N_i \gamma_i}{16} \left( a^{(i)} \frac{(\sin\alpha^{(i)} + \sin\beta^{(i)}) + \gamma_i(1 \mp \cos(\alpha^{(i)} \pm \beta^{(i)}))}{(1 + \gamma_i \sin\alpha^{(i)})(1 + \gamma_i \sin\beta^{(i)})} b^{(i)} \right). \quad (4.4)$$

Таким образом, учет неидеальности границы не приводит к принципиальному изменению стратегии вычислений плотности состояний вблизи порога. Можно повторить все вычисления, сделанные для случая идеальной границы в разд. 3, с учетом граничного члена в действии. Все отличие будет заключаться в переопределении функций  $\psi_{1,2}$ ,  $f_0$  и констант  $c_{1,2}$ . Новые определения выглядят так:

$$D\nabla^2 \psi + 2E \text{ch} \psi = 0, \quad D\nabla_n \psi^{(i)} + \gamma_i v_0 \frac{\text{sh} \psi^{(i)}}{1 + \gamma_i \text{ch} \psi^{(i)}} = 0; \quad (4.5)$$

$$D\nabla^2 f_0 + 2E_g f_0 \text{sh} \psi_0 = 0, \quad D\nabla_n f_0^{(i)} + \gamma_i v_0 f_0^{(i)} \frac{\gamma_i \text{ch} \psi_0^{(i)}}{(1 + \gamma_i \text{ch} \psi_0^{(i)})^2} = 0; \quad (4.6)$$

$$c_1 = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} f_0 \text{ch} \psi_0; \quad (4.7)$$

$$c_2 = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} f_0^3 \text{ch} \psi_0 - \frac{\delta}{2\pi E_g} \times \sum_i N_i \gamma_i \text{sh} \psi_0^{(i)} \frac{1 - \gamma_i^2 - \gamma_i \text{ch} \psi_0^{(i)}}{(1 + \gamma_i \text{ch} \psi_0^{(i)})^3} [f_0^{(i)}]^3. \quad (4.8)$$

С такими определениями сохраняются все результаты разд. 3.1 и 3.2.

Еще раз напомним, что все формулы этого раздела имеют смысл только при условии постоянства функций  $\psi_{1,2}$  и  $f_0$  на границах со сверхпроводником.

#### 4.2. Нульмерное действие

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда градиентные члены в действии (4.2) имеют смысл малой поправки. Такая ситуация возникает либо в пределе туннельных контактов  $\Gamma \approx 2\gamma \ll 1$ , либо если размеры контактов малы (рис. 3) по сравнению с длиной свободного пробега:  $S_i \ll l^2$ . В последнем случае даже не обязательно требовать диффузной проводимости в нормальной части контакта, длина свободного пробега может быть порядка размеров системы. Учитывая градиентные члены как малую поправку, найдем оптимальную зависимость функции  $\psi(\mathbf{r})$  от координат и получим нульмерное действие.

Итак, если  $\psi(\mathbf{r})$  слабо меняется в пространстве, выделим большую константу

$$\psi = A + \phi(\mathbf{r}) \quad (4.9)$$

и разложим действие (4.2) до первого порядка по  $\phi$  и до второго — по  $\nabla\phi$ ; кроме того, разложим логарифм в действии до второго порядка по  $\gamma \operatorname{ch} A$  (опуская несущественную константу). Справедливость неравенства  $\gamma \operatorname{ch} A \ll 1$  будет показана в дальнейшем:

$$\begin{aligned} S_0[\psi] &= \frac{\pi E}{\delta} \operatorname{sh} A - \frac{G_T}{8} \operatorname{ch} A + \\ &+ \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} \left( -D(\nabla\phi)^2 + 4E\phi \operatorname{ch} A \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left( \sum_i N_i \gamma_i^2 \right) \operatorname{ch}^2 A - \frac{1}{2} \sum_i N_i \gamma_i \phi^{(i)} \operatorname{sh} A, \quad (4.10) \end{aligned}$$

где мы ввели полный туннельный кондактанс контактов

$$G_T = 2 \sum_i N_i \Gamma_i \approx 4 \sum_i N_i \gamma_i. \quad (4.11)$$

Пренебрегая в (4.10) слагаемыми из второй и третьей строк и варьируя действие по  $A$ , получаем результат  $8\pi E / (G_T \delta) = \operatorname{th} A$ . Влияние опущенных членов становится существенным при больших значениях  $A$ , при этом поправки к  $\operatorname{th} A$  будут отрицательными. Это обеспечивает появление максимума в зависимости энергии от  $A$ , который определяет величину щели. В первом приближении можно считать, что

$$E_g = \frac{G_T \delta}{8\pi}. \quad (4.12)$$

В рамках нашего приближения можно заменить энергию  $E$  в четвертом слагаемом в (4.10) на  $E_g$ . Также, пользуясь большой величиной  $A$ , заменим во второй и третьей строках формулы (4.10) гиперболические функции от  $A$  на  $P/2$ , где  $P = e^A$ . В результате получим действие в виде

$$\begin{aligned} S_0[P, \phi] &= -\frac{G_T}{16} \left[ \varepsilon P + \frac{2}{P} \right] + \frac{P^2}{16} \sum_i N_i \gamma_i^2 + \\ &+ \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r} \left( -D(\nabla\phi)^2 + \frac{G_T \delta}{4\pi} P \phi \right) - \\ &- \frac{P}{4} \sum_i N_i \gamma_i \phi^{(i)}. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Здесь мы также ввели безразмерную энергию, отсчитанную от края щели:

$$\varepsilon = \frac{E_g - E}{E_g} = 1 - \frac{8\pi E}{G_T \delta}. \quad (4.14)$$

Варьируя полученное действие по  $\phi$ , получим уравнения

$$D\nabla^2\phi + \frac{\delta G_T P}{8\pi} = 0, \quad 2D\nabla_n\phi^{(i)} + P v_0 \gamma_i = 0. \quad (4.15)$$

Эти уравнения определяют функцию  $\phi$  с точностью до постоянного слагаемого, поскольку мы не зафиксировали константу в (4.9). Для удобства введем функцию  $\Phi(\mathbf{r}) = 2D\phi(\mathbf{r})/Pv_0$ , которая имеет размерность длины и подчиняется уравнениям

$$V\nabla^2\Phi + \sum_i S_i \gamma_i = 0, \quad \nabla_n\Phi^{(i)} + \gamma_i = 0. \quad (4.16)$$

Здесь  $S_i$  — площадь  $i$ -го контакта. В таком виде становится очевидной совместность уравнения и граничных условий. Действительно, проинтегрировав по объему первое уравнение и применив теорему Гаусса, получим  $\sum_i S_i (\nabla_n\Phi^{(i)} + \gamma_i) = 0$ , что согласуется с граничными условиями в (4.16).

Воспользовавшись уравнениями (4.16), можно упростить действие (4.13), которое теперь становится функцией только от  $P$ :

$$\begin{aligned} S_0(P) &= -\frac{G_T}{16} \left[ \varepsilon P + \frac{2}{P} \right] + \frac{P^2}{16} \sum_i N_i \gamma_i^2 + \\ &+ \frac{3\pi\nu v_0 P^2}{16l} \int d\mathbf{r} (\nabla\Phi)^2. \quad (4.17) \end{aligned}$$

Это выражение еще раз свидетельствует о том, что произвольная константа в  $\Phi$  не имеет физического

смысла. Для дальнейших вычислений нам понадобится только одна величина, характеризующая геометрию системы и свойства контактов:

$$\tilde{\gamma} = \left( \sum_i S_i \gamma_i \right)^{-1} \times \left[ \sum_i S_i \gamma_i^2 + \frac{3}{l} \int d\mathbf{r} (\nabla \Phi)^2 \right]. \quad (4.18)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) *Одномерный контакт.* Пусть нормальная область имеет прямоугольную форму с длиной  $L$  (рис. 1) и присоединена к двум сверхпроводникам одинаковыми контактами с прозрачностью одного канала  $2\gamma \ll 1$ . Тогда решение уравнения (4.16) имеет вид  $\Phi(x) = -\gamma x^2/L$ , а параметр (4.18) определяется равенством  $\tilde{\gamma} = L\gamma/2l + \gamma \approx L\gamma/2l$ . Таким образом, первым слагаемым в квадратных скобках в (4.18) можно пренебречь по сравнению со вторым. Если сверхпроводник присоединен только к одной из сторон, то соответствующий параметр  $\tilde{\gamma}$  становится вдвое больше:  $\tilde{\gamma} = L\gamma/l$ .

2) *Двумерный контакт.* Если нормальная область имеет форму круга радиуса  $R$ , по краю присоединенного к сверхпроводнику, то  $\Phi(r) = -\gamma r^2/2R$  и в итоге получаем  $\tilde{\gamma} = 3R\gamma/4l$ .

3) *Трехмерный контакт.* Аналогично, если нормальная область имеет форму шара радиуса  $R$ , то функция  $\Phi(r)$  получается такой же, как в предыдущем случае, а результат  $\tilde{\gamma} = 3R\gamma/5l$ .

4) *Нульмерный контакт.* Под нульмерным контактом мы подразумеваем нормальный металл произвольной формы, соединенный со сверхпроводниками узкими контактами (рис. 3). В этом случае можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках в (3.18) по сравнению с первым; если при этом все каналы имеют одинаковую прозрачность  $\Gamma$ , то  $\tilde{\gamma} = \Gamma/2$ . Действительно, если контакт имеет форму, подобную изображенной на рис. 3, то основной вклад в интеграл  $\int d\mathbf{r} (\nabla \Phi)^2$  дают области вблизи сверхпроводников. Если расстояние  $r$  до  $i$ -го контакта со сверхпроводником много больше размера контакта ( $r \gg \sqrt{S_i}$ ), но много меньше размера всего нормального металла, то можно приближенно считать  $|\nabla \Phi| \approx S_i \gamma_i / 2\pi r^2$ . Интеграл от квадрата этой величины пропорционален  $S_i^{3/2} \gamma_i^2$ , им можно пренебречь в выражении (4.18) при условии  $S_i \ll l^2$ .

Величина  $\tilde{\gamma}$  зависит от геометрии системы и, кроме того, пропорциональна «средней» прозрачности одного канала в контакте. Туннельный контактанс  $G_T$  также пропорционален прозрачности одного ка-

нала. Чтобы рассматривать поведение различных характеристик системы при изменении сопротивления контактов, введем величину, которая описывает только форму системы:

$$G = G_T / \tilde{\gamma}. \quad (4.19)$$

Для плоского контакта (рис. 1) она пропорциональна контактансу нормальной части:  $G = 12G_N$ .

В итоге, получаем нульмерное действие

$$S_0(P) = \frac{G\tilde{\gamma}}{16} \left[ -\varepsilon P - \frac{2}{P} + \frac{\tilde{\gamma}P^2}{4} \right]. \quad (4.20)$$

### 4.3. Классификация «хвостов»

В этом разделе рассмотрим различные предельные случаи изменения параметров  $\tilde{\gamma}$  и  $\varepsilon$ , вычислим действия инстантонов и построим грубую картину возможного поведения подщелевой плотности состояний для различных предельных случаев.

Варьируя  $S_0(P)$ , получим уравнение<sup>6)</sup>, связывающее  $P$  и  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{2}{P^2} + \frac{\tilde{\gamma}P}{2}. \quad (4.21)$$

Минимальное значение  $\varepsilon$  достигается при  $P = P_0 = 2\tilde{\gamma}^{-1/3}$  и равно  $3\tilde{\gamma}^{2/3}/2 \ll 1$ . Отличие этой величины от нуля связано с тем, что пороговая энергия  $E_g$  в действительности меньше, чем  $G\tilde{\gamma}\delta/8\pi$ . Однако эта поправка маленькая, и ее нужно будет учесть только при выводе следующей формулы.

При  $E < E_g$  уравнение (4.21) имеет два действительных положительных корня  $P_{1,2}$ , которые соответствуют двум решениям уравнения Узаделя  $\theta_{1,2}$ . Их можно найти, если разложить величину (4.20) по малым параметрам  $\varepsilon$  и  $\delta P = P - P_0$ :

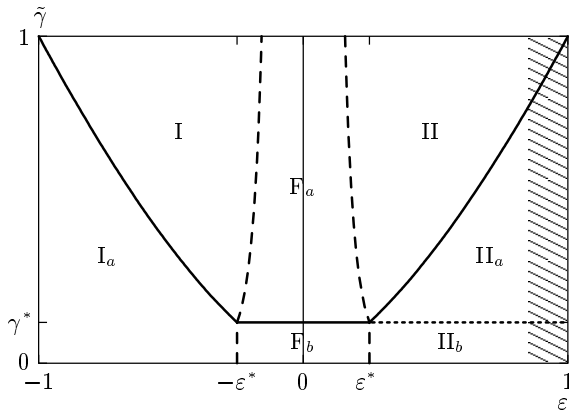
$$S_0(P) = S_0(P_0) + \frac{G\tilde{\gamma}}{16} \left[ -\varepsilon \delta P + \frac{2(\delta P)^3}{P_0^4} \right]. \quad (4.22)$$

Здесь в  $\varepsilon$  учтена поправка, которая была опущена в (4.14):  $\varepsilon = 1 - 3\tilde{\gamma}^{2/3}/2 - 4\pi E/G\tilde{\gamma}\delta$ . В дальнейшем будет достаточно точности выражения (4.14).

Из разложения (4.22) заключаем, что два решения уравнения Узаделя соответствуют  $P_{1,2} = P_0(1 \mp P_0\sqrt{\varepsilon/6})$ , а показатель экспоненты для плотности состояний имеет вид

$$S = S_0(P_1) - S_0(P_2) = \frac{G\tilde{\gamma}^{1/3}}{3\sqrt{6}} \varepsilon^{3/2}. \quad (4.23)$$

<sup>6)</sup> Для случая идеальной границы его аналогом было уравнение (2.6).



**Рис. 6.** Грубая «фазовая диаграмма» для возможных зависимостей плотности состояний от энергии. Области I соответствует формула (4.25), области Ia — (4.30), области II — (4.26), областям IIa и IIb — (4.44). Плотность состояний в областях I, Fa и II описывается единой формулой (3.18) с учетом (4.24). В режиме IIb полное количество квазилокализованных состояний велико (см. (4.46))

Тот же результат можно получить, сравнив разложения (4.22) и (2.39). Для этого нужно сначала установить связь между  $g$  и  $\delta P$ . В режиме  $\tilde{\gamma} \ll 1$  функция  $\psi_0(\mathbf{r})$  мало отличается от константы, поэтому в главном порядке можно считать  $f_0(\mathbf{r}) \approx 1$ . Таким образом,  $\delta\psi = g$ , с другой стороны,  $\delta\psi = \delta \ln P = \delta P/P_0$ . В результате, приравнявая почленно правые части (4.22) и (2.39), получим

$$c_1 = \frac{P_0}{2} = \tilde{\gamma}^{-1/3}, \quad c_2 = \frac{6}{P_0} = 3\tilde{\gamma}^{1/3}, \quad (4.24)$$

$$\tilde{G} = \frac{3}{16}G\tilde{\gamma}^{4/3}.$$

Если подставить эти константы в (2.41), то вновь получится результат (4.23). Используя выражения (4.24), можно обобщить все результаты разд. 3.1 и 3.2. В частности, для плотности состояний над щелью из (3.8) получаем

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\tilde{\gamma}^{2/3}\delta} \sqrt{\frac{8|\varepsilon|}{3}}. \quad (4.25)$$

Аналогично можно определить предэкспоненту для плотности состояний под щелью из (3.7):

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{G\tilde{\gamma}^{5/3}}} \sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}} \exp\left(-\frac{G\tilde{\gamma}^{1/3}}{3\sqrt{6}} \varepsilon^{3/2}\right). \quad (4.26)$$

Две последние формулы справедливы вне флуктуационной области при условии  $|\varepsilon| \gg G^{-2/3}\tilde{\gamma}^{-2/9}$ ,

когда можно пренебречь вкладом второго инстантона по сравнению с первым. На рис. 6 приведена грубая «фазовая диаграмма» возможных поведений плотности состояний при различных значениях  $\tilde{\gamma}$  и  $\varepsilon$ . Формула (4.25) соответствует области I, а выражение (4.26) — области II. Между ними находится флуктуационная область Fa. Единое выражение для плотности состояний во всех трех областях (I, Fa и II) получается из (3.18) также с помощью (4.24).

Разложение (4.22) справедливо, если энергия не сильно отличается от пороговой. Для его применимости необходимо потребовать выполнения неравенства  $|\delta P| \ll P_0$  или, иначе,  $|\varepsilon| \ll \tilde{\gamma}^{2/3}$ .

В противоположном пределе,  $\tilde{\gamma}^{2/3} \ll \varepsilon \ll 1$ , приближение кубической параболы (4.22) неприменимо, и, чтобы найти  $P_{1,2}$ , нужно решать уравнение (4.21). Для отыскания меньшего корня ( $P_1$ ) можно пренебречь последним слагаемым, а для  $P_2$  — вторым:

$$P_1 = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}, \quad P_2 = \frac{2\varepsilon}{\tilde{\gamma}}. \quad (4.27)$$

Подставляя эти значения в выражение для действия (первая часть (4.22)), получим

$$S_0(P_1) = -\frac{G\tilde{\gamma}}{4\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon}, \quad S_0(P_2) = -\frac{G\varepsilon^2}{16}. \quad (4.28)$$

Поскольку  $S_0(P_1) \ll S_0(P_2)$ , экспонента для плотности состояний определяется только величиной  $S_0(P_2)$ :

$$S = -S_0(P_2) = \frac{G\varepsilon^2}{16}. \quad (4.29)$$

Плотность состояний с таким показателем экспоненты соответствует областям IIa и IIb. Предэкспоненциальный множитель для этого режима будет получен в следующем разделе.

Над щелью в области Ia формула (4.25) также неприменима. Чтобы определить плотность состояний в этом режиме, нужно решить уравнение (4.21) при большом отрицательном  $\varepsilon$ . Для нахождения пары комплексно-сопряженных корней можно пренебречь последним членом в (4.21):  $P_{1,2} = \pm i\sqrt{2/|\varepsilon|}$ . Плотность состояний при этом имеет вид

$$\langle \rho \rangle = \frac{2}{\delta} \operatorname{Re} \cos \theta = \frac{2}{\delta} \operatorname{Im}(P - P^{-1}) \approx \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2}{|\varepsilon|}}. \quad (4.30)$$

Здесь мы использовали корень  $P_1$ , поскольку плотность состояний должна быть положительна.

По мере уменьшения прозрачности  $\tilde{\gamma}$  области I и II становятся уже и исчезают, когда  $\tilde{\gamma} \sim G^{-3/4}$ . Одноинстантонный вклад в плотность состояний при

этом описывается только экспонентой с показателем (4.29). Как будет показано в разд. 4.4, при уменьшении  $\tilde{\gamma}$  ниже  $G^{-3/4}$  (область  $\Pi_b$ ) полное число подщелевых состояний начинает расти. Такое поведение мы назовем сильным хвостом.

Вблизи энергии Ферми ( $\varepsilon = 1$ ) происходит кроссовер к ненулевой  $\sigma$ -модели. Соответствующая плотность состояний будет рассматриваться в разд. 5.3. На рисунке эта область заштрихована.

Еще раз подчеркнем, что вблизи границ областей происходит кроссовер от одной зависимости к другой, а все приведенные нами формулы справедливы только при достаточном удалении в глубь соответствующей области.

#### 4.4. «Сильный хвост»

Теперь перейдем к случаю  $\tilde{\gamma} \ll G^{-3/4}$ . Он соответствует области  $\Pi_b$  на рис. 6. С экспоненциальной точностью плотность состояний была найдена в разд. 4.3. Сейчас нашей задачей будет нахождение предэкспоненты.

Флуктуационная область для рассматриваемого случая уже настолько велика, что вне ее разность функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$  нельзя считать малой, но тем не менее их зависимость от координат все еще слабая. При вычислении гауссова интеграла по жестким модам так же, как и в разд. 3.1, возникает множитель

$$\sqrt{\frac{\det \hat{O}_{\theta_1\theta_2}^+ \det' \hat{O}_{\theta_1\theta_2}^-}{\det \hat{O}_{\theta_1\theta_1}^+ \det' \hat{O}_{\theta_1\theta_1}^-}} = \sqrt{\frac{(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^+)_0}{(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^+)_0}}, \quad (4.31)$$

где мы ограничились лишь минимальными собственными значениями операторов  $\hat{O}_{\theta_1\theta_2}^+$  и  $\hat{O}_{\theta_1\theta_1}^+$ , потому что высшие собственные значения определяются в основном градиентным членом и по-прежнему слабо зависят от энергии.

Начнем, однако, с нахождения величин  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^-)_0$  и  $(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0$ , которые нам все равно понадобятся в дальнейшем. Для этого воспользуемся связью (А.4) и формулами (2.30) и (4.20):

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^-)_0}{\delta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial p^2} = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \beta^2} = \frac{1}{4} S_0''(P) \left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)^2 \Big|_{P=P_1} = \\ &= \frac{G\tilde{\gamma}}{16} \left[ \frac{1}{P_1} - \frac{\tilde{\gamma} P_1^2}{8} \right] = \frac{G\tilde{\gamma}}{16} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Аналогичное дифференцирование по переменной  $q$  дает

$$\frac{(\mathcal{E}_{\theta_2\theta_2}^-)_0}{\delta} = -\frac{G\varepsilon^2}{32}. \quad (4.33)$$

Собственное значение  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^-)_0$  соответствует вращению угла  $\chi_B$  и равно нулю. Для вычисления величины  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^+)_0$  применим теорию возмущений. Соответствующая собственная функция слабо отличается от константы, и будет достаточно положить ее равной единице:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^+)_0 &= \left( 1 \left[ \hat{O}_{\theta_1\theta_2}^+ - \hat{O}_{\theta_1\theta_2}^- \right] 1 \right) = \\ &= \frac{\pi\nu D}{8} \int d\mathbf{r} (\nabla\psi_1)(\nabla\psi_2) + \sum_i \frac{N_i\gamma_i^2}{8} \text{ch}\psi_1^{(i)} \text{ch}\psi_2^{(i)} = \\ &= \frac{\pi\nu\nu_0 P_1 P_2}{32} \left[ \frac{3}{l} \int d\mathbf{r} (\nabla\Phi)^2 + \sum_i S_i \gamma_i^2 \right] = \\ &= \frac{G\tilde{\gamma}}{32} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Здесь мы воспользовались выражением (4.18) для  $\tilde{\gamma}$ .

Таким же способом можно посчитать  $(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^+)_0$ , однако при этом получается, что поправка теории возмущений к (4.32) мала и можно считать

$$(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^+)_0 = (\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^-)_0 = \frac{G\tilde{\gamma}}{16} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}. \quad (4.35)$$

Таким образом, вклад в предэкспоненту от жестких флуктуаций сводится к величине

$$\sqrt{\frac{(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_2}^+)_0}{(\mathcal{E}_{\theta_1\theta_1}^+)_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.36)$$

Дальнейшее вычисление аналогично приведенному в разд. 3.1. Флуктуации мягких мод в переменных  $b$ ,  $p$  и  $\kappa\omega$  сокращают друг друга. Остается интеграл по переменным  $n$ ,  $\zeta\xi$  и  $q$ . Пара грасмановых переменных<sup>7)</sup>  $\zeta, \xi$  входит в действие в виде  $\zeta\xi(\mathcal{E}_{\theta_1\alpha}^-)_0/\delta$ . Для вычисления этого собственного значения (оно отлично от нуля, если  $\alpha \neq \psi_2$ ) будем использовать собственную функцию  $\text{sh}((\psi_2 - \psi_1)/2)$ , которая после нормировки принимает вид

$$a(\mathbf{r}) = 1 + \frac{3(P_2 - P_1)}{4l} \Phi(\mathbf{r}). \quad (4.37)$$

<sup>7)</sup> В разд. 3.1 использовались обозначения  $\zeta(x) = \tilde{\zeta}f_0(x)$  и т. п., где явно были разделены амплитуда флуктуаций и их пространственный профиль. В рассматриваемом сейчас пределе нормированные собственные функции операторов  $\hat{O}$ , отвечающие низшим собственным значениям, мало отличаются от единицы, так что с необходимой точностью можно не различать  $\tilde{\zeta}$  и  $\zeta$ .

Подставляя это выражение в (4.4) и используя (4.16) и (4.18), после довольно громоздких, но элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{(\mathcal{E}_{\theta_1\alpha}^-)_0}{\delta} &= \frac{G\tilde{\gamma}}{128} \frac{P_2 + P_1}{P_2 - P_1} \times \\ &\times \left[ P_1 \left( -\varepsilon + \frac{2}{P_1^2} + \frac{\tilde{\gamma}P_1}{2} \right) - \right. \\ &\left. - P_2 \left( -\varepsilon + \frac{2}{P_2^2} + \frac{\tilde{\gamma}P_2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Здесь под  $P_2$  мы понимаем не корень уравнения (4.21), а переменную, параметризующую угол  $\alpha$ :  $\alpha \approx \pi/2 + i \ln P_2$ . Величина  $P_2$  удовлетворяет уравнению (4.21) только при  $\alpha = \theta_2$ , при этом выражение (4.38), очевидно, обращается в нуль. То же самое было и в случае идеальных границ. В седловой точке мода  $\zeta\xi$  нулевая, однако ее масса растет линейно при отклонении по переменной  $q$ . В нашем случае это соответствует отклонению по  $P_2$ :

$$\delta P_2 = -iP_2\delta\alpha = -\frac{P_2}{\sqrt{2}}q. \quad (4.39)$$

Продифференцировав выражение (4.38) по  $P_2$  (нужно дифференцировать только второе слагаемое в квадратных скобках), приходим к результату

$$\frac{(\mathcal{E}_{\theta_1\alpha}^-)_0}{\delta} = -\frac{G\tilde{\gamma}\varepsilon}{128}\delta P_2 = \frac{G\varepsilon^2 q}{64\sqrt{2}}. \quad (4.40)$$

Теперь вычислим в нашем приближении предэкспоненту в (2.24). По аналогии с (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{4} \int d\mathbf{r} \operatorname{str}(k\Lambda Q) &= \operatorname{const} - \frac{\nu}{2}\delta\alpha \int d\mathbf{r} \operatorname{ch} \psi_2 = \\ &= \operatorname{const} + \frac{i}{2\sqrt{2}\delta} \frac{\varepsilon q}{\tilde{\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Осталось только определить меру интегрирования по переменной  $n$ , соответствующей нулевой моде вращения по углу  $\chi_B$ . Пользуясь соотношением (A.4), получим аналогично (3.6)

$$\begin{aligned} n &= 2i \sin k_B \chi_B = -2 \operatorname{sh} \frac{\psi_2 - \psi_1}{2} \chi_B = \\ &= -2\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \chi_B = -\frac{(2\varepsilon)^{3/4}}{\sqrt{2}\tilde{\gamma}} \chi_B, \quad (4.42) \\ \int dn &= \pi\sqrt{\frac{2}{\tilde{\gamma}}} (2\varepsilon)^{3/4}. \end{aligned}$$

Теперь все готово для расчета плотности состояний. Используя (4.33), (4.36), (4.40)–(4.42), получаем

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &= \frac{e^{-S_0}}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \int \frac{dn dq}{\pi} d\zeta d\xi \times \\ &\times \frac{i}{2\sqrt{2}\delta} \frac{\varepsilon q}{\tilde{\gamma}} \exp \left[ \frac{G\varepsilon^2}{32} \left( q^2 - \frac{q\zeta\xi}{2\sqrt{2}} \right) \right] = \\ &= -\frac{2^{3/4}}{256\delta} G \frac{\varepsilon^{15/4}}{\tilde{\gamma}^{3/2}} e^{-S_0} \times \\ &\times \operatorname{Im} \int dq q^2 \exp \left( \frac{G\varepsilon^2 q^2}{32} \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Интегрируя вдоль мнимой оси, получаем окончательно

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\pi}{G\tilde{\gamma}^3}} \sqrt{\frac{\varepsilon^3}{8}} \exp \left( -\frac{G\varepsilon^2}{16} \right). \quad (4.44)$$

Этот результат описывает поведение плотности состояний в областях  $\Pi_a$  и  $\Pi_b$  на рис. 6. В области  $\Pi_a$  полученная зависимость сшивается с (4.26) при  $\varepsilon \sim \tilde{\gamma}^{2/3}$ :

$$\langle \rho \rangle \Big|_{\varepsilon \sim \tilde{\gamma}^{2/3}} \sim \frac{1}{\delta\sqrt{G\tilde{\gamma}}} \exp \left( -G\tilde{\gamma}^{4/3} \right). \quad (4.45)$$

Сложнее обстоит дело со сшивкой в области  $\Pi_b$ . Квазиклассическая плотность состояний обращается на границе щели в нуль корневым образом (4.25), достигает максимума при  $|\varepsilon| \sim \tilde{\gamma}^{2/3}$ , а далее начинает убывать по закону обратного корня (4.30). По мере уменьшения прозрачности границы размер флуктуационной области увеличивается и при  $\tilde{\gamma} \sim G^{-3/4}$  она накрывает максимум плотности состояний.

Плотность состояний растет по мере приближения к флуктуационной области  $F_b$  с обеих сторон, поэтому никакой формальной сшивки этих двух зависимостей быть не должно: во флуктуационной области находится максимум плотности состояний.

Оценим, наконец, полное число квазилокализованных состояний:

$$\mathcal{N} \sim \int_0^1 \frac{E_g d\varepsilon}{\delta\sqrt{G\tilde{\gamma}^3}} \varepsilon^{3/4} e^{-G\varepsilon^2} \sim \tilde{\gamma}^{-1/2} G^{-3/8} \gg 1. \quad (4.46)$$

Таким образом, при  $\tilde{\gamma} \ll G^{-3/4}$  число состояний под щелью становится большим, почему мы и назвали этот случай сильным хвостом. По-видимому, это наиболее подходящие условия для экспериментальной проверки изложенной теории.

## 5. НЕУНИВЕРСАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ

В этом разделе рассматриваются различные случаи, в которых плотность состояний не описывается нульмерной  $\sigma$ -моделью. В разд. 5.1 изучается ситуация, когда инстантон, описывающий подщелевые состояния, имеет конечный пространственный размер, меньший, чем размер нормальной части контакта. Флуктуации около такого инстантонного решения будут иметь квазинепрерывный спектр, что сильно затрудняет вычисление предэкспоненциального множителя в плотности состояний. Поэтому все результаты этого раздела (и всего разд. 5) будут получены с экспоненциальной точностью.

В разд. 5.2 рассматривается задача о подщелевых состояниях в сверхпроводнике с магнитными примесями. В отличие от всего остального материала, в этом разделе речь идет не о гибридной системе, а о пространственно-однородном образце. Квазилокализованные состояния появляются благодаря пространственным флуктуациям магнитных примесей. Задача о подщелевых состояниях в такой системе была решена в работах [23, 24]. Здесь приводится вывод этих результатов и показывается их связь с квазилокализованными состояниями в гибридных системах.

В разд. 5.3 рассматривается плотность состояний глубоко под щелью вблизи энергии Ферми. Она также не описывается нульмерной  $\sigma$ -моделью и будет найдена с экспоненциальной точностью.

### 4.1. Широкий SNS-контакт

Этот и следующий разделы посвящены изучению плоского SNS-контакта (рис. 1). В случае длинного контакта (точный критерий будет указан ниже) применимы результаты разд. 3.1 и 3.2. Напомним, что соответствующие численные параметры в этом случае имеют следующие значения:  $c_1 \approx 1.15$ ,  $c_2 = 0.88$ ,  $E_g = 3.12E_{Th}$ ,  $\tilde{G} = \pi c_2 E_g / 2\delta = 0.34G_N$ . Здесь  $E_{Th} = D/L_x^2$  и  $G_N = 4\pi\nu DL_y L_z / L_x = 4\pi E_{Th} / \delta$ . В случае, когда сопротивление контактов конечно, можно использовать значения (4.24), разумеется, если  $\varepsilon \ll \tilde{\gamma}^{2/3}$ .

Действие инстантона, определяемое формулой (2.41), пропорционально кондактансу нормальной области и растет с увеличением ее размеров в направлениях  $y$  и  $z$ , параллельных NS-границам. Поэтому при достаточно больших  $L_y$  и  $L_z$  выгодно образовать инстантон конечных размеров по осям  $y$  и  $z$ . При этом возникнет проигрыш за счет гра-

диентных членов, но при достаточно больших  $L_y$  и  $L_z$  он компенсируется независимостью действия от размеров нормальной области. Как будет показано ниже, характерный размер такой полевой конфигурации зависит от близости к порогу и имеет порядок  $L_\perp(E) \sim L_x \varepsilon^{-1/4}$ .

В этом разделе вычислим действие инстантона для квазидвумерного и трехмерного контактов (соответственно одномерная и двумерная  $\sigma$ -модели), когда один или оба поперечных размера превышают  $L_\perp(E)$ , и получим ответ для подщелевой плотности состояний с экспоненциальной точностью. При этом степень энергии в показателе экспоненты окажется отличной от случая длинного одномерного контакта.

Чтобы вычислить действие для инстантона, повторим рассуждения, которые привели к формуле (2.39), но будем считать, что  $g$  зависит от поперечных координат:  $\theta = \pi/2 + i\psi_0(x) + ig(\mathbf{r}_\perp)f_0(x) -$

$$S_0[\theta] = \text{const} + \frac{\pi}{2\delta} \int \frac{dy dz}{L_y L_z} \times \left[ -\frac{D}{2} (\nabla_\perp g)^2 + E_g \left( -2c_1 \varepsilon g + \frac{c_2}{3} g^3 \right) \right]. \quad (5.1)$$

Это действие имеет две очевидные не зависящие от поперечных координат седловые точки  $g = \pm\sqrt{\varepsilon}$ , как это было для нульмерной задачи. Для функции  $\theta_1$  оставим решение  $\theta_1 = \pi/2 + i\psi_0 - i\sqrt{\varepsilon}f_0$ , а для  $\theta_2$  будем искать решение, зависящее от поперечных координат. Для удобства мы введем функцию  $\tilde{g}$ , которая будет описывать зависимость  $\theta_2 - \theta_1$  от поперечных координат и, кроме того, приведем переменные к безразмерному виду<sup>8)</sup>:

$$g(\mathbf{r}_\perp) = \sqrt{\varepsilon} [2\tilde{g}(\tilde{\mathbf{r}}_\perp) - 1], \quad \tilde{\mathbf{r}}_\perp = \frac{\mathbf{r}_\perp}{L_\perp}, \quad (5.2)$$

$$L_\perp = \sqrt{\frac{D}{2c_2 E_g}} \varepsilon^{-1/4}.$$

Действие при этом принимает вид

$$S = S_0[\theta_1] - S_0[\theta_2] = \frac{8L_\perp^2}{L_y L_z} \tilde{G} \varepsilon^{3/2} \times \int_0^{L_\perp/L_y} d\tilde{y} \int_0^{L_\perp/L_z} d\tilde{z} \left[ \frac{(\tilde{\nabla}_\perp \tilde{g})^2}{2} + \frac{\tilde{g}^2}{2} - \frac{\tilde{g}^3}{3} \right]. \quad (5.3)$$

Варьируя это действие, найдем уравнение для  $\tilde{g}$ , которое описывает форму инстантона в поперечных направлениях:

$$\tilde{\nabla}_\perp^2 \tilde{g} = \tilde{g} - \tilde{g}^2. \quad (5.4)$$

<sup>8)</sup> Определенная таким образом величина  $L_\perp$  в два раза меньше использованной в [29].

Подставляя выражение для лапласиана обратно в действие и интегрируя по частям, окончательно находим

$$S = \frac{4}{3} \frac{L_{\perp}^2}{L_y L_z} \tilde{G} \tilde{\varepsilon}^{3/2} \int d\tilde{y} d\tilde{z} \tilde{g}^3(\tilde{y}, \tilde{z}). \quad (5.5)$$

*Одномерный контакт* ( $L_{y,z} \ll L_{\perp}$ ). Когда поперечные размеры нормальной части контакта малы, применимы результаты разд. 3. При этом  $\tilde{g} \equiv 1$ , интеграл в (5.5) равен  $L_y L_z / L_{\perp}^2$ , и мы возвращаемся к выражению (2.41), а в случае туннельных контактов к (4.23). В этом пределе применимо приближение нульмерной  $\sigma$ -модели, поэтому справедливы наши предыдущие результаты (3.7) и (4.26).

*Двумерный контакт* ( $L_z \ll L_{\perp} \ll L_y$ ). Нам нужно решить уравнение (5.4) при условии, что  $\tilde{g}$  зависит только от  $y$ . Это уравнение описывает солитон типа Кортевега–де Вриза, его решение хорошо известно:

$$\tilde{g}(\tilde{y}) = \frac{3}{2 \operatorname{ch}^2(\tilde{y}/2)}. \quad (5.6)$$

Подставляя  $\tilde{g}$  в (5.5), найдем выражение для плотности состояний:

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle &\sim \frac{1}{\delta} \exp\left(-\frac{48}{5} \frac{L_{\perp}}{L_y} \tilde{G} \tilde{\varepsilon}^{3/2}\right) = \\ &= \frac{1}{\delta} \exp\left(-4.67 G_{\square} \varepsilon^{5/4}\right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь большой безразмерный параметр, который стоит в экспоненте и определяет применимость метода перевала,— это безразмерный кондактанс на квадрат пленки нормального металла, соединяющего сверхпроводящие берега:  $G_{\square} = 4\pi\nu D L_z$ .

В случае туннельных контактов, используя (4.24), получаем

$$\langle \rho \rangle \sim \frac{1}{\delta} \exp\left(-2.17 G_{\square} \tilde{\gamma}^{-1/6} \varepsilon^{5/4}\right). \quad (5.8)$$

Здесь  $\tilde{\gamma} = L_x \Gamma / 4l \ll 1$ .

*Трехмерный контакт* ( $L_{\perp} \ll L_{y,z}$ ). Двумерное уравнение (5.4) нельзя решить аналитически. Единственное, что мы можем сделать, это привести численный результат для интеграла (5.5):

$$\int d\tilde{y} d\tilde{z} \tilde{g}^3(\tilde{y}, \tilde{z}) \approx 46.5. \quad (5.9)$$

Плотность состояний выражается следующим образом:

$$\langle \rho \rangle \sim \frac{1}{\delta} \exp(-10.1 G_{\square} \varepsilon). \quad (5.10)$$

В этой формуле  $G_{\square}$  обозначает безразмерный кондактанс на квадрат пленки, ориентированной параллельно сверхпроводящим берегам:  $G_{\square} = 4\pi\nu D L_x$ .

Для туннельных контактов получаем

$$\langle \rho \rangle \sim \frac{1}{\delta} \exp\left(-2.58 G_{\square} \tilde{\gamma}^{-2/3} \varepsilon\right), \quad (5.11)$$

где по-прежнему  $\tilde{\gamma} = L_x \Gamma / 4l \ll 1$ .

Критерий, определяющий, нужно ли учитывать зависимость инстантонного решения от поперечной координаты, состоит в сравнении  $L_{\perp}$  и  $L_{y,z}$ . Поскольку длина  $L_{\perp}$  сама зависит от энергии, по мере приближения к порогу размерности «вымерзают»: происходит кроссовер от двумерной  $\sigma$ -модели к одномерной и далее к нульмерной.

### 5.2. Сверхпроводник с магнитными примесями

В этом разделе рассматриваются квазилокализованные состояния в сверхпроводнике с магнитными примесями. В данном случае речь идет о макроскопически однородной системе, в отличие от всего предыдущего (и последующего) материала. Метод нелинейной  $\sigma$ -модели для нахождения аномально локализованных состояний в такой системе был развит в работах [23, 24].

Сверхпроводник с магнитными примесями в приближении среднего поля был подробно изучен в знаменитой работе Абрикосова и Горькова [28]. В частности, было показано, что сверхпроводимость подавляется магнитными примесями, причем параметр порядка  $\Delta$  больше, чем щель  $E_g$  в спектре возбуждений. Таким образом, возможно существование режима бесщелевой сверхпроводимости, когда  $E_g = 0$ , в то время как  $\Delta > 0$ . Мы, однако, (вслед за [23, 24]) будем рассматривать случай конечной щели и найдем инстантонную поправку к плотности состояний под щелью с экспоненциальной точностью.

Введение магнитных примесей требует уточнения  $\sigma$ -модели. Гамильтониан Боголюбова–де Жена теперь содержит дополнительный член, описывающий рассеяние на магнитных примесях<sup>9)</sup>:

$$\mathcal{H} = \tau_z \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + U(\mathbf{r}) \right) + \tau_x \Delta(\mathbf{r}) + \mathbf{J}\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\sigma}. \quad (5.12)$$

<sup>9)</sup> Обозначение  $\hat{\sigma}$  для оператора спина электрона снабжено крышкой, чтобы отличать его от матриц Паули  $\sigma_i$ , действующих в пространстве РН. Оператор спина выражается через матрицы Паули так:

$$\hat{\sigma} = \tau_z \sigma.$$



Поскольку магнитные примеси подавляют сверхпроводимость, параметр порядка  $\Delta$ , который входит в гамильтониан (5.12), должен определяться самосогласовано. Мы считаем, что концентрация магнитных примесей достаточно мала и не приводит к полному разрушению сверхпроводимости. Во всех формулах этого раздела полагаем, что влияние примесей уже учтено в  $\Delta$ .

Случайное поле  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  в (5.12) будем считать дельта-коррелированным и введем стандартным образом время рассеяния на магнитных примесях  $\tau_s$ :

$$\langle JS_\alpha(\mathbf{r})JS_\beta(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta}}{6\pi\nu\tau_s}. \quad (5.13)$$

Таким образом, в нашей системе появляется еще один безразмерный параметр

$$\zeta = \frac{1}{\tau_s\Delta}. \quad (5.14)$$

Вывод  $\sigma$ -модели тривиально обобщается на случай гамильтониана (5.12). Действие при этом принимает вид

$$S[Q] = \frac{\pi\nu}{8} \int d\mathbf{r} \times \text{str} \left[ D(\nabla Q)^2 + 4iQ(\Lambda E + i\tau_x \Delta) - \frac{(Q\tau_z \boldsymbol{\sigma})^2}{3\tau_s} \right], \quad (5.15)$$

Здесь коэффициент диффузии определяется рассеянием только на немагнитных примесях. Уравнение Узалея можно получить, не вводя полную параметризацию матрицы  $Q$ , а воспользовавшись простым выражением в терминах одного угла  $\theta$ :  $Q = \sigma_z \tau_z \cos \theta + \tau_x \sin \theta$ . Выделяя, как обычно, мнимую часть  $\theta = \pi/2 + i\psi$ , получаем

$$D\nabla^2 \psi + 2E \text{ch} \psi - 2\Delta \text{sh} \psi + \frac{1}{\tau_s} \text{sh} 2\psi = 0. \quad (5.16)$$

Сначала рассмотрим однородные решения этого уравнения. Как и раньше, при энергиях ниже определенного порога  $E_g$  таких решений будет два. Опустив градиентный член, перепишем уравнение в виде, напоминающем (2.6):

$$\frac{E}{\Delta} = \text{th} \psi - \zeta \text{sh} \psi. \quad (5.17)$$

Это уравнение имеет два решения. Энергия, при которой эти два решения совпадают, определяет величину щели. Максимум функции в правой части достигается при  $\text{ch} \psi = \zeta^{-1/3}$ , что соответствует равенству

$$E_g = \Delta(1 - \zeta^{2/3})^{3/2}. \quad (5.18)$$

Этот замечательный результат был впервые получен в работе [28].

Вблизи порога можно разложить действие по безразмерной энергии  $\varepsilon = (E_g - E)/\Delta$  и по отклонению угла  $\psi = \psi_0 + g(\mathbf{r})$ . В результате для  $g(\mathbf{r})$  получим следующее действие:

$$S_0[\theta] = \frac{\pi\nu\Delta}{4} \int d\mathbf{r} \times \left[ \xi^2 (\nabla g)^2 + 4\varepsilon \zeta^{-1/3} g - 2\zeta^{1/3} \sqrt{1 - \zeta^{2/3} g^3} \right]. \quad (5.19)$$

Здесь мы ввели длину когерентности  $\xi = \sqrt{D/\Delta}$ . Полученное действие полностью аналогично выражению (5.1). Таким образом, дальнейшие вычисления просто повторяют предыдущий раздел и приводят к результату [23, 24]

$$\langle \rho \rangle \sim \delta^{-1} \exp \left[ -\frac{16}{3} a_d \pi \nu^{(d)} \Delta \xi^d \zeta^{-2/3} \times \left( 24 \sqrt{1 - \zeta^{2/3}} \right)^{-(2+d)/4} \varepsilon^{(6-d)/4} \right]. \quad (5.20)$$

Здесь  $d$  — эффективная пространственная размерность сверхпроводника,  $\nu^{(d)}$  —  $d$ -мерная плотность состояний, а величина  $a_d = \int d^d \mathbf{r} \tilde{g}^3$  вычислялась в разд. 5.1 (функция  $\tilde{g}$  удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \tilde{g} = \tilde{g} - g^2$ ). Она принимает следующие значения:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 36/5, \quad a_2 \approx 46.5, \quad a_3 \approx 262. \quad (5.21)$$

### 5.3. Предел малых энергий

В этом разделе рассмотрим область энергий, близких к фермиевской. При таких энергиях плотность состояний подавлена наиболее сильно. Мы, как и ранее в этом разделе, будем искать ответ с экспоненциальной точностью, для чего необходимо решить уравнение Узалея (2.2) и вычислить действие (2.30) на решении.

Вычисления этого раздела практически повторяют вычисления Музыкантского и Хмельницкого [39] (см. также [40, 41]), применивших инстантонный метод в диффузной  $\sigma$ -модели для определения длинновременной асимптотики кондактанса  $G(t)$  мезоскопического образца. Возникающее при этом седловое уравнение, описывающее инстантонное решение, имеет вид  $D\nabla^2 \theta + i\omega \text{sh} \theta = 0$  с условием  $\theta = 0$  на границе, где величина  $\omega$ , определяемая уравнением самосогласования [39], обратно пропорциональна  $t$ . В пределе  $\omega \ll E_{Th}$  нетривиальное решение этого уравнения практически совпадает с решением  $\psi_2$  уравнения (2.5) для SNS-контакта при  $E \ll E_{Th}$ . В

результате оказываются одинаковыми действия инстантонов и в нашей задаче, и в задаче [39].

Начнем с длинного плоского SNS-контакта (рис. 1). Разность  $\psi_2 - \psi_1$  не мала при энергиях  $E \rightarrow 0$ , поэтому нужно напрямую решать уравнение (4.5). Заметим, что по мере уменьшения энергии  $\psi_1(0) \rightarrow 0$ , в то время как  $\psi_2(0) \rightarrow \infty$  (см. рис. 2). Это позволяет нам положить  $\psi_1 = 0$ , а для  $\psi_2$  воспользоваться «треугольным» приближением [39]:

$$\psi_2(x) = A + B \left(1 - \frac{2|x|}{L_x}\right), \quad (5.22)$$

основанном на том, что при малых энергиях в уравнении (4.5) можно пренебречь вторым слагаемым почти во всей области  $x$ , кроме окрестности нуля. Подставляя (5.22) в действие (4.2), интегрируя и разлагая граничный логарифм, находим

$$S_0 = \frac{\pi\nu D L_y L_z}{L_x} \times \left[ -B^2 + \frac{E}{BE_{Th}} (\text{ch}(A+B) - \text{ch} A) - 6\tilde{\gamma} \text{ch} A \right]. \quad (5.23)$$

Сначала рассмотрим случай идеальных границ, когда можно положить  $A = 0$ . После варьирования по  $B$  (с учетом  $B \gg 1$ ) получаем

$$2B = \frac{Ee^B}{2BE_{Th}}. \quad (5.24)$$

С логарифмической точностью получаем для  $B$

$$B = \ln \frac{E_{Th}}{E} = \ln \frac{E_g}{E}. \quad (5.25)$$

Подставляя этот результат обратно в (5.23), находим плотность состояний

$$\langle \rho \rangle \sim \frac{1}{\delta} \exp \left( -\frac{G_N}{4} \ln^2 \frac{E_g}{E} \right), \quad (5.26)$$

где  $G_N = 4\pi\nu D L_y L_z / L_x$ .

В случае туннельных границ между нормальным металлом и сверхпроводниками нужно варьировать (5.23) по обоим переменным в пределе  $A, B \gg 1$ . В результате получим

$$e^B = 6\tilde{\gamma} \frac{E_{Th}}{E} B = \frac{E_g}{E} B, \quad e^{A+B} = \frac{4E_{Th}}{E} B^2. \quad (5.27)$$

Здесь мы воспользовались равенством  $E_g = 6\tilde{\gamma} E_{Th}$ . С логарифмической точностью получаем следующее решение:

$$B = \ln \frac{E_g}{E}, \quad e^A = \frac{2}{3\tilde{\gamma}} \ln \frac{E_g}{E}. \quad (5.28)$$

В силу малости  $E/E_g$  и  $\tilde{\gamma}$  первый член в действии (5.23) доминирует. При этом плотность состояний, как и в случае контакта с идеальными границами, имеет вид (5.26). Это неудивительно, поскольку глубоко под щелью находятся сильно локализованные состояния, которые очень слабо связаны со сверхпроводящими берегами. Плотность таких состояний слабо зависит от свойств границы.

При достаточно низких энергиях полученный ответ перестает быть справедливым. Дело в том, что градиент  $\psi_2$  стремится к бесконечности, а уравнение диффузии, на основе которого была построена  $\sigma$ -модель, не учитывает нелокальных (баллистических) эффектов, которые становятся важными. Для применимости локальной теории необходимо выполнение условия  $|\nabla\psi_2| \sim B/L_x \ll 1/l$ , что приводит к ограничению на энергию

$$E \gg E_g \exp \left( -\frac{L_x}{l} \right). \quad (5.29)$$

Теперь рассмотрим двумерный случай. Для простоты будем предполагать, что нормальная область имеет форму диска радиуса  $R$  и толщины  $L_z$ , по всему краю соединенного со сверхпроводником. Так же, как и в предыдущем примере,  $\psi_1 = 0$ . Уравнение (4.5) для  $\psi_2$  запишем в полярных координатах, считая радиус равным единице и заменив гиперболический косинус экспонентой<sup>10)</sup>:

$$\psi_2'' + \frac{\psi_2'}{r} + \frac{E}{E_{Th}} e^{\psi_2} = 0, \quad \psi_2'(0) = 0. \quad (5.30)$$

Это уравнение имеет следующее решение:

$$\psi_2(r) = 2 \ln \frac{B\sqrt{8E_{Th}/E}}{B^2 + r^2}, \quad (5.31)$$

причем  $B$  нужно выбрать из граничного условия в (4.5).

Если граница между сверхпроводником и нормальным металлом прозрачная, то нужно потребовать выполнения условия  $\psi_2(1) = 0$ . При  $E \ll E_{Th}$  находим  $B = \sqrt{E/8E_{Th}}$ . Как и раньше, пренебрегая в (2.31) членом с энергией, получим для действия следующее выражение:

$$S = -S_0[\theta_2] = \frac{\pi\nu D}{4} R^2 L_z \times \int_{\sqrt{E/E_g}}^1 (\nabla\psi_2)^2 2\pi r dr = 4\pi^2 \nu D L_z \ln \frac{E_g}{E}. \quad (5.32)$$

<sup>10)</sup> Здесь  $E_{Th} = D/R^2$ .

Плотность состояний оказывается степенной функцией энергии [39]:

$$\langle \rho \rangle \sim \left( \frac{E}{E_g} \right)^{4\pi^2 \nu D L_z} = \left( \frac{E}{E_g} \right)^{\pi G_{\square}}. \quad (5.33)$$

В случае туннельной границы, заменяя в граничном условии (4.5) гиперболический синус на экспоненту, получаем

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{\tilde{\gamma} E_{Th}}} = \sqrt{\frac{E}{E_g}}. \quad (5.34)$$

В последнем равенстве мы использовали выражение  $E_g = 4\tilde{\gamma} E_{Th}$ , справедливое в двумерном случае. Итак, с логарифмической точностью результат (5.33) остается справедливым и в случае туннельной границы, т. е., как и в одномерном случае, сопротивление контактов не влияет на плотность состояний глубоко под щелью.

Для двумерного SNS-контакта другой формы ответ останется таким же по порядку величины, поскольку только  $E_g$  зависит от продольных размеров, и это изменит лишь общий численный коэффициент в выражении для плотности состояний.

Найдем область применимости полученного результата. Максимальный градиент  $\psi_2$  достигается вблизи центра:  $|\nabla \psi_2| \propto \sqrt{E_g/E}/R$  и должен быть меньше  $1/l$ . Таким образом, степенная зависимость плотности состояний имеет место при

$$E \gg E_g \left( \frac{l}{R} \right)^2. \quad (5.35)$$

Это условие гораздо сильнее, чем (5.29). В трехмерном случае рассуждения, аналогичные приведенным в этом разделе, совсем невозможны, так как соответствующее условие оказывается чересчур сильным. В этом случае, а также в двумерном случае при энергиях ниже (5.35), подщелевая плотность состояний может быть найдена с помощью баллистической  $\sigma$ -модели [42] (см. также [43]).

Отметим, что после замены  $E \rightarrow t_{\phi}^{-1}$  выражения (5.26) и (5.33) совпадают (с точностью до множителя) с функцией распределения  $\mathcal{P}(t_{\phi})$  времен релаксации соответствующей мезоскопической системы [44, 45]. Длинновременная асимптотика кондактанса выражается с ее помощью как  $G(t) \sim \int dt_{\phi} e^{-t/t_{\phi}} \mathcal{P}(t_{\phi})$ . Вычисляя интеграл методом перевала, находим в случае одномерной системы

$$G(t) \sim \exp \left[ -\frac{G_N}{4} \ln^2(\delta t) \right],$$

что в формализме Музыкантского и Хмельницкого соответствует замене  $i\omega \rightarrow G_N/t$ . Указанное обстоятельство объясняет происхождение различных

энергетических масштабов в рассматриваемой задаче и задаче про асимптотику кондактанса. Результаты (5.26) и (5.33) переходят в асимптотические выражения [39] для  $G(t)$  путем замены  $E_{Th}/E \rightarrow \delta t$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели плотность квазичастичных состояний в диффузных NS-системах при энергиях вблизи квазиклассической щели  $E_g \ll \Delta$ , возникающую за счет мезоскопических флуктуаций.

Для системы с идеальными контактами в рамках нульмерной  $\sigma$ -модели при наличии большого параметра  $\tilde{G} \propto E_g/\delta \gg 1$  найдено точное выражение (3.18) для усредненной плотности состояний при энергиях  $E$  в окрестности  $E_g \sim E_{Th} \sim D/L^2$ . При  $\varepsilon = (E_g - E)/E_g \geq \tilde{G}^{-2/3}$  плотность состояний экспоненциально убывает (см. (3.7)), что несколько напоминает поведение плотности состояний в полупроводниках с примесями — так называемый хвост Лифшица [13]. Полное число состояний в области хвоста оказывается порядка единицы для одномерной системы, т. е. найденное выражение для средней плотности состояний имеет смысл вероятности нахождения нижнего уровня энергии аномально ниже  $E_g$ . Полученные результаты находятся в полном согласии с феноменологической теорией случайных матриц [22] и позволяют определить область ее применимости и величины входящих в нее микроскопических параметров.

Для плоских SNS-контактов с большими поперечными размерами  $L_{y,z} \geq L_x \varepsilon^{-1/4}$  (см. рис. 1) аналогичные результаты получены с экспоненциальной точностью, см. (5.7) и (5.10). В силу большой площади контактов усредненная (интегральная) плотность состояний имеет в этом случае непосредственный смысл. Формально вполне аналогичной оказывается и задача о флуктуационном хвосте плотности состояний в сверхпроводнике с небольшой концентрацией магнитных примесей, рассмотренной впервые в работах [23, 24].

Физической причиной появления низколежащих электронных состояний в нашей задаче являются мезоскопические флуктуации в нормальной области контакта, которые приводят к наличию диффузионных электронно-дырочных (андреевских) траекторий с периодом, большим чем характерное диффузионное время  $L^2/D$ . Сходное явление наблюдается в нормальных системах при изучении асимптотик функции распределения плотности состояний, кондактанса и времен релаксации [44].

Мезоскопические флуктуации примесей приводят к тому, что в области энергий, отвечающих хорошо делокализованным состояниям, с экспоненциально малой вероятностью можно найти и почти локализованные состояния. Такие состояния обеспечивают anomalously медленную релаксацию тока к его равносному значению на очень больших временах (больше обратного среднего расстояния между уровнями размерного квантования  $\nu V$ ) — т. е. они служат в качестве «электронных ловушек». Вполне естественно, что такие ловушки должны проявляться и в задаче об NS-системе — именно они и приводят к появлению траекторий, anomalously долго диффундирующих между андреевскими отражениями. О непосредственной связи между «аномально локализованными состояниями» и низколежащими состояниями в SNS-контакте свидетельствуют наши результаты для плотности состояний в области низких энергий  $E \ll E_g$ , см. (5.26) и (5.33) соответственно для одномерного и двумерного случаев. При замене  $E \rightarrow t_\phi^{-1}$  эти формулы совпадают (с точностью до нормировки) с функцией распределения времен релаксации  $t_\phi$  мезоскопической системы [39, 44, 45].

Мы рассмотрели также случай гибридных NIS-структур с плохой прозрачностью NS-границ. Такие системы описываются двумя характерными параметрами: полным туннельным контактансом  $G_T$  между нормальной и сверхпроводящими частями и эффективной средней прозрачностью одного канала  $\tilde{\gamma}$ , которая зависит как от свойств контактов, так и от геометрии системы (см. (4.18)). В пределе малой эффективной прозрачности канала  $\tilde{\gamma} \ll 1$  квазиклассический край спектра сдвигается в область малых энергий,  $E_g = G_T \delta / 8\pi$ . Одновременно с этим качественно изменяется поведение плотности состояний над порогом: при уменьшении энергии плотность состояний сперва растет как в теории БКШ,  $\langle \rho(E) \rangle \propto |\varepsilon|^{-1/2}$ , и лишь при  $|\varepsilon| < \tilde{\gamma}^{2/3}$  начинает убывать по закону  $\langle \rho(E) \rangle \propto \sqrt{|\varepsilon|}$ .

В пределе  $\tilde{\gamma} \ll G_T^{-3}$  корневой участок  $\langle \rho(E) \rangle \propto \sqrt{|\varepsilon|}$  вблизи порога пропадает совсем: квазиклассическое число состояний на этом участке становится меньше единицы. Как следствие, подщелевая

плотность состояний, даваемая по-прежнему нульмерной  $\sigma$ -моделью, не описывается более формулой (3.18), а дается выражением (4.44). Это находится в согласии с отмеченной в работе [24] связью между корневой зависимостью ( $\langle \rho(E) \rangle \propto \sqrt{|\varepsilon|}$ ) плотности состояний над порогом и применимостью теории случайных матриц в нульмерных системах. При этом в пределе  $\tilde{\gamma} \ll G_T^{-3}$  хвост становится сильным: в хвосте находится много уровней, а не один, как это было в случае прозрачных границ. В промежуточном случае,  $G_T^{-3} \ll \tilde{\gamma} \ll 1$ , в непосредственной окрестности порога реализуется асимптотика (3.7), а при  $\tilde{\gamma}^{2/3} \ll \varepsilon \ll 1$  — асимптотика (4.44); число подщелевых состояний при этом порядка единицы.

Мы благодарны К. Бенаккеру, Д. Иванову, В. Лебедеву, А. Мирлину, Ю. Назарову, Б. Саймонсу и А. Шитову за многочисленные полезные обсуждения. Настоящее исследование выполнено при финансовой поддержке Швейцарского и Голландского научных фондов, РФФИ (проект 01-02-17759), в рамках программы «Квантовая макрофизика» РАН и Фонда содействия отечественной науке (М. А. С.).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Параметризация матрицы $W$

Матрица  $W$  содержит по 8 коммутирующих и грассмановых параметров и удовлетворяет уравнениям (2.43). Действительные переменные мы обозначим буквами  $a, b, c, d, m, n, p, q$ . Первые четыре параметризуют FF-, а последние — BB-сектор  $W$ :

$$W^{FF} = \frac{1}{2} \left( -a\sigma_z\tau_x + b\sigma_z\tau_y - c\sigma_x + d\sigma_y \right), \quad (A.1)$$

$$W^{BB} = \frac{i}{2} \left( m\sigma_z\tau_x + n\sigma_x\tau_z + p \frac{\sigma_y\tau_z - \sigma_z\tau_y}{\sqrt{2}} - q \frac{\sigma_y\tau_z + \sigma_z\tau_y}{\sqrt{2}} \right). \quad (A.2)$$

Грассмановы переменные ( $\lambda, \mu, \zeta, \varkappa, \eta, \gamma, \xi, \omega$ ) параметризуют FB-сектор:

$$W^{FB} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \lambda - \mu + \zeta - \varkappa & \lambda + \mu + \zeta + \varkappa & 0 \\ \lambda - \mu - \zeta + \varkappa & 0 & 0 & \lambda + \mu - \zeta - \varkappa \\ -\gamma - \eta + \xi + \omega & 0 & 0 & \gamma - \eta + \xi - \omega \\ 0 & -\gamma - \eta - \xi - \omega & \gamma - \eta - \xi + \omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (A.3)$$

Условие антисамосопряженности  $W + \bar{W} = 0$  позволяет выразить BF-сектор  $W$  через FB-сектор:  $W^{BF} = i\tau_x \sigma_x (W^{FB})^T \sigma_y \tau_x$ .

Можно установить соответствие между коммутирующими параметрами  $W$  и флуктуациями углов в матрице  $Q$ . Связь имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a &= 2 \sin \theta_F \delta \varphi_F, & b &= 2\delta\theta_F, \\ c &= 2 \cos \theta_F \delta k_F \Big|_{\chi_F=\pi/2}, \\ d &= 2 \cos \theta_F \delta k_F \Big|_{\chi_F=0}, \\ m &= 2i \sin \theta_B \delta \varphi_B, & n &= 2i \sin k_B \chi_B, \\ p &= i\sqrt{2}\delta\beta, & q &= i\sqrt{2}\delta\alpha. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Отметим, что на первом инстантоне переменная  $n$  соответствует нулевой моде — вращению угла  $\chi_B$ .

Чтобы совершить переход от интегрирования по  $Q$  к интегрированию по  $W$ , нужно вычислить якобиан соответствующего преобразования. Он, однако, оказывается равным единице, что легко устанавливается из следующего равенства:

$$\begin{aligned} \text{str}(dQ)^2 &= \text{str}(dW)^2 = da^2 + db^2 + dc^2 + dd^2 + dm^2 + \\ &+ dn^2 + dp^2 + dq^2 + d\lambda d\eta + d\mu d\gamma + \\ &+ d\zeta d\xi + d\chi d\omega. \end{aligned} \tag{A.5}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Интегралы типа Эйри

В этом разделе мы посчитаем интеграл (3.16). По  $w$  можно проинтегрировать сразу (контур  $C_1$  на рис. 3). В результате плотность состояний сведется к сумме двух вкладов:

$$\langle \rho \rangle = -\frac{1}{4\pi\Delta_g} \text{Im} [\text{Ai}(\epsilon)\rho_1(\epsilon) + \text{Ai}'(\epsilon)\rho_2(\epsilon)], \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned} \rho_1(\epsilon) &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl (l^3 + 3\epsilon l - lm + 1) \times \\ &\times \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right), \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned} \rho_2(\epsilon) &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl (3l^2 - m + \epsilon) \times \\ &\times \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right). \end{aligned} \tag{B.3}$$

Для вычисления  $\rho_{1,2}(\epsilon)$  будем пользоваться следующей тактикой. Сначала исключим величину  $m$  из

предэкспоненты, выразив ее через  $\partial/\partial l$ , затем избавимся от производных интегрированием по частям, выразим  $l$  через  $\partial/\partial m$  и, наконец, проинтегрируем по  $m$  там, где это возможно. В результате интеграл по  $l$  окажется тривиальным. Итак, начнем с  $\rho_1(\epsilon)$ :

$$\begin{aligned} \rho_1(\epsilon) &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl \left(-l \frac{\partial}{\partial l} + 2l^3 + 2\epsilon l + 1\right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl (2l^3 + 2\epsilon l + 2) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl \left(2 \frac{\partial^3}{\partial m^3} + 2\epsilon \frac{\partial}{\partial m} + 2\right) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= \left[ \left(-2\epsilon - 2 \frac{\partial^2}{\partial m^2}\right) \Big|_{m=0} + 2 \int_0^\infty dm \right] \times \\ &\times \int_{C_3} dl \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right). \end{aligned} \tag{B.4}$$

Аналогично для  $\rho_2(\epsilon)$

$$\begin{aligned} \rho_2(\epsilon) &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl \left(4l^2 - \frac{\partial}{\partial l}\right) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= \int_0^\infty dm \int_{C_3} dl \left(-4 \frac{\partial}{\partial m}\right) \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) = \\ &= -4 \frac{\partial}{\partial m} \Big|_{m=0} \int_{C_3} dl \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right). \end{aligned} \tag{B.5}$$

Интеграл по  $l$ , входящий в выражения для  $\rho_{1,2}$ , равен

$$\begin{aligned} \int_{C_3} dl \exp\left(\frac{l^3}{3} + ml - \epsilon l\right) &= \\ &= \pi [\text{Bi}(\epsilon - m) - i \text{Ai}(\epsilon - m)]. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Подставляя  $\rho_{1,2}$  в (Б.1) и используя функциональные соотношения для функций Эйри, приходим к выражению (3.18).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Mesoscopic Phenomena in Solids*, ed. by B. L. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam (1991).

2. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **49**, 65 (1965).
3. И. О. Кулик, А. Н. Омелянчук, ФНТ **3**, 945 (1977).
4. J. A. Melsen et al., Europhys. Lett. **35**, 7 (1996); Physica Scripta **69**, 223 (1997).
5. A. Lodder and Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. B **58**, 5783 (1998).
6. D. Taras-Semchuk and A. Altland, Phys. Rev. B **64**, 014512 (2001).
7. G. Eilenberger, Z. Phys. **214**, 195 (1968).
8. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭФТ **55**, 2262 (1968).
9. K. Usadel, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970).
10. А. А. Голубов, М. Ю. Куприянов, ЖЭТФ **96**, 1420 (1989).
11. F. Zhou et al., J. Low Temp. Phys. **110**, 841 (1998).
12. S. Pilgram, W. Belzig, and C. Bruder, Phys. Rev. B **62**, 12462 (2000).
13. И. М. Лифшиц, УФН **83**, 617 (1964).
14. Л. Б. Иоффе, М. В. Фейгельман, ЖЭТФ **89**, 654 (1985).
15. E. Brezin, D. J. Gross, and C. Itzykson, Nucl. Phys. B **235** [FS], 24 (1984).
16. К. В. Efetov and V. G. Marikhin, Phys. Rev. B **40**, 12126 (1989).
17. E. P. Wigner, Ann. Math. **53**, 36 (1951).
18. F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 140, 157, 166 (1962).
19. M. L. Mehta, *Random Matrices*, Academic, New York (1991).
20. C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997).
21. К. Б. Ефетов, ЖЭТФ **83**, 883 (1982).
22. M. G. Vavilov, P. W. Brower, V. Ambegaokar, and C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett. **86**, 874 (2001).
23. A. Lamacraft and B. D. Simons, Phys. Rev. Lett. **85**, 4783 (2000).
24. A. Lamacraft and B. D. Simons, Phys. Rev. B **64**, 014514 (2001).
25. S. F. Edwards and P. W. Anderson, J. Phys. F **5**, 965 (1975); A. Nitzan, K. H. Freed, and M. H. Cohen, Phys. Rev. B **15**, 4476 (1977).
26. K. B. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge University Press, New York (1997).
27. A. Altland, B. D. Simons, and D. Taras-Semchuk, Письма в ЖЭТФ **67**, 21 (1997); Adv. Phys. **49**, 321 (2000).
28. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **39**, 1781 (1960).
29. P. M. Ostrovsky, M. A. Skvortsov, and M. V. Feigel'man, Phys. Rev. Lett. **87**, 027002 (2001).
30. P. M. Ostrovsky, M. A. Skvortsov, and M. V. Feigel'man, Письма в ЖЭТФ **75**, 407 (2002).
31. М. А. Скворцов, В. Е. Кравцов, М. В. Фейгельман, Письма в ЖЭТФ **68**, 84 (1998).
32. C. A. Tracy and H. Widom, Comm. Math. Phys. **159**, 151 (1994); **177**, 727 (1996).
33. Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **48**, 1407 (1965).
34. T. Guhr, A. Müller-Groeling, and H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).
35. A. Altland and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997).
36. А. В. Зайцев, ЖЭТФ **86**, 1742 (1984).
37. М. Ю. Куприянов, В. Ф. Лукичев, ФНТ **8**, 1045 (1982).
38. W. Belzig and Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. B **87**, 197006 (2001).
39. B. A. Muzykantskii, and D. E. Khmel'nitskii, Phys. Rev. B **51**, 5480 (1995).
40. V. I. Fal'ko and K. B. Efetov, Europhys. Lett. **32**, 627 (1995).
41. A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **53**, 1168 (1996).
42. B. A. Muzykantskii and D. E. Khmel'nitskii, E-print archives, cond-mat/9601045.
43. A. D. Mirlin, Письма в ЖЭТФ **62**, 583 (1995).
44. B. L. Altshuler, V. E. Kravtsov, and I. V. Lerner, in *Mesoscopic Phenomena in Solids*, ed. by B. L. Altshuler, P. A. Lee, and R. A. Webb, Elsevier Science Publishes B. V., Amsterdam (1991), p. 449.
45. A. D. Mirlin, Phys. Rep. **326**, 259 (2000).