

СИЛА СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ, КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРЕНИЯ И ДИФФУЗИИ ДЛЯ АТОМОВ В РЕЗОНАНСНОМ НЕОДНОРОДНО ПОЛЯРИЗОВАННОМ ПОЛЕ

А. В. Безвербный^b, О. Н. Прудников^a, А. В. Тайченачев^{a*}, А. М. Тумайкин^a, В. И. Юдин^a

^a Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия

^b Морской государственный университет
690059, Владивосток, Россия

Поступила в редакцию 6 мая 2002 г.

В рамках квазиклассического подхода движение медленных атомов с вырожденными энергетическими уровнями в резонансном неоднородно поляризованном лазерном поле описывается уравнением Фоккера–Планка для функции распределения атомов в фазовом пространстве. Для пространственно-неоднородных коэффициентов уравнения используется разложение по градиентам поля. Для замкнутых атомных переходов $J_g = J \rightarrow J_e = J + 1$ (J_g и J_e — полные угловые моменты основного и возбужденного состояний) приводятся новые аналитические результаты для силы светового давления, коэффициентов трения и диффузии в импульсном пространстве, позволяющие исследовать кинетические эффекты (лазерное охлаждение, локализацию в оптических потенциальных ямах и т. п.) в поле произвольной одно-, двух- или трехмерной конфигурации. В ряде случаев дается качественная интерпретация новых вкладов в коэффициент трения.

PACS: 32.80.Bx, 32.80.Pj, 42.50.Vk

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что основные успехи в области лазерного охлаждения и захвата нейтральных атомов связаны с использованием полевых конфигураций с пространственным градиентом поляризации. Градиенты поляризации поля лежат в основе работы магнитооптической ловушки, позволяют преодолеть доплеровский предел охлаждения, используются при формировании оптических решеток и в ряде других приложений. Такие конфигурации возникают всякий раз, когда поле формируется интерферирующими лазерными пучками, направления распространения и векторы поляризации которых не совпадают. Задача теоретического описания движения атома в неоднородно поляризованном поле достаточно сложна и требует учета как всевозможных эффектов отдачи, так и процессов оптической ориентации, связанных с перераспределением атомов по магнитным подуровням. В частности, охлаждение ниже

доплеровского предела ($T_D \sim 10^{-3}$ К) обусловлено использованием лазерных полей, в которых ориентация или эксцентриситет эллипса поляризации меняются на расстояниях порядка длины волны света. В этих случаях возникает своеобразная корреляция процессов оптической ориентации основного состояния, поступательного движения и передачи импульса от поля атомам, являющаяся общей причиной возникновения новых кинетических эффектов.

Основы теории субдоплеровского охлаждения были заложены в работе Далибарда и Коэн-Таннуджи [1], в которой в рамках квазиклассического приближения рассматривались простейшие одномерные конфигурации поля: встречные волны с ортогональными линейными ($\text{lin} \perp \text{lin}$) и круговыми ($\sigma_+ - \sigma_-$) поляризациями (в первом случае реализуется конфигурация поля с пространственным градиентом эллиптичности, во втором — с пространственным градиентом угла поворота эллипса поляризации), и простейшие атомные переходы из класса $J \rightarrow J + 1$ (соответственно $1/2 \rightarrow 3/2$ и

*E-mail: avt@admin.nsu.ru

1 \rightarrow 2). Субдоплеровское охлаждение реализуется также на переходах из класса $J \rightarrow J$ (J — полуцелое), что было продемонстрировано в работах [2, 3] на примере $1/2 \rightarrow 1/2$ перехода. Несмотря на большое количество теоретических работ, посвященных данному типу лазерного охлаждения, аналитическое рассмотрение коэффициентов трения и диффузии до сих пор ограничивалось малыми величинами углового момента и простейшими конфигурациями поля. В частности, исследовалась зависимость параметров охлаждения от угла между линейными поляризациями встречных волн в $\text{lin}-\theta\text{-lin}$ -конфигурации [2, 4] и влияние дисбаланса интенсивностей циркулярно поляризованных волн [5]. Расчеты, связанные с реальными экспериментами, в которых обычно используются переходы с большими значениями момента (^{23}Na , ^{87}Rb — $J = 2$; ^{85}Rb — $J = 3$; ^{133}Cs — $J = 4$) и достаточно сложные (двухмерные и трехмерные) полевые конфигурации, проводились различными численными методами [6].

Такая ситуация объясняется отчасти тем, что до серии работ [7–9] не были известны аналитические выражения для стационарной матрицы плотности атомов в поле с произвольной эллиптической поляризацией даже без учета поступательного движения и эффектов отдачи. Эта задача, образующая нулевое приближение при квазиклассическом рассмотрении кинетики медленных атомов, была полностью решена как для переходов $J \rightarrow J$ (J — полуцелое) [7], так и для $J \rightarrow J + 1$ [8–11]. Уже из самого вида решения следовало существование поляризационных особенностей кинетики, не рассмотренных ранее. Так, даже в простейшем случае однородно поляризованной стоячей волны и атомного перехода $1/2 \rightarrow 1/2$ были обнаружены дополнительные (по сравнению с моделью невырожденных состояний) вклады в трение и диффузию, обусловленные эллиптичностью поля [12]. Еще более неожиданные особенности были обнаружены при рассмотрении кинетики атомов в неоднородно поляризованных полях, имеющих пространственные градиенты одновременно нескольких полевых параметров (эллиптичности, угла поворота эллипса, амплитуды и фазы поля) [13, 14].

Основная цель настоящей работы заключается в развитии аналитических инвариантных методов описания движения атомов в резонансном неоднородно поляризованном поле наиболее общей конфигурации. Другими словами, мы будем стремиться, не связывая рассмотрение с какой-либо конкретной полевой конфигурацией (за исключением разд. 8,

где, в качестве иллюстрации, рассматривается частный класс одномерных конфигураций поля), получить результаты, пригодные для произвольного поля. Основные приближения, позволяющие осуществить эту программу, таковы. Во-первых, предполагая малость импульса фотона $\hbar k$ по отношению к дисперсии атомного импульса Δp , мы будем использовать квазиклассическое приближение для движения центра масс атомов. Как известно [15, 16], в этом приближении эволюция атомного ансамбля на кинетическом этапе описывается уравнением Фоккера–Планка для функции распределения атомов в фазовом пространстве. Задача, следовательно, сводится к отысканию коэффициентов этого уравнения, т. е. силы и диффузии (в пространстве импульсов). Во-вторых, представляя эти коэффициенты в виде ряда по степеням скорости атома, мы ограничимся низшими порядками (нулевым и первым для силы и нулевым для диффузии). Это соответствует приближению медленных атомов, когда за характерные времена релаксации по внутренним степеням свободы атом смещается на расстояние много меньшее длины волны света.

Разумеется, эти приближения накладывают определенные ограничения на применимость полученных результатов к практическим задачам лазерного охлаждения и захвата атомов. В частности, как известно из теории [2, 6] и экспериментов [17] по субдоплеровскому охлаждению, температура атомов с уменьшением интенсивности поля (или с увеличением отстройки от резонанса) сначала убывает (приблизительно по линейному закону), а затем резко возрастает. Вблизи минимума этой зависимости приближение медленных атомов заведомо неприменимо, а при дальнейшем уменьшении интенсивности нарушается и условие квазиклассичности движения. Тем не менее в области линейной зависимости температуры от интенсивности используемые приближения справедливы и квазиклассическая кинетика медленных атомов описывает экспериментальные результаты достаточно хорошо.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ансамбль атомов с полными угловыми моментами J_g и J_e в основном и возбужденном состояниях, резонансно взаимодействующий с монохроматическим световым полем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \text{c. c.} \quad (1)$$

Гамильтониан взаимодействия с внешним полем (1) в дипольном приближении во вращающемся на частоте поля базисе не зависит явно от времени:

$$\hat{H}_{D-E}(\mathbf{r}) = \hbar\Omega(\mathbf{r})\hat{V}(\mathbf{r}) + \text{h.c.}, \quad (2)$$

где частота Раби $\Omega = -\langle e||d||g\rangle E/\hbar$ задает скалярную амплитуду взаимодействия, $\langle e||d||g\rangle$ — приведенный матричный элемент оператора дипольного момента. Тензорную часть оператора взаимодействия в соответствии с теоремой Вигнера–Эккарта представим в виде $\hat{V} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E}/E$, где ковариантные компоненты векторного оператора $\hat{\mathbf{T}}$ выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана:

$$\hat{T}_q = \sum_{(m)} |J_e, m_e\rangle C_{J_g, m_g; 1, q}^{J_e, m_e} \langle J_g, m_g|. \quad (3)$$

Гамильтониан свободного атома в системе центра масс при этом можно записать следующим образом:

$$\hat{H}_0 = -\hbar\delta \hat{\Pi}_e, \quad (4)$$

где $\delta = \omega - \omega_0$ — отстройка частоты поля от частоты атомного перехода, а проекционный оператор

$$\hat{\Pi}_e = \sum_{\mu_e} |J_e, \mu_e\rangle \langle J_e, \mu_e|$$

представляется единичной матрицей в базисе волновых функций подуровней возбужденного состояния (аналогично определяется $\hat{\Pi}_g$, проектор на основное состояние).

Квантовое кинетическое уравнение для атомной матрицы плотности в вигнеровском представлении для поступательных степеней свободы [18] имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p} \cdot \nabla_r}{M} \right) \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = & -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_0, \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \right] - \\ & -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{D-E} \left(\mathbf{r} + \frac{i\hbar\nabla_p}{2} \right), \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \right. \\ & \left. - \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \hat{H}_{D-E} \left(\mathbf{r} - \frac{i\hbar\nabla_p}{2} \right) \right] - \\ & - \gamma \frac{1}{2} \left\{ \hat{\Pi}_e, \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \right\} + \gamma \frac{3}{2} \times \\ & \times \left\langle \sum_{s=1,2} (\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_s(\mathbf{k}))^\dagger \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}) (\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_s(\mathbf{k})) \right\rangle_{\Omega_k}, \quad (5) \end{aligned}$$

где γ — скорость радиационного затухания возбужденного уровня. Векторные операторы ∇_r и ∇_p действуют на вигнеровскую матрицу плотности $\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, условие нормировки для которой записывается в виде

$$\int \text{Tr} \{ \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \} d^3r d^3p = 1. \quad (6)$$

Индукцированный эффект отдачи описывается операторами ∇_p в формуле (5) и связан с пространственной неоднородностью энергии взаимодействия с внешним полем. Спонтанный эффект отдачи проявляется в члене, описывающем радиационный приход (последнее слагаемое в правой части (5)) в виде сдвига аргумента вигнеровской матрицы плотности на импульс фотона $\hbar\mathbf{k}$, по направлениям которого проводится усреднение (символ $\langle \dots \rangle_{\Omega_k}$). Единичные векторы $\mathbf{e}_s(\mathbf{k})$ поляризации спонтанных фотонов ортогональны направлению вылета.

Как хорошо известно [19–21], наличие малого параметра $\hbar k/\Delta p \ll 1$ (отношение импульса резонансного фотона к дисперсии атомного импульса) позволяет отделить быстрые процессы упорядочения по внутренним степеням свободы от медленных процессов, связанных с поступательным движением. Кинетическому этапу эволюции соответствуют времена установления стационарного (в нулевом порядке по отдаче) распределения по внутренним степеням свободы $t \gg \tau_{max} = \max\{\gamma^{-1}, (\gamma S)^{-1}\}$, где параметр насыщения определен следующим образом:

$$S = \frac{|\Omega|^2}{\gamma^2/4 + \delta^2}. \quad (7)$$

При этом динамика атомного ансамбля определяется медленными процессами изменения функции распределения по поступательным степеням свободы $w(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \}$. Редукция исходного квантового кинетического уравнения (5) к замкнутому уравнению для $w(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ с точностью до второго порядка по параметру отдачи [19, 15] приводит к уравнению Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = & \left[- \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \right. \\ & \left. + \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_j} D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \right] w(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (8) \end{aligned}$$

коэффициенты которого $F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ и $D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ имеют смысл декартовых компонент вектора силы и тензора диффузии (в пространстве импульсов) для атома в светом поле. Здесь используется обозначение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p} \cdot \nabla_r}{M}.$$

При выводе (8) предполагалось, что вигнеровская матрица плотности как функция импульса мало меняется на масштабах импульса фотона $\hbar k$. Это требование приводит к условию

$$\min\{\gamma, \gamma S\} \gg \frac{\mathcal{E}_r}{\hbar}. \quad (9)$$

В противном случае элементы матрицы плотности являются резко осциллирующими (в масштабе $\hbar k$) функциями импульса [15, 22].

Обсудим более детально условие возникновения двух существенно различных временных масштабов для эволюции по внутренним и поступательным степеням свободы. Как видно из (8), скорость изменения функции распределения определяется силой светового давления и дисперсией атомного импульса: $dw/dt \approx F/\Delta p w$. Эта скорость должна быть существенно меньше минимальной скорости релаксации по внутренним степеням свободы:

$$\frac{F}{\Delta p} \ll \min\{\gamma, \gamma S\}. \quad (10)$$

Если условие (10) не выполняется, кинетика атомов не описывается одним уравнением (8), т. е. имеет существенно многокомпонентный характер (см., например, [16]). Для вынужденного светового давления величина силы определяется скоростью перераспределения фотонов из одной моды внешнего поля в другую, при этом условие (10) может приводить к более жестким, чем $\hbar k/\Delta p \ll 1$, ограничениям. Так, в сильном поле $S \gg 1$ вынужденная сила пропорциональна частоте Раби $F \approx \hbar k \Omega$, что приводит к условию [16]

$$\frac{\hbar k}{\Delta p} \ll \frac{\gamma}{\Omega} \ll 1.$$

В обратном пределе $S \ll 1$ при больших отстройках $\delta \gg \gamma$ для силы имеем оценку $F \approx \hbar k \delta S$. В результате условие разделения временных масштабов записывается в виде

$$\frac{\hbar k}{\Delta p} \ll \frac{\gamma}{\delta} \ll 1.$$

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕДЛЕННЫХ АТОМОВ

Нахождение коэффициентов уравнения Фоккера–Планка (8) в аналитическом виде в случае неоднородного по интенсивности и поляризации поля возможно только в различных предельных ситуациях. Применительно к задачам лазерного охлаждения определенным интерес (см. Введение) представляет рассмотрение медленных атомов, которые смещаются на расстояния, значительно меньшие длины волны света, за характерные времена упорядочения по внутренним степеням свободы, т. е. $v\tau_{max} \ll \lambda$, что с учетом определения τ_{max} приводит к неравенству

$$kv \ll \min\{\gamma, \gamma S\}. \quad (11)$$

При выполнении этого условия, для корректного учета диссипативных процессов в выражении для

силы достаточно ограничиться линейным приближением по скорости:

$$F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \approx F_i(\mathbf{r}) + \sum_j \xi_{ij}(\mathbf{r}) v_j, \quad (12)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ представляет силу светового давления на неподвижный атом в точке \mathbf{r} . Антисимметричная часть тензора ξ_{ij} ($\propto \epsilon_{ijk} b_k$) соответствует «эффективной» силе Лоренца ($\propto \mathbf{v} \times \mathbf{b}$), а симметричная часть определяет силу трения. Для диффузии обычно ограничиваются нулевым приближением по скорости:

$$D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \approx D_{ij}(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Отметим, что известную осторожность при использовании приближения медленных атомов следует соблюдать в случае конфигураций поля, обладающих узлами (например, в стоячей волне [16]) либо резкими градиентами с характерным пространственным масштабом $z_{sc} \ll \lambda$ (например, в конфигурации lin- θ -lin при $\theta \ll 1$ [2]). В обоих случаях условие медленности становится более жестким, чем (11). В сильной стоячей волне $\Omega \gg \delta > \gamma$ линейная зависимость силы от скорости ограничена, как известно [16], условием

$$\frac{kv}{\gamma} \ll \frac{\delta}{\Omega} \ll 1.$$

В случае резких градиентов вместо (11) следует использовать условие

$$\frac{v}{z_{sc}} \ll \min\{\gamma, \gamma S\}.$$

Приведем общие выражения для кинетических коэффициентов $F_i(\mathbf{r})$, $\xi_{ij}(\mathbf{r})$, $D_{ij}(\mathbf{r})$. Сила светового давления на неподвижный атом определяется средним значением оператора силы

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = -\nabla_r \hat{H}(\mathbf{r}), \quad (14)$$

где $\hat{H}(\mathbf{r}) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{D-E}(\mathbf{r})$ — полный гамильтониан атома в точке \mathbf{r} :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \hat{\sigma}(\mathbf{r}) \right\}. \quad (15)$$

Матрица плотности $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ является решением системы стационарных уравнений Блоха:

$$-\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(\mathbf{r}), \hat{\sigma}] - \hat{\Gamma} \{ \hat{\sigma} \} = 0, \quad \text{Tr} \{ \hat{\sigma} \} = 1. \quad (16)$$

Здесь пространственно-однородный оператор $\hat{\Gamma}$ описывает радиационную релаксацию:

$$\hat{\Gamma} \{ \hat{\sigma} \} = \frac{\gamma}{2} \{ \hat{\Pi}_e, \hat{\sigma} \} - \gamma \sum_q \hat{T}_q^\dagger \hat{\sigma} \hat{T}_q. \quad (17)$$

Это решение, явный аналитический вид которого представлен в работах [8–11], описывает стационарное распределение атомов по магнитным подуровням основного и возбужденного состояний в нулевом приближении по параметру отдачи и скорости атомов. Тензор ξ_{ij} пропорционален пространственному градиенту $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$:

$$\xi_{ij}(\mathbf{r}) = -\text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i(\mathbf{r}) \nabla_j \hat{\sigma}(\mathbf{r}) \}, \quad (18)$$

где ∇_j — декартовы компоненты векторного оператора ∇ . Спонтанная составляющая тензора диффузии, подобно силе светового давления, выражается при помощи $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$:

$$D_{ij}^{(sp)}(\mathbf{r}) = \frac{\gamma(\hbar k)^2}{5} \text{Tr} \left\{ \left(\delta_{ij} \hat{\Pi}_e - \frac{1}{4} (\hat{T}_i \hat{T}_j^\dagger + \hat{T}_j \hat{T}_i^\dagger) \right) \hat{\sigma}(\mathbf{r}) \right\}. \quad (19)$$

Тензор вынужденной диффузии представим в виде

$$D_{ij}^{(ind)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left(\hat{\varphi}_i(\mathbf{r}) \delta \hat{F}_j(\mathbf{r}) + \delta \hat{F}_j(\mathbf{r}) \hat{\varphi}_i(\mathbf{r}) \right) \hat{\sigma}(\mathbf{r}) \right\}, \quad (20)$$

где введено обозначение $\delta \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{F}$ для флуктуации оператора силы. В формулах (18) и (20), обобщая метод работы [12] на три измерения, мы ввели вспомогательные матрицы $\hat{\varphi}_i$, что позволило единым образом записать выражения для коэффициентов трения и вынужденной диффузии. Матрицы $\hat{\varphi}_i$ являются решением неоднородного линейного уравнения

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\gamma}{2} + i\delta \right) \hat{\Pi}_e \hat{\varphi}_i(\mathbf{r}) + \left(\frac{\gamma}{2} - i\delta \right) \hat{\varphi}_i(\mathbf{r}) \hat{\Pi}_e \right] - \\ & - \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_{D-E}(\mathbf{r}), \hat{\varphi}_i(\mathbf{r}) \right] - \gamma \sum_q \hat{T}_q \hat{\varphi}_i(\mathbf{r}) \hat{T}_q^\dagger = \\ & = \delta \hat{F}_i(\mathbf{r}), \quad (21) \end{aligned}$$

источником в котором является флуктуация оператора силы. Тензор вынужденной диффузии $D_{ij}^{(ind)}(\mathbf{r})$ квадратичен по отношению к $\delta \hat{\mathbf{F}}$, что соответствует стандартному определению диффузии через двухвременной коррелятор оператора силы (см., например, [20]). Как отмечалось в работе [12], система линейных уравнений (21) вырождена, т.е. матрицы $\hat{\varphi}_i$ определены с точностью до калибровочного условия, в качестве которого, например, можно использовать $\text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \} = 0$.

Альтернативный подход к расчету тензоров ξ_{ij} и $D_{ij}^{(ind)}$ заключается в решении уравнений для правок к вигнеровской матрице плотности первого

порядка по скорости и отдаче. При этом оказывается возможным инвариантное описание, основанное на разложении атомной матрицы плотности по базису биполярных гармоник [14]. Такие уравнения в ряде случаев более удобны при интерпретации различных вкладов в ξ_{ij} и $D_{ij}^{(ind)}$, что и будет использоваться ниже.

4. КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ В ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Для анализа кинетики атомов в лазерном поле произвольной конфигурации удобно представление кинетических коэффициентов в виде разложения по пространственным градиентам поля. В общем случае имеется шесть вещественных величин, полностью задающих локальное значение комплексной амплитуды поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Можно инвариантным образом выделить реальную амплитуду E , фазу Φ и единичный комплексный вектор поляризации \mathbf{e} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) \exp(i\Phi(\mathbf{r})) \mathbf{e}(\mathbf{r}). \quad (22)$$

Как обычно, будем полагать $\text{Im}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = 0$ и введем в рассмотрение угол эллиптичности $\varepsilon(\mathbf{r})$:

$$\cos(2\varepsilon) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}. \quad (23)$$

Отметим, что неоднозначность в определении реальной амплитуды, фазы и эллиптичности исчезает, если потребовать, чтобы они были аналитическими функциями координат. Кроме E , Φ и ε необходимы три угла, задающие ориентацию эллипса поляризации: $\phi(\mathbf{r})$ — угол поворота относительно оси, ортогональной эллипсу поляризации, $\alpha(\mathbf{r})$ и $\beta(\mathbf{r})$ — углы поворота относительно главных осей эллипса поляризации. Для углов невозможно дать инвариантное определение через векторы поляризации \mathbf{e} и сопряженный ему \mathbf{e}^* , подобное (23). Тем не менее это можно сделать для их пространственных градиентов следующим образом. Например, записывая в локальной системе координат с осью

$$\mathbf{e}_0 = \frac{i\mathbf{e} \times \mathbf{e}^*}{\sin(2\varepsilon)} \quad (24)$$

разложение вектора поляризации по циркулярным ортам $\mathbf{e}_{\pm 1}$ в виде

$$\mathbf{e} = \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) e^{-i\phi} \mathbf{e}_{+1} + \sin\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\phi} \mathbf{e}_{-1}$$

и вычисляя скалярное произведение $\mathbf{e} \cdot \nabla_i \mathbf{e}^*$, находим, что

$$\sin(2\varepsilon) \nabla_i \phi = \text{Im}(\mathbf{e} \cdot \nabla_i \mathbf{e}^*). \quad (25)$$

Аналогично, рассматривая проекцию бесконечно малого приращения вектора поляризации на ось \mathbf{e}_0 , получаем

$$\cos(\varepsilon)\nabla_i\alpha = \text{Re}(\mathbf{e}_0 \cdot \nabla_i\mathbf{e}), \quad (26)$$

$$\sin(\varepsilon)\nabla_i\beta = \text{Im}(\mathbf{e}_0 \cdot \nabla_i\mathbf{e}). \quad (27)$$

По определению (15) сила светового давления на неподвижный атом линейна по градиентам поля и ее можно записать в виде:

$$\mathbf{F} = \hbar \sum_{\kappa=1}^6 \mathcal{F}_{\kappa} \mathbf{g}^{(\kappa)}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(1)} &= \nabla \ln E, & \mathbf{g}^{(2)} &= \nabla \Phi, \\ \mathbf{g}^{(3)} &= \nabla \varepsilon, & \mathbf{g}^{(4)} &= \nabla \phi, \\ \mathbf{g}^{(5)} &= \nabla \alpha, & \mathbf{g}^{(6)} &= \nabla \beta. \end{aligned} \quad (29)$$

Для квадратичных по градиентам поля тензоров ξ_{ij} и $D_{ij}^{(ind)}$ разложения, подобные (28), имеют вид

$$\xi_{ij} = \hbar \sum_{(\kappa)} \mathcal{X}_{\kappa\kappa'} g_i^{(\kappa)} g_j^{(\kappa')}, \quad (30)$$

$$D_{ij}^{(ind)} = \gamma \hbar^2 \sum_{(\kappa)} \mathcal{D}_{\kappa\kappa'} g_i^{(\kappa)} g_j^{(\kappa')}, \quad (31)$$

где $g_i^{(\kappa)}$ — декартовы компоненты вектора $\mathbf{g}^{(\kappa)}$. Эти разложения обладают рядом замечательных свойств.

1) Коэффициенты \mathcal{F}_{κ} , $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ зависят только от локальных значений интенсивности $E^2(\mathbf{r})$, эллиптичности $\varepsilon(\mathbf{r})$ и от отстройки поля от резонанса δ . Они не зависят от локальных значений фазы и углов поворота, поскольку при расчете следов матриц в (15), (18) и (20) всегда можно перейти в локальный базис, где фаза и углы поворота равны нулю.

2) Каждый из коэффициентов \mathcal{F}_{κ} , $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ обладает определенной четностью относительно ε и δ . Это утверждение также носит вполне общий характер, так как может быть доказано на основе рассмотрения симметрий кинетического уравнения для матрицы плотности относительно инверсии системы координат и обращения времени [23]. Подчеркнем, что вектор силы \mathbf{F} и тензоры ξ_{ij} и $D_{ij}^{(ind)}$ подобной четностью не обладают.

3) Недиagonальные элементы $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ при $\kappa \neq \kappa'$ в общем случае отличны от нуля, т.е.

пространственные градиенты поля различного типа действуют не независимо, а коррелируют друг с другом.

4) Поскольку средний дипольный момент неподвижного атома лежит в плоскости эллипса поляризации и ортогонален малым вариациям вектора поляризации, выводящим его из плоскости поляризации, в общем случае компоненты \mathcal{F}_5 и \mathcal{F}_6 равны нулю. Подобные рассуждения приводят к заключению, что матрицы $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ имеют блочную структуру — отсутствуют корреляции между секторами {1–4} и {5, 6}.

Что касается тензора спонтанной диффузии $D_{ij}^{(sp)}(\mathbf{r})$, то он, очевидно, также зависит только от эллиптичности, интенсивности и отстройки.

Как будет видно ниже, использованное нами представление для вектора $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ достаточно удобно для записи аналитических результатов и качественной интерпретации различных вкладов. В то же время оно, очевидно, не является единственно возможным: допустимо использовать любые шесть вещественных величин, однозначно определяющих комплексный вектор $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Важно, однако, подчеркнуть, что окончательные результаты для вектора силы \mathbf{F} и тензоров ξ_{ij} и D_{ij} всегда можно выразить через комплексную векторную амплитуду поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и ее пространственные градиенты инвариантным и аналитическим образом. Рецепт такого перехода приведен в Приложении А.

Следует также отметить, что приведенные ниже аналитические выражения непосредственно применимы для анализа зависимостей силы и диффузии от параметров охлаждающего поля в практически важных случаях «простых» конфигураций поля, когда отличен от нуля только один из пространственных градиентов поля: стоячая волна ($\mathbf{g}^{(1)} = \mathbf{k}$), бегущая волна ($\mathbf{g}^{(2)} = \mathbf{k}$), конфигурация поля $\text{lin} \perp \text{lin}$ ($\mathbf{g}^{(3)} = \mathbf{k}$) и конфигурация поля $\sigma_+ - \sigma_-$ ($\mathbf{g}^{(4)} = \mathbf{k}$). Во всех случаях коэффициенты трения и вынужденной диффузии полностью определяются одним диагональным элементом $\mathcal{X}_{\kappa\kappa}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa}$ при $\kappa = 1, \dots, 4$.

Таким образом, зная аналитические выражения для зависимостей \mathcal{F}_{κ} , $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$, $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ и $D_{ij}^{(sp)}$ от эллиптичности, интенсивности и отстройки, мы располагаем достаточно общей и полной информацией, которая позволяет определить силу светового давления, коэффициенты трения и диффузии для любой конкретной конфигурации поля.

Разложения вида (28) и (31), по всей видимости, впервые использовались Гордоном и Эшкиным при анализе движения атома в радиационной ловушке [24]. Позднее Казанцев с соавторами применил

разложение, подобное (30), в задаче об «эффективной» силе Лоренца в поле гауссова пучка [16]. В этих работах рассматривалась простейшая модель резонансного атома в виде двух невырожденных уровней и, соответственно, учитывалось влияние только двух градиентов: $\mathbf{g}^{(1)}$ — амплитуды и $\mathbf{g}^{(2)}$ — фазы поля. Разложения по всем возможным градиентам, включая поляризационные, для силы светового давления на атом с вырожденным основным состоянием в нулевом и первом приближениях по скорости приведены в наших работах [9, 14], где также кратко обсуждались некоторые их свойства.

Следует отметить общность результатов данного раздела. Они остаются справедливыми при гораздо более общих схемах возбуждения и релаксации атома по сравнению с рассмотренными в предыдущих разделах. В частности, основной и возбужденный уровень могут иметь несколько сверхтонких компонент с различными угловыми моментами и энергиями; оператор изотропной релаксации может включать дополнительные члены, описывающие столкновительную релаксацию и т. п. В данной работе мы ограничимся рассмотрением замкнутых дипольных переходов $J_g \rightarrow J_e$ в приближении чисто радиационной релаксации (как это и сформулировано в разд. 2), при этом скорость релаксации основного состояния полагается строго равной нулю. В такой постановке задачи для двух классов атомных переходов $J \rightarrow J$ (J — целое) и $J \rightarrow J - 1$, где имеет место эффект когерентного пленения населенностей в основном состоянии [25], сила светового давления и тензор диффузии для неподвижного атома обращаются в нуль. Тензор ξ_{ij} антисимметричен, т. е. линейная по скорости составляющая силы сводится к лоренцевской силе. При этом «эффективное» магнитное поле определяется ротором векторного геометрического потенциала, аналитические выражения для которого найдены в нашей работе [26] для произвольных угловых моментов. Что касается поправок более высокого порядка по скорости (квадратичные для диффузии и кубические для силы), которые и определяют эффекты лазерного охлаждения в этом случае [27, 28], развиваемый здесь подход, очевидно, неприменим для их расчета.

В теории лазерного охлаждения рассматриваются переходы из обоих оставшихся классов $J \rightarrow J$ (J — полуцелое) и $J \rightarrow J + 1$. Однако экспериментально лазерное охлаждение реализовано только на переходах типа $J \rightarrow J + 1$, что объясняется их значительно большей распространенностью по отношению к $J \rightarrow J$ (J — полуцелое). Поэтому ниже мы остановимся на наиболее важном для приложений

случае переходов $J \rightarrow J + 1$, хотя и располагаем аналогичными результатами для переходов $J \rightarrow J$ (J — полуцелое).

5. СВЕТОВОЕ ДАВЛЕНИЕ НА НЕПОДВИЖНЫЙ АТОМ

Найденное в работах [7, 10, 11] стационарное решение для матрицы плотности $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ позволяет получить силу светового давления на неподвижный атом в аналитической форме с той же степенью общности, т. е. для произвольных угловых моментов основного и возбужденного уровней и для произвольной конфигурации монохроматического поля. В общем случае четыре отличные от нуля компоненты силы \mathcal{F}_k записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= -\frac{2\delta S\alpha_1}{\alpha_0 + 2S\alpha_1}, & \mathcal{F}_2 &= \frac{\gamma S\alpha_1}{\alpha_0 + 2S\alpha_1}, \\ \mathcal{F}_3 &= \operatorname{tg}(2\varepsilon) \frac{2\delta S(\alpha_1 - A)}{\alpha_0 + 2S\alpha_1}, \\ \mathcal{F}_4 &= -\sin(2\varepsilon) \frac{\gamma SA}{\alpha_0 + 2S\alpha_1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Четные по отстройке компоненты \mathcal{F}_2 и \mathcal{F}_4 соответствуют силе спонтанного светового давления, которая связана с процессами индуцированного поглощения и последующего спонтанного излучения. Нечетные составляющие \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_3 дают вклад в силу вынужденного светового давления, связанную с процессами когерентного переизлучения фотонов из одной моды в другую.

Коэффициенты α_0 , α_1 и A зависят только от $\cos(2\varepsilon)$. Их явный вид определяется типом оптического перехода. Так, для переходов $J \rightarrow J + 1$ на основе результатов работы [10] можно получить

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{(2J+1)(4J+1)! \cos(2\varepsilon)} \times \\ &\times \sum_{L=0}^{2J} C_L P_L \left(\frac{1}{\cos(2\varepsilon)} \right), \\ \alpha_1 &= P_{2J+1} \left(\frac{1}{\cos(2\varepsilon)} \right), \\ A &= \frac{1}{(2J+1) \cos(2\varepsilon)} P'_{2J+1} \left(\frac{1}{\cos(2\varepsilon)} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$C_L = (2L+1)(2J-L)!(2J+L+1)!$$

В (33) в выражении для α_0 суммирование ведется по четным L (начиная с 0) для целых значений момента J и по нечетным (начиная с 1) для полуцелых

J , а коэффициент A выражен через производную от полиномов Лежандра

$$P'_L(x) = \frac{d}{dx} P_L(x).$$

При приближении поляризации поля к круговой $\varepsilon \rightarrow \pm\pi/4$ аргумент полиномов $1/\cos(2\varepsilon)$ и сами полиномы неограниченно возрастают. Нетрудно, однако, видеть, что отношения полиномов, через которые выражаются \mathcal{F}_κ , остаются конечными:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \rightarrow 1, \quad \frac{A}{\alpha_0} \rightarrow 1, \quad \frac{\alpha_1 - A}{\alpha_0 \cos^2(2\varepsilon)} \rightarrow \frac{2J}{4J + 1}.$$

Замечательной особенностью, которая наиболее ярко проявляется при больших значениях момента J , является быстрое убывание коэффициентов C_L с уменьшением индекса L , что позволяет при приближенных расчетах ограничиться несколькими членами суммы с наибольшими значениями L . Например, отношение

$$\frac{C_{2J}}{C_{2J-2}} = (4J + 1)^2 \frac{2J}{4J - 3}$$

при $J = 4$ (замкнутый переход на D_2 -линии ^{133}Cs) составляет 177.8. В результате, если мы заменим сумму для α_0 одним слагаемым с $L = 2J$, ошибка будет максимальна при $\varepsilon = 0$ и не превысит одного процента.

6. СПОНТАННАЯ ДИФФУЗИЯ

Поскольку тензор диффузии (19), обусловленной флуктуациями направления вылета спонтанных фотонов, подобно силе светового давления, выражается через $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$, для него также можно получить аналитический результат при произвольных J . Как и всякий симметричный тензор второго ранга, $D_{ij}^{(sp)}$ можно представить в виде изотропной части ($\propto \delta_{ij}$) и неприводимой части с нулевым следом:

$$D_{ij}^{(sp)} = \gamma(\hbar k)^2 \times \left[\delta_{ij} \frac{\pi^{(e)}}{6} - (-1)^{J_e+J_g} \frac{2J_e+1}{10} \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ J_g & J_e & J_e \end{Bmatrix} \times \left(\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_2 \cdot \sigma_2^{(e)} \right) \right], \quad (34)$$

где использованы стандартные обозначения [29] для $6j$ -символа и неприводимого тензорного произведения; \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j — декартовы орты (неприводимые тензоры первого ранга). Изотропная составляющая в

(34) пропорциональна полной населенности возбужденного уровня:

$$\pi^{(e)} = \frac{\alpha_1 S}{\alpha_0 + 2\alpha_1 S}, \quad (35)$$

а компонента с нулевым следом — выстраиванию в возбужденном состоянии, которое для переходов $J \rightarrow J + 1$ имеет вид

$$\sigma_2^{(e)} = -\frac{S}{\alpha_0 + 2\alpha_1 S} \frac{1}{4J + 1} \times \sqrt{\frac{30(J + 1)}{(J + 2)(2J + 1)(2J + 3)(2J + 5)}} \times \left[\frac{\{\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}^*\}_2}{\cos(2\varepsilon)} P'_{2J+1} \left(\frac{1}{\cos(2\varepsilon)} \right) + \frac{\{[\mathbf{e} \times \mathbf{e}^*] \otimes [\mathbf{e} \times \mathbf{e}^*]\}_2}{\cos^2(2\varepsilon)} P''_{2J+1} \left(\frac{1}{\cos(2\varepsilon)} \right) \right]. \quad (36)$$

Из формулы (36) видно, что тензор спонтанной диффузии диагонализуется в локальной системе координат, связанной с эллипсом поляризации, где ось z направлена ортогонально плоскости поляризации (т.е. вдоль \mathbf{e}_0), а оси x и y параллельны главным осям эллипса ($\text{Re}\{\mathbf{e}\}$ и $\text{Im}\{\mathbf{e}\}$). Поскольку в этой системе координат декартов тензор $K_{ij} = (\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_2 \cdot \{\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}^*\}_2)$ имеет вид

$$K_{ij} = \text{diag} \left\{ \frac{1 + 3 \cos(2\varepsilon)}{6}, \frac{1 - 3 \cos(2\varepsilon)}{6}, -\frac{1}{3} \right\},$$

в общем случае все собственные значения тензора спонтанной диффузии различны и только в частных случаях линейной и циркулярной поляризации имеет место аксиальная симметрия.

7. СИЛА ТРЕНИЯ, ЛОРЕНЦЕВСКАЯ СИЛА И ВЫНУЖДЕННАЯ ДИФФУЗИЯ

Для матриц поправок первого порядка $\hat{\varphi}_i(\mathbf{r})$ нам, к сожалению, не удалось получить аналитическое решение при произвольных угловых моментах J (в отличие от $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$). Тем не менее при заданном J решение уравнения (21) не вызывает принципиальных трудностей. Единственной проблемой является возрастающая с ростом J громоздкость аналитических выражений. По этой причине ниже мы приводим явный вид коэффициентов $\mathcal{K}_{\kappa\kappa'}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ для ряда переходов из класса $J \rightarrow J + 1$ с небольшими значениями J .

Линейная по скорости сила трения, приводящая к изменению во времени средней кинетической энергии атомов, определяется симметричной частью тен-

зора ξ_{ij} и, следовательно, в нее дают вклад диагональные составляющие $\mathcal{X}_{\kappa\kappa}$ и суммы недиагональных ($\mathcal{X}_{\kappa\kappa'} + \mathcal{X}_{\kappa'\kappa}$). Разности перекрестных компонент ($\mathcal{X}_{\kappa\kappa'} - \mathcal{X}_{\kappa'\kappa}$) определяют лоренцевскую силу, которая оставляет кинетическую энергию без изменений.

Компоненты тензора вынужденной диффузии $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$, в общем случае, не являются симметричными относительно перестановки индексов. Однако, как уже отмечалось выше, в уравнение Фоккера–Планка дают вклад только симметричные составляющие. Поэтому ниже мы полагаем

$$\mathcal{D}_{\kappa\kappa'} = \mathcal{D}_{\kappa'\kappa} = (\mathcal{D}_{\kappa\kappa'} + \mathcal{D}_{\kappa'\kappa})/2.$$

7.1. Произвольный параметр насыщения S . Переход $0 \rightarrow 1$

Этот простейший переход из класса $J \rightarrow J + 1$ представляет значительный интерес с практической точки зрения, так как используется для лазерного охлаждения (до доплеровского предела) атомов кальция и стронция. При произвольных параметрах насыщения S коэффициенты $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ имеют следующий вид. Диагональные элементы нечетные по отстройке и четные по эллиптичности:

$$\mathcal{X}_{11} = \frac{2\tilde{\delta}S}{(1+2S)^3} \left[\frac{1}{1/4 + \tilde{\delta}^2} (1-2S) - 8S^2 \right], \quad (37)$$

$$\mathcal{X}_{22} = \frac{2\tilde{\delta}S}{(1/4 + \tilde{\delta}^2)(1+2S)^2}, \quad (38)$$

$$\mathcal{X}_{33} = \frac{2\tilde{\delta}S}{(1/4 + \tilde{\delta}^2)(1+2S)[1+S+(1/4 + \tilde{\delta}^2)S^2]}, \quad (39)$$

$$\mathcal{X}_{44} = \frac{2\tilde{\delta}S}{(1/4 + \tilde{\delta}^2)(1+2S)^2} \times \frac{1+(1+\cos^2(2\varepsilon))S+(1/4 + \tilde{\delta}^2)(1-\cos^2(2\varepsilon))S^2}{1+S+(1/4 + \tilde{\delta}^2)S^2}, \quad (40)$$

$$\mathcal{X}_{55} = \frac{1+\cos(2\varepsilon)}{2} \mathcal{X}_{33}, \quad \mathcal{X}_{66} = \frac{1-\cos(2\varepsilon)}{2} \mathcal{X}_{33}, \quad (41)$$

где $\tilde{\delta} = \delta/\gamma$ — отстройка в единицах радиационной ширины. Формулы (37) и (38) в точности соответствуют результатам для коэффициента трения в поле стоячей и бегущей волн, полученным соответственно в работах [16, 24] для модели двухуровневого атома с невырожденными состояниями. Для

получения (39), (40) и (41) скалярной модели, очевидно, недостаточно и необходим учет зеемановской структуры энергетических уровней атома и векторной природы электромагнитного поля. Компонента \mathcal{X}_{44} (40) при нулевой эллиптичности переходит в известный результат для перехода $0 \rightarrow 1$ в конфигурации поля $\sigma_+ - \sigma_-$ [30].

Кроме того, линейная по скорости сила содержит ненулевые вклады, обусловленные совместным действием градиентов поля различного типа:

$$\mathcal{X}_{12} = \frac{2S \left[1 - 4\tilde{\delta}^2 + 2(1 + 4\tilde{\delta}^2)S \right]}{(1+2S)^2(1+4\tilde{\delta}^2)}, \quad (42)$$

$$\mathcal{X}_{21} = -\frac{2S(1 - 4\tilde{\delta}^2 - 4S)}{(1+2S)^3(1+4\tilde{\delta}^2)}, \quad (43)$$

$$\mathcal{X}_{14} = -\sin(2\varepsilon)\mathcal{X}_{12}, \quad \mathcal{X}_{41} = -\sin(2\varepsilon)\mathcal{X}_{21}, \quad (44)$$

$$\mathcal{X}_{24} = \mathcal{X}_{42} = -\sin(2\varepsilon)\mathcal{X}_{22}, \quad (45)$$

$$\mathcal{X}_{34} = -\mathcal{X}_{43} = -\frac{2S}{1+2S} \frac{\cos(2\varepsilon)}{1+S+(1/4 + \tilde{\delta}^2)S^2} \times \left[\frac{1-4\tilde{\delta}^2}{1+4\tilde{\delta}^2} - \left(\frac{1}{4} + \tilde{\delta}^2 \right) S^2 \right], \quad (46)$$

$$\mathcal{X}_{56} = -\mathcal{X}_{65} = -\frac{S}{1+2S} \frac{\sin(2\varepsilon)}{1+S+(1/4 + \tilde{\delta}^2)S^2} \times \left[\frac{1-4\tilde{\delta}^2}{1+4\tilde{\delta}^2} - \left(\frac{1}{4} + \tilde{\delta}^2 \right) S^2 \right], \quad (47)$$

которые для данного перехода, насколько нам известно, приводятся впервые.

Как видно из (42)–(44), вклады в силу трения за счет корреляции градиентов амплитуда–фаза и амплитуда–угол имеют четную зависимость от отстройки и не исчезают при $\tilde{\delta} = 0$. Следовательно, в общем случае коэффициент трения не имеет определенной четности по $\tilde{\delta}$ и лазерное охлаждение возможно даже при точном резонансе, что обсуждалось нами в кратком сообщении [13] для перехода $1/2 \rightarrow 3/2$ в поле частной одномерной конфигурации (см. также разд. 8).

Остановимся на физической интерпретации некоторых составляющих $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$. Довольно часто для выяснения физических механизмов трения рассматриваются конкретные конфигурации поля (бегущая

волна, стоячая волна, поле, образованное ортогонально поляризованными волнами и т. п.). В этом, однако, нет необходимости, так как все вклады $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ можно интерпретировать локальным образом, не связывая рассуждения с какой-либо глобальной конфигурацией поля. Так, рассматривая диагональные компоненты $\mathcal{X}_{\kappa\kappa}$, нам достаточно предположить, что в данной точке пространства отличен от нуля только один градиент поля $\mathbf{g}^{(\kappa)}$, при этом амплитуда и поляризация поля, вообще говоря, произвольны. Такой подход приводит для $\mathcal{X}_{\kappa\kappa}$ к механизмам, известным ранее из рассмотрения простых полевых конфигураций (доплеровский, сизифовский и др. механизмы трения). Для интерпретации перекрестных вкладов $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ мы должны полагать, что в данной точке отличны от нуля два градиента, $\mathbf{g}^{(\kappa)}$ и $\mathbf{g}^{(\kappa')}$, и рассмотреть их совместное действие.

Например, недиагональный элемент \mathcal{X}_{12} , соответствующий корреляции градиентов амплитуда–фаза, интерпретируется следующим образом. На атом в поле с градиентом амплитуды действует сила вынужденного светового давления $\hbar\mathcal{F}_1\mathbf{g}^{(1)}$, зависящая от отстройки поля от резонанса (см. (32)). Если к тому же атом движется в поле с градиентом фазы, то частота поля смещается $\delta \rightarrow \delta - \mathbf{g}^{(2)} \cdot \mathbf{v}$ из-за эффекта Доплера. Для поправок первого порядка по скорости имеем $-\hbar(\mathcal{F}_1)'_{\delta}\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{g}^{(2)} \cdot \mathbf{v})$, что в точности соответствует (42). Таким образом, этот вклад обусловлен резонансной зависимостью от частоты силы вынужденного светового давления и эффектом Доплера. Другой недиагональный элемент \mathcal{X}_{21} , напротив, обусловлен силой спонтанного светового давления $\hbar\mathcal{F}_2(\mathbf{r}, \mathbf{p})\mathbf{g}^{(2)}$, где $\mathcal{F}_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \text{Tr}\{\hat{\mathcal{F}}_2\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\}$ — среднее значение оператора $\hat{\mathcal{F}}_2 = i[\Omega\hat{V} - \text{H.c.}]$, определяющее скорость поглощения фотонов внешнего поля. При этом первые поправки по скорости связаны с запаздывающей (по отношению к медленным изменениям амплитуды поля) частью среднего дипольного момента движущегося атома. В частности, для рассматриваемого перехода $0 \rightarrow 1$ без учета эффектов насыщения синфазная и запаздывающая части соответствующих элементов матрицы плотности имеют вид

$$\hat{\sigma}_{eg}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \approx -i\frac{\Omega\hat{V}}{\gamma/2 - i\delta} + i\mathbf{g}^{(1)} \cdot \mathbf{v} \frac{\Omega\hat{V}}{(\gamma/2 - i\delta)^2},$$

$$\hat{\sigma}_{eg} = \hat{\Pi}_e \hat{\sigma} \hat{\Pi}_g,$$

что приводит к (43) с точностью до первого порядка по параметру насыщения S .

Отметим, что выражения (42) и (43) могут быть получены в рамках модели двухуровневого атома.

Сила лоренцевского типа, обусловленная совместным действием градиентов амплитуды и фазы в поле гауссовского пучка, впервые рассматривалась Казанцевым и др. [16]. Наш результат для разности ($\mathcal{X}_{12} - \mathcal{X}_{21}$) совпадает с приведенным в [16] в пределе $S \ll 1$. Любопытно, что при большом насыщении, $S \gg 1$, составляющая \mathcal{X}_{21} убывает как $1/S$, а \mathcal{X}_{12} перестает зависеть от параметров, характеризующих интенсивность взаимодействия атома с полем, и соответствующий вклад в силу $\hbar\mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{g}^{(2)} \cdot \mathbf{v})$ полностью определяется геометрией поля и скоростью атома.

Составляющие $\mathcal{X}_{\alpha\alpha'}$ ($\alpha = 5, 6$), связанные с пространственным вращением плоскости эллипса поляризации, рассматривались ранее одним из авторов для $J_g > 0$ в контексте субдоплеровского охлаждения [31]. Укажем здесь, что физические механизмы возникновения ориентационных вкладов в силу трения (\mathcal{X}_{44} , с одной стороны, и $\mathcal{X}_{\alpha\alpha'}$, с другой) во многом подобны. Действительно, вариацию полного гамильтониана атома при бесконечно малом пространственном смещении $\delta\mathbf{r}$ можно представить в виде разложения по градиентам поля:

$$\delta\hat{H}(\mathbf{r}) = -\hbar \sum_{\kappa=1}^6 \mathbf{g}^{(\kappa)} \cdot \delta\mathbf{r} \hat{\mathcal{F}}_{\kappa}(\mathbf{r}),$$

где изменения, связанные с вращениями ($\kappa = 4, 5, 6$), генерируются оператором полного углового момента $\hat{\mathbf{J}}$:

$$\hat{\mathcal{F}}_{\kappa}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathbf{J}}_{\kappa}, \hat{H}(\mathbf{r})].$$

Здесь $\hat{\mathbf{J}}_{\kappa}$ — соответствующие компоненты вектора $\hat{\mathbf{J}}$ (вдоль \mathbf{e}_0 для $\kappa = 4$ и вдоль главных осей эллипса для $\kappa = 5, 6$). Для средних значений ориентационных составляющих силы $\mathcal{F}_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \text{Tr}\{\hat{\mathcal{F}}_{\kappa}(\mathbf{r})\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\}$, согласно уравнениям движения, можно записать соотношения

$$-\mathcal{F}_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \text{Tr}\left\{\hat{\mathbf{J}}_{\kappa}\hat{\Gamma}\{\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\}\right\} + \frac{d}{dt}J_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (48)$$

которые выражают закон сохранения углового момента: скорость поглощения момента внешнего поля, $-\mathcal{F}_{\kappa}$, равна сумме скорости передачи момента вакуумным модам при спонтанном излучении и скорости изменения среднего углового момента атомов $J_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \text{Tr}\{\hat{\mathbf{J}}_{\kappa}\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\}$. Нетрудно показать, что первое слагаемое в левой части (48) пропорционально моменту возбужденного состояния $J_{\kappa}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \text{Tr}\{\hat{\mathbf{J}}_{\kappa}\hat{\sigma}_{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\}$:

$$\text{Tr}\left\{\hat{\mathbf{J}}_{\kappa}\hat{\Gamma}\{\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\}\right\} = \gamma\mathcal{C}J_{\kappa}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}).$$

Здесь коэффициент деполаризации

$$C = \frac{2 + J_e(J_e + 1) - J_g(J_g + 1)}{2J_e(J_e + 1)} = \frac{1}{J + 1}$$

определяется разностью между угловым моментом, который атом теряет при спонтанном уходе из возбужденного состояния, и угловым моментом, который атом приобретает за счет спонтанного прихода в основное состояние. Для неподвижного атома $\mathbf{p} = 0$. Используя стационарное решение $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ из работы [11], находим

$$\mathbf{J}^{(e)}(\mathbf{r}) = i\mathbf{e} \times \mathbf{e}^* \frac{SA(J + 1)}{\alpha_0 + 2\alpha_1 S}$$

в соответствии с приведенным выше результатом для $\mathcal{F}_4(\mathbf{r})$ (32). Первые поправки по скорости в уравнении для атомной матрицы плотности, возникающие при движении в поле с градиентами ориентации, описываются, как известно [30, 1], эффективным гамильтонианом

$$\hat{H}_{eff} = \sum_{\kappa=4}^6 \mathbf{g}^{(\kappa)} \cdot \mathbf{v} \hat{J}_{\kappa},$$

т. е. эквивалентны включению «фиктивного» магнитного поля, направленного вдоль главных осей эллипса для $\mathbf{g}^{(5,6)}$ либо ортогонально плоскости эллипса для $\mathbf{g}^{(4)}$. Таким образом, ориентационные составляющие \mathcal{X}_{55} , \mathcal{X}_{66} , так же как и \mathcal{X}_{44} , соответствуют компонентам тензора магнитной восприимчивости при оптической накачке эллиптически поляризованным светом. В перекрестные компоненты \mathcal{X}'_{56} и \mathcal{X}'_{65} , кроме того, дает вклад второе слагаемое левой части (48).

Перейдем теперь к тензору вынужденной диффузии. Диагональные компоненты $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ зависят от отстройки и эллиптичности четным образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{11} &= \frac{S}{2(1 + 2S)^3} \times \\ &\times \left[1 + \frac{6 - 8\tilde{\delta}^2}{1 + 4\tilde{\delta}^2} S + 12S^2 + 8(1 + 4\tilde{\delta}^2) S^3 \right], \\ \mathcal{D}_{22} &= \frac{S}{2(1 + 2S)^3} \left[1 - \frac{2 - 24\tilde{\delta}^2}{1 + 4\tilde{\delta}^2} S + 4S^2 \right], \\ \mathcal{D}_{33} &= \frac{S}{2(1 + 2S)}, \\ \mathcal{D}_{44} &= \frac{S}{2(1 + 2S)^3} \times \\ &\times \left[1 - \frac{2 - 24\tilde{\delta}^2 - (6 - 8\tilde{\delta}^2) \cos^2(2\varepsilon)}{1 + 4\tilde{\delta}^2} S + 4S^2 \right], \\ \mathcal{D}_{55} &= \frac{1 + \cos(2\varepsilon)}{2} \mathcal{D}_{33}, \quad \mathcal{D}_{66} = \frac{1 - \cos(2\varepsilon)}{2} \mathcal{D}_{33}. \end{aligned} \tag{49}$$

Отличные от нуля недиагональные элементы нарушают эту симметрию:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{12} &= \frac{4\tilde{\delta} S^2}{(1 + 2S)^3} \left(\frac{2}{1 + 4\tilde{\delta}^2} + S \right), \\ \mathcal{D}_{14} &= -\sin(2\varepsilon) \mathcal{D}_{12}, \\ \mathcal{D}_{24} &= -\sin(2\varepsilon) \mathcal{D}_{22}. \end{aligned} \tag{50}$$

Составляющие \mathcal{D}_{11} , \mathcal{D}_{22} и \mathcal{D}_{12} , обусловленные градиентами амплитуды и фазы, совпадают с полученными ранее в скалярной модели двухуровневого атома [24]. Ориентационная компонента \mathcal{D}_{44} для данного перехода рассматривалась в работе [30] при $\varepsilon = 0$. Не останавливаясь подробно на физической интерпретации различных вкладов в тензор индуцированной диффузии, отметим лишь, что они обусловлены флуктуациями сил вынужденного и спонтанного светового давления, которые в общем случае коррелированы между собой.

Зависимость коэффициентов $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ от параметра насыщения S выражается в виде частного двух полиномов, коэффициенты которых, в свою очередь, зависят от отстройки, эллиптичности и угловых моментов уровней. Специфика перехода $0 \rightarrow 1$, связанная с отсутствием вырождения основного состояния, заключается в том, что разложения по степеням параметра насыщения S для $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$, так же как для $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$, начинаются с первой степени. Как видно из приведенных выше результатов, вклады более высокого порядка по S пренебрежимо малы в пределе малых насыщений:

$$S \ll \min\{1, \gamma/\delta\}, \tag{51}$$

когда скорость возбуждения атомов из основного состояния порядка γS и оптические сдвиги подуровней возбужденного состояния порядка δS много меньше скорости спонтанного распада γ . При этом ξ_{ij} и $D_{ij}^{(ind)}$ линейны по интенсивности поля и мы приходим к известным результатам [32]:

$$\xi_{ij} \propto \text{Im} \left[\frac{\nabla_i \mathbf{E}^* \cdot \nabla_j \mathbf{E}}{(1/2 - i\tilde{\delta})^2} \right], \quad D_{ij}^{(ind)} \propto \text{Re} \left[\frac{\nabla_i \mathbf{E}^* \cdot \nabla_j \mathbf{E}}{(1/2 - i\tilde{\delta})} \right].$$

Таким образом, приведенные в данном разделе формулы обобщают полученные ранее для перехода $0 \rightarrow 1$ результаты на произвольные конфигурации поля и произвольные параметры насыщения.

7.2. Предел малых насыщений. Переход $1/2 \rightarrow 3/2$

Для атомных переходов с вырожденным основным состоянием $J_g > 0$ при малых насыщениях (51)

первые не исчезающие вклады в $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ имеют нулевой порядок по S , что, как известно [1], принципиально важно для реализации лазерного охлаждения ниже доплеровского предела. В этом приближении возникает ряд новых специфических свойств коэффициентов $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$. В частности, поскольку матрица плотности $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ в нулевом порядке по параметру насыщения S не содержит зависимости от амплитуды и фазы, то $\mathcal{X}_{\kappa 1} = \mathcal{X}_{\kappa 2} = 0$ при любых $\kappa = 1, \dots, 4$. Кроме того, имеется следующее соотношение между коэффициентами:

$$\mathcal{X}_{1\kappa} = -2\tilde{\delta}\mathcal{X}_{2\kappa}, \quad (52)$$

которое является обобщением подобного соотношения для силы, действующей на неподвижный атом (32): $\mathcal{F}_1(\mathbf{r}) = -2\tilde{\delta}\mathcal{F}_2(\mathbf{r})$. Можно показать, что это соотношение, связывающее силы вынужденного и спонтанного светового давления, остается справедливым и для движущегося атома, если в каждом порядке разложения силы по степеням скорости ограничиваться членами порядка $(v/S)^n$, которые являются ведущими при $S \ll 1$. С более общей точки зрения (52) является одним из следствий соотношений Крамерса–Кронига для восприимчивости атома.

Для момента основного состояния $J_g = 1/2$ матрица $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ в нулевом порядке по S не зависит также от угла ϕ , следовательно, в этом частном случае $\mathcal{X}_{\kappa 4} = 0$. Отличные от нуля компоненты $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{33} &= 6\tilde{\delta}\cos^2(2\varepsilon), & \mathcal{X}_{13} &= 6\tilde{\delta}\sin(2\varepsilon)\cos(2\varepsilon), \\ \mathcal{X}_{23} &= -3\sin(2\varepsilon)\cos(2\varepsilon), & \mathcal{X}_{43} &= 3\cos(2\varepsilon), \\ \mathcal{X}_{55} &= 6\tilde{\delta}\frac{\sin^2(2\varepsilon)[3 + \cos(2\varepsilon)]}{9 - \cos^2(2\varepsilon) + 36\tilde{\delta}^2\sin^2(2\varepsilon)}, & (53) \\ \mathcal{X}_{66} &= 6\tilde{\delta}\frac{\sin^2(2\varepsilon)[3 - \cos(2\varepsilon)]}{9 - \cos^2(2\varepsilon) + 36\tilde{\delta}^2\sin^2(2\varepsilon)}, \\ \mathcal{X}_{56} &= -3\sin(2\varepsilon)[1 + \cos(2\varepsilon)] \times \\ &\times \frac{3 + \cos(2\varepsilon) - 12\tilde{\delta}^2[1 - \cos(2\varepsilon)]}{2[9 - \cos^2(2\varepsilon) + 36\tilde{\delta}^2\sin^2(2\varepsilon)]}, & (54) \\ \mathcal{X}_{65} &= 3\sin(2\varepsilon)[1 - \cos(2\varepsilon)] \times \\ &\times \frac{3 - \cos(2\varepsilon) - 12\tilde{\delta}^2[1 + \cos(2\varepsilon)]}{2[9 - \cos^2(2\varepsilon) + 36\tilde{\delta}^2\sin^2(2\varepsilon)]}. \end{aligned}$$

Физический механизм, ответственный за составляющие \mathcal{X}_{13} и \mathcal{X}_{33} , известен из рассмотрения $\text{lin}-\theta\text{-lin}$ конфигурации поля [2] — это так называемый эффект Сизифа [1]. Этот эффект принято связывать с силами вынужденного светового давления, которые при малой интенсивности поля

($S \ll 1$) можно рассматривать как следствие пространственной неоднородности оптических сдвигов подуровней основного состояния (динамический эффект Штарка). Величина оптических сдвигов пропорциональна интенсивности поля и зависит от эллиптичности. В частности, для перехода $1/2 \rightarrow 3/2$ в локальной системе координат с осью z вдоль \mathbf{e}_0

$$U_{\pm 1/2} = \hbar\delta S \frac{2 \pm \sin(2\varepsilon)}{3}.$$

Следует сказать, что наличие по крайней мере двух различных потенциалов является одним из необходимых условий реализации сизифовского механизма. Компоненты силы, связанные с градиентами амплитуды $\mathbf{g}^{(1)}$ и эллиптичности $\mathbf{g}^{(3)}$, имеют вид

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{4}{3}\delta S [1 + \sin(2\varepsilon)\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{p})],$$

$$\mathcal{F}_3(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{4}{3}\delta S \cos(2\varepsilon)\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{p}),$$

где $\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — среднее значение z -проекции углового момента атома (половина разности населенностей подуровней основного состояния). Другим необходимым ингредиентом сизифовского механизма субдоплеровского трения является запаздывание в анизотропии основного состояния при медленном изменении локальной эллиптичности. В рассматриваемом случае синфазная и запаздывающая части углового момента с точностью до первого порядка по скорости записываются следующим образом:

$$\mathcal{J} \approx \frac{1}{2}\sin(2\varepsilon) - \frac{9}{2}\frac{\mathbf{g}^{(3)} \cdot \mathbf{v}}{\gamma S}\cos(2\varepsilon).$$

Как видно, характерное время запаздывания обратно пропорционально скорости оптической накачки γS , что и приводит к не зависящим от интенсивности вкладам \mathcal{X}_{13} и \mathcal{X}_{33} .

Интерпретация не зависящих от $\tilde{\delta}$ составляющих \mathcal{X}_{23} и \mathcal{X}_{43} подобна разобранному выше с тем, однако, существенным отличием, что силовое воздействие обеспечивается спонтанным световым давлением за счет градиентов фазы и угла ϕ :

$$\mathcal{F}_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{2}{3}\gamma S [1 + \sin(2\varepsilon)\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{p})],$$

$$\mathcal{F}_4(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{3}\gamma S [\sin(2\varepsilon) - 2\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{p})].$$

В нашей работе [13] на примере симметричного класса одномерных конфигураций поля, образованных встречными эллиптически поляризованными волнами равной амплитуды, было показано, что не зависящая от отстройки часть коэффициента трения

$\mathcal{X}_{23} g_z^{(2)} g_z^{(3)} + \mathcal{X}_{43} g_z^{(4)} g_z^{(3)}$ не исчезает при усреднении по пространственному периоду, т. е. имеет место систематический эффект охлаждения (либо нагрева, в зависимости от геометрических параметров конфигурации поля) в точном резонансе $\delta = 0$. При этом оказалось, что существенную роль играет пространственная неоднородность времени запаздывания, пропорциональная $(\gamma S)^{-1}$.

Физический механизм возникновения ориентационных составляющих (54) обсуждался выше, а их влияние на субдоплеровское охлаждение рассматривалось в работе одного из авторов [31]. Отметим здесь только один существенный момент. Компоненты \mathcal{X}_{55} и \mathcal{X}_{66} , в отличие от всех остальных составляющих нулевого порядка по S , не обращаются в нуль в точках, где поляризация поля является круговой, т. е. эти компоненты могут играть доминирующую роль при условии пространственной локализации атомов вблизи таких точек.

Коэффициенты $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ в пределе малых насыщенных (51) линейны по S . Для перехода $1/2 \rightarrow 3/2$ отличны от нуля все тринадцать элементов. Это четные по отстройке четыре диагональных и два перекрестных элемента в секторе $\{1-4\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{11} &= \frac{S}{6} [3 - \cos^2(2\varepsilon) + 12 \cos^2(2\varepsilon) \sin^2(2\varepsilon) \tilde{\delta}^2], \\ \mathcal{D}_{22} &= \frac{S}{6} [3 + 2 \cos^2(2\varepsilon) - 3 \cos^4(2\varepsilon)], \\ \mathcal{D}_{33} &= \frac{S}{6} [1 + \cos^2(2\varepsilon) + 12 \cos^4(2\varepsilon) \tilde{\delta}^2], \\ \mathcal{D}_{44} &= \frac{S}{6} [3 + 4 \cos^2(2\varepsilon)], \\ \mathcal{D}_{13} &= \frac{S}{3} \sin(2\varepsilon) \cos(2\varepsilon) [1 + 12 \cos^4(2\varepsilon) \tilde{\delta}^2], \\ \mathcal{D}_{24} &= -\frac{S}{3} \sin(2\varepsilon) [3 + 4 \cos^2(2\varepsilon)], \end{aligned} \quad (55)$$

четыре недиагональных элемента в секторе $\{1-4\}$, обусловленные корреляцией флуктуаций сил вынужденного и спонтанного светового давления, нечетные по $\tilde{\delta}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{12} &= -2\tilde{\delta}S \sin^2(2\varepsilon) \cos^2(2\varepsilon), \\ \mathcal{D}_{14} &= \frac{8\tilde{\delta}S}{3} \sin(2\varepsilon) \cos^2(2\varepsilon), \\ \mathcal{D}_{23} &= -2\tilde{\delta}S \sin(2\varepsilon) \cos^3(2\varepsilon), \\ \mathcal{D}_{34} &= \frac{8\tilde{\delta}S}{3} \cos^3(2\varepsilon) \end{aligned} \quad (56)$$

и три элемента в секторе $\{5-6\}$, диагональные чет-

ные и недиагональный нечетный по $\tilde{\delta}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{55} &= \frac{S}{36} \left\{ 9 + 3 \cos(2\varepsilon) - 2 \cos^2(2\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \cos(2\varepsilon) [3 + \cos(2\varepsilon)]^3}{9 - \cos^2(2\varepsilon) + 36 \tilde{\delta}^2 \sin^2(2\varepsilon)} \right\}, \\ \mathcal{D}_{66} &= \frac{S}{36} \left\{ 9 - 3 \cos(2\varepsilon) - 2 \cos^2(2\varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4 \cos(2\varepsilon) [3 - \cos(2\varepsilon)]^3}{9 - \cos^2(2\varepsilon) + 36 \tilde{\delta}^2 \sin^2(2\varepsilon)} \right\}, \\ \mathcal{D}_{56} &= -\frac{2\tilde{\delta}S}{3} \frac{\sin(2\varepsilon) \cos(2\varepsilon) [9 - \cos^2(2\varepsilon)]}{9 - \cos^2(2\varepsilon) + 36 \tilde{\delta}^2 \sin^2(2\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (57)$$

Для момента основного состояния $J_g \geq 1$ матрица плотности $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ уже в нулевом порядке по S содержит недиагональные элементы (зеemanовские когерентности) в локальном базисе с осью квантования, ортогональной эллипсу поляризации. Следовательно, $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ зависит также от угла ϕ и в общем случае $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'} \neq 0$. Зависимости коэффициентов $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ от отстройки $\tilde{\delta}$ имеют вид частного двух полиномов, коэффициенты которых зависят от эллиптичности и углового момента J довольно сложным образом. Полный набор коэффициентов, необходимых для расчета тензоров ξ_{ij} и $D_{ij}^{(ind)}$, для перехода $1 \rightarrow 2$ дан в Приложении В.

8. ПОЛЕ, ОБРАЗОВАННОЕ ВСТРЕЧНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ВОЛНАМИ

Проиллюстрируем применение полученных выше результатов на относительно простом, но нетривиальном случае одномерных конфигураций поля, в которых одновременно присутствуют два и более градиента (например, градиенты интенсивности и эллиптичности). Эти конфигурации образованы встречными волнами с одинаковыми интенсивностями и произвольными эллиптическими поляризациями \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 и являются, таким образом, обобщением широко используемых для лазерного охлаждения конфигураций поля ($\text{lin}-\theta$ - lin и $\sigma_+-\sigma_-$). Итак, мы рассматриваем конфигурацию $\varepsilon_1-\theta-\varepsilon_2$: главные оси эллипсов поляризации ориентированы под углом θ друг к другу, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — соответствующие эллиптичности. Реальную амплитуду каждой из волн обозначим E_0 . Для встречных волн равной интенсивности $\text{Im}(\mathbf{E} \cdot \nabla_i \mathbf{E}^*) = 0$ и формула (А.5) приводят к жест-

кой связи между градиентами фазы и угла поворота эллипса локальной поляризации:

$$g^{(2)} = \sin(2\varepsilon)g^{(4)}, \quad (58)$$

где ε — локальное значение эллиптичности поля, $g^{(n)}$ — проекция градиента на направление распространения волн (ось z). При этом координатная зависимость кинетических коэффициентов и их зависимости от параметров волн полностью определяются двумя инвариантами $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ и $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ (см. (А.2)–(А.4)):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* &= 2E_0^2 [1 + \cos\theta \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos(2kz) - \\ &\quad - \sin\theta \sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin(2kz)], \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= E_0^2 \{2 \cos\theta \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + [\cos(2\varepsilon_1) + \\ &\quad + \cos(2\varepsilon_2)] \cos(2kz) + 2i \sin\theta \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \\ &\quad + i[\cos(2\varepsilon_1) - \cos(2\varepsilon_2)] \sin(2kz)\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Более конкретно мы остановимся на одном подклассе симметричных конфигураций, для которого возникают наиболее интересные физические следствия, а именно, на конфигурации поля $\varepsilon - \theta - \bar{\varepsilon}$, где параметры эллиптичности встречных волн имеют противоположные знаки $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_0$. Тогда, согласно (59), все возможные градиенты поля отличны от нуля:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* &= 2E_0^2 [1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos\theta \cos(2kz)], \\ \sin(2\varepsilon) &= -\frac{\sin\theta \cos(2\varepsilon_0) \sin(2kz)}{1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos\theta \cos(2kz)}, \\ \text{tg}(2\Phi) &= \frac{\sin\theta \sin(2\varepsilon_0)}{\cos\theta + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz)}. \end{aligned}$$

8.1. Сила светового давления

Для конкретных расчетов силу светового давления на неподвижный атом удобно представить в виде

$$F = -\text{Re} \left\{ \frac{\hbar(\delta + i\gamma/2)S}{\alpha_0 + 2S\alpha_1} \times \right. \\ \left. \times [(\alpha_1 - A)\nabla_z \ln(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + A\nabla_z \ln(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)] \right\}, \quad (60)$$

поскольку отношения коэффициентов α_0 , α_1 и A зависят только от четных степеней $\cos(2\varepsilon)$. В частности, для перехода $1/2 \rightarrow 3/2$ в пределе малых насыщений имеем

$$F = 2\hbar k S_0 \cos(2\varepsilon_0) \sin(2kz) \times \\ \times \frac{\delta[4 \cos\theta + (1+3 \cos\theta) \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz)] - \gamma \sin\theta \cos(2\varepsilon_0)}{3[1 + \cos\theta \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz)]},$$

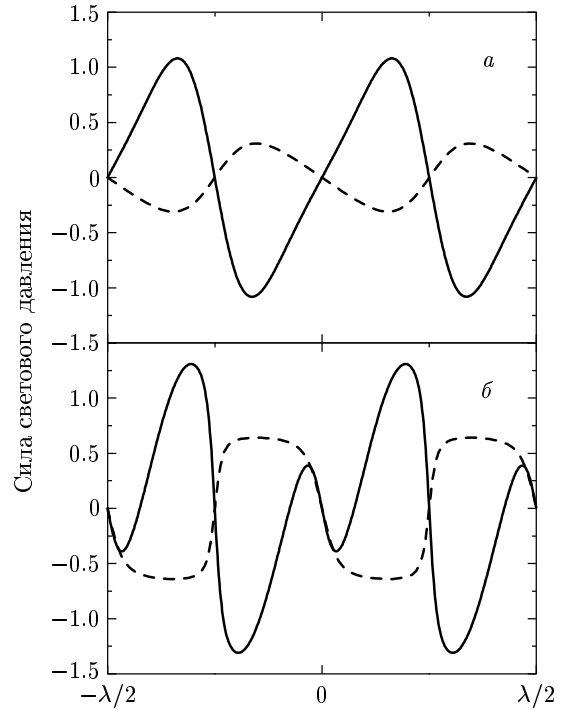


Рис. 1. Пространственная зависимость сил вынужденного (сплошные линии) и спонтанного (штриховые) светового давления в слабом ($S_0 \ll 1$) поле конфигурации $\varepsilon - \theta - \bar{\varepsilon}$ для переходов $1/2 \rightarrow 3/2$ (а) и $4 \rightarrow 5$ (б). Сила спонтанного светового давления $\hbar(\mathcal{F}_2 g^{(2)} + \mathcal{F}_4 g^{(4)})$ дана в единицах $\hbar k \gamma S_0$, а вынужденная сила $\hbar(\mathcal{F}_1 g^{(1)} + \mathcal{F}_3 g^{(3)})$ — в единицах $\hbar k \delta S_0$. Параметры конфигурации поля: $\varepsilon_0 = \pi/8$, $\theta = \pi/3$

где параметр насыщения S_0 соответствует интенсивности одной волны.

Из соотношений симметрии [23] следует, что усредненная по пространственному периоду сила (60) обращается в нуль, т. е. сила соответствует периодическому потенциалу. Характерная особенность данной конфигурации проявляется в том, что периодический потенциал формируется как индуцированной, так и спонтанной составляющими силы светового давления (см. рис. 1). Такое поведение позволяет, в принципе, использовать спонтанную силу для создания оптических решеток в случае точного резонанса, когда индуцированная сила обращается в нуль, а спонтанная достигает максимального значения.

8.2. Коэффициент трения

Рассмотрим переход $1/2 \rightarrow 3/2$ в пределе малых насыщений $S \ll 1$, когда в полях с градиентами по-

ляризации возникает возможность охлаждения ниже доплеровского предела [1]. Коэффициент трения определяется четырьмя компонентами (53). Для появления не зависящих от $\tilde{\delta}$ аномальных компонент необходимо одновременное присутствие градиентов фазы и эллиптичности, либо угла поворота и эллиптичности. И то, и другое реализуется в конфигурации $\varepsilon-\theta-\bar{\varepsilon}$ при $\theta \neq 0$. Используя (59) и (A.2)–(A.4), можно получить явные выражения для нормальной, ξ_n , и аномальной, ξ_a , составляющих коэффициента трения через параметр эллиптичности образующих волн ε_0 и угол θ :

$$\begin{aligned} \xi_n &= \hbar[\mathcal{X}_{33}g^{(3)} + \mathcal{X}_{13}g^{(1)}g^{(3)}] = \\ &= \hbar\tilde{\delta} \left[\frac{3}{2[1 - \cos^2(2\varepsilon)]} (\tilde{g}^{(3)})^2 + 3g^{(1)}\tilde{g}^{(3)} \right] = \\ &= \hbar k^2 \tilde{\delta} \sin^2 \theta \cos^2(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \times \\ &\quad \times [\cos(2kz) + \cos \theta \cos(2\varepsilon_0)] \times \\ &\quad \times [1 + \cos \theta \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz)]^{-3}, \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_a &= \hbar[\mathcal{X}_{23}g^{(2)}g^{(3)} + \mathcal{X}_{43}g^{(4)}g^{(3)}] = \\ &= \hbar \left[-\frac{3}{2}g^{(2)}\tilde{g}^{(3)} + \frac{3}{2[1 - \cos^2(2\varepsilon)]}\tilde{g}^{(4)}\tilde{g}^{(3)} \right] = \\ &= \hbar k^2 3 \sin \theta \sin(2\varepsilon_0) \cos(2\varepsilon_0) \times \\ &\quad \times [\cos(2kz) + \cos \theta \cos(2\varepsilon_0)] \times \\ &\quad \times [1 + \cos \theta \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz)]^{-3}. \quad (62) \end{aligned}$$

При усреднении по периоду поля в общем случае обе компоненты оказываются отличными от нуля:

$$\langle \xi_n \rangle = \hbar k^2 \tilde{\delta} \frac{3 \sin^2 \theta \cos^2(2\varepsilon_0)}{[1 - \cos^2 \theta \cos^2(2\varepsilon_0)]^{3/2}}, \quad (63)$$

$$\langle \xi_a \rangle = -\hbar k^2 \frac{3 \sin \theta \cos \theta \sin(2\varepsilon_0) \cos^2(2\varepsilon_0)}{[1 - \cos^2 \theta \cos^2(2\varepsilon_0)]^{3/2}}. \quad (64)$$

8.3. Направление кинетического процесса

Присутствие аномальной составляющей силы трения проявляется на качественном уровне в изменении направления (нагрев или охлаждение) и скорости кинетического процесса. Пожалуй, наиболее ярким примером является случай точного резонанса, $\delta = 0$, когда нормальная составляющая трения обращается в нуль. Пренебрегая аномальной частью, можно было бы ожидать медленного (линейного по времени) роста температуры, обусловленного диффузией атомов по импульсам. Однако, если $\varepsilon_0 \neq 0, \pm\pi/4$ и $\theta \neq 0, \pi/2$, то $\langle \xi_a \rangle \neq 0$ и атом в среднем находится под действием неконсервативных сил

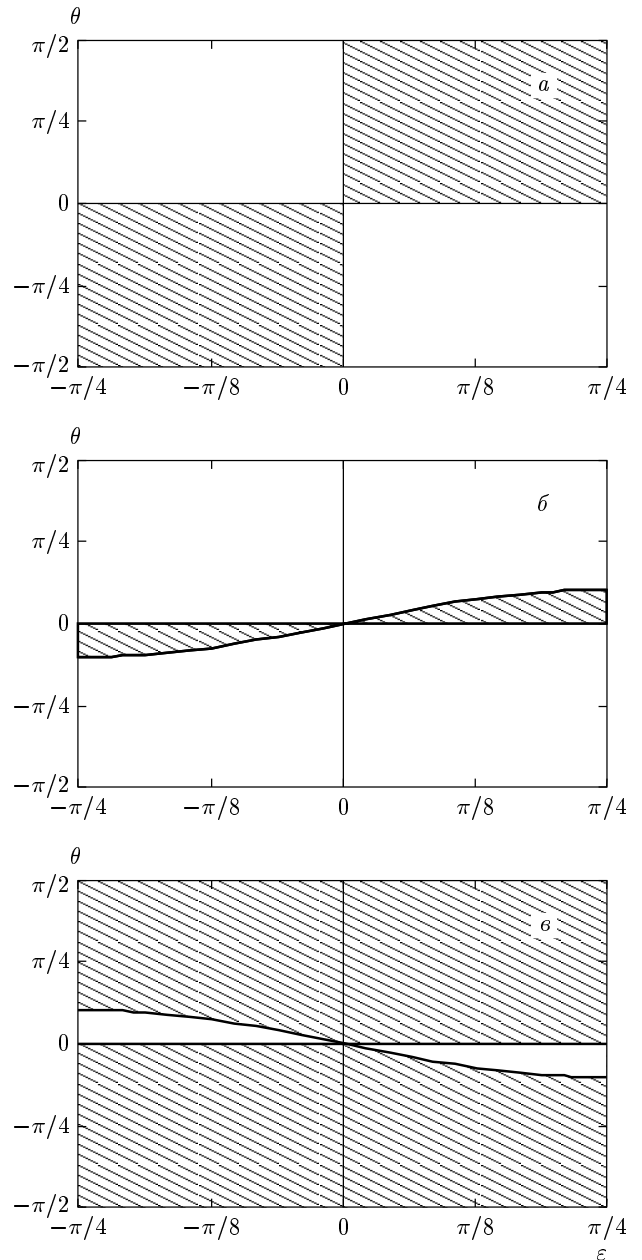


Рис. 2. Области нагрева (светлые) и охлаждения (заштрихованные) при отстройках $\delta = 0$ (а), 3γ (б), -3γ (в)

даже в случае $\delta = 0$. Знак $\langle \xi_a \rangle$ определяется произведением $\sin \theta \sin(2\varepsilon_0)$. В результате можно выделить области изменения параметров θ и ε_0 (см. рис. 2), где коэффициент трения отрицателен и имеет место охлаждение, и области, где коэффициент трения положителен, что соответствует быстрому (экспоненциальному) росту температуры.

Присутствие аномальной компоненты трения

можно обнаружить и при ненулевых отстройках. Так, например, при $\delta < 0$ можно было бы ожидать, что охлаждение будет иметь место во всей области изменения θ и ε_0 . Однако из-за аномальной составляющей знак коэффициента трения инвертируется при пересечении линии

$$\frac{\delta}{\gamma} \operatorname{tg} \theta = -\sin(2\varepsilon_0) \quad (65)$$

и в области, ограниченной этой кривой и осью $\theta = 0$, имеет место экспоненциально быстрый рост температуры. При отрицательных отстройках, наоборот, в области, ограниченной кривой (65) и осью $\theta = 0$ коэффициент трения отрицателен, т. е. имеет место эффект охлаждения, а вне этой области — нагрев. Такое поведение объясняется тем, что при $\theta = 0$ локальная поляризация поля всюду линейна и отсутствуют необходимые для сизифовского механизма трения разность населенностей подуровней и различие соответствующих оптических потенциалов. В результате при $\theta \rightarrow 0$ ($\varepsilon_0 \neq 0$) нормальная компонента стремится к нулю, $\langle \xi_n \rangle \propto \theta^2$. Для аномальной составляющей из двух причин остается только первая, что приводит к более медленному убыванию, $\langle \xi_a \rangle \propto \theta$.

Совершенно аналогично, хотя и более громоздко, рассчитываются явные выражения для коэффициентов диффузии. Здесь мы не будем останавливаться на этом вопросе.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем некоторые итоги. Кинетика медленных атомов в неоднородно поляризованном поле описывается в квазиклассическом приближении уравнением Фоккера–Планка для функции распределения атомов в фазовом пространстве. Коэффициенты этого уравнения (сила в нулевом и первом порядке по скорости и диффузия в нулевом) представлены в виде разложения по пространственным градиентам поля. Для замкнутых атомных переходов из класса $J \rightarrow J + 1$ получены аналитические выражения для силы и коэффициента диффузии, позволяющие рассматривать движение атомов в поле произвольной конфигурации. Для силы, действующей на неподвижный атом, и для спонтанной диффузии полученные компактные аналитические результаты пригодны при произвольном угловом моменте J . Для первых поправок к силе по скорости и для вынужденной диффузии с ростом J аналитические выражения становятся достаточно громоздкими, поэтому в работе мы

ограничились рядом переходов с небольшими значениями $J = 0, 1/2, 1$. Показано, что сила трения и тензор вынужденной диффузии в общем случае содержат перекрестные вклады, обусловленные совместным действием градиентов различного типа. В результате сила трения и тензор диффузии не обладают определенной четностью относительно изменения знака отстройки поля от резонанса, δ . Рассмотрена качественная интерпретация физических механизмов, приводящих к появлению перекрестных вкладов в трение. Выяснено, что эти механизмы можно отнести к смешанному типу — доплеровское трение за счет сил вынужденного светового давления (\mathcal{X}_{12}), либо сизифовский эффект в присутствии сил спонтанного светового давления (\mathcal{X}_{23} и \mathcal{X}_{43}).

В заключение отметим, что полученные в настоящей работе аналитические результаты для коэффициентов уравнения Фоккера–Планка дают решение (в общем, не зависящем от конкретной конфигурации поля, виде) первой половины задачи теоретического описания движения атомов в квазиклассическом приближении. Вторая часть должна заключаться в анализе решений (стационарных или динамических) уравнения Фоккера–Планка. Такой анализ, качественный или количественный, возможен, по всей видимости, только при конкретизации пространственной конфигурации поля. Простейшим вариантом являются известные [1, 15, 16, 24] аналитические оценки температуры охлаждения, основанные на флуктуационно-диссипационных соотношениях с использованием средних по пространству значений коэффициентов диффузии и трения. Более рафинированные методы должны, очевидно, учитывать эффекты пространственной локализации атомов (см., например, [16, 33]) и довольно сложный характер движения в неоднородно поляризованном поле.

Работа поддержана РФФИ (проекты 01-02-17036, 01-02-17744, 02-02-06513, 03-02-16513) и Министерством образования РФ (гранты Е00-3.2-153, УР.01.01.062). Работа одного из авторов (О.Н.П) поддержана грантом для молодых исследователей INTAS YSF 00-129.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Использованная нами естественная параметризация (29) достаточно удобна для записи аналитических результатов и качественной интерпретации раз-

личных вкладов. Однако окончательные результаты для вектора силы \mathbf{F} и тензоров ξ_{ij} и D_{ij} всегда можно выразить инвариантным и аналитическим образом через комплексную векторную амплитуду поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и ее пространственные градиенты. При этом удается полностью избежать использования операции извлечения корня n -й степени, что, как известно, может приводить к неоднозначностям в фазовых множителях. В этом смысле степень линейной поляризации, $\cos(2\varepsilon)$, определенная как

$$\cos(2\varepsilon) = \frac{\sqrt{|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}|^2}}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}, \quad (\text{A.1})$$

содержит указанную неоднозначность. Например, можно было бы использовать всюду неотрицательное значение корня, что не вполне удобно, поскольку такая функция не является в общем случае гладкой. Подобные рассуждения справедливы и для $\sin(2\varepsilon)$ — степени круговой поляризации. В то же время квадрат степени линейной поляризации

$$\cos^2(2\varepsilon) = \frac{|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}|^2}{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)^2} \quad (\text{A.2})$$

не имеет этого недостатка.

Переход к общеинвариантным выражениям для \mathbf{F} , ξ_{ij} и D_{ij} осуществляется следующим образом. Градиенты $\mathbf{g}^{(1)}$ и $\mathbf{g}^{(2)}$ выражаются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(1)} &= \frac{1}{2} \frac{\nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}, \\ \mathbf{g}^{(2)} &= \frac{i}{4} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*)^2} \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Далее, вместо градиента эллиптичности $\mathbf{g}^{(3)}$ следует использовать

$$\tilde{\mathbf{g}}^{(3)} = \nabla \cos^2(2\varepsilon), \quad (\text{A.4})$$

а вместо градиента угла $\mathbf{g}^{(4)}$ — произведение $\tilde{\mathbf{g}}^{(4)} = \sin(2\varepsilon)\mathbf{g}^{(4)}$, для декартовых компонент которого имеем следующее выражение:

$$\tilde{g}_i^{(4)} = \frac{\text{Im}(\mathbf{E} \cdot \nabla_i \mathbf{E}^*)}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*} + g_i^{(2)}, \quad (\text{A.5})$$

эквивалентное (25). Нетрудно убедиться, что после перехода к новым градиентам все коэффициенты \mathcal{F}_κ , $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ в секторе $\{1-4\}$ будут иметь зависимость от эллиптичности только в виде четных степеней $\cos(2\varepsilon)$, т. е. неоднозначность, связанная с извлечением корня будет устранена.

Ситуация в секторе $\{5, 6\}$ представляется более сложной, поскольку невозможно получить однозначные аналитические выражения для линейных комбинаций градиентов $\mathbf{g}^{(5)}$ и $\mathbf{g}^{(6)}$. Здесь существенную

роль играют два обстоятельства. Первое, поскольку $\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_6 = 0$, нам нужны только квадратичные комбинации градиентов вида $g_i^{(\alpha)} g_j^{(\alpha')}$. Второе, коэффициенты $\mathcal{X}_{\alpha\alpha'}$ и $\mathcal{D}_{\alpha\alpha'}$ в секторе $\{5, 6\}$ содержат как четные, так и нечетные степени $\cos(2\varepsilon)$, при этом имеют место следующие свойства симметрии относительно изменения знака $\cos(2\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{55}(-\cos(2\varepsilon)) &= \mathcal{X}_{66}(\cos(2\varepsilon)), \\ \mathcal{X}_{56}(-\cos(2\varepsilon)) &= -\mathcal{X}_{65}(\cos(2\varepsilon)) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

(для $\mathcal{D}_{\alpha\alpha'}$ — аналогично), которые подсказывают, что аналитические инвариантные выражения можно получить для следующих комбинаций:

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(1)} &= g_i^{(5)} g_j^{(5)} + g_i^{(6)} g_j^{(6)}, \\ G_{ij}^{(2)} &= \cos(2\varepsilon) \left(g_i^{(5)} g_j^{(5)} - g_i^{(6)} g_j^{(6)} \right), \\ G_{ij}^{(3)} &= \sin(2\varepsilon) \left(g_i^{(5)} g_j^{(6)} - g_i^{(6)} g_j^{(5)} \right), \\ G_{ij}^{(4)} &= \sin(2\varepsilon) \cos(2\varepsilon) \left(g_i^{(5)} g_j^{(6)} + g_i^{(6)} g_j^{(5)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Действительно, рассмотрим два тензора

$$\begin{aligned} P_{ij} &= 2(\mathbf{e}_0 \cdot \nabla_i \mathbf{e})(\mathbf{e}_0 \cdot \nabla_j \mathbf{e}^*) = \\ &= G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} - iG_{ij}^{(3)}, \\ R_{ij} &= 2(\tilde{\mathbf{e}} \cdot \nabla_i \mathbf{e}_0)(\tilde{\mathbf{e}}^* \cdot \nabla_j \mathbf{e}_0) = \\ &= G_{ij}^{(1)} - G_{ij}^{(2)} + iG_{ij}^{(3)}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

где $\tilde{\mathbf{e}}$ — третий вектор комплексной триады: $\tilde{\mathbf{e}}^* = \mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}$. Очевидно, что каждый из тензоров P_{ij} и R_{ij} однозначно выражается через $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и ее производные (явные выражения не приводим из-за громоздкости), поскольку составлен из четного числа векторов \mathbf{e}_0 и равного количества векторов \mathbf{e} и \mathbf{e}^* , т. е. нет необходимости в использовании неоднозначных выражений для $\sin(2\varepsilon)$ и $\exp(i\Phi)$. Тензоры $G_{ij}^{(1)}$ и $G_{ij}^{(2)}$ равны полусумме и полуразности реальных частей (A.8), а $G_{ij}^{(3)}$ соответствует мнимой части. Для получения аналитического выражения для тензора $G_{ij}^{(4)}$ можно взять симметричную часть тензора

$$\begin{aligned} S_{ij} &= -2 \sin(2\varepsilon) \text{Re}\{(\mathbf{e}_0 \cdot \nabla_i \mathbf{e})(\tilde{\mathbf{e}} \cdot \nabla_j \mathbf{e}_0)\} = \\ &= G_{ij}^{(3)} + G_{ij}^{(4)}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

где множитель $\sin(2\varepsilon)$ компенсирует нечетное количество векторов \mathbf{e}_0 , использованных при построении S_{ij} .

ПРИЛОЖЕНИЕ В

рехода 1 → 2 в пределе малых насыщений (51).

В этом приложении приведены аналитические выражения для коэффициентов $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ и $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$ для пе-

В нулевом порядке по S ненулевые компоненты $\mathcal{X}_{\kappa\kappa'}$ в секторе {1–4} имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{33} &= 40\tilde{\delta} \frac{625 + 5200c^2 + 13728c^4 - 768c^6 + 128c^2(125 + 259c^2 - 384c^4)\tilde{\delta}^2}{(25 - 8c^2)^3 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \\ \mathcal{X}_{44} &= \tilde{\delta} \frac{120c^2(15 + 2c^2)}{(25 - 8c^2)^2 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \\ \mathcal{X}_{13} &= 160sc\tilde{\delta} \frac{5(275 + 684c^2 - 32c^4) + 8(625 + 1040c^2 - 1584c^4)\tilde{\delta}^2}{(25 - 8c^2)^3 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \\ \mathcal{X}_{24} &= -\tilde{\delta} \frac{160sc^2(5 + 4c^2)}{(25 - 8c^2)^2 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{23} &= -80sc \frac{5(275 + 684c^2 - 32c^4) + 8(625 + 1040c^2 - 1584c^4)\tilde{\delta}^2}{(25 - 8c^2)^3 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \\ \mathcal{X}_{43} &= -10c \frac{11625 + 26260c^2 - 1760c^4 + 4(9375 + 14140c^2 - 25984c^4 + 1024c^6)\tilde{\delta}^2}{(25 - 8c^2)^3 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \\ \mathcal{X}_{34} &= -10c \frac{25 - 8c^2 - 4(25 + 28c^2 + 32c^4)\tilde{\delta}^2}{(25 - 8c^2)^2 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \\ \mathcal{X}_{14} &= \frac{320sc^2(5 + 4c^2)\tilde{\delta}^2}{(25 - 8c^2)^2 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Здесь и ниже для сокращения записи введены обозначения $c = \cos(2\varepsilon)$ и $s = \sin(2\varepsilon)$. Ориентационные компоненты $\mathcal{X}_{\alpha\alpha'}$ в секторе {5, 6} удобно представить в симметризованном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{55} + \mathcal{X}_{66} &= \frac{40\tilde{\delta}[45 - 34c^2 - 8c^4 + 16s^4(5 - c^2)\tilde{\delta}^2]}{(25 - 8c^2)[9 - 4c^2 + (52 - 48c^2)\tilde{\delta}^2 + 64s^4\tilde{\delta}^4]}, \\ \mathcal{X}_{55} - \mathcal{X}_{66} &= \frac{40c\tilde{\delta}[18 - 11c^2 - 4c^4 + 32s^4\tilde{\delta}^2]}{(25 - 8c^2)[9 - 4c^2 + (52 - 48c^2)\tilde{\delta}^2 + 64s^4\tilde{\delta}^4]}, \\ \mathcal{X}_{56} - \mathcal{X}_{65} &= -10s \frac{45 + 10c^2 + 8c^4 - 20(5 - 4c^4)\tilde{\delta}^2 - 320s^4\tilde{\delta}^4}{(25 - 8c^2)[9 - 4c^2 + (52 - 48c^2)\tilde{\delta}^2 + 64s^4\tilde{\delta}^4]}, \\ \mathcal{X}_{56} + \mathcal{X}_{65} &= -20cs \frac{27 + 4c^2 + 16s^2(3 + c^2)\tilde{\delta}^2}{(25 - 8c^2)[9 - 4c^2 + (52 - 48c^2)\tilde{\delta}^2 + 64s^4\tilde{\delta}^4]}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Компоненты $\mathcal{D}_{\kappa\kappa'}$, определяющие тензор вынужденной диффузии, в первом порядке по параметру насыщения S записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{S}{\mathcal{N}} [25(25 - 8c^2)^2 (5 - 3c^2) + 20 (15625 - 26875c^2 + 29380c^4 - 18688c^6 + 1280c^8)\tilde{\delta}^2 + \\
&+ 128c^2 (3125 + 1025c^2 - 10660c^4 + 6528c^6)\tilde{\delta}^4], \\
D_{22} &= \frac{S}{\mathcal{N}} [5 (15625 - 14375c^2 + 13880c^4 - 12608c^6 + 512c^8) + , \\
&+ 4 (78125 - 134375c^2 + 123700c^4 - 12480c^6 + 56064c^8)\tilde{\delta}^2], \\
D_{33} &= \frac{S}{\mathcal{N}} [(25 - 8c^2)^2 (25 + 23c^2) + 4 (15625 - 3125c^2 + 8900c^4 + 64384c^6 - 4864c^8)\tilde{\delta}^2 + , \\
&+ 2048c^4 (125 + 259c^2 - 384c^4)\tilde{\delta}^4], \\
D_{44} &= \frac{S}{\mathcal{N}} [25 (3125 - 1875c^2 + 3966c^4 - 592c^6) + \\
&+ 4 (78125 - 109375c^2 + 120450c^4 - 98440c^6 + 11552c^8)\tilde{\delta}^2], \\
D_{13} &= 4s c \frac{S}{\mathcal{N}} [25(25 - 8c^2)^2 + 4 (15625 - 10500c^2 + 37440c^4 - 2816c^6)\tilde{\delta}^2 + \\
&+ 256c^2 (625 + 1040c^2 - 1584c^4)\tilde{\delta}^4], \\
D_{24} &= -2s \frac{S}{\mathcal{N}} [5 (15625 - 5625c^2 + 15480c^4 - 1664c^6) + , \\
&+ 4 (78125 - 90625c^2 + 92700c^4 - 76960c^6 + 5888c^8)\tilde{\delta}^2],
\end{aligned} \tag{B.4}$$

где $\mathcal{N} = 2(25 - 8c^2)^3 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]$,

$$\begin{aligned}
D_{12} &= -\tilde{\delta} S \frac{32c^2 [5 (625 + 785c^2 - 1456c^4 + 64c^6) + 4 (3125 + 1025c^2 - 10660c^4 + 6528c^6)\tilde{\delta}^2]}{(25 - 8c^2)^3 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \\
D_{14} &= \tilde{\delta} S \frac{48s c^2 [3125 + 4950c^2 - 560c^4 + 4 (3125 + 1850c^2 - 5080c^4 + 384c^6)\tilde{\delta}^2]}{(25 - 8c^2)^3 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \\
D_{23} &= -\tilde{\delta} S \frac{128s c^3 [3 (125 + 290c^2 - 16c^4) + 2 (625 + 1040c^2 - 1584c^4)\tilde{\delta}^2]}{(25 - 8c^2)^3 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]}, \\
D_{34} &= \tilde{\delta} S \frac{48c^3 [1625 + 2420c^2 - 288c^4 + 8 (625 + 535c^2 - 1256c^4 + 96c^6)\tilde{\delta}^2]}{(25 - 8c^2)^3 [5 + 4(5 - 4c^2)\tilde{\delta}^2]},
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
D_{55} + D_{66} &= \frac{S}{2 (25 - 8c^2) [9 - 4c^2 + (52 - 48c^2)\tilde{\delta}^2 + 64s^4\tilde{\delta}^4]} [225 + 143c^2 + 16c^4 + 16c^6 + \\
&+ 4 (325 - 309c^2 - 80c^4 + 72c^6)\tilde{\delta}^2 + 64s^4 (25 - 13c^2)\tilde{\delta}^4], \\
D_{55} - D_{66} &= \frac{cS}{2 (25 - 8c^2) [9 - 4c^2 + (52 - 48c^2)\tilde{\delta}^2 + 64s^4\tilde{\delta}^4]} [405 - 57c^2 + 52c^4 + \\
&+ 4 (225 - 301c^2 + 68c^4 + 16c^6)\tilde{\delta}^2 + 64s^4 (5 - c^2)\tilde{\delta}^4], \\
D_{56} &= -\tilde{\delta} S \frac{4s c [45 - 6c^2 + 4 (20 - 31c^2 + 11c^4)\tilde{\delta}^2]}{(25 - 8c^2) [9 - 4c^2 + (52 - 48c^2)\tilde{\delta}^2 + 64s^4\tilde{\delta}^4]}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Amer. B* **6**, 2023 (1989).
2. V. Finkelstein, P. Berman, and J. Guo, *Phys. Rev. A* **45**, 1829 (1992).
3. A. V. Bezverbnuyi, A. M. Tumaikin, and N. L. Kosulin, *Laser Phys.* **2**, 1010 (1992).
4. J. Guo and P. Berman, *Phys. Rev. A* **48**, 3225 (1993).
5. J. Werner, H. Wallis, Hillenbrand, and A. Steane, *J. Phys. B* **26**, 3063 (1993).
6. Y. Castin and J. Dalibard, *Europhys. Lett.* **14**, 761 (1991); J. Dalibard, Y. Castin, and K. Mølmer, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 580 (1992); R. Taïeb, P. Marte, R. Dum, P. Zoller, *Phys. Rev. A* **47**, 4986 (1993); K. Mølmer, Y. Castin, and J. Dalibard, *J. Opt. Soc. Amer. B* **10**, 524 (1993); K. Berg-Sørensen, *Rhys. Rev. A* **49**, R4297 (1994); Y. Castin, K. Berg-Sørensen, J. Dalibard, and K. Mølmer, *Rhys. Rev. A* **50**, 5092 (1994); K. Mølmer and Y. Castin, *Quantum Semiclass. Opt.* **8**, 49 (1996).
7. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, Г. Ниенхаус, *ЖЭТФ* **108**, 415 (1995).
8. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **64**, 8 (1996).
9. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **110**, 1727 (1996).
10. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, Г. Ниенхаус, *ЖЭТФ* **114**, 125 (1998).
11. G. Nienhuis, A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, and V. I. Yudin, *Europhys. Lett.* **44**, 20 (1998).
12. О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **115**, 791 (1999).
13. О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **70**, 439 (1999).
14. А. В. Безвербный, *ЖЭТФ* **118**, 1066 (2000).
15. В. Г. Миногин, В. С. Летохов, *Давление лазерного излучения на атомы*, Наука, Москва (1986).
16. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, Наука, Москва (1991).
17. P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, and P. L. Gould, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169 (1988); D. S. Weiss, E. Riis, Y. Shevy, P. J. Ungar, and S. Chu, *J. Opt. Soc. Amer. B* **6**, 2072 (1989); C. Salomon, J. Dalibard, W. D. Phillips, A. Clairon, and S. Guellati, *Europhys. Lett.* **12**, 683 (1990).
18. С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. М. Шалагин, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*, Новосибирск, Наука (1979).
19. В. Г. Миногин, *ЖЭТФ* **79**, 2044 (1980).
20. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. B* **18**, 1661 (1985).
21. J. Javanainen, *Phys. Rev. A* **44**, 5857 (1991).
22. S. M. Yoo, J. Javanainen, *J. Opt. Soc. Amer. B* **8**, 1341 (1991).
23. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, and В. И. Юдин, *Advance Program ICONO'01*, Minsk (2001), p. 64.
24. J. P. Gordon and A. Ashkin, *Phys. Rev. A* **21**, 1606 (1980).
25. В. С. Смирнов, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **96**, 1613 (1989).
26. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **118**, 77 (2000).
27. A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, and V. I. Yudin, *Laser Phys.* **2**, 575 (1992).
28. P. Marte, R. Dum, R. Taïeb, P. Zoller, M. S. Shahriar, and M. Prentiss, *Phys. Rev. A* **49**, 4826 (1994).
29. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
30. J. Dalibard, S. Reynaud, and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. B* **17**, 4577 (1984).
31. А. В. Безвербный, *Письма в ЖЭТФ* **74**, 162 (2001).
32. M. Gajda and J. Mostowski, *Phys. Rev. A* **49**, 4864 (1994).
33. K. Mølmer and C. Westbrook, *Laser Phys.* **4**, 872 (1994).