

# ОСОБЕННОСТИ ДИФФУЗИИ ПАДАЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ

*Е. З. Грибова\*, И. С. Жукова, С. А. Лапинова, А. И. Саичев, Т. Эльперин*

*Нижегородский государственный университет им. Н. Н. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 29 июля 2002 г.

Изучены закономерности турбулентной диффузии частиц, движущихся в турбулентной среде под действием сил гравитации и Стокса. Отмечено, что с ростом инерционности движения дисперсия скорости частицы уменьшается. В то же время коэффициенты диффузии частицы не зависят от степени ее инерционности. Показано, что с увеличением скорости падения в вертикальной плоскости диффузия становится сильнее, чем в горизонтальной, а отношение коэффициентов горизонтальной и вертикальной диффузий убывает до 1/2.

PACS: 47.27.Qb

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ диффузии частиц примеси в турбулентной среде важен для решения экологических и метеорологических проблем. Во многих работах примесь полагают пассивной, движущейся со скоростью окружающей среды (см., например, [1–6]). Однако в реальных ситуациях значительную роль играют эффекты, связанные с инерционностью движения частиц и силой тяжести. Типичным примером здесь служит аэрозоль или капли дождя в турбулентной атмосфере. Инерционность частиц может существенно повлиять на законы турбулентной диффузии. Так, в [7] путем численного моделирования показано, что средняя скорость частиц в турбулентной среде больше скорости падения в покоящейся среде, а в [8] отмечено, что коэффициент турбулентной диффузии в вертикальной плоскости может в два раза превышать коэффициент диффузии в горизонтальной. В данной работе выведено уравнение диффузии частиц с учетом действия сил тяжести и Стокса и обсуждены его следствия применительно к статистике координат и скорости частиц. Обнаружен физический эффект, состоящий в том, что хотя дисперсия скорости частиц уменьшается с ростом инерционности их движения, коэффициенты диффузии практически не зависят от инерционности, а лишь от скорости свободного падения. Подробно

обсуждена зависимость дисперсии скорости частиц и коэффициентов продольной и поперечной диффузии от средней скорости падения частиц. Показано, что с увеличением скорости падения отношение коэффициентов поперечной и продольной диффузии плавно уменьшается до 1/2. Физически это обусловлено тем, что поперечная корреляционная функция скорости вихревого движения убывает быстрее продольной и имеет области отрицательной корреляции.

## 2. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

Рассмотрим движение частиц примеси в несжимаемой турбулентной среде, случайное поле скоростей которой равно  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Будем полагать размеры частиц примеси много меньшими внутреннего масштаба турбулентности и пренебрежем возможностью их столкновения. Если к тому же можно пренебречь влиянием частиц на поле скорости среды и молекулярной диффузией, то движение частицы адекватно описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \lambda\mathbf{V} = \lambda\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{g}.$$

Здесь  $\mathbf{X}(t)$ ,  $\mathbf{V}(t)$  — координаты и скорость движения частицы примеси. Коэффициент  $\lambda$  учитывает вязкое трение, а  $\mathbf{g}$  силы гравитации и Архимеда. От этих уравнений удобно перейти к уравнениям для

\*E-mail: gribova@rf.unn.ru

отклонений координат и скорости частицы от равномерного движения:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{v}t, \quad \mathbf{W}(t) = \mathbf{V}(t) - \mathbf{v}.$$

Здесь  $\mathbf{v} = \mathbf{g}/\lambda$  — установившаяся скорость падения частицы в покоящейся среде. Уравнения для  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{W}$  таковы:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{W}, \quad \frac{d\mathbf{W}}{dt} + \lambda\mathbf{W} = \lambda\mathbf{u}(\mathbf{Y} + \mathbf{v}t, t). \quad (1)$$

Ниже, для замыкания уравнения диффузии будет необходимо приближенное решение уравнений (1) во временном интервале  $\theta$ , величину которого определим позже. Представим  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{W}$  в виде

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}^0(t) + \tilde{\mathbf{Y}}(t), \quad \mathbf{W}(t) = \mathbf{W}^0(t) + \tilde{\mathbf{W}}(t),$$

где  $\mathbf{Y}^0(t')$  и  $\mathbf{W}^0(t')$  описывают движение частицы в покоящейся среде и подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Y}^0}{dt'} &= \mathbf{W}^0, & \frac{d\mathbf{W}^0}{dt'} + \lambda\mathbf{W}^0 &= 0, \\ \mathbf{Y}^0(t-\theta) &= \mathbf{Y}(t-\theta), & \mathbf{W}^0(t-\theta) &= \mathbf{W}(t-\theta), \end{aligned} \quad (2)$$

а  $\tilde{\mathbf{Y}}(t')$  и  $\tilde{\mathbf{W}}(t')$  являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{Y}}}{dt'} &= \tilde{\mathbf{W}}, \\ \frac{d\tilde{\mathbf{W}}}{dt'} + \lambda\tilde{\mathbf{W}} &= \lambda\mathbf{u}(\mathbf{Y}^0(t') + \tilde{\mathbf{Y}}(t') + \mathbf{v}t', t'), \\ \tilde{\mathbf{Y}}(t-\theta) &= 0, \quad \tilde{\mathbf{W}}(t-\theta) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) учитывают влияние турбулентности на движение частицы в промежутке времени  $t' \in [t-\theta, t]$ . Пусть  $\ell_u$  — внешний масштаб турбулентного поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Будем полагать в дальнейшем, что справедливо неравенство

$$|\tilde{\mathbf{Y}}| \ll \ell_u, \quad (4)$$

означающее, что «турбулентная компонента»  $\tilde{\mathbf{Y}}$  движения частицы за время  $\theta$  много меньше  $\ell_u$ . Если неравенство (4) справедливо, уравнения (3) можно заменить более простыми приближенными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{Y}}}{dt'} &= \tilde{\mathbf{W}}, & \frac{d\tilde{\mathbf{W}}}{dt'} + \lambda\tilde{\mathbf{W}} &= \lambda\mathbf{u}(\mathbf{Y}^0(t') + \mathbf{v}t', t'), \\ \tilde{\mathbf{Y}}(t-\theta) &= 0, & \tilde{\mathbf{W}}(t-\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем законы движения частицы в интервале времени  $t' \in [t-\theta, t]$ . Из уравнения (2) следует, что движение частицы в покоящейся среде, выраженное

через ее координаты и скорость в момент  $t$ , описывается равенством

$$\mathbf{Y}^0(t') = \mathbf{Y}^0(t) + \frac{1}{\lambda}\mathbf{W}^0(t) \left(1 - e^{\lambda(t-t')}\right).$$

Соответственно, решения уравнений (5), учитывающие турбулентность среды, таковы:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}(t) &= \lambda \int_{t-\theta}^t \mathbf{u}(\mathbf{Y}^0(t') + \mathbf{v}t', t') e^{\lambda(t'-t)} dt', \\ \tilde{\mathbf{Y}}(t) &= \int_{t-\theta}^t \mathbf{u}(\mathbf{Y}^0(t') + \mathbf{v}t', t') \left(1 - e^{\lambda(t'-t)}\right) dt'. \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Выведем уравнение для совместной плотности вероятностей

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{w}; t) = \langle \delta(\mathbf{Y}(t) - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{W}(t) - \mathbf{w}) \rangle \quad (7)$$

координат и скорости движения частиц, опираясь на приближенное описание (6) движения частиц в интервале времени  $t' \in [t-\theta, t]$ . Угловые скобки в (7) и ниже означают статистическое усреднение по ансамблю случайного поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  среды.

Положим  $\theta = 2\tau_u$ , где  $\tau_u$  — время статистической зависимости поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Перейдем от (1) к уравнению для среднего функции  $\varphi(\mathbf{Y}(t), \mathbf{W}(t))$ , где  $\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{w})$  — гладкая функция, вид которой будет указан ниже. Легко показать, что искомое среднее подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial t} - \langle \mathbf{W} \cdot \nabla_{\mathbf{Y}} \varphi \rangle + \lambda \langle \mathbf{W} \cdot \nabla_{\mathbf{W}} \varphi \rangle &= \\ &= \lambda \langle \mathbf{u}(\mathbf{Y} + \mathbf{v}t, t) \cdot \nabla_{\mathbf{W}} \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Все средние слева однозначно определяются плотностью вероятностей  $f(\mathbf{y}, \mathbf{w}; t)$  (7). Чтобы перейти от уравнения (8) к замкнутому уравнению для распределения  $f$ , необходимо замкнуть относительно него среднее в правой части соотношения (8). Сделаем это, взяв функцию  $\varphi(\mathbf{Y}(t), \mathbf{W}(t))$  в виде

$$\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{W}) \sim \exp \left( -\frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{y})^2}{\ell_\varphi^2} - \frac{(\mathbf{W} - \mathbf{w})^2}{w_\varphi^2} \right) \quad (9)$$

и полагая справедливыми неравенства

$$|\tilde{\mathbf{Y}}| \ll \ell_\varphi, \quad |\tilde{\mathbf{W}}| \ll w_\varphi. \quad (10)$$

Заметим, что функция  $\varphi$  выполняет примерно ту же работу, что и «физически бесконечно малый объем» при переходе от интегральных законов сохранения к макроскопическим уравнениям гидродинамики. Эта функция устанавливает пределы разрешения  $\ell_f \gtrsim \ell_\varphi$ ,  $w_f \gtrsim w_\varphi$  плотности вероятностей (7) в

фазовом пространстве  $\{\mathbf{y}, \mathbf{w}\}$ , в которых правомерны следствия диффузионного уравнения (17).

При выполнении неравенств (4), (10), среднее в правой части уравнения (8) можно заменить приближенным выражением

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{u}(\mathbf{Y}(t) + \mathbf{v}t, t) \cdot \nabla_{\mathbf{W}} \varphi(\mathbf{W}(t), \mathbf{Y}(t)) \rangle = \\ & = \langle \mathbf{u}(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t) \cdot \nabla_{\mathbf{W}^0} \varphi(\mathbf{W}^0(t), \mathbf{Y}^0(t)) \rangle + \\ & + \left\langle \tilde{Y}_j(t) \frac{\partial u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t)}{\partial Y_j^0(t)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t)} \right\rangle + \\ & + \left\langle u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t) \tilde{W}_j(t) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t) \partial W_j^0(t)} \right\rangle + \\ & + \left\langle u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t) \tilde{Y}_j(t) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t) \partial Y_j^0(t)} \right\rangle. \quad (11) \end{aligned}$$

Первое среднее в правой части (11) равно нулю в силу статистической независимости координат  $\mathbf{Y}^0(t)$  и скорости  $\mathbf{W}^0(t)$  от поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Остальные средние вычисляются по одинаковой схеме. Поэтому подробно обсудим здесь лишь первое из них. Проведем усреднение в два этапа, записав среднее в виде

$$\begin{aligned} & \left\langle \tilde{Y}_j(t) \frac{\partial u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t)}{\partial Y_j^0(t)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t)} \right\rangle = \\ & = \left\langle \left\langle \tilde{Y}_j(t) \frac{\partial u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t)}{\partial Y_j^0(t)} \right\rangle_{\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t)} \times \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\partial \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Внутреннее среднее в правой части вычисляется при условии, что заданы  $\mathbf{Y}^0(t)$  и  $\mathbf{W}^0(t)$ , а внешние угловые скобки означают усреднение по случайным  $\mathbf{Y}^0(t)$  и  $\mathbf{W}^0(t)$ . Вычислим условное среднее, подставив в него явное выражение (6) для  $\tilde{Y}(t)$ :

$$\begin{aligned} & \left\langle \tilde{Y}_j(t) \frac{\partial u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t)}{\partial Y_j^0(t)} \right\rangle_{\mathbf{Y}^0, \mathbf{W}^0} = \\ & = \int_{t-2\tau_u}^t \left\langle u_j(\mathbf{Y}^0(t') + \mathbf{v}t', t') \frac{\partial u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t)}{\partial Y_j^0(t)} \right\rangle_{\mathbf{Y}^0, \mathbf{W}^0} \times \\ & \quad \times \left(1 - e^{-\lambda(t'-t)}\right) dt'. \end{aligned}$$

Заметив, что при  $t' < t - \tau_u$  среднее под интегралом равно нулю, а при  $t' > t - \tau_u$  значения поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t')$  статистически не зависят от условий, будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\langle \tilde{Y}_j(t) \frac{\partial u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t)}{\partial Y_j^0(t)} \right\rangle_{\mathbf{Y}^0, \mathbf{W}^0} = C_i(\mathbf{W}^0(t)) = \\ & = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s_j} B_{ij} \left( \mathbf{s} + \mathbf{v}\tau + \frac{1}{\lambda} \mathbf{W}^0(t) (e^{\lambda\tau} - 1), \tau \right) \Big|_{\mathbf{s}=0} \times \\ & \quad \times (1 - e^{-\lambda\tau}) d\tau. \quad (12) \end{aligned}$$

Сюда вошел тензор поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , которое будем считать статистически изотропным. При этом указанный тензор имеет вид

$$B_{ij}(\mathbf{s}, \tau) = F(s, \tau) \delta_{ij} + [G(s, \tau) - F(s, \tau)] \frac{s_i s_j}{s^2}. \quad (13)$$

Здесь  $F(s)$  описывает поперечную, а  $G(s)$  продольную корреляцию поля скорости. Таким образом, имеем окончательно

$$\begin{aligned} & \left\langle \tilde{Y}_j(t) \frac{\partial u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t)}{\partial Y_j^0(t)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t)} \right\rangle = \\ & = \langle \mathbf{C}(\mathbf{W}^0(t)) \cdot \nabla_{\mathbf{W}^0(t)} \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t)) \rangle, \quad (14) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{C}(\mathbf{W}^0)$  задается равенством (12). Аналогичные (14), (12) выражения нетрудно получить и для последних двух средних в правой части равенства (11). А именно,

$$\begin{aligned} & \left\langle u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t) \tilde{W}_j(t) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t) \partial W_j^0(t)} \right\rangle = \\ & = \left\langle \sigma_{ij}^2(\mathbf{W}^0(t)) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t) \partial W_j^0(t)} \right\rangle, \\ & \left\langle u_i(\mathbf{Y}^0(t) + \mathbf{v}t, t) \tilde{Y}_j(t) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t) \partial Y_j^0(t)} \right\rangle = \\ & = \left\langle \left[ D_{ij}(\mathbf{W}^0(t)) - \frac{1}{\lambda} \sigma_{ij}^2(\mathbf{W}^0(t)) \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{Y}^0(t), \mathbf{W}^0(t))}{\partial W_i^0(t) \partial Y_j^0(t)} \right\rangle. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij}^2(\mathbf{W}^0) = \\ & = \lambda \int_0^\infty B_{ij} \left( \mathbf{v}\tau + \frac{1}{\lambda} \mathbf{W}^0(t) (e^{\lambda\tau} - 1), \tau \right) e^{-\lambda\tau} d\tau, \\ & D_{ij}(\mathbf{W}^0) = \\ & = \int_0^\infty B_{ij} \left( \mathbf{v}\tau + \frac{1}{\lambda} \mathbf{W}^0(t) (e^{\lambda\tau} - 1), \tau \right) d\tau. \quad (16) \end{aligned}$$

Подставив (14), (15) в (11), а (11) в (8), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial t} - \langle \mathbf{W} \cdot \nabla_Y \varphi \rangle + \lambda \langle [\mathbf{W} - \mathbf{C}(\mathbf{W})] \cdot \nabla_W \varphi \rangle = \\ = \lambda \left\langle \sigma_{ij}^2(\mathbf{W}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial W_i \partial W_j} \right\rangle + \\ + \left\langle [\lambda D_{ij}(\mathbf{W}) - \sigma_{ij}^2(\mathbf{W})] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial W_i \partial Y_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

Здесь, на основании неравенств (10), процессы  $\mathbf{Y}^0(t)$  и  $\mathbf{W}^0(t)$  заменены в правой части процессами  $\mathbf{Y}(t)$  и  $\mathbf{W}(t)$ . Из вида функции  $\varphi(\mathbf{Y}(t), \mathbf{W}(t))$  (9) и из последнего равенства следует, что если плотность вероятностей (7) имеет характерные масштабы по  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{w}$ , много большие  $\ell_\varphi$  и  $w_\varphi$ , то оно подчиняется диффузионному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \nabla_y f = \lambda (\nabla_w \cdot [\mathbf{w} - \mathbf{C}(\mathbf{w})] f) + \\ + \lambda \frac{\partial^2 (\sigma_{ij}^2(\mathbf{w}) f)}{\partial w_i \partial w_j} + \frac{\partial^2 ([\lambda D_{ij}(\mathbf{w}) - \sigma_{ij}^2(\mathbf{w})] f)}{\partial w_i \partial y_j}. \quad (17) \end{aligned}$$

Заметим еще, что в обсуждаемом случае вихревого поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , когда продольная и поперечная компоненты корреляционного тензора связаны соотношением Кармана [9]

$$F(s, \tau) = G(s, \tau) + \frac{s}{2} G'(s, \tau), \quad (18)$$

имеет место тождество  $\mathbf{C}(\mathbf{W}) \equiv 0$ .

Обсудим вопрос о способах измерения и геометрическом смысле решений уравнения (17). Напомним, что удовлетворяющая ему плотность вероятностей  $f$  (7) определяется как среднее микроскопической плотности одной частицы примеси по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Поэтому, вообще говоря, чтобы измерить  $f$ , надо следить за движением одной частицы. Затем, через достаточно большое время  $T \gg \tau_u$ , проследить независимое от предыдущей движение следующей частицы и повторять этот эксперимент много раз, чтобы набрать статистику реализаций, достаточную для более или менее аккуратного определения среднего (7). Другой способ визуализации решения уравнения (17) основан на том, что уравнению (17) заодно удовлетворяет средняя плотность облака частиц примеси в фазовом пространстве  $\{\mathbf{y}, \mathbf{w}\}$ . В частности, средняя плотность частиц в обычном пространстве (и в случае изотропной турбулентности) равна

$$\langle \rho(\mathbf{y}, t) \rangle = \int \rho_0(\mathbf{y}') f(\mathbf{y} - \mathbf{y}', \mathbf{w}; t) d^3 w d^3 y'.$$

Здесь  $\rho_0(\mathbf{x})$  начальная плотность облака частиц. Однако возможность измерения плотности вероятно-

стей как средней плотности облака частиц в текущий момент времени  $t$  требует выполнения жестких условий пространственной эргодичности. Прежде всего, размер облака должен быть гораздо больше внешнего масштаба турбулентности, чтобы движение отдельной частицы было практически независимым от движения большинства остальных частиц облака. Кроме того, известно, что реализации поля плотности частиц примеси с течением времени становятся все более резко меняющимися в пространстве, демонстрируя эффекты перемежаемости и кластеризации примеси (см., например, [3–5]). Поэтому для измерения все более плавно меняющейся в пространстве средней плотности  $\langle \rho(\mathbf{y}, t) \rangle$  надо провести дополнительное пространственное усреднение измеренной реализации плотности  $\rho(\mathbf{y}, t)$  по областям с размерами порядка внешнего масштаба турбулентности.

#### 4. ПРИБЛИЖЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ПАДЕНИЯ

Детально изучим следствия уравнения (17) в приближении равномерного падения. А именно, при расчете коэффициентов уравнения (17) пренебрежем отклонением  $\mathbf{W}$  скорости движения частицы от  $\mathbf{v}$ . Анализ проведем в системе координат, падающей со скоростью  $\mathbf{v}$ . Пусть  $\mathbf{v}$  направлена вдоль оси  $y_1 = y$ . Точно так же опустим индекс  $y$  соответствующей компоненты вектора  $\mathbf{w}$ :  $w_1 = w$ . Легко показать, что в данной системе координат и в приближении равномерного падения уравнение (17) переходит в

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{w}_\perp \cdot \nabla_\perp y) f + w \frac{\partial f}{\partial y} = \\ = \lambda (\nabla_\perp w \cdot \mathbf{w}_\perp f) + \lambda \frac{\partial (w f)}{\partial w} + \lambda \sigma_\perp^2 \nabla_\perp^2 w f + \lambda \sigma_\parallel^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + \\ + [\lambda D_\perp - \sigma_\perp^2] (\nabla_\perp w \cdot \nabla_\perp y) f + [\lambda D_\parallel - \sigma_\parallel^2] \times \\ \times \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w}. \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь градиенты берутся в плоскости, перпендикулярной вертикальной оси  $y$ , и используются обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel}^2 &= \lambda \int_0^{\infty} G(v\tau, \tau) e^{-\lambda\tau} d\tau, \\ \sigma_{\perp}^2 &= \lambda \int_0^{\infty} F(v\tau, \tau) e^{-\lambda\tau} d\tau, \\ D_{\parallel} &= \int_0^{\infty} G(v\tau, \tau) d\tau, \\ D_{\perp} &= \int_0^{\infty} F(v\tau, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Из формул (19), (20) видно, что диффузия частицы различна в направлении ее падения и в перпендикулярной плоскости: диффузия в направлении падения определяется корреляционной функцией продольной компоненты поля скорости среды, а поперечная диффузия — корреляционной функцией поперечной компоненты. Отдельно обсудим диффузию в разных направлениях. Усреднив уравнение (19) по поперечным координатам и скорости, приходим к уравнению продольной диффузии

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\parallel}}{\partial t} + w \frac{\partial f_{\parallel}}{\partial y} &= \\ = \lambda \frac{\partial(wf_{\parallel})}{\partial w} + \lambda \sigma_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 f_{\parallel}}{\partial w^2} + [\lambda D_{\parallel} - \sigma_{\parallel}^2] \frac{\partial^2 f_{\parallel}}{\partial y \partial w} \end{aligned} \quad (21)$$

относительно плотности вероятностей

$$f_{\parallel}(y, w; t) = \langle \delta(Y(t) - y) \delta(W(t) - w) \rangle,$$

где  $Y(t)$  и  $W(t)$  — компоненты координат и скорости частицы в направлении падения. Уравнение (21) легко решается в общем случае. Мы же ограничимся обсуждением физически наиболее важного случая  $\lambda t \gg 1$ , соответствующего установившейся средней скорости частицы и линейному закону диффузии. На таких временах плотность вероятностей продольной компоненты  $W(t)$  скорости совпадает со стационарным распределением  $f_{st}(w)$ , подчиняющимся уравнению

$$w f_{st}(w) + \sigma_{\parallel}^2(v, \varepsilon) \frac{df_{st}(w)}{dw} = 0.$$

Здесь явно указана зависимость коэффициента  $\sigma_{\parallel}^2(v, \varepsilon)$  от скорости падения и степени инерционности, количественно характеризуемой безразмерным параметром  $\varepsilon = \lambda\tau_u$ . Чем он больше, тем менее инерционно движение частицы. В частности, при  $\varepsilon \gg 1$  скорость частицы практически равна  $\mathbf{V}(t) \approx \mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)$ .

Из последнего уравнения следует, что продольная скорость частицы имеет распределение Максвелла:

$$f_{st}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\parallel}^2(v, \varepsilon)}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma_{\parallel}^2(v, \varepsilon)}\right). \quad (22)$$

Мы получим более полное представление о статистике продольной скорости частицы, если изучим зависимость ее дисперсии  $\sigma_{\parallel}^2$  от средней скорости падения  $v$  и параметра  $\varepsilon$ . В качестве первого шага выберем продольную корреляционную функцию  $G(s, \tau)$ , отражающую присущие сильной турбулентности пространственные свойства. Возьмем ее в виде

$$G(s, \tau) = \sigma_u^2 G(s) \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_u}\right), \quad (23)$$

где  $G(s)$  — пространственная корреляционная функция, учитывающая наличие внутреннего масштаба турбулентности  $\ell_0$ , ее внешнего масштаба  $\ell_u$  ( $\ell_u \gg \ell_0$ ) и закон двух третей Колмогорова–Обухова в инерционном интервале  $\ell_0 \ll s \ll \ell_u$ . Удобнее всего учесть указанные особенности корреляционной функции сильной турбулентности на языке соответствующей спектральной плотности

$$\tilde{G}(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} G(s) e^{-i(\kappa \cdot s)} d^3s.$$

Адекватная свойствам сильной турбулентности спектральная плотность задается спектром Кармана

$$\tilde{G}(\kappa) = AL^3 \frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)}{(\kappa^2 \ell_u^2 + 1)^{11/6}}, \quad \kappa_0 = \frac{5.92}{\ell_0},$$

где  $A$  выбирается из условия  $G(0) = 1$ . При анализе обсуждаемой в статье абсолютной диффузии частиц и в случае сильной турбулентности ( $\ell_0 \ll \ell_u$ ) можно, по-видимому, пренебречь влиянием внутреннего масштаба. Поэтому положим  $\ell_0 = 0$  и будем пользоваться упрощенным спектром Кармана

$$\tilde{G}(\kappa) = AL^3 (\kappa^2 \ell_u^2 + 1)^{-11/6}.$$

Отвечающая ему корреляционная функция равна

$$\begin{aligned} G(s) &= \Omega_{\parallel} \left(\frac{s}{\ell_u}\right), \\ \Omega_{\parallel}(z) &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{1/3} K_{1/3}(z). \end{aligned} \quad (24)$$

При этом

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2\pi^2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \approx 0.063.$$

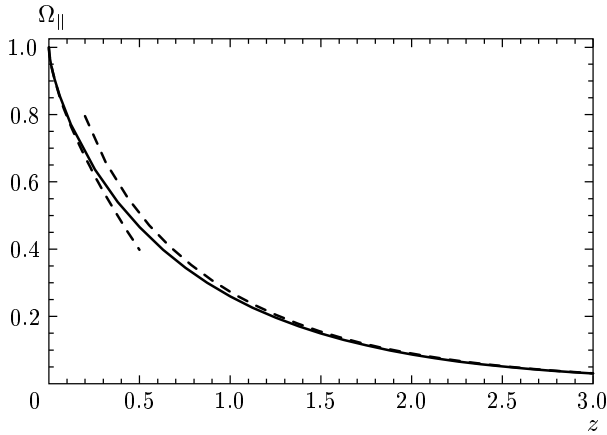


Рис. 1.

При  $z \rightarrow 0$  корреляционная функция (24) обладает асимптотикой

$$\Omega_{\parallel}(z) \sim 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/6)} z^{2/3} \quad (z \rightarrow 0),$$

соответствующей закону двух третей Колмогорова–Обухова, а при больших  $z$  экспоненциально убывает до нуля:

$$\Omega_{\parallel}(z) \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{z}\right)^{1/6} e^{-z} \quad (z \gtrsim 1).$$

График функции  $\Omega_{\parallel}(z)$  (24) вместе с ее асимптотиками изображен на рис. 1.

Из (20), (23), (24), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel}^2(v, \varepsilon) &= \sigma_u^2 \varepsilon \Phi(\gamma, \varepsilon), \\ \Phi(\gamma, \varepsilon) &= \frac{1}{1 + \varepsilon} F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{\gamma^2}{(1 + \varepsilon)^2}\right) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3} \Gamma^3\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi[(1 + \varepsilon)^2 - \gamma^2]^{5/6}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2/3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Сюда вошел безразмерный параметр  $\gamma = v/\tilde{u}$ , где  $\tilde{u} = \ell_u/\tau_u$ . Графики нормированной на  $\sigma_u^2$  дисперсии  $\sigma_{\parallel}^2$  продольной скорости частицы в зависимости от  $\varepsilon$  и при разных  $\gamma$  даны на рис. 2. Видно, что при слабой инерционности ( $\varepsilon \gg 1$ ) и любом  $\gamma$  дисперсия скорости частицы стремится к дисперсии компонент поля скорости среды  $\sigma_u^2$ . С ростом инерционности движения частицы (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) дисперсия ее скорости стремится к нулю, вследствие усредняющего действия инерционности.

Найдем закон продольной диффузии частицы,

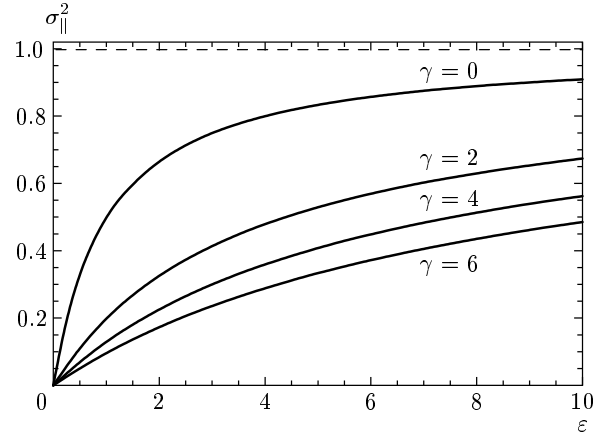


Рис. 2.

перейдя от формулы (21) к уравнению для среднего  $\langle Y^2(t) \rangle$ . Из соотношения (21) следует, что

$$\frac{d\langle Y^2(t) \rangle}{dt} = 2\langle Y(t)W(t) \rangle. \quad (26)$$

Среднее в правой части, в свою очередь, подчиняется уравнению

$$\frac{d\langle Y(t)W(t) \rangle}{dt} + \lambda\langle Y(t)W(t) \rangle = \langle W^2(t) \rangle + \lambda D_{\parallel} - \sigma_{\parallel}^2.$$

Учитывая, что в интересующем нас случае  $\lambda t \gg 1$  средний квадрат относительной скорости стремится к стационарной дисперсии (25),

$$n\langle W^2(t) \rangle \rightarrow \sigma_{\parallel}^2,$$

а среднее  $\langle Y(t)W(t) \rangle$  стремится к стационарному значению

$$\langle YW \rangle_{st} = D_{\parallel}(\gamma),$$

из уравнения (26) получаем асимптотический закон диффузии

$$\langle Y^2(t) \rangle = 2D_{\parallel}(\gamma)t. \quad (27)$$

Здесь явно учтена зависимость коэффициента продольной диффузии от скорости падения (параметра  $\gamma$ ). Еще более замечательным, на наш взгляд, является отсутствие зависимости коэффициента диффузии в уравнении (27) от степени инерционности частицы (параметра  $\varepsilon$ ). Последнее кажется парадоксальным, так как с ростом инерционности (с уменьшением  $\varepsilon$ ) дисперсия скорости частицы уменьшается. Это, казалось бы, должно вести к ослаблению диффузии. Разрешение парадокса состоит в том, что с увеличением инерционности в той же степени растет время корреляции  $\tau_v$  скорости движения

частицы. В итоге произведение  $\sigma_{\parallel}^2 \tau_v$ , определяющее величину коэффициента диффузии, оказывается не зависящим от  $\varepsilon$ . Заметим еще, что для продольной корреляционной функции турбулентного поля скорости (23), (24)

$$D_{\parallel}(\gamma) = D_0 \Phi(\gamma), \quad D_0 = \sigma_u^2 \tau_u, \quad (28)$$

$$\Phi(\gamma) = \Phi(\gamma, \varepsilon = 0),$$

а функция  $\Phi(\gamma, \varepsilon)$  задается выражением (25).

### 5. ПОПЕРЕЧНАЯ ДИФФУЗИЯ

Диффузия частицы в плоскости, поперечной направлению падения, отличается от продольной диффузии иной зависимостью дисперсии скорости и коэффициента поперечной диффузии от параметров  $\gamma$  и  $\varepsilon$ . Это связано с тем, что поперечная диффузия определяется не продольной  $G$ , а поперечной корреляционной функцией  $F$  скорости среды. Согласно (18), последняя в случае (23), (24) равна

$$F(s, \tau) = \sigma_u^2 \Omega_{\perp} \left( \frac{s}{\ell_u} \right),$$

$$\Omega_{\perp}(z) = \frac{\Gamma \left( \frac{2}{3} \right)}{4\pi\sqrt{3}} \left( \frac{z}{2} \right)^{1/3} \times$$

$$\times [14K_{1/3}(z) - 3z K_{2/3}(z) - 3z K_{4/3}(z)].$$

Последняя функция, в отличие от  $\Omega_{\parallel}(z)$  (24), убывает быстрее и даже становится отрицательной при больших  $z$ . Графики  $\Omega_{\parallel}(z)$  и  $\Omega_{\perp}(z)$ , иллюстрирующие различия поперечной и продольной корреляционных функций вихревого поля скорости, даны на рис. 3. Указанные характерные особенности поперечных корреляций вихревого поля скорости обуславливают качественные и даже количественные отличия поперечной диффузии от продольной. Сравним, прежде всего, поперечную и продольную дисперсии скорости частицы на временах установившегося диффузионного движения ( $\lambda t \gg 1$ ). В этом случае стационарная продольная дисперсия скорости задается выражением (25), а соответствующая дисперсия одной из поперечных компонент скорости частицы, полученная подстановкой формулы (29) в (20) и

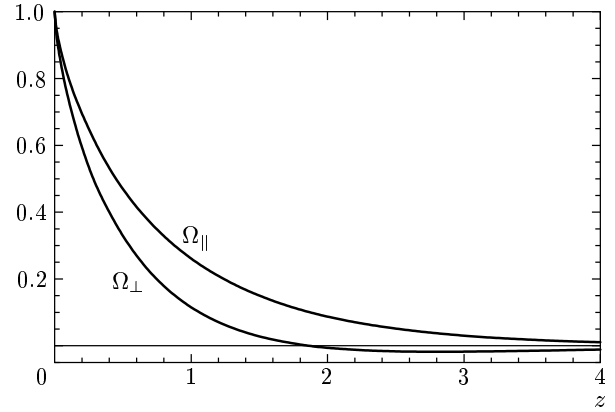


Рис. 3.

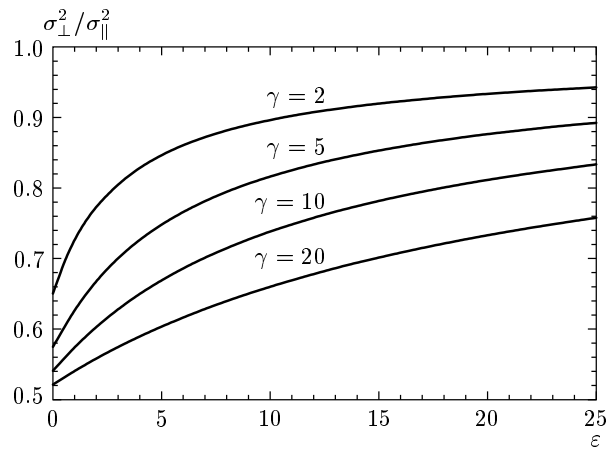


Рис. 4.

вычислением интеграла, равна

$$\sigma_{\perp}^2(v, \varepsilon) = \sigma_u^2 \varepsilon \Psi(\gamma, \varepsilon),$$

$$\Psi(\gamma, \varepsilon) = \frac{1}{6(1+\varepsilon)} \left[ 7F \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{\gamma^2}{(1+\varepsilon)^2} \right) - \right.$$

$$\left. - F \left( \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3}, \frac{\gamma^2}{(1+\varepsilon)^2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{3\gamma^2}{8(1+\varepsilon)^3} F \left( \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{3}, \frac{\gamma^2}{(1+\varepsilon)^2} \right) -$$

$$- \frac{2^{1/3}\gamma^{2/3}}{4\pi\sqrt{3}} \Gamma^3 \left( \frac{2}{3} \right) \frac{8(1+\varepsilon)^2 - 3\gamma^2}{[(1+\varepsilon)^2 - \gamma^2]^{11/6}}.$$

Графики отношения поперечной дисперсии скорости частицы к продольной в зависимости от  $\varepsilon$  при разных  $\gamma$  даны на рис. 4. Из них видно, что обсужденные выше особенности поперечной корреляционной функции (29) ведут к сравнительному уменьшению поперечной дисперсии скорости, наиболее

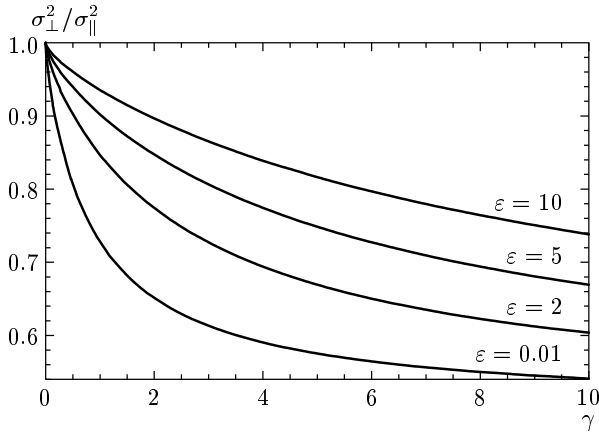


Рис. 5.

выраженному при сильно инерционном движении ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Увеличение скорости падения частицы (параметра  $\gamma$ ) также способствует уменьшению поперечной дисперсии скорости. Это видно на рис. 5, где дан график зависимости отношения  $\sigma_{\perp}^2/\sigma_{\parallel}^2$  от  $\gamma$  при разных  $\varepsilon$ .

Как уже отмечалось, инерционность движения частицы не влияет на ее коэффициент диффузии. Однако эффект ослабления поперечной диффузии по сравнению с продольной имеет место и здесь. Покажем это на примере продольной (23) и соответствующей ей поперечной (29) корреляционных функций поля скорости среды. Расчеты приводят в этом случае к следующему выражению для среднего квадрата поперечного отклонения частицы от траектории падения в покоящейся среде:

$$\langle \mathbf{X}_{\perp}^2 \rangle = 2D_{\perp}(\gamma), \quad D_{\perp}(\gamma) = D_0 \Psi(\gamma), \quad (31)$$

$$\Psi(\gamma) = \Psi(\gamma, \varepsilon = 0).$$

Графики нормированных на  $D_0$  продольного (28) и поперечного (31) коэффициентов диффузии изображены на рис. 6. Там же штриховой линией дан график отношения коэффициентов поперечной и продольной диффузии. Видно, что с увеличением скорости падения  $v$  отношение коэффициентов диффузии плавно уменьшается от 1 до 1/2.

Отметим, что предельное значение отношения коэффициентов диффузии равное 1/2 есть универсальная константа, не зависящая от спектрально-корреляционных свойств поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . В самом деле, в предельном случае большой скорости падения частицы ( $\gamma \gg 1$ ) можно при расчете коэффициентов диффузии пренебречь зависимостью

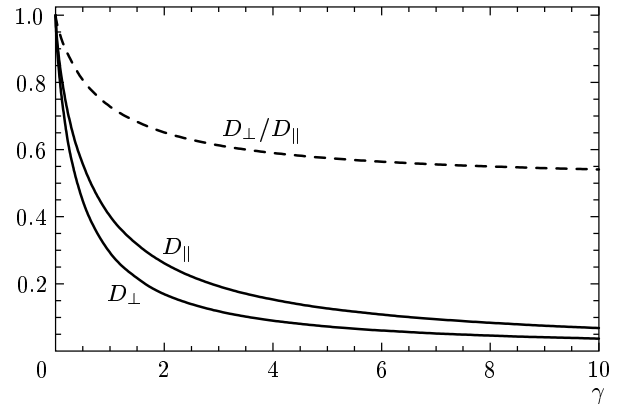


Рис. 6.

корреляционных функций поля скорости от времени и пользоваться асимптотическими формулами

$$D_{\parallel} \approx \int_0^{\infty} G(v\tau, 0) d\tau, \quad (32)$$

$$D_{\perp} \approx \int_0^{\infty} F(v\tau, 0) d\tau \quad (\gamma \gg 1),$$

физически означающими, что частица «пронизывает» элементарные вихри за время, за которое вихри практически не успевают сместиться. Подстановка в последнее соотношение (32) формулы Кармана (18) дает

$$D_{\perp} \approx D_{\parallel} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \tau \frac{dG(v\tau, 0)}{d\tau} d\tau$$

и после интегрирования по частям приводит к универсальному предельному соотношению

$$D_{\perp} \approx \frac{1}{2} D_{\parallel} \quad (\gamma \gg 1).$$

## 6. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Напомним, при выводе уравнения диффузии (17) требовалось, чтобы за время корреляции  $\tau_u$  турбулентного поля скорости среды можно было пренебречь влиянием турбулентности на движение диффундирующей частицы. Оценим справедливость этого допущения, заменив выражение (4) неравенством для средних,

$$\langle Y^2(\tau_u) \rangle \ll \ell_u^2,$$

и подставив сюда средний квадрат  $\langle Y^2(\tau_u) \rangle$  приращения продольной координаты за время  $\tau_u$  (27),



(28). В итоге приходим к следующему условию применимости уравнения (17):

$$\sigma_u^2 \Phi(\gamma) \ll \tilde{u}^2, \quad \tilde{u} = \ell_u / \tau_u. \quad (33)$$

Из асимптотики

$$\Phi(\gamma) \sim \frac{a}{\gamma} \quad (\gamma \gtrsim 1), \quad a = \frac{3}{2\pi 2^{2/3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.747$$

видно, что в типичном для турбулентности случае  $\sigma_u \approx \tilde{u}$  неравенство (33) выполняется при достаточно больших  $\gamma$ .

Использованное в работе приближение свободного падения справедливо, если можно пренебречь зависимостью коэффициентов (16) от  $W^0$ . Оценим, когда это можно сделать применительно к тензору диффузии  $D_{ij}$ . Характерная величина  $W^0$  определяется эффективной шириной распределения Максвелла (22):  $W^0 \approx \sigma_{\parallel}$ . Кроме того, будем считать  $\gamma$  достаточно большим, так что эффективный интервал интегрирования в выражении для  $D_{ij}$  (16) равен  $\tau^* \approx \tau_u / \gamma$ . Тогда зависимостью  $D_{ij}$  (16) от  $W^0$  можно пренебречь, если

$$\sigma_u^2 \Phi(\gamma, \varepsilon) \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right) - 1 \right]^2 \ll \varepsilon^2 \tilde{u}^2.$$

В частности, при  $\varepsilon \lesssim \gamma$  это условие сводится к неравенству

$$\sigma_u^2 \Phi(\gamma, \varepsilon) \ll \tilde{u}^2 \gamma^2,$$

заведомо выполняющемуся при больших значениях  $\gamma$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 00-02-16167 и 00-15-96619), а также университета им. Бен Гуриона, Израиль.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. T. Csanady, *Turbulent Diffusion in the Environment*, Dordrecht, Reidel (1980).
2. M. B. Isichenko, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 961 (1992).
3. V. S. L'vov, I. Procaccia, and A. L. Fairhall, *Phys. Rev. E* **50**, 4684 (1994).
4. В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, *ЖЭТФ* **111**, 1297 (1997).
5. И. С. Жукова, А. И. Саичев, *ПММ* **61**, 788 (1997).
6. A. I. Saichev and I. S. Zhukova, in *Lecture Notes in Physics*, ed. by S. Benkadda and G. M. Zaslavsky, Springer, Berlin (1998), Vol. 511, p. 353.
7. M. R. Maxey, *J. Fluid Mech.* **174**, 441 (1987).
8. G. T. Csanady, *J. Atmosph. Sci.* **20**, 201 (1963).
9. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидродинамика*, ч. 1, Наука, Москва (1965).