

ДЛИННОВОЛНОВАЯ КОНВЕКЦИЯ МАРАНГОНИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАГРЕВЕ

*В. П. Шилов**

*Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук
614013, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 10 сентября 2002 г.

Изучена надкритическая конвекция Марангони в плоском слое жидкости со свободной деформируемой поверхностью, ограниченном снизу твердой стенкой низкой теплопроводности, и с неоднородным по горизонтали нагревом. В длинноволновом приближении при слабой неоднородности теплового потока получена система двумерных нелинейных уравнений для возмущений температуры, завихренности и деформации свободной поверхности. Введено понятие квазиравновесия, т. е. устойчивости крупномасштабных течений, позволяющее смоделировать неоднородность теплового потока в виде тепловой ступеньки. Проведен анализ линейной устойчивости для плоского и осесимметричного вариантов теплового потока. Определены границы устойчивости конвективных режимов на плоскости параметров, характеризующих степень надкритичности внутри пятна и глубину демпфирования снаружи. Для осесимметричного пятна определены области устойчивости возмущений с различными значениями азимутального числа.

PACS: 47.20.Dr, 47.27.Te

1. ВВЕДЕНИЕ

В XIX в. итальянский винодел Марангони обнаружил при изготовлении вин течения, вызванные неоднородностью поверхностного натяжения, — термокапиллярную или капиллярно-концентрационную конвекцию, названную впоследствии его именем. Желание уменьшить роль капиллярных движений в технологических задачах (получение сверхчистых материалов в космосе, лазерное легирование в металлургии и т. п.), а также чисто академический интерес к новым механизмам неустойчивости и образованию пространственно-временных структур вызвали большое количество работ по этой тематике.

Первое изучение термокапиллярной неустойчивости жидкости в плоском слое при подогреве снизу было проведено Пирсоном [?]. Дальнейшие этапы исследования этого эффекта нашли отражение в книге Гершуни и Жуховицкого [?]. Тем не менее, несмотря на два века истории, течения Марангони, наблюдаемые в экспериментах при неоднородном нагреве или же неоднородном внесении поверхностно-активного вещества (ПАВ), остаются мало-

изученными и до сих пор не получили адекватного объяснения. Начало экспериментальных исследований этой проблемы было положено в пионерской работе [?]. В ней приводятся результаты исследования движения жидкости от сосредоточенного источника ПАВ, расположенного на свободной поверхности. Во всех опытах использовались дистиллированная вода и этиловый спирт, играющий роль ПАВ. Перепад концентраций спирта в поверхностном слое до 10 % вызывал изменение поверхностного натяжения воды примерно на 20 дин/см. Опыты показали, что вместо ожидаемого радиально-симметричного течения в кювете возникает многолепестковое движение, число лепестков которого зависит от интегрального потока массы этанола. Сначала, при постоянной подаче спирта, это движение стационарно и устойчиво, имеет резкий максимум радиальной составляющей скорости, по обе стороны от которого образуются по одному вихрю. Увеличение подачи ПАВ приводит к возрастанию интенсивности движения, и при определенных значениях потока массы двухвихревое движение перестает быть стационарным: время от времени со стороны, противоположной максимуму радиальной скорости, начинает появляться сначала третий, а потом еще один, четвертый, вихрь. В

*E-mail: v_p_shilov@icmm.ru

таком нестационарном режиме двухвихревое и четырехвихревое движения непрерывно сменяют друг друга, до тех пор пока при дальнейшем увеличении подачи спирта не возникает устойчивое стационарное движение с четырьмя вихрями вблизи источника. При еще больших значениях массопотока ПАВ образуется устойчивое шестивихревое движение, затем восьмивихревое и т. д., причем каждому переходу от движения с $2m$ вихрями (m — целое число) к движению с $2(m+1)$ вихрями соответствует определенное значение потока ПАВ. Интервал потока массы, в котором существует стационарное $2m$ -вихревое движение, быстро уменьшается с увеличением m , так что в опытах удавалось получить стационарное движение не более чем с десятью вихрями. Во всем диапазоне исследованных параметров наблюдаемые течения имели крупномасштабный характер.

В работе [?] исследовалась структура термокапиллярного течения от локализованного источника тепла, расположенного на дне плоского горизонтального слоя жидкости в круглой кювете. В опытах использовалось силиконовое масло, толщина которого варьировалась от 2 до 8 мм. В отличие от работы [?], для тонких слоев (не более 3 мм) и при малых перепадах температуры всегда наблюдалось радиально-симметричное течение от центра нагретого пятна к холодным стенкам кюветы. Увеличение разности температур между пятном и периферией приводило к образованию стационарных концентрических валов, занимающих все пространство кюветы. Наконец, при дальнейшем нагреве появлялось множество дефектов над пятном, а вне пятна возникали бегущие волны, накладывающиеся на основное течение. Для больших толщин (более 3 мм) стационарная структура концентрических валов не наблюдалась. Однако при увеличении нагрева источника тепла имел место переход от радиально-симметричного течения к бегущим волнам. По мнению авторов работы [?], наблюдаемая неустойчивость носит коротковолновый характер и вызвана комбинированным взаимодействием термокапиллярного и гравитационного механизмов конвекции.

Структуры, аналогичные изучаемым в [?], наблюдались также в работе [?], в которой экспериментально исследовалось термокапиллярное течение от сосредоточенного источника тепла, расположенного на поверхности тонкого (отношение толщины слоя к продольному размеру не превышало 0.1) слоя силиконового масла. Кроме того, наблюдалось радиально-симметричное течение, распространяющееся к границам кюветы. Оказалось, что уже при сравнительно небольших перепадах температуры течение

теряло устойчивость. Вторичная структура представляла из себя концентрические валы, возникающие на границе встречных потоков в основном течении и сбегающиеся к источнику тепла. Дальнейшее повышение температуры источника приводило к образованию радиальных лучеобразных валов, и наблюдаемая неустойчивость носила трехмерный характер.

Сравнительно недавно в [?] экспериментально и теоретически исследовалась конвекция Марангони от круглого плоского источника тепла диаметром 5–7 мм, расположенного в жидкости (декан), заполняющей глубокий бассейн. При больших глубинах погружения источника тепла преобладало термогравитационное течение, характерной чертой которого было наличие теплового факела. Распространение факела от источника тепла к поверхности жидкости искривляло ее свободную поверхность в сторону газовой фазы. При уменьшении глубины погружения источника интенсивность капиллярных эффектов возрастала и приводила к образованию воронки на поверхности раздела. При малой глубине погружения источника (не более 1 мм) на поверхности жидкости возникали спиральные волны, вращающиеся вправо или влево. Выбор направления вращения происходил случайным образом, вероятность образования волны правой или левой закрутки была одинаковой. По мере приближения источника к поверхности жидкости число рукавов спиралей увеличивалось от 1 до 10. Наконец, при выходе источника на поверхность жидкости бегущие волны затухали и на поверхности образовывалась стоячая волновая структура лучеобразной конфигурации, аналогичная исследуемой в [?]. По утверждению авторов, наблюдаемая конвекция имела крупномасштабный характер.

Целью данной работы является получение и решение системы модельных уравнений, отражающей основные особенности описанных выше экспериментов. Во всех этих работах присутствовал неоднородный источник тепла или ПАВ, вблизи границ которого возникала область с неоднородной температурой или концентрацией. Экспериментальные данные [3–6] различаются по характеру наблюдаемого конвективного движения. В частности, работы [?, ?] требуют учета трехмерного характера течений, что является достаточно сложной задачей. Поэтому ограничимся при построении теоретической модели использованием асимптотического длинноволнового разложения, позволяющего свести задачу о крупномасштабной конвекции [?, ?] к исследованию системы двумерных уравнений. Этот подход к

описанию конвекции конечной амплитуды, предложенный Сорокиным [?], возможен в области малой надкритичности. Для описания конвекции в плоском горизонтальном слое, где существует непрерывный спектр движений, он дает ответ на главный вопрос о том, какое течение является предпочтительным.

Нелинейные уравнения надкритической термогравитационной конвекции, описывающие медленную крупномасштабную динамику усредненного поля температур, были получены Штильманом и Сивашинским [8]. Применительно к конвекции Марангони эта задача была решена Кноблохом [9] для недеформируемой поверхности и бесконечных чисел Прандтля. Конечные числа Прандтля приводят к доминирующему влиянию инерционных эффектов при формировании непотенциального усредненного течения. Такие эффекты были известны ранее для гравитационной конвекции [10]. Для капиллярной конвекции их учет был осуществлен в работе [8]. Обобщение уравнений Кноблоха для двухслойной системы с деформирующейся поверхностью раздела было получено в работе [?]. В ней же приведены безразмерные физические критерии возникновения длинноволновой неустойчивости в двухслойной системе.

Характерной особенностью перечисленных теоретических работ является предположение об однородном нагреве всего слоя жидкости. Учет неоднородности теплового потока рассматривался лишь в [?] для термогравитационной конвекции. Задача о взаимодействии неоднородного нагрева (или неоднородного потока ПАВ) с крупномасштабной надкритической конвекцией Марангони остается нерешенной и является предметом настоящего исследования. Здесь она решается с использованием асимптотического длинноволнового разложения [?, ?].

В разд. 2 рассмотрена постановка задачи, введены безразмерные величины и получена система двумерных модельных уравнений, описывающих медленную крупномасштабную термокапиллярную конвекцию Марангони в плоском слое жидкости при неоднородном нагреве с учетом деформации поверхности. Здесь же приведены физические ограничения на использование этой модели и указана возможность ее применения в случае концентрационной конвекции Марангони. В разд. 3 вводится понятие механического квазиравновесия для крупномасштабной потери устойчивости, на основании чего неоднородность теплового потока моделируется в виде ступенчатой функции. Показано, что все нормальные возмущения изменяются со временем — за-

тухают или нарастают — монотонно. В п. 3.1 исследована линейная устойчивость квазиравновесия для одномерной неоднородности теплового потока. Построены нейтральные кривые для симметричной и антисимметричной мод с учетом деформации поверхности. В п. 3.2 исследована устойчивость для осесимметричной неоднородности теплового потока. Построены нейтральные кривые для различных значений азимутального «волнового» числа. Показано, что при определенных значениях параметров наиболее опасной является не осесимметричная, а дипольная мода. Заключение содержит обсуждение полученных результатов и сравнение с экспериментами [?, ?]. В Приложении дан подробный вывод системы модельных уравнений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим конвективное течение Марангони в плоском горизонтальном слое жидкости толщиной L со свободной поверхностью, ограниченном снизу твердой стенкой с низкой теплопроводностью. Верхнее полупространство заполнено газом. Жидкость и газ подогреваются снизу так, что через них идет внешний стационарный неоднородный поток тепла, поэтому существует течение, индуцированное неоднородным по горизонтали нагревом. Ось z системы координат направлена вертикально вверх, оси x и y лежат в плоскости слоя. Будем исследовать характер и устойчивость возникающей конвекции при следующих условиях: динамическая вязкость и теплопроводность газа меньше, чем жидкости, и поэтому его характеристики не влияют на потерю устойчивости; масштабы неоднородности теплового потока велики по сравнению с толщиной слоя, и эта неоднородность слабая в том смысле, что локальный тепловой поток мало отличается от среднего значения Q . Введем следующие единицы измерения: L — длина, L^2/χ — время, χ/L — скорость, $\eta\chi/L^2$ — давление, LQ/κ — температура. Здесь κ , χ и η — соответственно коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и динамической вязкости жидкости. Имея в виду применение в дальнейшем длинноволнового приближения, введем для удобства горизонтальную \mathbf{u} и вертикальную w составляющие скорости, а также дифференцирование по вертикальной координате ∂_z (обозначено штрихом) и по горизонтальным координатам $\nabla = \mathbf{i}\partial_x + \mathbf{j}\partial_y$, где \mathbf{i}, \mathbf{j} — единичные векторы вдоль направлений x и y . Система безразмерных уравнений гидродинамики [?],

включающих уравнение Навье–Стокса и уравнение теплопроводности, запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \left(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + w \mathbf{u}' \right) &= -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{u}'', \\ \frac{1}{\text{Pr}} \left(\partial_t w + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w w' \right) &= -P' + \nabla^2 w + w'' - G, \\ \partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w T' &= \nabla^2 T + T'', \end{aligned} \quad (1)$$

где $G = gL^3/\nu\chi$ и $\text{Pr} = \nu/\chi$ — соответственно числа Галилея и Прандтля, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, T — температура, отсчитываемая от среднего по слою значения. Что касается граничных условий, то на нижней границе ($z = 0$) ставятся условия прилипания для скорости и задается тепловой поток. На верхней границе, $z = 1 + h(x, y)$, выполняется кинематическое условие, задан внешний тепловой поток $\mathbf{Q} = \mathbf{e}_z(-1 + q(x, y))$ по вертикальной оси координат z , проекция которого на нормаль равна нормальной составляющей теплового потока с единицы площади поверхности,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla T = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z[-1 + q(x, y)],$$

и требуется непрерывность напряжений при $z = 0$:

$$\mathbf{u} = 0, \quad w = 0, \quad T' = -1 + q(x, y), \quad (2a)$$

и при $z = 1 + h(x, y)$:

$$\begin{aligned} \partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h &= w, \\ T' &= \nabla h \cdot \nabla T - 1 + q(x, y), \\ \hat{\sigma} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= (-\text{Ca} + \text{Ma} T) \text{div} \mathbf{n}, \\ \hat{\sigma} : \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha &= -\text{Ma} \boldsymbol{\tau}_\alpha \nabla T, \end{aligned} \quad (2b)$$

здесь $\text{Ca} = \sigma L/\eta\chi$ — капиллярное число, $\text{Ma} = (\partial\sigma/\partial T)QL^2/\eta\chi\kappa$ — число Марангони, $\hat{\sigma}$ — тензор вязких напряжений, $h(x, y)$ — амплитуда отклонения поверхности от плоской, $q(x, y)$ — неоднородная часть теплового потока, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{n} = (-\nabla h; 1)/\sqrt{1 + (\nabla h)^2}$ — единичный вектор нормали к свободной поверхности, $\boldsymbol{\tau}_\alpha = (\delta_{\alpha x}, \delta_{\alpha y}, \nabla h)/\sqrt{1 + (\nabla_\alpha h)^2}$ — единичные тангенциальные векторы, а двоеточием обозначена двукратная свертка тензора вязких напряжений.

Роль поверхностного натяжения и роль силы тяжести при деформации свободной поверхности характеризуются капиллярным числом и числом Галилея. В рассматриваемой здесь задаче эти параметры достаточно велики (для слоя воды толщиной 1 мм при 20°C и атмосферном давлении имеем $G = 6.8 \cdot 10^4$, $\text{Ca} = 5.1 \cdot 10^5$). Поэтому деформация поверхности очень мала и не влияет на линейную устойчивость. Считаем в дальнейшем, что

тепловой поток через слой всюду близок к критическому, отличаясь от него в меру величины второго порядка малости $q(x, y)$ — медленно меняющейся функции координат, а малый параметр определен как $\varepsilon^2 = \text{Ma}/\text{Ma}^* - 1$, где Ma^* — критическое число Марангони (см. ниже). При длинноволновом характере течения производные любых переменных по горизонтали много меньше производных по вертикали. Это означает, что в задаче есть еще один малый параметр, вообще говоря не связанный с ε , но замкнутую систему модельных уравнений можно получить, наложив следующее ограничение: разные по физическому происхождению параметры считаются величинами одного порядка малости, $\varepsilon \sim |\partial f/\partial x|/|\partial f/\partial z| \sim L/R$, R — характерный масштаб горизонтального течения или неоднородности теплового потока $q(x, y)$. Откалибруем для удобства число Галилея и капиллярное число следующим образом:

$$G = \frac{\tilde{G}}{\varepsilon^2}, \quad \text{Ca} = \frac{\tilde{\text{Ca}}}{\varepsilon^4}, \quad \tilde{G} \sim 1, \quad \tilde{\text{Ca}} \sim 1,$$

ниже тильду опустим. Исследуем движение малой интенсивности, для которого скорость \mathbf{u} — малая величина первого порядка по ε (корень из надкритичности). В этом случае вертикальная компонента скорости будет малой величиной второго порядка, а оператор эволюции — величиной порядка ε^4 . Перемасштабируем горизонтальные координаты, время и неоднородность теплового потока, введя обозначения

$$x \rightarrow \varepsilon x, \quad y \rightarrow \varepsilon y, \quad t \rightarrow \varepsilon^4 t, \quad q \rightarrow \varepsilon^2 q.$$

Замечательным свойством системы (1) после перемасштабирования является то, что единица длины для планарных координат определена характерным масштабом R тепловой неоднородности.

Будем искать решение системы (1) в виде разложения по малому параметру, роль которого играет корень из надкритичности ε :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \varepsilon (\mathbf{u}_0 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \varepsilon^4 \mathbf{u}_4 + \dots), \\ w &= \varepsilon^2 (w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots), \\ P &= \varepsilon^{-2} P_{-2} + P_0 + \varepsilon^2 P_2 + \dots, \\ h &= \varepsilon^2 (H_0 + \varepsilon^2 H + \dots), \\ T &= T_0 + \varepsilon^2 T_2 + \varepsilon^4 T_4 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Детальный вывод системы эволюционных уравнений приведен в Приложении. Ниже мы кратко опишем основные этапы этого вывода.

Поскольку твердая граница системы слабопротяженная, наиболее опасными являются крупномасштабные движения в плоскости слоя [?], возмущения вертикального градиента температур малы (порядка ε^2) и в низших порядках теории возмущений (см. Приложение) температура зависит только от горизонтальных координат x, y . Деформация поверхности мала, поэтому поле скорости пропорционально градиенту среднего поля температур $\phi(x, y, t)$ и уравнения непрерывности имеют вид

$$\mathbf{u} \propto \nabla\phi, \quad w \propto \nabla^2\phi.$$

Критическое число Марангони определяется во втором порядке теории возмущений и совпадает с полученным в линейном анализе [?] значением для системы с недеформируемой границей, $Ma^* = 48$ (см. Приложение). Там же для описания вихревых течений вводится потенциал ψ средней вертикальной завихренности, так что $\mathbf{e}_z \nabla^2 \psi \propto \langle \nabla \times \mathbf{u}_2 \rangle$. Здесь запись $\langle \dots \rangle = \int_0^1 \dots dz$ означает усреднение по координате z .

Система замкнутых эволюционных уравнений, связывающая среднее поле температур $\phi(x, y, t)$, амплитуду $H(x, y, t)$ отклонения поверхности от плоской и потенциал $\psi(x, y, t)$ средней вертикальной завихренности, получается в четвертом порядке по параметру ε (см. Приложение) и имеет вид

$$\begin{aligned} & \partial_t \phi + \nabla\phi \nabla \times (\mathbf{e}_z \psi) + \nabla^4 \phi - \nabla^2 H + \\ & + \frac{\sqrt{7}}{6} \nabla (H \nabla \phi) - \nabla (q \nabla \phi) + \frac{15}{8} \nabla^2 q - \\ & - \nabla (|\nabla\phi|^2 \nabla \phi) + \frac{\sqrt{7}}{8} \left(1 + \frac{2}{Pr}\right) \nabla (\nabla^2 \phi \nabla \phi) + \\ & + \frac{3\sqrt{7}}{4} \left(1 + \frac{1}{6Pr}\right) \nabla^2 |\nabla\phi|^2 = 0, \quad (4) \\ & \mathbf{e}_z \nabla^2 \psi = \frac{13}{2Pr} \nabla (\nabla^2 \phi) \times \nabla \phi - \frac{7}{6} \nabla H \times \nabla \phi, \\ & \delta \nabla^2 H - \nabla^4 H = -c \nabla^2 \phi, \end{aligned}$$

где

$$\delta = \frac{2}{15} \frac{G}{Ca}, \quad c = \frac{48}{5Ca}.$$

При $q(x, y) = -1$, что соответствует однородному превышению порога длинноволновой неустойчивости во всем слое жидкости, уравнения (??) переходят в систему, полученную в работе [?]. Два дополнительных слагаемых, пропорциональных $\nabla (q \nabla \phi)$ и $\nabla^2 q$, входящие в первое уравнение (??), характеризуют неоднородность теплового потока. Они качественно похожи на слагаемые, пропорциональные

$\nabla (H \nabla \phi)$ и $\nabla^2 H$, описывающие влияние амплитуды отклонения поверхности от плоской на динамику усредненного поля температур ϕ (см. первое уравнение (??)). Это и понятно, так как изменить локальное число Марангони можно двумя способами — увеличением теплового потока или изменением толщины слоя жидкости. Деформация поверхности приводит также и к новому механизму генерации завихренности, пропорциональной $\nabla H \times \nabla \phi$ (второе уравнение (??)).

Физические характеристики газа не влияют на потерю устойчивости в слое жидкости при выполнении следующих условий [?]:

$$\tilde{\eta}/\tilde{L} \ll 1, \quad \tilde{L}^2/\tilde{\chi} \ll 1, \quad \tilde{L}\tilde{\kappa} \ll 1, \quad \tilde{L}^3\tilde{\kappa} \ll 1, \quad (5)$$

где $\tilde{\eta} = \eta_{gas}/\eta$ — отношение динамических вязкостей в газе и жидкости, $\tilde{\kappa} = \kappa_{gas}/\kappa$, $\tilde{\chi} = \chi_{gas}/\chi$ — отношение соответствующих коэффициентов тепло- и температуропроводности, $\tilde{L} = L_{gas}/L$ — отношение толщин слоев, занимаемых газом и жидкостью. Первое условие означает, что тензор вязких напряжений в газовой фазе много меньше, чем в жидкости. Второе — что характерное время диффузии температуры в газе много меньше, чем в слое жидкости. Третье условие дает малость теплопереноса в газовой фазе по сравнению с жидкостью. Последнее определяет границы существования длинноволновой неустойчивости, если слой газа достаточно тонкий (минимальное число Марангони лежит в длинноволновой области). Для двухслойной системы вода–воздух [?] при 20 °С и давлении 1 атм имеем $\tilde{\eta} = 1.8 \cdot 10^{-2}$, $\tilde{\chi} = 1.6 \cdot 10^2$, $\tilde{\kappa} = 4.3 \cdot 10^{-2}$. Видно, что условия (??) выполняются, если $0.01 \ll \tilde{L} \ll 10$.

Полученная система уравнений (??) имеет смысл и при рассмотрении концентрационной конвекции Марангони. В этом случае место усредненного поля температур $\phi(x, y, t)$ займет усредненное поле концентрации, а роль коэффициента температуропроводности χ будет играть коэффициент диффузии ПАВ. Отметим, что концентрационная конвекция в тонких слоях [?] всегда имеет крупномасштабный характер, когда диффузией ПАВ из жидкости в газ можно пренебречь.

3. КВАЗИРАВНОВЕСИЕ. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

Как уже отмечалось выше, в слое жидкости существует течение, индуцированное неоднородным по горизонтали нагревом. Однако в определенных ситуациях это движение может не играть основной

роли при формировании конвективных структур. Такой случай реализуется, если неоднородность теплового потока вдоль слоя жидкости и связанное с ней конвективное течение малы, т. е. имеют малую интенсивность по сравнению с тепловым потоком, проходящим поперек слоя жидкости, и возникшей в результате этого крупномасштабной конвекцией.

Рассмотрим вначале неоднородность теплового потока в виде ступенчатой функции

$$q = \begin{cases} \pm a^2, & |\mathbf{r}| \leq 1, \\ \pm b^2, & |\mathbf{r}| > 1, \end{cases} \quad (6)$$

где \mathbf{r} — планарный радиус-вектор. Разрыв теплового потока приводит к наличию мелкомасштабного движения на границе пятна, которое не поддерживается системой вблизи порога длинноволновой неустойчивости. Следовательно, при изучении крупномасштабной конвекции такое движение несущественно и можно говорить о механическом квазиравновесии. Именно поэтому $\nabla q = 0$, $\nabla^2 q = 0$, и решение $\phi(x, y) = 0$, $H(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ описывает квазиравновесие для крупномасштабной конвекции, которое может оказаться устойчивым или неустойчивым. Квазиравновесие устойчиво, если все крупномасштабные возмущения затухают. Если же одно или несколько длинноволновых возмущений со временем нарастают, то квазиравновесие неустойчиво относительно этих возмущений. Для суждения об устойчивости квазиравновесия, таким образом, необходимо рассмотреть развитие во времени всевозможных крупномасштабных возмущений. Действительно, выбор функции (6) и введение понятия квазиравновесия позволяют отказаться от поиска основного течения и применить для описания поведения системы теорию возмущений. Вместе с тем понятно, что возникающие при наличии тепловой неоднородности структуры будут качественно описываться двумя параметрами — отклонениями от критического теплового потока внутри ($\pm a^2$) и снаружи ($\pm b^2$) пятна. Знак «минус» соответствует превышению критического значения теплового потока, а знак «плюс» — занижению и определен выбором направления оси z . Формально это означает существование в плоскости параметров (b^2, a^2) четырех различных областей. Мы рассмотрим две из них, а именно, первый и четвертый квадранты. Для этих областей характерно, что тепловой поток снаружи всегда занижен. В первом квадранте есть превышение внутри пятна, в четвертом тепловой поток внутри меньше критического, но занижение разное для областей снаружи и внутри. Именно такая ситуация характерна для экспериментов [?, ?].

Будем рассматривать малые нестационарные возмущения квазиравновесия (линейная теория устойчивости). В системе уравнений (??) можно пренебречь квадратичными и кубическими по возмущениям членами, что приводит с учетом (??) и при введении индексов « i » и « e » для величин соответственно внутри и снаружи пятна к линейным уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_t \phi_i + \nabla^4 \phi_i - \nabla^2 H_i + a^2 \nabla^2 \phi_i &= 0, \\ \delta \nabla^2 H_i - \nabla^4 H_i &= -c \nabla^2 \phi_i, \\ \partial_t \phi_e + \nabla^4 \phi_e - \nabla^2 H_e - b^2 \nabla^2 \phi_e &= 0, \\ \delta \nabla^2 H_e - \nabla^4 H_e &= -c \nabla^2 \phi_e. \end{aligned} \quad (7)$$

После исключения из системы возмущений поверхности получим

$$\begin{aligned} \partial_t (\nabla^2 \phi_i - \delta \phi_i) + \nabla^6 \phi_i + (a^2 - \delta) \nabla^4 \phi_i - \\ - (c + \delta a^2) \nabla^2 \phi_i &= 0, \\ \partial_t (\nabla^2 \phi_e - \delta \phi_e) + \nabla^6 \phi_e - (b^2 + \delta) \nabla^4 \phi_e - \\ - (c - \delta b^2) \nabla^2 \phi_e &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия при $|\mathbf{r}| = 1$, учитывающие непрерывность усредненного поля температур $\phi(x, y, t)$, поля скоростей $\mathbf{u} \propto \nabla \phi$, $w \propto \nabla^2 \phi$, амплитуды $H(x, y, t)$ отклонения поверхности от плоской и поля лапласовских давлений (пропорционального $\nabla^2 H$), записываются как

$$\begin{aligned} \phi_i - \phi_e = \phi'_i - \phi'_e = \nabla^2 \phi_i - \nabla^2 \phi_e = \\ = \nabla^2 \phi'_i - \nabla^2 \phi'_e = \nabla^4 \phi_i - \nabla^4 \phi_e = 0, \\ \nabla^4 \phi'_i + a^2 \nabla^2 \phi'_i - a^2 \delta \phi'_i - \nabla^4 \phi'_e + \\ + b^2 \nabla^2 \phi'_e - b^2 \delta \phi'_e = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Последнее условие является дополнительным и получается с использованием формул Грина [?].

Рассмотрим нормальные возмущения вида $\exp(-\lambda t)$. Умножая уравнения (??) на ϕ^* и интегрируя по пространству с учетом граничных условий (??) и использованием формул Грина [?], после несложных, но громоздких вычислений получим

$$\begin{aligned} \lambda = \left[\int |\nabla \nabla^2 \phi|^2 dV + (q + \delta) \times \right. \\ \times \left. \int |\nabla^2 \phi|^2 dV + (\delta q - c) \int |\nabla \phi|^2 dV \right] \times \\ \times \left(\int |\nabla \phi|^2 dV + \delta \int |\phi|^2 dV \right)^{-1}, \quad (10) \end{aligned}$$

где величина $q(x, y)$ определена формулой (??), а $\phi = (\phi_i, \phi_e)$. Из (??) следует монотонный характер возмущений. Это выражение удобно переписать в размерном виде:

$$\lambda = \left[\frac{1}{R^6} \int |\nabla \nabla^2 \phi|^2 dV + \frac{q + \delta}{R^4} \int |\nabla^2 \phi|^2 dV + \frac{\delta q - c}{R^2} \int |\nabla \phi|^2 dV \right] \times \left(\frac{1}{R^2} \int |\nabla \phi|^2 dV + \delta \int |\phi|^2 dV \right)^{-1}. \quad (11)$$

При $q < c/\delta$ третье слагаемое в (??) отрицательно и при достаточно больших размерах пятна оно будет определяющим. В этом случае декремент отрицателен и течение неустойчиво. Таким образом, большой масштаб неоднородности ведет к неустойчивости индуцированного течения. Это условие дает границу существования области неустойчивости в первом и четвертом квадрантах плоскости (b^2, a^2) : при $b^2 > c/\delta$ и $a^2 > -c/\delta$ реализуется локальная неустойчивость, вызванная пятном. При $b^2 < c/\delta$ потеря устойчивости связана с областью вне пятна и имеет глобальный характер. Мы остановимся в своем исследовании на локальной моде, так как именно такой тип течения характерен для экспериментов [?, ?]. Отметим, что при $R \rightarrow 0$ декремент всегда положителен и существует равновесие. Малая область нагрева не влияет на длинноволновую потерю устойчивости. Это вызвано также и тем, что при выборе функции (??) мы пренебрегаем тепловым потоком вдоль слоя жидкости и связанным с ним конвективным движением. Именно это и дает возможность говорить о квазиравновесии.

3.1. Одномерная неоднородность теплового потока

Роль координаты \mathbf{r} при выборе неоднородности теплового потока в виде ступенчатой функции (??) играет в этом случае декартова координата x . Для поиска нейтральных кривых ($\partial_t = 0$) выберем следующую систему функций: симметричная мода $\phi(-x) = \phi(x)$,

$$\begin{aligned} \phi_i &= A_1 + A_2 \cos(a_1 x) + A_3 \operatorname{ch}(a_2 x), \\ \phi_e &= B_1 \exp(-b_1 |x|) + B_2 \exp(-b_2 |x|), \end{aligned} \quad (12)$$

и антисимметричная мода $\phi(-x) = -\phi(x)$,

$$\begin{aligned} \phi_i &= A_1 x + A_2 \sin(a_1 x) + A_3 \operatorname{sh}(a_2 x), \quad |x| < 1, \\ \phi_e &= \begin{cases} B_1 \exp(-b_1 |x|) + B_2 \exp(-b_2 |x|), & x > 1, \\ -B_1 \exp(-b_1 |x|) - B_2 \exp(-b_2 |x|), & x < -1. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Подстановка выражений (??) и (??) в (??) приводит к системе алгебраических уравнений для определения корней a_j, b_j :

$$\begin{aligned} a_j^4 \pm (\delta - a^2) a_j^2 - \delta a^2 - c &= 0, \\ b_j^4 - (\delta + b^2) b_j^2 + \delta b^2 - c &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение системы (??) дает

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pm \left(a^2 - \delta \pm \sqrt{(\delta - a^2)^2 + 4(\delta a^2 + c)} \right)}, \\ b_{1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{b^2 + \delta \pm \sqrt{(\delta + b^2)^2 - 4(\delta b^2 - c)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Знак «+» соответствует корню a_1 , «-» — корню a_2 . Нейтральные кривые в плоскости (b^2, a^2) определяются из граничных условий (??). На рис. 1 изображены нейтральные кривые при $c = 0, \delta = 0$ для недеформируемой верхней границы и при $c = 10, \delta = 1$ для деформируемой свободной поверхности. Кривые соответствуют первым уровням неустойчивости для симметричной и антисимметричной мод. Область устойчивости находится под нейтральными кривыми. Вертикальной штриховой линией изображена граница $(b^2 = c/\delta)$, отделяющая локальную неустойчивость от глобальной. Видно, что граница устойчивости по параметру a^2 , характеризующему превышение над критическим значением теплового потока внутри теплового пятна, определяется параметром демпфирования вне пятна, b^2 , приближаясь к асимптотическим значениям при достаточно больших b^2 . Влияние параметров c и δ проявляется в сдвиге значения $b^2 = c/\delta$, соответствующего границе локальной неустойчивости (см. (??)), определяемой пятном, $b^2 > c/\delta$, и глобальной неустойчивости, $b^2 < c/\delta$, вызванной областью вне пятна. Деформация свободной поверхности приводит к понижению порога устойчивости для всех уровней симметричной и антисимметричной мод. Во всей области параметров порог устойчивости симметричных мод ниже, чем антисимметричных.

При $c = 0, \delta = 0$ возможно аналитическое зада-

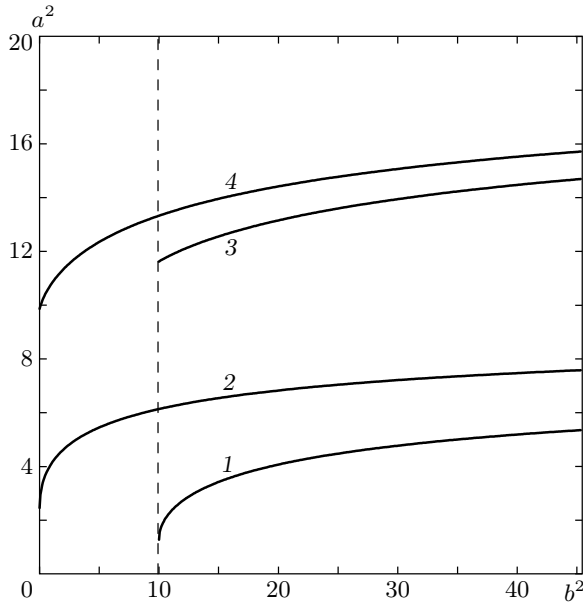


Рис. 1. Первые уровни неустойчивости при одномерной неоднородности теплового потока для симметричной моды $\phi(-x) = \phi(x)$, описываемой уравнениями (?): 1 — $c = 10, \delta = 1$; 2 — $c = 0, \delta = 0$; и для антисимметричной моды $\phi(-x) = -\phi(x)$, задаваемой уравнениями (?): 3 — $c = 10, \delta = 1$; 4 — $c = 0, \delta = 0$. Вертикальная штриховая прямая ($b^2 = c/\delta$) отделяет область локальной неустойчивости от глобальной. Области устойчивости расположены под нейтральными кривыми 2 и 4

ние нейтральных кривых. В этом случае симметричная мода задается как

$$b \sin a + a \cos a = 0, \tag{16}$$

а антисимметричная мода —

$$b^2 a \cos a - (a^2 b + a^2 + b^2) \sin a = 0. \tag{17}$$

Расчеты показывают, что нейтральные кривые качественно похожи при любых значениях c и δ и доминирующим параметром, меняющим картину, является величина $c/\delta \sim G^{-1}$. Последнее следует и из (?) при больших по сравнению с толщиной слоя жидкости неоднородностях теплового потока.

3.2. Осесимметричная неоднородность теплового потока

Для поиска нейтральных кривых ($\partial_t = 0$) выберем собственную систему функций оператора Ла-

пласа в цилиндрической системе координат, определяемую симметрией пятна:

$$\begin{aligned} \phi_i &= [A_1 J_m(a_1 r) + A_2 I_m(a_2 r) + A_3 r^m] \times \\ &\quad \times e^{im\varphi} + \dots, \\ \phi_e &= [B_1 K_m(b_1 r) + B_2 K_m(b_2 r) + B_3 r^{-m}] \times \\ &\quad \times e^{im\varphi} + \dots, \end{aligned} \tag{18}$$

где J_m, I_m и K_m — соответственно функции Бесселя первого рода, модифицированные функции Бесселя и функции Ганкеля. Азимутальное число m определяет количество лепестков [?] или число рукавов спиралей [?] в конвективном течении.

Действие оператора ∇ на (?) есть

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_i &= -a_j^2 \phi_i, \quad \nabla^4 \phi_i = a_j^4 \phi_i, \quad \nabla^6 \phi_i = -a_j^6 \phi_i, \\ \nabla^2 \phi_e &= b_j^2 \phi_e, \quad \nabla^4 \phi_e = b_j^4 \phi_e, \quad \nabla^6 \phi_e = b_j^6 \phi_e. \end{aligned} \tag{19}$$

Подстановка (?) в систему (?) с учетом (?) приводит к определению корней a_j, b_j , которые совпадают с (?). Нейтральные кривые в плоскости (b^2, a^2) определяются из граничных условий (?).

На рис. 2 представлены нейтральные кривые для конвективных мод (см. (?)) при различных значениях параметров c и δ . Область устойчивости конвективной моды находится под соответствующей ей нейтральной кривой. Вертикальной штриховой линией изображена граница ($b^2 = c/\delta$), отделяющая локальную неустойчивость от глобальной. Деформация свободной поверхности приводит к понижению порога устойчивости для мод с любыми значениями азимутального числа $m > 1$. Однако то, какая мода, осесимметричная ($m = 0$) или дипольная ($m = 1$), является наиболее «опасной», определяется параметрами c и δ . В области $c/\delta > 10$ наиболее опасной является осесимметричная мода. При меньших значениях этого параметра существует область в плоскости (b^2, a^2), где наиболее опасной является дипольная мода с $m = 1$. На рис. 3 показана «смена» симметрии мод при срыве устойчивости в зависимости от параметров, характеризующих деформацию поверхности.

Как и в одномерном случае, картина нейтральных кривых чувствительна к параметру $c/\delta \sim G^{-1}$, и граница устойчивости по параметру a^2 , характеризующему превышение над критическим значением теплового потока внутри теплового пятна, определяется параметром демпфирования вне пятна, b^2 , приближаясь к асимптотическим значениям при достаточно больших b^2 .

При $c = 0, \delta = 0$ возможно аналитическое зада-

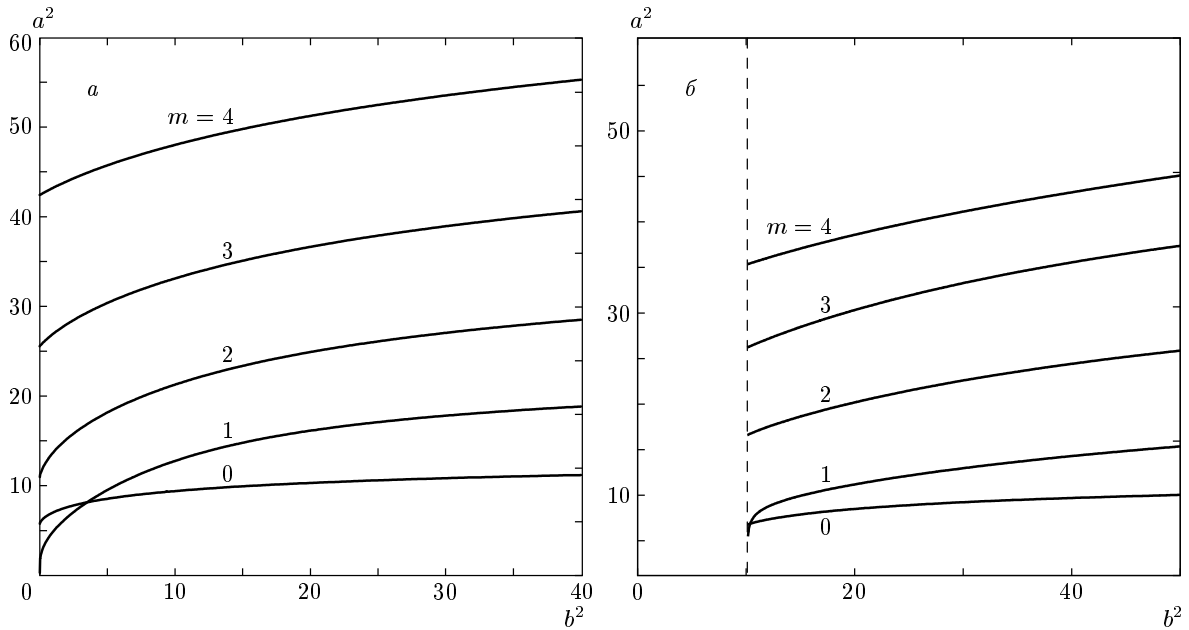


Рис. 2. Первые уровни неустойчивости для мод, описываемых системой (?), с разными значениями азимутального числа m при $c = 0, \delta = 0$ (а), $c = 10, \delta = 1$ (б). Области устойчивости расположены под нейтральными кривыми. Вертикальная штриховая прямая ($b^2 = c/\delta$) отделяет область локальной неустойчивости от глобальной

ние нейтральных кривых для различных значений азимутального числа:

$$\frac{J_{m+1}(a)}{a J_m(a)} + \frac{K_{m+1}(b)}{b K_m(b)} = \frac{2 m}{b^2} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}. \quad (20)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучена слабонадкритическая конвекция Марангони в слое жидкости со свободной деформируемой верхней границей и неоднородным источником тепла. В длинноволновом приближении при слабой неоднородности теплового потока задача сведена к решению системы двумерных нелинейных уравнений для амплитуд возмущений температуры, завихренности и деформации свободной поверхности. После введения понятия квазиравновесия, т. е. равновесия для больших масштабов (система не «поддерживает» мелкомасштабные движения), указанная неоднородность была смоделирована в виде тепловой ступеньки. Данное упрощение открывает возможность исследовать достаточно сложную систему и характеризовать возникающие неустойчивости в зависимости от превышения порога устойчивости внутри теплового пятна и демпфирования (занижения) снаружи. Рассмотрены плоский и осесимметричный варианты неоднородности теплового

потока, определены границы устойчивости конвективных режимов на плоскости параметров, характеризующих превышение критического теплового потока внутри пятна и глубину демпфирования вне его, при различных значениях капиллярного числа и числа Галилея. Для осесимметричного пятна определены области устойчивости возмущений с различными значениями азимутального числа. Из результатов линейного анализа задачи для случая ступенчатой неоднородности нагрева можно сделать следующие выводы: тип длинноволновой неустойчивости равновесия (глобальная или локальная мода) определяется степенью занижения по тепловому потоку вне локального источника — глобальная неустойчивость сменяется локальной при определенном значении соответствующего параметра $b^2 = c/\delta$. Это пороговое значение определяет границу кривой нейтральной устойчивости и равно нулю для недеформируемой границы, возрастая при изменении параметров c и δ , характеризующих деформацию границы. Граница локальной неустойчивости равновесия и вид наиболее опасной неустойчивой моды для случая осесимметричного теплового пятна (осесимметричные или азимутальные моды) определяются безразмерными параметрами $a^2 + c/\delta, b^2 - c/\delta$, характеризующими интенсивность теплового источника, его размеры, влияние поверхностного натяжения и си-

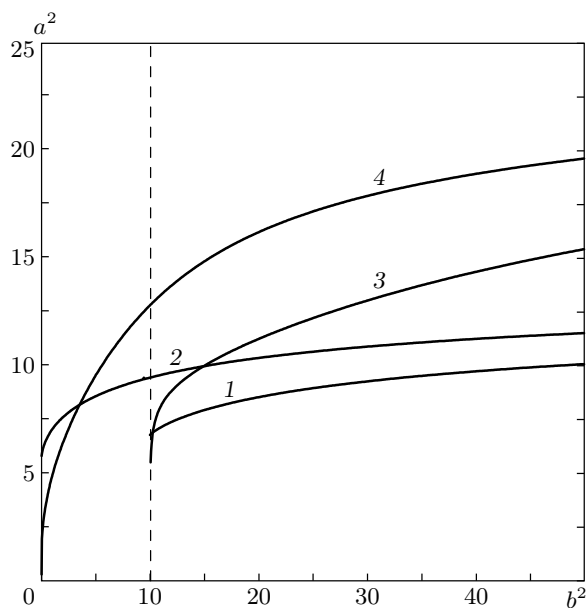


Рис. 3. Первые уровни неустойчивости для осесимметричной моды с $m = 0$ при $c = 10, \delta = 1$ (кривая 1) и при $c = 0, \delta = 0$ (кривая 2), а также для дипольной моды с $m = 1$ при $c = 10, \delta = 1$ (кривая 3) и при $c = 0, \delta = 0$ (кривая 4). Вертикальная штриховая прямая ($b^2 = c/\delta$) отделяет область локальной неустойчивости от глобальной. Области устойчивости расположены под нейтральными кривыми

лы тяжести. В некоторой части пространства параметров задачи наиболее опасной является не осесимметричная мода ($m = 0$), а дипольная ($m = 1$). Деформация поверхности приводит к созданию нового пути для рассеяния потока тепла и, как следствие, к смене симметрии мод, срывающих устойчивость. При управляющем параметре $c/\delta < 10$ существует область в плоскости (b^2, a^2) , где наиболее опасной является дипольная мода. При увеличении значений параметра, а значит, увеличении амплитуды деформации поверхности на смену дипольной моде приходит осесимметричная мода, которая является наиболее опасной во всей области значений перепадов теплового потока. Порог неустойчивости относительно мод с $m > 1$ во всей исследованной области параметров всегда выше.

Сравнение с экспериментами работы [?] дает возможность сказать, что полученные теоретические результаты качественно описывают наблюдавшиеся в ней многолепестковые конвективные структуры. Пренебрежение нами горизонтальной составляющей теплового потока, а значит, индуцированным течением привело к монотонному характеру разви-

тия возмущений во времени, что не дает возможности для описания сложных колебательных режимов, имевших место в работе [?].

Численный анализ системы уравнений (??) проведен в работе [16].

Автор выражает искреннюю признательность А. Ф. Пшеничникову, К. И. Морозову, Б. И. Мызниковой, А. И. Мизеву и И. И. Вертгейму за полезные замечания и обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда гражданских исследований и развития для стран СНГ (грант № РЕ-009-0) и РФФИ (грант РФФИ-Урал № 02-01-96407).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Применяемый ниже метод нелинейной теории возмущений аналогичен процедуре, описанной в работах [?, ?]. При выводе уравнений удобно перенести граничные условия (2) с поверхности $z = 1 + h(x, y)$ на поверхность $z = 1$, используя разложение полей скорости, температуры и давления в ряд Тейлора для малых отклонений поверхности от плоской, $|h| \ll 1$. В низких порядках по параметру надкритичности получаются следующие уравнения с граничными условиями:

$$P'_{-2} + G = 0, \quad z = 1 : \quad P_{-2} = 0, \quad (П.1)$$

$$P'_0 = 0, \quad T''_0 = 0, \quad -\nabla P_0 + \mathbf{u}''_0 = 0, \quad -\nabla \mathbf{u}_0 = w'_0, \quad (П.2)$$

$$z = 0 : \quad \mathbf{u}_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad T'_0 = -1, \quad (П.3)$$

$$z = 1 : \quad P_0 + HP'_{-2} = -Ca \nabla^2 H, \quad w_0 = 0, \quad \mathbf{u}'_0 = -Ma^* \nabla T_0, \quad T'_0 = -1. \quad (П.4)$$

Решение уравнения (П.1) определяет поле давления

$$P_{-2} = G(1 - z), \quad P_0 = Q_0 = GH - Ca \nabla^2 H, \quad (П.5)$$

где $Q_0(x, y, t)$ (зависимость давления от планарных координат) и $H(x, y, t)$ (деформация поверхности) остаются пока неизвестными функциями перемасштабированных соответственно координат x, y и времени t .

Решение второго уравнения (П.2) есть

$$T_0 = -z + \phi(x, y, t), \quad (П.6)$$

где поле температур ϕ будет найдено в четвертом порядке теории возмущений.

Проинтегрируем уравнение непрерывности по ординате z (третье уравнение (П.2)):

$$\nabla \int_0^{1+h} \mathbf{u}_0 dz \approx \nabla \int_0^1 \mathbf{u}_0 dz + O(h) = 0 \rightarrow \langle \mathbf{u}_0 \rangle = 0, \quad (\text{П.7})$$

где $\langle \dots \rangle = \int_0^1 \dots dz$. В этом порядке теории возмущений смещение поверхности ($h \sim \varepsilon^2$) не влияет на усреднение поперек слоя.

Для учета соленоидальной составляющей поля скорости введем потенциал завихренности

$$\int_0^1 2z \mathbf{e}_z \nabla \times \psi_0 dz = \nabla \times (\mathbf{e}_z \psi_0).$$

Вычислив ротор и дивергенцию для граничных условий Марангони (третье уравнение (П.4)), получим

$$\nabla^2 \psi_0 = 0, \quad \nabla^2 Q_0 = -\frac{3}{2} \text{Ma}^* \nabla^2 \phi. \quad (\text{П.8})$$

Поскольку нет массовых сил, создающих завихренность, положим $\psi_0 = 0$. Решение для скорости примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= -\frac{3}{2} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z}{3} \right) \text{Ma}^* \nabla^2 \phi, \\ w_0 &= \frac{1}{4} (z^3 - z^2) \text{Ma}^* \nabla^2 \phi. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Второй порядок теории возмущений дает

$$P_2' = w_0'', \quad z = 1: \quad P_2 + HP_0' = -\text{Ca} \nabla^2 H_2 + 2w_0', \quad (\text{П.10})$$

$$\mathbf{u}_2'' = \nabla P_2 - \nabla^2 \mathbf{u}_0 + \frac{1}{\text{Pr}} [(\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{u}_0 + w_0 \mathbf{u}_0'], \quad (\text{П.11})$$

$$T_2'' = -\nabla^2 \phi + w_0 T_0' + \mathbf{u}_0 \nabla T_0, \quad (\text{П.12})$$

$$\nabla \mathbf{u}_2 = -w_2', \quad (\text{П.13})$$

$$z = 0: \quad \mathbf{u}_2 = 0, \quad w_2 = 0, \quad T_2' = q(x, y), \quad (\text{П.14})$$

$$z = 1: \quad w_2 = \mathbf{u}_0 \nabla H - H w_0', \quad T_2' = q(x, y), \quad (\text{П.15})$$

$$\mathbf{u}_2' + \text{Ma}^* \nabla T_2 = -H \mathbf{u}_0'' + \text{Ma}^* \nabla H. \quad (\text{П.16})$$

Поиск решения начнем с поля температуры T_2 . После интегрирования уравнения (П.12) по z получим, что граничные условия на нижней границе приводят к определению константы интегрирования $C(x, y) = q(x, y)$, а на верхней границе дают значение критического числа Марангони $\text{Ma}^* = 48$. Затем

с помощью (П.5) и (П.8) запишем связь между деформацией поверхности и температурным полем:

$$\nabla^2 (GH - \text{Ca} \nabla^2 H) = -72 \nabla^2 \phi. \quad (\text{П.17})$$

При интегрировании по z уравнения непрерывности (П.13) в этом порядке теории возмущений необходимо учитывать деформацию поверхности,

$$\begin{aligned} \nabla \int_0^{1+h} \mathbf{u}_2 dz &= -w_2(1+h) \rightarrow \\ &\rightarrow \nabla \int_0^1 \mathbf{u}_2 dz + h \nabla \mathbf{u}_2 = -w_2 - w_2' h + O(h^2), \end{aligned}$$

что приводит к соотношению

$$\nabla \int_0^1 \mathbf{u}_2 dz = -w_2(1). \quad (\text{П.18})$$

Использование кинематического условия (П.15) дает

$$\nabla \langle \mathbf{u}_2 \rangle = 12 \nabla (H \nabla \phi). \quad (\text{П.19})$$

Для описания соленоидального поля скорости вводится потенциал завихренности ψ_2 , который определен, как и в нулевом порядке теории возмущений. Его связь с деформацией поверхности запишется как

$$\langle \mathbf{u}_2 \rangle = \mathbf{e}_z \times \nabla \psi_2 + 12H \nabla \phi. \quad (\text{П.20})$$

После введения интегрального оператора

$$\hat{\mathbf{I}}[\dots] = \int_0^z \dots dz$$

решение системы уравнений (П.10)–(П.16) с использованием (П.7) и (П.18)–(П.20) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \nabla^2 \psi_2 &= -\frac{72}{\text{Pr}} \left\{ \langle f f'' \rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{I}}^2 (f f'') \rangle \right\} \times \\ &\times \nabla (\nabla^2 \phi) \times \nabla \phi - 24 \nabla H \times \nabla \phi, \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \left\{ -\frac{z^2}{2} + 12 \hat{\mathbf{I}}^2 [f] \right\} \nabla^2 \phi + \\ &+ 12 \hat{\mathbf{I}} [f] |\nabla \phi|^2 + zq + \phi_2, \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

$$P_2 = -12 f' \nabla^2 \phi + Q_2(x, y), \quad (\text{П.23})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 = & -24 \left\{ \hat{\mathbf{I}}[f] - 2z \langle \hat{\mathbf{I}}[f] \rangle \right\} \nabla \nabla^2 \phi + \\ & + 2z \mathbf{e}_z \times \nabla \psi_2(x, y) + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z}{3} \right) \nabla Q_2 + \\ & + \frac{72}{\text{Pr}} \left\{ \hat{\mathbf{I}}^2 [(f')^2] - 2z \langle \hat{\mathbf{I}}^2 [(f')^2] \rangle \right\} \nabla |\nabla \phi|^2 + \\ & + 24z H \nabla \phi + \frac{144}{\text{Pr}} \left\{ \hat{\mathbf{I}}^2 [(ff'')] - 2z \langle \hat{\mathbf{I}}^2 [(ff'')] \rangle \right\} \times \\ & \times \nabla \phi \nabla^2 \phi, \quad (\text{П.24}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 = & \frac{f}{6} \nabla^2 Q_2 + 24 \left\{ \hat{\mathbf{I}}^2 [f] - z^2 \langle \hat{\mathbf{I}}[f] \rangle \right\} \nabla^2 \nabla^2 \phi - \\ & - 12z^2 \nabla (H \nabla \phi) - \\ & - \frac{72}{\text{Pr}} \left\{ \hat{\mathbf{I}}^3 [(f')^2] - z^2 \langle \hat{\mathbf{I}}^2 [(f')^2] \rangle \right\} \nabla^2 |\nabla \phi|^2 + \\ & + \frac{144}{\text{Pr}} \left\{ \hat{\mathbf{I}}^3 [(ff'')] - z^2 \langle \hat{\mathbf{I}}^2 [(ff'')] \rangle \right\} \times \\ & \times \nabla (\nabla \phi \nabla^2 \phi), \quad (\text{П.25}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla Q_2 = & -936 \langle \hat{\mathbf{I}}[f] \rangle \nabla \nabla^2 \phi + \\ & + 72 \left\{ \nabla H - \nabla |\nabla \phi|^2 + H \nabla \phi + \nabla (q + \phi_2) \right\} + \\ & + \frac{216}{\text{Pr}} \left\{ \langle ff'' \rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{I}}^2 [(ff'')] \rangle \right\} \nabla \phi \nabla^2 \phi - \\ & - \frac{108}{\text{Pr}} \left\{ \langle (f')^2 \rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{I}}^2 [(f')^2] \rangle \right\} \nabla |\nabla \phi|^2 + \\ & + 36 \nabla \nabla^2 \phi, \quad (\text{П.26}) \end{aligned}$$

где $f(z) = z^2 - z^3$. Индекс «2» при записи поля ψ_2 (П.21) в дальнейшем будет опущен.

Для получения эволюционного уравнения поля температур ϕ перейдем к четвертому порядку теории возмущений. Используя условие непрерывности

$$\phi (\nabla \mathbf{u}_2 + w'_2) = 0, \quad T_2 (\nabla \mathbf{u}_0 + w'_0) = 0, \quad (\text{П.27})$$

получим в этом порядке следующее уравнение с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi + \nabla (\mathbf{u}_2 \phi + \mathbf{u}_0 T_2) + (w_2 \phi + w_0 T_2)' - \\ - w_2 - \nabla^2 T_2 = T_4'', \quad (\text{П.28}) \end{aligned}$$

$$z = 0: \quad T_4' = 0, \quad (\text{П.29})$$

$$z = 1: \quad T_4 + T_2'' H - \nabla H \nabla \phi = 0, \quad (\text{П.30})$$

определяющее динамику возмущений температуры.

Проведем усреднение по координате z , учитывая (П.29) и (П.30):

$$\begin{aligned} \partial_t \phi + \nabla (\mathbf{u}_2 \phi + \mathbf{u}_0 T_2) + w_2 \phi|_{z=1} - \\ - \langle w_2 + \nabla^2 T_2 \rangle = \nabla (H \nabla \phi) + 12H |\nabla \phi|^2. \quad (\text{П.31}) \end{aligned}$$

Использование перемасштабирования

$$(x, y) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{15}} (x, y), \quad t \rightarrow \frac{4}{15} t,$$

$$\phi \rightarrow \frac{\sqrt{7}}{12} \phi, \quad H \rightarrow \frac{\sqrt{7}}{24} H,$$

$$\psi \rightarrow \frac{1}{2} \psi, \quad q \rightarrow \frac{1}{2} q$$

и условия (П.18) при вычислении (П.31) приводит к системе (5). Отметим, что поля ϕ_2 (П.22) и H_2 (П.10) не влияют на динамику усредненного поля температур ϕ .

ЛИТЕРАТУРА

1. J. K. A. Pearson, J. Fluid Mech. **4**, 489 (1958).
2. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
3. А. Ф. Пшеничников, С. С. Яценко, в сб. *Гидродинамика*, вып. 5, изд-во Пермского государственного университета, Пермь (1974), с. 33.
4. A. B. Ezersky, A. Garcimartin, J. Burguete et al., Phys. Rev. E **47**, 1126 (1993).
5. E. Favre, L. Blumenfeld, and F. Daviaud, Phys. Fluids **9**, 1473 (1997).
6. Ю. К. Брагунин, С. О. Макаров, А. И. Мизёв, Изв. РАН, МЖГ вып. 2, 92 (2000).
7. В. С. Сорокин, ПММ **18**, 197 (1954).
8. L. Shtilman and G. Sivashinsky, Physica D **52**, 477 (1991).
9. E. Knobloch, Physica D **41**, 450 (1990).
10. L. M. Pismen, Phys. Lett. **116A**, 241 (1986).
11. A. A. Golovin, A. A. Nepomnyashchy, and L. M. Pismen, Physica D **81**, 117 (1995).
12. Д. В. Любимов, А. А. Черепанов, в сб. *Конвективные течения*, изд-во Пермского государственного педагогического института, Пермь (1991), с. 17.
13. V. L. Gertsberg and G. I. Sivashinsky, Progr. Theor. Phys. **6**, 1219 (1981).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
15. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1984).
16. Б. И. Мызникова, И. И. Вертгейм, в сб. *Гидродинамика*, вып. 13, изд-во Пермского государственного университета, Пермь (2002), с. 18.