ЖЭТФ, 2003, том 123, вып. 5, стр. 1096–1105

РЕЗОНАНСНОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ФОНОНАМИ

В. Ф. Елесин [*]

Московский инженерно-физический институт (технический университет)
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 декабря 2002 г.

В рамках последовательной квантовомеханической модели исследовано влияние электрон-фононного взаимодействия на резонансное туннелирование электронов через двухбарьерную наноструктуру. Волновая функция находится из решения уравнения Шредингера с корректными граничными условиями в квазиклассическом приближении по электрон-фононному взаимодействию. Вычисленный с помощью волновой функции ток усредняется по фононной подсистеме с помощью теоремы Блоха. Найдены аналитические выражения для статического и переменного токов резонансно-туннельного диода с учетом электрон-фононного взаимодействия, формально совпадающие с вероятностью эффекта Мессбауэра. В адиабатическом пределе и при сильном электрон-фононном взаимодействии статический ток уменьшается пропорционально η, а переменный низкочастотный ток пропорционально η^2. Форма резонансной кривой становится гауссовской с шириной τ_{ph}^{-1}. Принципиальный результат состоит в том, что даже в пределе $\eta \ll 1$ (который часто считается некогерентным) сохраняются свойства, присущие когерентному туннелированию. Наиболее ярким эффектом (аналогичным эффекту Мессбауэра) является сохранение узкой лоренцевской резонансной кривой в пределе $\eta \ll 1, \quad \omega_{ph} \gg \Gamma$. Это означает, что и при $\eta \ll 1$ резонансный ток обусловлен когерентными электронами (испытывающими интерференцию), но их доля уменьшается из-за электрон-фононного взаимодействия. Делается вывод, что применение скоростных уравнений и других приближенных методов, где интерференцией пренебрегается, может приводить к некорректным результатам. Найдены также выражения для высокочастотного и нелинейного откликов. Квантовый режим оказывается менее чувствителен к влиянию фононов, чем классический.

PACS: 79.60.Jv, 73.23.-b

1. ВВЕДЕНИЕ

Резонансное туннелирование — чисто квантовое явление, тесно связанное с интерференцией электронов. Взаимодействие с фононами сбивает фазу электронов, уменьшая резонансный ток. Поэтому резонансный туннельный ток, например, двухбарьерных наноструктур, зависит от соотношения ширины резонансного уровня Γ и времени сбоя фазы τ_{ph}.

Если $\Gamma\tau_{ph} \gg 1$, резонансное туннелирование является когерентным. В этом случае электроны с резонансной энергией ε_R проходят через наноструктуру с симметричными барьерами без отражения, обеспечивая максимальный ток. Отражение от структуры подавляется деструктивной интерференцией.

Ситуация становится гораздо менее ясной в обратном предельном случае $\Gamma\tau_{ph} \ll 1$. Хотя теории влияния электрон-фононного взаимодействия на резонансное туннелирование посвящено достаточно много работ, остаются как проблемы с интерпретацией экспериментальных данных (см., например, [1]), так и проблемы корректного описания процессов разрушения когерентности.

Ввиду сложности задачи о конкуренции процессов интерференции и разрушения фазы, часто используются приближенные методы. Одним из наиболее простых является метод последовательного туннелирования [1, 2]. В нем предполагается, что в пределе $\Gamma\tau_{ph} \ll 1$ электроны полностью теряют фазу, и используются скоростные уравнения. В другом широко используемом приближенном методе (см. [3, 4]) наноструктура разбивается на несвязанные области прибора и контактов, а связь между ними вводится как возмущение. Соответствующий гамильтониан записывается в представлении

[*] E-mail: vef@supercon.mephi.ru

сильной связи. Этот метод аналогичен методу туннельного гамильтониана (МТГ) в теории сверхпроводимости. Для краткости будем так его и называть. Благодаря сделанным упрощениям обходится проблема граничных условий и появляется возможность использовать формализм неравновесных функций Грина, хорошо приспособленный для описания электрон-фононного взаимодействия (см., например, [3, 5]).

Однако резонансное туннелирование весьма чувствительно к граничным условиям. Поэтому и по ряду других причин МТГ может оказаться слишком упрощенным. Например, в [6] показано, что он сводится к скоростным уравнениям.

Цель настоящей работы — изучить влияние электрон-фононного взаимодействия в рамках более строгого подхода, последовательно учитывающего интерференцию и граничные условия. Он состоит в использовании непосредственно волновой функции, которая находится из решения уравнения Шредингера с корректными граничными условиями (см. [7, 8]). Электрон-фононное взаимодействие учитывается в квазиклассическом приближении. Это справедливо, поскольку энергия взаимодействия $\varphi(x,t)$ и частота фононов ω_q являются малыми по сравнению с резонансной энергией ε_R. Вычисленный с помощью волновой функции резонансный ток усредняется по фононной подсистеме с помощью теоремы Блоха [9].

В работе найдены аналитические выражения для статического и переменного резонансных токов двухбарьерной наноструктуры — резонансно-туннельного диода (РТД) — с учетом взаимодействия с фононами. Показано, что для адиабатических фононов ($\omega_q \ll \Gamma$) в пределе $\eta = \tau_{ph}\Gamma \ll 1$ статический ток уменьшается пропорционально η, а переменный низкочастотный ток пропорционально η^2. Форма линии становится гауссовской вместо исходно лоренцевской.

Принципиальный результат состоит в том, что даже в пределе $\eta \ll 1$ резонансные свойства РТД сохраняются. Уменьшается число интерферирующих электронов, но именно они и вносят вклад в резонансный ток.

Особенно ярко это проявляется для высокочастотных фононов в ситуации, когда $\omega_q \gg \Gamma$, $\eta \ll 1$. В этом случае исходная узкая резонансная зависимость сохраняется, а величина тока уменьшается на фактор, эквивалентный фактору Дебая–Уоллера [10]. Ситуация во многом аналогична эффекту Мессбауэра [10].

Важно подчеркнуть, что вышеупомянутые результаты принципиально отличаются от предсказаний МТГ.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы изучим влияние электрон-фононного взаимодействия на статический и переменный резонансные токи РТД. Резонансное туннелирование описывается в рамках модели [7], позволяющей корректно учитывать квантовую интерференцию электронов в яме и открытые граничные условия.

Следуя [7], рассмотрим квантовую яму (точку) с двумя δ-функциональными барьерами в точках $x = 0$ и $x = a$. Слева ($x = -\infty$) к яме подводится стационарный поток электронов, пропорциональный Q, с энергией ε, примерно равной энергии резонансного уровня ε_R.

Волновая функция системы $\Psi(x,t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \\ + \left[\alpha\delta(x) + \alpha\delta(x-a) + V(x,t) + \hat{\varphi}(x,t)\right]\Psi = 0. \quad (1)$$

Здесь α — «мощности» барьеров эмиттера и коллектора,

$$V(x,t) = U(x)\cos(\omega t), \quad (2)$$

$$U(x) = \begin{cases} \nu x\theta(x), & x < a, \\ \nu a, & x \geq a, \end{cases} \qquad \nu = -\frac{eE}{2}, \quad (3)$$

E — амплитуда однородного переменного поля с частотой ω, а $\theta(x)$ — ступенчатая функция, e — заряд электрона; $\hbar = 2m = 1$.

Энергия взаимодействия электронов с фононами для простоты выбирается в приближении деформационного потенциала [11] и одной фононной частоты (обобщение см. ниже) в виде

$$\hat{\varphi}(x,t) = \mathcal{E}\frac{\partial\hat{u}(x,t)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\hat{u}(x,t) = (2M\omega_q)^{-1/2}\left[C_q\exp(iqx - i\omega_q t) + \text{H. c.}\right]. \quad (5)$$

Здесь $\mathcal{E}$ — энергия деформационного потенциала, $\hat{u}(x,t)$ — смещение атомов с массой M, $C_q^\dagger(C_q)$ — операторы рождения (уничтожения) фононов с частотой ω_q и волновым вектором q. Важно отметить, что энергия взаимодействия $\hat{\varphi}(x,t)$, выраженная через операторы вторичного квантования, является действительной функцией, периодически зависящей от времени.

Граничные условия к уравнению (1) описывают поток электронов из $x = -\infty$, их отражение и уход в область $x = \infty$ (см. подробнее [7, 8]). Статический ток $J_0(\varepsilon)$ и переменный ток $J_c(x,t)$,

$$J_c(x,t) = J_c(x)\cos(\omega t), \tag{6}$$

синфазный с потенциалом $V(x,t)$, обычным образом выражаются через волновую функцию $\Psi(x,t)$ (см. [7]). Токи необходимо усреднить по фононной подсистеме.

3. СТАТИЧЕСКИЙ ТОК С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. АДИАБАТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

В отсутствие взаимодействия с фононами статический резонансный ток РТД дается известным выражением (см., например, [7])

$$J_0(\delta) = \frac{\mathit{\Gamma}^2}{\mathit{\Gamma}^2 + \delta^2}, \quad \delta = \varepsilon - \varepsilon_R, \tag{7}$$

где $\mathit{\Gamma}$ — ширина резонансного уровня с энергией ε_R; плотность тока налетающих электронов Q положена равной $2/p, p^2 = \varepsilon$.

В резонансе ($\varepsilon = \varepsilon_R$) ток достигает максимального значения, а коэффициент отражения от структуры равен нулю. Это обусловлено деструктивной интерференцией отраженных электронов. Естественно ожидать, что взаимодействие с фононами должно нарушить интерференцию из-за сбоя фазы. Причем характер влияния фононов зависит от соотношения фононной частоты ω_q и ширины уровня $\mathit{\Gamma}$. Если частота ω_q меньше $\mathit{\Gamma}$ (адиабатический предел), то энергия электронов медленно меняется в соответствии с колебаниями решетки. Вариация энергии электронов при туннелировании выводит их из резонанса и, следовательно, может существенно воздействовать на туннельный ток.

В этом разделе мы рассмотрим только адиабатические фононы. Они существенно влияют на ток в РТД. Кроме того, следуя приему, предложенному в [12], и используя теорему Блоха [9] для усреднения по фононам, можно в адиабатическом пределе сравнительно просто найти статический и переменный резонансные токи.

Исходя из изложенных выше соображений, энергию электронов $\hat{\varepsilon}(t)$ в адиабатическом случае можно представить в форме

$$\hat{\varepsilon}(t) = \varepsilon + \hat{\varphi}(x,t). \tag{8}$$

Тогда выражение для резонансного статического тока (7) принимает вид

$$\hat{J}_0(\delta) = \frac{\mathit{\Gamma}}{2}\left[\hat{f}(\delta,t) + \text{Н. с.}\right], \tag{9}$$

$$\hat{f}(\hat{\delta},t) = \frac{\mathit{\Gamma}}{\mathit{\Gamma} - i\hat{\delta}}, \quad \hat{\delta} = \delta + \hat{\varphi}(x,t). \tag{10}$$

Заметим, что возможна эквивалентная запись

$$\hat{J}_0(\delta) = \hat{f}\hat{f}^+. \tag{11}$$

Изложенный качественный вывод можно доказать помощью явного решения уравнения (1) в квазиклассическом приближении. Используя результаты [13], нетрудно показать, что при выполнении условий

$$\omega_q \ll \mathit{\Gamma} \ll \varepsilon_R, \quad \varphi \ll \varepsilon_R \tag{12}$$

амплитуда туннелирования $\hat{f}(\delta,t)$ дается формулой (10), но вместо $\hat{\varphi}(x,t)$ следует подставить проинтегрированную по x величину

$$\overline{\hat{\varphi}}(t) = \frac{1}{a}\int_0^a dx\,\hat{\varphi}(x,t). \tag{13}$$

Выражение для тока (9) необходимо усреднить по фононному ансамблю при температуре T:

$$\bar{J}_0(\delta) = \left\langle \hat{J}_0(\delta) \right\rangle. \tag{14}$$

Для выполнения усреднения удобно, следуя [12], перейти к лапласовскому представлению лоренцевской кривой

$$\bar{J}_0(\delta) = \frac{\mathit{\Gamma}}{2}\left\{\int_0^\infty d\tau \exp\left[-\tau(\mathit{\Gamma} - i\delta)\right] \times \right.$$
$$\left. \times \left\langle \exp\left[-i\tau\bar{\hat{\varphi}}(t)\right]\right\rangle + \text{Н. с.}\right\}. \tag{15}$$

Согласно теореме Блоха [9], среднее значение по фононному ансамблю равно

$$\left\langle \exp\left[-i\tau\bar{\hat{\varphi}}(t)\right]\right\rangle = \exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_{ph}}\right)^2\right], \tag{16}$$

$$\frac{1}{\tau_{ph}} = \frac{\mathcal{E}\sin qa/2}{a}\sqrt{\frac{2N_q+1}{M\omega_q}},\qquad N_q = \left(e^{\omega_q/T}+1\right)^{-1}. \tag{17}$$

Далее в этом разделе полагаем $T = 0$, $N_q = 0$. Обобщение на случай $T \neq 0$ не представляет труда.

Окончательное выражение для статического туннельного тока выглядит следующим образом:

$$\bar{J}_0(\delta) = \frac{\Gamma}{2}\int\limits_0^\infty d\tau\,\exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_{ph}}\right)^2\right]\times \times\left[e^{-\tau(\Gamma-i\delta)}+\text{c.c.}\right]. \tag{18}$$

Следует отметить, что в экспоненте (18) опущен член, приводящий к сдвигу резонансной энергии, возникающему за счет электрон-фононного взаимодействия. Мы приведем его ниже (см. разд. 7) при анализе тока для высокочастотных фононов.

В общем случае ток $\bar{J}_0(\delta)$ выражается через табулированные функции. Например, согласно [14] имеем

$$\bar{J}_0(\delta) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\tau_{ph}}{2}\left\{\exp\left(z^2\right)\left[1-\phi(z)\right]+\text{c.c.}\right\}, \tag{19}$$

где

$$z = \frac{(\Gamma - i\delta)\tau_{ph}}{2},\quad \phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \exp\left(-t^2\right)\,dt. \tag{20}$$

Иногда удобнее представить $\bar{J}_0(\delta)$ через функции $I_+(\beta)$ [15]:

$$\bar{J}_0(\delta) = \frac{i\Gamma\tau_{ph}}{\sqrt{\pi}}\left[I_+(\beta) - I_+^*(\beta)\right], \tag{21}$$

$$I_+(\beta) = -i\sqrt{2\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(i\beta t - \frac{t^2}{2}\right)\,dt, \tag{22}$$

$$\beta = \beta' + i\beta'',\quad \beta'' > 0,\quad \beta = \sqrt{2}iz.$$

Функции $\phi(z)$ и $I_+(\beta)$ протабулированы в [16] и дают возможность найти $\bar{J}_0(\delta)$ для любых Γ, τ_{ph} и δ.

Ниже мы проанализируем только предельные случаи, демонстрирующие основные эффекты влияния электрон-фононного взаимодействия на резонансное туннелирование. Вначале найдем резонансное значение тока из (19) при $\delta = 0$:

$$\bar{J}_0(\delta = 0) = \frac{\sqrt{\pi}\eta}{2}\exp\left(\frac{\eta^2}{4}\right)\left[1-\phi\left(\frac{\eta}{2}\right)\right],\qquad \eta = \Gamma\tau_{ph}. \tag{23}$$

В когерентном пределе ($\eta \gg 1$) имеем

$$\bar{J}_0(\delta = 0) \approx 1 - 2/\eta^2, \tag{24}$$

т. е. ток уменьшается пропорционально $1/\eta^2$. В обратном предельном случае, $\eta \ll 1$, из выражения (23) в первом приближении находим

$$\bar{J}_0(\delta = 0) \approx \frac{\sqrt{\pi}\eta}{2}. \tag{25}$$

Как следует из соотношения (25), статический резонансный ток уменьшается в $1/\eta$ раз благодаря нарушению условий резонанса взаимодействием электронов с адиабатическими фононами.

В пределе $\eta \ll 1$ оказывается возможным найти зависимость тока от δ во всем интервале расстройки. Воспользовавшись представлением функции $I_+(\beta)$ (22),

$$I_+(\beta) = \sqrt{2\pi}e^{-\beta^2/2}\left[\int\limits_0^\beta e^{\tau^2/2}d\tau - i\sqrt{\pi/2}\right], \tag{26}$$

и выражением (21) для тока $\bar{J}_0(\delta)$, получаем

$$\bar{J}_0(\delta) \approx \frac{\sqrt{\pi}\eta}{2}\exp\left(-\frac{\delta^2\tau_{ph}^2}{4}\right). \tag{27}$$

Учет взаимодействия электронов с адиабатическими фононами приводит к уменьшению резонансного тока и уширению резонансной зависимости $\bar{J}_0(\delta)$. Причем при $\eta \ll 1$ форма кривой становится гауссовской вместо исходной лоренцевской (7).

В то же время следует подчеркнуть, что зависимость $\bar{J}_0(\delta)$ даже при $\eta \ll 1$ (но, конечно, при $\varepsilon_R\tau_{ph} \gg 1$) сохраняет резонансный характер с шириной τ_{ph}^{-1}. Это означает, что ток обусловлен интерферирующими электронами, хотя их доля уменьшается пропорционально η. Часть электронов отражается и не вносит вклада. Поэтому приходится предположить, что критерии когерентного ($\eta \gg 1$) и некогерентного ($\eta \ll 1$) туннелирования носят количественный, а не качественный характер.

Следует отметить, что роль времени сбоя фазы играет величина τ_{ph}(см. (17)), которая обратно пропорциональна матричному элементу $\mathcal{E}$, а не квадрату $\mathcal{E}^2$, как времена релаксации [11].

Сравним выражения для $\bar{J}_0(\delta)$, полученные выше, с результатами, предсказываемыми с помощью МТГ [3]:

$$\bar{J}_0(\delta) = \frac{\Gamma^2}{[\delta^2 + (\Gamma + \Gamma_{ph})^2]}, \tag{28}$$

где Γ_{ph} — дополнительное уширение за счет взаимодействия с фононами.

Согласно (28), $\bar{J}_0(\delta)$ сохраняет лоренцевскую форму даже при $\Gamma_{ph} \gg \Gamma$, причем при $\delta = 0$

$$\bar{J}_0(\delta) = \frac{\Gamma^2}{\Gamma_{ph}^2}. \tag{29}$$

Таким образом, предсказывается более сильное уменьшение, пропорциональное квадрату $(\Gamma/\Gamma_{ph})^2$, по сравнению с линейным ослаблением $\Gamma\tau_{ph}$ в (25). Таким образом, формулы (28) и (29) существенно отличаются от (27) и (25).

4. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА. АДИАБАТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Переменный линейный ток РТД в рамках модели когерентного резонансного туннелирования, последовательно учитывающей интерференцию и граничные условия, был найден в [7]:

$$J_c(\delta,\omega) = -\frac{e^2 E a \Gamma^2 \delta}{2\left[(\delta-\omega)^2+\Gamma^2\right]\left[\Gamma^2+(\delta+\omega)^2\right]} \equiv \equiv -\frac{e^2 E a}{2} G_c(\delta,\omega). \tag{30}$$

Здесь $J_c(\delta,\omega)$ — приведенный ток, пропорциональный амплитуде E переменного электрического поля, $G_c(\delta,\omega)$ — линейный отклик. Как показано в [7], ток $J_c(\delta,\omega)$ имеет максимумы при частоте $\omega_m = 0$, если $\delta < \Gamma$, и при частоте $\omega_m^2 = \delta^2 + \Gamma^2$, если $\delta > \Gamma$. Последний обусловлен квазирезонансными переходами между состояниями с энергиями ε и ε_R ($\varepsilon \approx \varepsilon_R + \omega$) и приводит к новому («квантовому») режиму излучения РТД. Квантовый режим способен обеспечить генерацию РТД высокой мощности на частотах, значительно превышающих ширину Γ [17]. В «классическом» режиме ($\delta < \Gamma$, $\omega_m = 0$) величина отклика G_c быстро убывает ($1/\omega^4$) с ростом частоты при $\omega \gg \Gamma$.

Найдем переменный ток с учетом электрон-фононного взаимодействия, используя подход, развитый в предыдущем разделе. Наиболее просто это сделать, если учесть, что отклик $G_c(\delta,\omega)$ (30) можно представить в форме [7]

$$G_c(\delta,\omega) = \frac{J_0(\delta+\omega) - J_0(\delta-\omega)}{4\omega}, \tag{31}$$

где $J_0(\delta)$ — статический резонансный ток (7). Усредняя ток (31) по фононной подсистеме, получаем

$$\bar{G}_c(\delta,\omega) = \frac{\bar{J}_0(\delta+\omega) - \bar{J}_0(\delta-\omega)}{4\omega}. \tag{32}$$

Таким образом, удается выразить отклик $G_c(\delta,\omega)$ через статический ток $\bar{J}_0(\delta\pm\omega)$, найденный выше. Рассмотрим наиболее интересные предельные случаи.

Начнем с низкочастотного диапазона $\omega \ll \Gamma$, когда, согласно (32), отклик G_c выражается через дифференциальную статическую проводимость

$$\bar{G}_c(\delta) \approx \frac{d\bar{J}_0(\delta)}{2d\delta}. \tag{33}$$

В когерентном пределе $\eta \gg 1$ имеем

$$G_c(\delta) = -\frac{\delta\Gamma^2}{\left(\delta^2+\Gamma^2\right)^2}. \tag{34}$$

Максимум отклика $G_c(\delta)$ достигается при $\delta_0^2 = \Gamma^2/3$ и равен

$$G_c(\delta_0) = -\frac{3\sqrt{3}}{16\Gamma}. \tag{35}$$

Если выполняется обратное неравенство $\eta \ll 1$, то нетрудно получить из (33), (27) формулу

$$\bar{G}_c(\delta) = -\frac{\sqrt{\pi}\delta\eta\tau_{ph}^2}{8}\exp\left[-\frac{(\delta\tau_{ph})^2}{4}\right]. \tag{36}$$

Максимум отклика $\bar{G}_c(\delta)$ достигается при $\delta_0^2 = 2/\tau_{ph}^2$ и оказывается равным

$$\bar{G}_c(\delta_0) = -\frac{\sqrt{\pi}\eta^2}{4\sqrt{2}\Gamma}\exp\left(-\frac{1}{2}\right). \tag{37}$$

Отсюда следует, что адиабатические фононы вызывают уменьшение низкочастотного усиления, пропорциональное η^2. Добавочный по сравнению со статическим током (25) малый параметр η связан с нарушением резонанса переменной составляющей тока. Здесь уместно отметить, что метод туннельного гамильтониана (см. [3]) предсказывает отсутствие влияния электрон-фононного взаимодействия на переменный отклик. Отсюда сразу следует нарушение известной связи между низкочастотным откликом и производной по энергии (напряжению) от статического тока (см. (33)).

Теперь изучим частотную зависимость отклика $G_c(\delta,\omega)$ для предельной ситуации $\eta \ll 1$. Пользуясь результатами разд. 3, нетрудно получить из (32) равенство

$$\bar{G}_c(\delta,\omega) = -\frac{\sqrt{\pi}\eta}{4\omega}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\delta\omega\tau_{ph}^2}{2}\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{(\omega^2+\delta^2)}{4}\tau_{ph}^2\right]. \quad (38)$$

Вычисляя производную $d\bar{G}_c/d\omega$, находим уравнение для экстремальных значений частоты:

$$\omega\delta = \left(\omega^2 + \frac{2}{\tau_{ph}^2}\right)\mathrm{th}\left[\frac{\delta\omega\tau_{ph}^2}{2}\right]. \quad (39)$$

Первое решение, $\omega_1 = 0$, соответствует максимуму $\bar{G}_c$, если $0 < \delta < \sqrt{6}\,\tau_{ph}^{-1}$, и минимуму при $\delta > \sqrt{6}\,\tau_{ph}^{-1}$. Это решение описывает классический режим. В классическом режиме $\bar{G}_c$ быстро уменьшается с частотой при $\omega\tau_{ph} \gg 1$:

$$\bar{G}_c \approx -\frac{\sqrt{\pi}\eta}{4\omega}\exp\left[-\frac{(\delta-\omega)^2\tau_{ph}^2}{4}\right]. \quad (40)$$

Следует отметить, что характерная частота, начиная с которой $\bar{G}_c$ резко уменьшается, теперь равна примерно τ_{ph}^{-1}, т. е. частотный диапазон отклика в классическом режиме расширяется. Причем в интервале частот $\Gamma \ll \omega \ll \tau_{ph}^{-1}$ величина $\bar{G}_c$ превышает G_c:

$$\frac{\bar{G}_c}{G_c} \approx -\frac{\omega^3\tau_{ph}}{\Gamma^2} \gg 1. \quad (41)$$

Второе решение уравнения (39), $\omega_2 \neq 0$, соответствующее максимуму $\bar{G}_c$ при $\delta > \sqrt{6}\,\tau_{ph}^{-1}$, описывает квантовый режим. Ограничиваясь большими частотами $\tau_{ph}\omega \gg 1$, находим из (39)

$$\omega_2 \approx \delta = \varepsilon - \varepsilon_R. \quad (42)$$

Это есть условие квазирезонанса. Отклик $\bar{G}_c$ в максимуме равен

$$\bar{G}_c(\omega_2) \approx -\frac{\sqrt{\pi}\eta}{4\omega}. \quad (43)$$

Сравнивая его с соответствующим значением (30) в когерентном пределе ($\eta \gg 1$),

$$G_c(\omega_2) \approx -\frac{1}{4\omega}, \quad (44)$$

видим, что уменьшение пропорционально η. Таким образом, усиление в квантовом режиме ослабляется в меньшей степени, чем в классическом (см. (37)). Причина состоит в том, что нарушение резонанса происходит только в статическом канале. В высокочастотном канале оно не существенно, так как $\omega\tau_{ph} \gg 1$.

Следовательно, мы видим, что в пределе $\eta \ll 1$ поведение отклика качественно аналогично отклику в когерентном режиме: сохраняются два максимума (два режима) для соответствующих интервалов δ. Разница в том, что лоренцевская кривая с шириной Γ заменяется на гауссовскую с шириной τ_{ph}^{-1}. Таким образом, мы снова приходим к выводу, сделанному в разд. 3 для статического тока: граница при $\eta = 1$ не играет качественной роли.

5. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК

Для построения теории генерации РТД и ряда других задач необходим нелинейный отклик. В низкочастотном диапазоне, $\omega \ll \Gamma$, удалось аналитически найти переменный ток для любых амплитуд переменного поля [12] с помощью приема, аналогичного использованному в разд. 3. Рассмотрим нелинейный низкочастотный ток с учетом фононов. Для этого, комбинируя результаты [12] и разд. 3, приходим к следующему выражению для тока после усреднения по фононной подсистеме:

$$\bar{J}_c(\delta,t) = \left\{\int_0^\infty d\tau\exp\left[-\tau\Gamma - \left(\frac{\tau}{\tau_{ph}}\right)^2\right] \times \right. \\ \left. \times \left[\exp\{i\tau(\delta+\bar{\nu}\cos\omega t)\} + \text{c. c.}\right]\right\}, \quad (45)$$

где $\bar{\nu} = eEa/4$. Разлагая $\exp(i\bar{\nu}\cos\omega t)$ в ряд по функциям Бесселя $J_n(\bar{\nu}\tau)$ и выделяя вклад, пропорциональный первой гармонике $\cos\omega t$, находим

$$\bar{J}_c(\delta,\bar{\nu}) \approx -2e\Gamma\int_0^\infty d\tau\sin\delta\tau \times \\ \times \exp\left[-\Gamma\tau - \left(\frac{\tau}{\tau_{ph}}\right)^2\right] J_1(\bar{\nu}\tau). \quad (46)$$

В когерентном пределе, $\eta \gg 1$, интеграл берется точно и мы приходим к выражению, впервые полученному в [12]. Если $\eta \ll 1$, интеграл для любых $\bar{\nu}$ взять точно не удается. Поэтому ограничимся первой нелинейной поправкой.

Используя разложение функции Бесселя

$$J_1(z) \approx \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8}, \quad (47)$$

получаем для тока

$$\bar{J}_c(\delta,\bar{\nu}) = -e\Gamma\bar{\nu}\int\limits_0^\infty d\tau \exp\left[-\Gamma\tau - \left(\frac{\tau}{\tau_{ph}}\right)^2\right] \times \\ \times \sin\delta\tau \left[1 - \left(\frac{\bar{\nu}\tau}{2}\right)^2 \frac{1}{8}\right]\tau. \quad (48)$$

В общем случае (для любых η) $\bar{J}_c(\delta,\bar{\nu})$ выражается через специальные функции [14]. В интересующем нас пределе, $\eta \ll 1$, имеем

$$\bar{G}_c(\delta,\bar{\nu}) = \bar{G}_c(\delta,\bar{\nu}=0)\left[1 - \bar{\nu}^2\tau_{ph}^2(6 - \delta^2\tau_{ph}^2)\right]. \quad (49)$$

Приведем также для сравнения аналогичное разложение в когерентном пределе $\eta \gg 1$ [12]:

$$G_c(\delta,\bar{\nu}) = G_c(\bar{\nu}=0)\left[1 - \frac{3\bar{\nu}^2\left(\Gamma^2-\delta^2\right)}{2\left(\delta^2+\Gamma^2\right)^2}\right]. \quad (50)$$

Сопоставляя (49) и (50) видим, что снова результаты качественно аналогичны с точностью до замены Γ на τ_{ph}^{-1}. Важно отметить, что, как и в [12] (см. (50)), происходит смена знака нелинейной поправки, на этот раз при $\delta > \sqrt{6}\tau_{ph}^{-1}$. Смена знака приводит к немонотонной зависимости тока от поля и жесткому режиму генерации [12].

Таким образом, опять приходим к выводу об отсутствии качественной границы при $\eta = 1$. Важно также подчеркнуть, что нелинейная поправка в (49) уменьшается по сравнению с (50) в η^2 раз, что способствует росту мощности генерации РТД (см. [17]).

6. СВЯЗЬ СО СТАТИСТИЧЕСКИМ УСРЕДНЕНИЕМ ПО АДИАБАТИЧЕСКИМ ФОНОНАМ

Можно показать, что предложенный метод учета адиабатических фононов эквивалентен статистическому усреднению по гауссовскому распределению $W(y)$:

$$\bar{J}_0(\delta) = \langle J_0(\delta)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dy\,\Gamma^2 W(y)}{[\Gamma^2 + (\delta - y)^2]}, \quad (51)$$

$$W(y) = \frac{\tau_{ph}}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{y^2\tau_{ph}^2}{4}\right), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(y)\,dy = 1. \quad (52)$$

Для доказательства воспользуемся формулой (21) и тем, что функцию $I_+(\beta)$ можно выразить через интеграл [15]:

$$I_+(\beta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2/2}\frac{1}{\beta - x}, \quad \operatorname{Im}\beta > 0. \quad (53)$$

Тогда ток $\bar{J}_0(\delta)$ представим в виде

$$\bar{J}_0(\delta) = \frac{i\eta}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2/2}\left[\frac{1}{\beta - x} - \frac{1}{\beta^* - x}\right] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\, e^{-x^2/2}}{2\sqrt{2\pi}\left[(\delta - x\sqrt{2}\tau_{ph}^{-1})^2 + \Gamma^2\right]}.$$

Делая замену переменных $x = y\tau_{ph}/\sqrt{2}$, приходим к (51).

7. ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА РЕЗОНАНСНОЕ ТУННЕЛИРОВАНИЕ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Можно обобщить изложенные выше результаты на случай фононов любой частоты, если для решения уравнения Шредингера (1) воспользоваться квазиклассической теорией возмущений. В работе [13] было найдено квазиклассическое решение уравнения (1) с переменным потенциалом

$$W(x,t) = W(x)\cos\omega t \quad (54)$$

для волновой функции при $x \geq a$:

$$\Psi(x=a) = f(a,t)\exp(-i\varepsilon t + ipx), \quad (55)$$

$$f(a,t) \equiv f(t) = \\ = \Gamma\exp\left[\frac{i\overline{W}}{\omega}\sin\omega t + it(\Gamma - i\delta))\right] \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{-t} \exp\left[t'(\Gamma - i\delta) - \frac{i\overline{W}}{\omega}\sin\omega t'\right] dt', \quad (56)$$

$$\overline{W} = \frac{1}{a}\int\limits_0^a W(x)\,dx.$$

При этом предполагалось, что частота ω и амплитуда поля $W(x)$ малы по сравнению с энергией ε_R. Потенциал $W(x)$ считался отличным от нуля в области ямы.

Как уже отмечалось выше, перечисленным условиям квазиклассичности удовлетворяет энергия электрон-фононного взаимодействия и фононная частота. Поскольку $\hat{\tilde{\varphi}}(x,t)$, как и $W(x,t)$, — периодическая по времени действительная функция, обобщая (56), вместо $i\dfrac{\overline{W}}{\omega}\sin\omega t$ следует в $f(t)$ подставить

$$\hat{A}(t) = -\left\{C_q B_q(t) - C_q^+ B_q^*(t)\right\}, \tag{57}$$

$$B_q(t) = \frac{\mathcal{E}\left(e^{iaq}-1\right)e^{-i\omega_q t}}{a\omega_q\sqrt{2M\omega_q}}. \tag{58}$$

Поскольку резонансный ток $\bar{J}_0(\delta)$ не должен зависеть от координаты x, можно выбрать волновую функцию $\Psi(x)$ при любых x, в частности, при $x = a$ (см. (55), (56)).

Тогда резонансный ток $\bar{J}_0(\delta)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{J}_0(\delta) &= \left\langle \hat{f}\hat{f}^+\right\rangle = \\ &= \varGamma^2\exp(2\varGamma t)\exp(\hat{A}(t))\exp(\hat{A}^+(t))\times \\ &\quad\times\int\limits_{-\infty}^{-t} dt_1\exp\left(t_1(\varGamma - i\delta)\right)\times \\ &\quad\times\int\limits_{-\infty}^{-t} dt_2\exp(t_2(\varGamma + i\delta))\times \\ &\qquad\times\left\langle\exp(\hat{A}(t_1))\exp(\hat{A}^+(t_2))\right\rangle.\end{aligned} \tag{59}$$

С учетом того, что

$$\hat{A}^+(t) = -\hat{A}(t), \quad e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \tag{60}$$

имеем вместо (59)

$$\begin{aligned}\bar{J}_0(\delta) &= \varGamma^2\exp(2\varGamma t)\int\limits_{-\infty}^{-t} dt_1\exp(t_1(\varGamma - i\delta))\times \\ &\times\int\limits_{-\infty}^{-t} dt_2\exp(t_2(\varGamma + i\delta))\left\langle\exp(\hat{A}(t_1)-\hat{A}(t_2))\right\rangle\times \\ &\qquad\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{A}(t_1),\hat{A}(t_2)\right]\right).\end{aligned} \tag{61}$$

Коммутатор, равный

$$\left[\hat{A}(t_1),\hat{A}(t_2)\right] = i\varPhi_q^2\sin\omega_q(t_2 - t_1), \tag{62}$$

приводит к сдвигу резонансного уровня.

Проводя с помощью теоремы Блоха [9] усреднение по фононам, получаем

$$\begin{aligned}&\left\langle\exp\left(\hat{A}(t_1)-\hat{A}(t_2)\right)\right\rangle = \\ &\quad = \exp\left[\frac{1}{2}\left\langle(\hat{A}(t_1)-\hat{A}(t_2))^2\right\rangle\right] = \\ &\exp\left\{-\varPhi_q^2\left[(2N_q+1)(1-\cos\omega_q(t_2-t_1))\right]\right\},\end{aligned} \tag{63}$$

$$\varPhi_q^2 = \frac{2\mathcal{E}^2\sin^2(qa/2)}{\omega_q^2 a^2 M\omega_q}. \tag{64}$$

Подставляя (62), (63) в (59), после интегрирования находим (для $T = 0$, $N_q = 0$)

$$\bar{J}_0(\delta) = \varGamma\left[\int\limits_0^\infty d\tau\exp[-\tau(\varGamma - i\delta) - g_q(\tau)] + \text{c. c.}\right], \tag{65}$$

$$g_q(\tau) = \varPhi_q^2\left\{(1-\cos\omega_q\tau) - i\sin\omega_q\tau\right\}. \tag{66}$$

Обобщим (65) и (66) на случай N фононных частот. Ввиду коммутативности операторов рождения C_q^+ и уничтожения C_q фононов с разными q, среднее по фононному ансамблю от экспоненты равно произведению средних от отдельных экспонент, соответствующих различным типам операторов. Это означает, что взаимодействие с фононами с различными q не коррелировано и можно рассматривать их независимо. Поэтому, обобщая проделанный вывод, приходим снова к (65), где функция $g_q(\tau)$ заменяется на $g(\tau)$:

$$\bar{J}_0(\delta) = \varGamma\left[\int\limits_0^\infty d\tau\exp[-\tau(\varGamma - i\delta) - g(\tau)] + \text{c. c.}\right], \tag{67}$$

$$g(\tau) = \sum_q\frac{\varPhi_q^2}{N}\left[(2N_q+1)(1-\cos\omega_q\tau) - i\sin\omega_q\tau\right].$$

Интересно обратить внимание на то, что выражение (67) для резонансного тока через РТД формально в точности совпадает с выражением для вероятности эффекта Мессбауэра [10]. Разница только в том, что вместо передаваемой ядром энергии стоит деформационный потенциал взаимодействия. Следует также иметь в виду, что при излучении ядер естественная ширина линии $\varGamma$ считается очень малой и все определяется только двумя параметрами: частотой ω_q (или дебаевской частотой) и передаваемой энергией. В РТД все три параметра — $\varGamma$, ω_q (или дебаевская частота ω_{ph}) и $\varPhi_q$ — играют роль.

Вначале проведем сравнение общей формулы с результатами, полученными выше (см. разд. 3). Для простоты воспользуемся формулами (65) и (66) и положим $T = 0$, $N_q = 0$. Если частота ω_q мала по сравнению с Γ, то из (65), (66) получаем

$$\bar{J}_0(\delta) = \frac{\Gamma}{2}\left[\int\limits_0^\infty d\tau \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left[-\tau(\Gamma - i\delta - i\varepsilon_{ph}) - \left(\frac{\tau}{\tau_{ph}}\right)^2\right] + \text{c.c.}\right], \quad (68)$$

где $\varepsilon_{ph} = \sum_q \Phi_q^2 \omega_q$ — сдвиг резонансного уровня. В остальном (68) совпадает с (18) для адиабатического случая, проанализированного выше.

В пределе $\omega_{ph} \gg \Gamma$ воспользуемся формулой (67), когда возможны два случая, аналогичные реализующимся в эффекте Мессбауэра. Если $\Phi_q \gg 1$ (так называемая сильная связь), функция $\exp(-g(\tau))$ убывает так быстро, что входящие в нее $\cos\omega_q\tau$ и $i\sin\omega_q\tau$ можно заменить первыми неисчезающими членами их разложения в ряд. В этом случае мы снова приходим к уже рассмотренной ситуации (т. е. к формуле (68)), когда лоренцевская линия с шириной Γ заменяется на гауссовскую с шириной τ_{ph}^{-1}. Причем время разрушения когерентности дается выражением

$$\frac{1}{\tau_{ph}^2} = \sum_q \frac{\mathcal{E}^2 \sin^2(qa/2)}{M\omega_q N a^2}(2N_q + 1). \quad (69)$$

В обратном пределе $\Phi < 1$ (слабая связь) осциллирующие члены в $\exp(-g(\tau))$ исчезают (как $\frac{\sin\omega t}{t}$, $t \to \infty$) и остается лишь часть, не зависящая от времени. Тогда для тока находим

$$\bar{J}_0(\delta) = \exp\left(-\sum_q \frac{\Phi_q^2}{N}\right)\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \delta^2}. \quad (70)$$

Следовательно, форма резонансной кривой сохраняется исходно узкой, но ток уменьшается в $\exp\left(-\sum_q \frac{\Phi_q^2}{N}\right)$ раз. Экспонента в (70) является аналогом фактора Дебая–Уоллера и отражает виртуальное упругое взаимодействие электронов с фононами.

Обратим внимание, что вместе с неравенствами $\Phi < 1$ и $\omega \gg \Gamma$ может выполняться и условие

$$\Phi\omega_{ph} = \frac{1}{\tau_{ph}} \gg \Gamma, \quad \eta = \Gamma\tau_{ph} \ll 1. \quad (71)$$

Таким образом, в РТД с малой шириной Γ и слабой связью возможно полное сохранение исходной лоренцевской формы линии в пределе $\eta \ll 1$, который считается «некогерентным».

Если учесть в следующем приближении вклад от осциллирующих в экспоненте членов, то это приведет к излучению высокочастотных фононов. Вероятность этих процессов мала при $\Phi < 1$ и $\omega_q \gg 1$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные выше результаты позволяют описать поведение статического и переменного резонансных токов с учетом рассеяния электронов на фононах. Существенный вклад в изменение токов вносят низкочастотные адиабатические фононы ($\omega_q < \Gamma$). Причина состоит в том, что колебания решетки приводят к медленному изменению энергии электронов и, следовательно, к нарушению условия резонанса.

Характерным параметром является время τ_{ph}. Если $\tau_{ph}\Gamma \ll 1$, лоренцевская линия с шириной Γ заменяется на гауссовскую с шириной τ_{ph}^{-1}. При этом резонансное значение статического тока уменьшается пропорционально $\eta = \Gamma\tau_{ph}$. Переменный ток в низкочастотном пределе уменьшается более сильно, поскольку резонанс нарушается дважды — в статическом и переменном каналах.

Однако нельзя утверждать, как это часто делается, что в пределе $\eta \ll 1$ (но $\varepsilon_R\tau_{ph} \gg 1$) туннелирование становится полностью некогерентным. Напротив, как показано выше, туннелирование в этих условиях сохраняет резонансный характер. Резонансный ток осуществляется когерентными электронами (испытывающими интерференцию), но доля их уменьшается из-за роста отражения электронов, испытавших взаимодействие с фононами.

Такая точка зрения подтверждается поведением линейного и нелинейного переменных токов. А именно, наличием максимумов приведенного тока при $\omega = 0$ (классический режим) и $\omega = \delta$ (квантовый режим) в линейном отклике, а также сохранением тонких особенностей нелинейного отклика (например, сменой знака при $\delta > \sqrt{6}\,\tau_{ph}^{-1}$).

Но особенно ярким эффектом является сохранение узкой линии статического резонансного тока (см. (70)) в некогерентном пределе $\eta \ll 1$, $\omega_q \gg \Gamma$. Этот эффект аналогичен эффекту Мессбауэра.

Таким образом, можно сделать вывод, что и в пределе $\eta \ll 1$ интерференция играет принципиальную роль в резонансном туннелировании. Резонансное туннелирование всегда когерентно и существует, пока время τ_{ph} (см. (69)) превышает $\hbar/\varepsilon_R$.

Поэтому применение скоростных уравнений, а также МТГ для описания туннелирования не является, строго говоря, справедливым. Это следует, например, из сравнения полученных выше результатов с соответствующими в [3], где использован МТГ. Действительно, согласно [3], переменный ток практически не меняется из-за электрон-фононного взаимодействия, а статический ток уменьшается пропорционально η^2 (см. (28)), что противоречит (25) и (37). Кроме того, нарушается известное соотношение между низкочастотным током и производной от статического тока (33). Ряд других предсказаний МТГ также противоречит точным аналитическим результатам (см. [7, 8]).

Следует отметить, что в работе использовалась простейшая модель туннелирования и взаимодействия с фононами. Это позволило получить обозримые аналитические выражения и выявить принципиальные черты влияния сбоя фазы за счет фононов на резонансное туннелирование. Можно надеяться, что полученные результаты позволяют лучше описать опытные данные, если, естественно, учесть конкретные особенности реальных структур и энергетическое распределение электронов.

Автор выражает глубокую признательность Ю. В. Копаеву за полезное обсуждение работы. Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы (проект № А0133) и при финансовой поддержке Минпромнауки РФ в рамках программы «Физика твердотельных наноструктур» (грант № 99-1140) и проекта «Построение теории взаимодействия сильных электромагнитных полей с электронной системой РТД и лазеров».

ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Mattia and Mc. Whorter, J. Appl. Phys. **84**, 1140 (1998); K. L. Jensen and F. Buot, J. Appl. Phys. **67**, 7602 (1990); A. Hernandez-Cabrera, P. Aceituno, and H. Cruz, J. Appl. Phys. **78**, 6147 (1995); Nanzhi Zou et al., J. Appl. Phys. **75**, 1829 (1994).
2. S. Luryi, Appl. Phys. Lett. **47**, 490 (1985).
3. M. P. Anatram and S. Datta, Phys. Rev. B **51**, 7632 (1994).
4. C. Caroli, R. Combescot, P. Nozieres, and D. Saint-Tamas, J. Phys. C **4**, 916 (1971).
5. N. S. Wingreen, A. P. Jahno, and Y. Meir, Phys. Rev. B **48**, 8487 (1993).
6. V. V. Afonin and A. M. Rudin, Phys. Rev. B **49**, 10466 (1994).
7. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **116**, 704 (1999).
8. В. Ф. Елесин, ЖЭТФ **121**, 925 (2002).
9. Ж. Вантер, в сб.: *Квантовая оптика и квантовая радиофизика*, Мир, Москва (1966).
10. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
11. А. И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников*, Физматгиз, Москва (1962).
12. V. F. Elesin, Phys. Low-Dim. Struct **1/2**, 55 (1999).
13. D. Sokolovsky, Phys. Rev. B **37**, 4201 (1988).
14. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).
15. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Физматгиз, Москва (1961).
16. В. Н. Фадеева, Н. М. Терентьев, *Таблицы значений интеграла вероятностей*, Гостехиздат, Москва (1954).
17. В. Ф. Елесин, И. Ю. Катеев, А. И. Подливаев, УФН **170**, 333 (2000); ФТП **34**, 1373 (2000).