ЖЭТФ, 2003, том 123, вып. 5, стр. 1106–1112

СВОЙСТВА СЛАБОКОЛЛАПСИРУЮЩИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Ю. Н. Овчинников[*]

Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems
Dresden, D-01187 Germany

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
117940, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 сентября 2002 г.

Показано, что одно из условий образования слабоколлапсирующего решения с нулевой энергией порождает бесконечное число функционалов I_N, тождественно равных нулю на регулярных решениях соответствующего дифференциального уравнения. На плоскости параметров $\{A, C_1\}$ существуют как минимум две особых линии. Вдоль одной из них $(A/C_1 = 1/6)$ расположены слабоколлапсирующие решения с нулевой энергией. Предположено, что вдоль второй линии $(A/C_1 = \alpha_c)$ также расположено семейство слабоколлапсирующих решений с нулевой энергией. В области больших значений параметров $\{C_1, \alpha = A/C_1\}$ существует область промежуточной асимптотики, в которой амплитуда осцилляций функции U растет в широкой области по координате ξ.

PACS: 03.65.Ge, 02.30.Jr

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера возникает при исследовании физических процессов в различных областях физики [1, 2]. В d-мерном пространстве это уравнение можно записать в виде

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0, \tag{1}$$

где ψ — скалярная функция координат, Δ — оператор Лапласа, σ — численный параметр, характеризующий тип нелинейности. При выполнении условия $\sigma d \geq 2$ уравнение (1) обладает решениями, имеющими особенность на конечном интервале времени. Имеется несколько типов таких решений [1–5]. Здесь мы продолжим исследование слабоколлапсирующих решений в физически наиболее интересном случае $d = 3$, $\sigma = 1$. Слабоколлапсирующие решения образуют трехпараметрическое семейство $\{A, C, C_1\}$. Один из параметров (C) связан с масштабным преобразованием уравнения (1) [6]. В работах [6, 7] было показано, что на плоскости (A, C_1) существует бесконечное дискретное множество точек, соответствующих решениям с нулевой энергией. Эти точки расположены вдоль прямой $(A/C_1 = 1/6)$, найденной в работах [6, 7].

Решения с нулевой энергией возникают при выполнении двух уравнений, полученных ниже. В области $C_1 \gg 1$ одно из этих уравнений допускает асимптотическое разложение по параметру C_1^{-1}, порождая семейство функционалов I_N. Каждый из функционалов I_N равен нулю на всех регулярных в нуле решениях дифференциального уравнения, возникающего при определении функционала I_N. Мы выпишем в явном виде два из них. Показано также, что при $C_1 \gg 1$ существует область промежуточной асимптотики с решениями, имеющими глубокий минимум в величине плотности «частиц». Число частиц в точном слабоколлапсирующем решении всегда бесконечно, что делает необходимым производить обрезку решения на конечном расстоянии. В этой связи решения, имеющие глубокий минимум в плотности числа частиц, являются перспективными и их появления следует ожидать в численных расчетах и реальном эксперименте [3].

[*]E-mail: ovc@itp.ac.ru

2. СЛАБОКОЛЛАПСИРУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ

Уравнение (1) имеет слабоколлапсирующие решения вида

$$\psi = \lambda^\nu \varphi(\rho\lambda)\exp(i\chi(\rho,t)), \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda(t)$, $\rho = |\mathbf{r}|$.

Законы сохранения энергии и числа частиц приводят к следующим уравнениям для фазы χ и параметров λ,ν [3]:

$$\nu\sigma = 1, \quad \chi(\rho,t) = \chi_0(t) + \tilde{\chi}(\rho\lambda), \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{C}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad \chi_0(t) = -\frac{C_1}{2}\ln(t_0 - t),$$

где C, C_1 — константы. В работах [3,8] было показано, что обе функции $\varphi, \tilde{\chi}$ выражаются через одну функцию Z:

$$\varphi = \frac{\sqrt{Z'}}{y^{(d-1)/2}}, \quad \tilde{\chi}' = -\frac{yZ' + (2/\sigma - d)Z}{4C^2 Z'}, \tag{4}$$

где функция Z удовлетворяет дифференциальному уравнению третьего порядка

$$\begin{gathered} Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} - \frac{(d-1)(d-3)}{2y^2}Z' - \\ - \frac{1}{C^2}\left[C_1 Z' - \frac{y(yZ' + (2/\sigma - d)Z)}{4C^2}\right] - \\ - \frac{(yZ' + (2/\sigma - d)Z)^2}{8C^4 Z'} + \\ + \frac{2(Z')^{\sigma+1}}{y^{(d-1)\sigma}} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

В рассматриваемом нами случае $\{\sigma = 1,\ d = 3\}$ уравнение (5) принимает вид

$$\begin{gathered} Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} + \frac{2(Z')^2}{y^2} - \frac{C_1}{C^2}Z' + \\ + \frac{1}{8C^4}\left(y^2 Z' - \frac{Z^2}{Z'}\right) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Параметр C связан с масштабной инвариантностью уравнения (6) и в дальнейшем будем считать его равным единице: $C = 1$. Существует однопараметрическое семейство решений уравнения (6), удовлетворяющее физическим граничным условиям в нуле:

$$Z = Ay^3 + Ay^5\left(\frac{C_1}{10} - \frac{3A}{5}\right) + \ldots \tag{7}$$

В асимптотической области $y \to \infty$ общее решение уравнения (6) есть [7,9]

$$\begin{gathered} Z = By + \frac{B_1}{y}\left(1 + \frac{16C_1}{9y^2} + \ldots\right) - \frac{4}{y^2}(1 + \ldots) \times \\ \times\left[d_1\cos\left(\frac{y^2}{4} - 2C_1\ln y\right) + d_2\sin\left(\frac{y^2}{4} - 2C_1\ln y\right)\right]. \end{gathered} \tag{8}$$

В формуле (8) коэффициент B_1 связан с коэффициентами $\{B, d_{1,2}\}$ простым соотношением [7]

$$B_1 = -2BC_1 - \frac{d_1^2 + d_2^2}{B}. \tag{9}$$

Параметры $d_{1,2}$ являются функциями величин $\{A, C_1\}$. Слабоколлапсирующее решение имеет нулевую энергию, если оба коэффициента $d_{1,2}$ равны нулю:

$$d_1 = d_2 = 0. \tag{10}$$

3. СЛАБОКОЛЛАПСИРУЮЩИЕ РЕШЕНИЯ С НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИЕЙ

В работах [6,7] было показано, что при больших значениях параметра $C_1 \gg 1$ на плоскости $\{A, C_1\}$ существуют линии, вдоль которых амплитуды осцилляционных членов экспоненциально малы по параметру C_1. На этих же линиях расположены точки, соответствующие слабоколлапсирующим решениям с нулевой энергией. Для получения функционала I (см. ниже) воспользуемся методом, примененным в работе [7]. Умножим обе части уравнения (5) на Z' и продифференцируем по y. В результате получим уравнение

$$\begin{gathered} Z'''' - 2C_1 Z'' + \frac{y}{4}(Z' + yZ'') - \frac{1}{4}Z = \\ = \frac{4}{y^3}(Z')^2 - \frac{6}{y^2}Z'Z''. \end{gathered} \tag{11}$$

Линеаризованное уравнение (11),

$$Z'''' - 2C_1 Z'' + \frac{y}{4}(Z' + yZ'') - \frac{1}{4}Z = 0, \tag{12}$$

имеет четыре линейно независимых решения Z_{1-4}. Одно из них (Z_1) равно

$$Z_1 = y. \tag{13}$$

В главном приближении по параметру C_1^{-1} решения Z_{2-4} приведены в работе [7] во всей области $y > 0$. Нам понадобятся также и следующие члены по параметру C_1^{-1} в этих решениях. Определим функции P_{K4} [7]:

$$P_{14} = -\det\begin{pmatrix} Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_2' & Z_3' & Z_4' \\ Z_2'' & Z_3'' & Z_4'' \end{pmatrix},$$

$$P_{24} = \det\begin{pmatrix} y & Z_3 & Z_4 \\ 1 & Z_3' & Z_4' \\ 0 & Z_3'' & Z_4'' \end{pmatrix},$$

$$P_{34} = -\det\begin{pmatrix} y & Z_2 & Z_4 \\ 1 & Z_2' & Z_4' \\ 0 & Z_2'' & Z_4'' \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$$P_{44} = \det\begin{pmatrix} y & Z_2 & Z_3 \\ 1 & Z_2' & Z_3' \\ 0 & Z_2'' & Z_3'' \end{pmatrix}.$$

Вронскиан W не зависит от y и равен

$$W = -\det\begin{pmatrix} Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_2'' & Z_3'' & Z_4'' \\ Z_2''' & Z_3''' & Z_4''' \end{pmatrix}_{y=0}. \qquad (15)$$

Общее решение уравнения (11), удовлетворяющее граничным условиям в нуле, можно записать с помощью функций P_{K4} в виде

$$Z = A_1(Z_4 - Z_3 - \gamma y) + D_1 y + D_2 Z_2 + \\ + D_3 Z_3 + D_4 Z_4, \qquad (16)$$

где функции D_K выражаются в терминах интегралов от производных от Z:

$$D_K = \frac{1}{W}\int\limits_0^y dy_1\ P_{K4}\left(\frac{4(Z')^2}{y_1^3} - \frac{6Z'Z''}{y_1^2}\right). \qquad (17)$$

Коэффициенты A_1, γ — константы, величина γ определяется соотношением

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial y}(Z_4 - Z_3)_{y=0}. \qquad (18)$$

Формулы (14)–(18) являются точными и могут быть использованы в любом порядке по параметру C_1^{-1}. Слабоколлапсирующее решение является решением с нулевой энергией, если выполнены два условия:

$$A_1 + D_4(\infty) = 0, \quad D_2(\infty) = 0. \qquad (19)$$

Особый интерес для нас представляет первое уравнение (19), поскольку, как будет показано ниже, существенные значения y_1 в выражении (17) для функции $D_4(\infty)$ малы (порядка $C_1^{-1/2}$).

В области малых значений y ($y \le C_1^{-1/2}$) находим из уравнения (12) значения функций Z_2, Z_3, Z_4:

$$Z_2 = 1 - \frac{y^2}{16C_1} + \ldots, \qquad (20)$$

$$Z_3 = \frac{1}{8C_1}\exp(-\sqrt{2C_1}y)\times \\ \times\left[1 + \frac{5y}{8(2C_1)^{3/2}} + \frac{y^2}{8C_1} + \frac{y^3}{24\sqrt{2C_1}} + \ldots\right],$$

$$Z_4 = \frac{1}{8C_1}\exp(\sqrt{2C_1}y)\times \\ \times\left[1 - \frac{5y}{8(2C_1)^{3/2}} + \frac{y^2}{8C_1} - \frac{y^3}{24\sqrt{2C_1}} + \ldots\right].$$

Подставляя выражения (20) в формулы (14), (15), получим значение вронскиана W и функций P_{K4} с точностью до членов C_1^{-2} включительно:

$$W = -\frac{\sqrt{2C_1}}{8}\left(1 - \frac{9}{32C_1^2}\right), \qquad (21)$$

$$P_{14} = \frac{1}{8\sqrt{2C_1}}\left(1 - \frac{9}{32C_1^2}\right),$$

$$P_{24} = -\frac{y}{8\sqrt{2C_1}}\left(1 - \frac{5}{32C_1^2}\right),$$

$$(P_{44} + P_{34}) = \frac{\sqrt{2C_1}}{2}\left(1 - \frac{5}{32C_1^2}\right),$$

$$(P_{44} - P_{34}) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{8C_1^2}\right).$$

Используя выражение (7) для функции Z при малых значениях y, получим

$$\frac{4(Z')^2}{y^3} - \frac{6Z'Z''}{y^2} = -72A^2 y. \qquad (22)$$

Формулы (17), (21), (22) позволяют найти функции D_K в области малых значений y:

$$D_1 = \frac{18A^2}{C_1}y^2, \quad D_2 = -\frac{12A^2y^3}{C_1}\left(1 + \frac{1}{8C_1^2}\right),$$

$$D_4 + D_3 = 96A^2y^3\left(1 + \frac{1}{8C_1^2}\right), \qquad (23)$$

$$D_4 - D_3 = -\frac{144A^2y^2}{\sqrt{2C_1}}\left(1 + \frac{5}{32C_1^2}\right).$$

Подставляя значения функций D_k в уравнение (16) и используя уравнения (7), (19), найдем значение коэффициента A_1:

$$A_1 = \frac{12A}{\sqrt{2C_1}}\left(1 + \frac{5}{32C_1^2} + O(C_1^{-4})\right). \qquad (24)$$

В результате первое из уравнений (19) принимает вид

$$I = 0, \qquad (25)$$

где функционал I определяется выражением

$$I = -6A + \int_0^\infty dy\; e^{-\sqrt{2C_1}y}\frac{(Z')^2}{y^2}\left\{\left(\frac{2}{y} + 3\sqrt{2C_1}\right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{8(2C_1)^{3/2}} - \frac{y}{16C_1} + \frac{y^2}{12\sqrt{2C_1}} + \frac{y^3}{8}\right)\right\}. \qquad (26)$$

4. ФУНКЦИОНАЛ I_0 НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим функционал I_0, равный

$$I_0 = -6A + \int_0^\infty dy\, e^{-\sqrt{2C_1}y}\frac{(Z_0')^2}{y^2}\left\{\frac{2}{y} + 3\sqrt{2C_1}\right\}, \qquad (27)$$

где Z_0 есть такое решение уравнения

$$Z_0''' - \frac{(Z_0'')^2}{2Z_0'} - C_1 Z_0' + \frac{2}{y^2}(Z_0')^2 = 0, \qquad (28)$$

что

$$Z_0 = Ay^3 \quad \text{при} \quad y \to 0. \qquad (29)$$

Покажем, что $I_0 \equiv 0$ на всяком решении, удовлетворяющем уравнению (28) с граничным условием (29). Положим

$$\tilde\phi = Z_0' \qquad (30)$$

и перепишем уравнение (28) в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\tilde\phi)^2}{\phi}\right) + \frac{2}{y^2}\,\frac{\partial\tilde\phi^2}{\partial y} - 2C_1\frac{\partial\tilde\phi}{\partial y} = 0. \qquad (31)$$

Используя тождество

$$\int_y^\infty \frac{dy_1}{y_1^3}e^{-\sqrt{2C_1}y} = \frac{e^{-\sqrt{2C_1}y}}{2y^2} - \sqrt{2C_1}\frac{e^{-\sqrt{2C_1}y}}{2y} + \\ + C_1\int_y^\infty \frac{dy_1}{y_1}\, e^{-\sqrt{2C_1}y}, \qquad (32)$$

приведем выражение (27) для функционала I_0 к виду

$$I_0 = -6A + 2\sqrt{2C_1}\int_0^\infty \frac{dy}{y^2}\tilde\phi^2 e^{-\sqrt{2C_1}y} - \\ - \int_0^\infty \tilde\phi^2 d\left(\frac{e^{-\sqrt{2C_1}y}}{y^2}\right). \qquad (33)$$

Интегрируя по частям последний член в уравнении (33) и используя уравнение (31), получим

$$I_0 = C_1\int_0^\infty dy\; e^{-\sqrt{2C_1}y}\tilde\phi' + \\ + \sqrt{2C_1}\int_0^\infty dy\; e^{-\sqrt{2C_1}y}\left(2\frac{\tilde\phi^2}{y^2} - \frac{1}{2}\,\frac{(\tilde\phi')^2}{\tilde\phi}\right). \qquad (34)$$

Подынтегральное выражение в последнем члене формулы (34) выражается через производные от функции $\tilde\phi$ с помощью уравнения (28). Используя его, получим

$$I_0 = \int_0^\infty dy\; e^{-\sqrt{2C_1}y} \times \\ \times\left(C_1\tilde\phi' + C_1\sqrt{2C_1}\tilde\phi - \sqrt{2C_1}\tilde\phi''\right) = 0. \qquad (35)$$

5. ФУНКЦИОНАЛ I С УЧЕТОМ ЧЛЕНОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Для получения функционала I_1 необходимо удержать в выражении (26) для функционала I члены, малые по параметру C_1^{-2}. Представим для этого функцию Z в виде

$$Z = Z_0 + Z_1, \qquad (36)$$

где Z_0 — решение уравнения (28), а поправка первого порядка Z_1 удовлетворяет уравнению

$$Z_1''' + \frac{(Z_0'')^2}{2(Z_0')^2}Z_1' - \frac{Z_0''Z_1''}{Z_0'} - C_1 Z_1' + \frac{4}{y^2}\;Z_0'Z_1' = \\ = \frac{Z_0^2}{8Z_0'} - \frac{y^2 Z_0'}{8}. \qquad (37)$$

Учитывая формулы (27), (35), приведем выражение (26) для функционала I к виду

$$I = I_0 + I_1,$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dy}{y^2}\, e^{-\sqrt{2C_1}y}\left\{2Z_0'Z_1'\left(\frac{2}{y}+3\sqrt{2C_1}\right)+(Z_0')^2\times\right.$$
$$\left.\times\left(-\frac{1}{8(2C_1)^{3/2}}-\frac{y}{16C_1}+\frac{y^2}{12\sqrt{2C_1}}+\frac{y^3}{8}\right)\right\}. \quad (38)$$

Перейдем к новым переменным:

$$y=\frac{x}{\sqrt{2C_1}},\quad Z_0(y)=\tilde Z_0(x)/\sqrt{2C_1},\quad Z_1=\tilde Z_1(x)/(2C_1)^{5/2} \quad (39)$$

и положим

$$\phi(x)=\frac{\partial \tilde Z_0(x)}{\partial x}=\tilde Z_0'. \quad (40)$$

Функции $\phi(x)$ и $\tilde Z_1(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\phi''-\frac12\,\frac{(\phi')^2}{\phi}-\frac12\phi+\frac{2}{x^2}\phi^2=0,$$
$$\tilde Z_1'''+\frac12\,\frac{(\phi')^2}{\phi^2}\tilde Z_1'-\frac{\phi'\tilde Z_1''}{\phi}-\frac12\tilde Z_1'+\frac{4}{x^2}\phi\tilde Z_1'= \quad (41)$$
$$=\frac{\tilde Z_0^2}{8\phi}-\frac{x^2\phi}{8}.$$

В новых переменных функционал I_1 (38) определяется выражением

$$I_1=\frac{1}{C_1}\int_0^\infty\frac{dx}{x^2}e^{-x}\left\{\tilde Z_0\tilde Z_1'\left(\frac{2}{x}+3\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(\tilde Z_0')^2}{16}\left(-1-x+\frac{2x^2}{3}+x^3\right)\right\}. \quad (42)$$

При малых значениях x функция $\tilde Z_0$ равна

$$\tilde Z_0=\left(\frac{A}{C_1}\right)\frac{x^3}{2} \quad (43)$$

и, тем самым, зависит лишь от одного параметра

$$\alpha=\frac{A}{C_1}. \quad (44)$$

Функция $\tilde Z_1$ также зависит лишь от параметра α. В результате функционал C_1I_1 на функции $\tilde Z_0+\tilde Z_1$ есть функция только параметра α:

$$C_1I_1=F(\alpha). \quad (45)$$

На всех регулярных решениях уравнений (41) выполняется условие $I_1=0$. Исследуем решение уравнений (41) в различных областях по параметру α.

6. ФУНКЦИИ $\tilde Z_0, \tilde Z_1$ В ОКРЕСТНОСТИ $|\alpha-1/6|\ll 1$

Уравнения (41) можно существенно упростить, используя подстановку

$$\phi=U^2,\quad \tilde Z_1'=UG. \quad (46)$$

В результате система уравнений (41) приводится к виду

$$U''-\frac{U}{4}+\frac{1}{x^2}U^3=0, \quad (47)$$

$$G''+\left(-\frac14+\frac{3U^2}{x^2}\right)G=\frac{\tilde Z_0^2}{8U^3}-\frac{x^2U}{8}.$$

В области малых значений x функции $\tilde Z_1, U, G$ равны

$$\tilde Z_0=\frac{\alpha x^3}{2}\left[1+\frac{x^2}{20}(1-6\alpha)+\ldots\right],$$
$$U=\sqrt{\frac{3\alpha}{2}}x\left[1+\frac{x^2}{24}(1-6\alpha)+\right. \quad (48)$$
$$\left.+\frac{x^4}{480}(1-6\alpha)\left(\frac14-\frac{9\alpha}{2}\right)+\ldots\right],$$
$$G=-\sqrt{\frac{2\alpha}{3}}\,\frac{x^5}{120}\left[1-x^2\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{5}{168}\right)+\ldots\right].$$

Положим

$$\alpha=\frac16+\alpha_1,\quad |\alpha_1|\ll\frac16. \quad (49)$$

В области $|\alpha_1|\ll 1/6$ из уравнений (41) находим

$$U=\frac{x}{2}+\alpha_1U_1+\alpha_1^2U_2,$$
$$\tilde Z_0=\frac{x^3}{12}+ \quad (50)$$
$$+\int_0^x dx_1\left[\alpha_1x_1U_1(x_1)+\alpha_1^2\big(U_1^2(x_1)+x_1U_2(x_1)\big)\right]=$$
$$=\frac{x^3}{12}+\alpha_1\tilde Z_0^{(1)}+\alpha_1^2\tilde Z_0^{(2)},$$

$$G=G_0+\alpha_1G_1+\alpha_1^2G_2,$$

где

$$U_1=\frac{3\sqrt2}{2}\sin\left(\frac{x}{\sqrt2}\right),$$

$$G_0=-\frac{x^3}{9}+\frac43x-\frac{4\sqrt2}{3}\sin\left(\frac{x}{\sqrt2}\right).$$

Функции $U_2, G_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям

$$U_2'' + \frac{1}{2}U_2 = -\frac{3}{2x}U_1^2, \tag{51}$$

$$G_1'' + \frac{1}{2}G_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \right.$$
$$\left. + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left[-11 + \frac{x^2}{2} + \frac{12\sqrt{2}}{x}\ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\},$$

$$G_2'' + \frac{1}{2}G_2 = -\frac{3}{x}G_1U_1 - 3G_0\left(\frac{U_1^2}{x^2} + \frac{U_2}{x}\right) -$$
$$- \frac{x^2}{6}U_2 + \frac{1}{6}\tilde{Z}_0^{(2)} - \frac{\tilde{Z}_0^{(1)}U_1}{x} + \frac{x}{6}U_1^2 + \frac{1}{x^3}(\tilde{Z}_0^1)^2.$$

Прямое вычисление интеграла в формуле (42) с использованием формул (47)–(51) подтверждает сделанное выше утверждение, что функционал I_1 равен нулю на всех регулярных решениях уравнений (41).

При увеличении параметра α в области $\alpha > \alpha_c$ функция $U(x)$ имеет нули первого порядка. Решение U_c при $\alpha = \alpha_c$ экспоненциально убывает при $x \to \infty$ и является сепаратрисой. Численный расчет дает следующее значение для α_c:

$$\alpha_c = 3.1355. \tag{52}$$

Наша гипотеза состоит в том, что прямая линия

$$A = \alpha_c C_1 \tag{53}$$

является особой и вдоль нее также лежат точки, соответствующие решениям с нулевой энергией. Эта гипотеза будет проверена нами в дальнейшем.

7. ОБЛАСТЬ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ $\alpha \gg 1$

Найдем решение первого из уравнений (47) в области значений параметра $\alpha \gg 1$. Положим

$$\sqrt{\alpha}x = \xi, \quad U(x) = \tilde{U}(\xi). \tag{54}$$

В главном приближении по параметру α^{-1} первое из уравнений (47) принимает вид

$$\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi^2}\tilde{U}^3 = 0. \tag{55}$$

Уравнение (35) является частным случаем уравнения Эмдена–Фаулера [10–12]. При малых значениях ξ функция $\tilde{U}$ может быть разложена в ряд Тэйлора:

$$\tilde{U} = \sqrt{\frac{3}{2}}\xi\left[1 - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{9}{160}\xi^4 - \frac{57}{4480}\xi^6 + \ldots\right]. \tag{56}$$

В области больших значений ξ решение уравнения (55) ищем в виде

$$\tilde{U} = \xi^\nu\phi_1(\xi^\nu) + \phi_2(\xi^\nu) + \ldots, \tag{57}$$

где $\phi_{1,2}$ — ограниченные на вещественной оси функции, ν — свободный параметр. Подставляя выражение (57) для $\tilde{U}$ в формулу (55), получим уравнения для функции $\phi_{1,2}$:

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{1}{\nu^2}\phi_1^3 = 0, \tag{58}$$
$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{3}{\nu^2}\phi_1^2\phi_2 + (3\nu^2 - \nu)\frac{\partial\phi_1}{\partial y} = 0,$$

где

$$\tilde{y} = \xi^\nu. \tag{59}$$

Условие разрешимости второго из уравнений (58) определяет значение параметра ν:

$$\nu = 1/3. \tag{60}$$

Общее решение первого из уравнений (58) есть

$$\phi_1 = 2^{1/4}\sqrt{\frac{E}{3}}\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{3E}}{2^{1/4}}(\xi^{1/3} + \xi_0), i\right), \tag{61}$$

где E, ξ_0 — свободные параметры, значения которых определяются граничными условиями (решением (56) уравнения (55)). Функция $\mathrm{sn}(x,k)$ — эллиптическая функция Якоби [13]. Функция $\mathrm{sn}(x,i)$ представима в виде

$$\mathrm{sn}(x,i) = \frac{2\pi}{K}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{(-1)^{N+1}e^{-\pi(N-1/2)}}{1 + e^{-\pi(2N-1)}} \times$$
$$\times \sin\left((2N-1)\frac{\pi x}{2K}\right), \tag{62}$$

где K — полный эллиптический интеграл

$$K = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = 1.3110287. \tag{63}$$

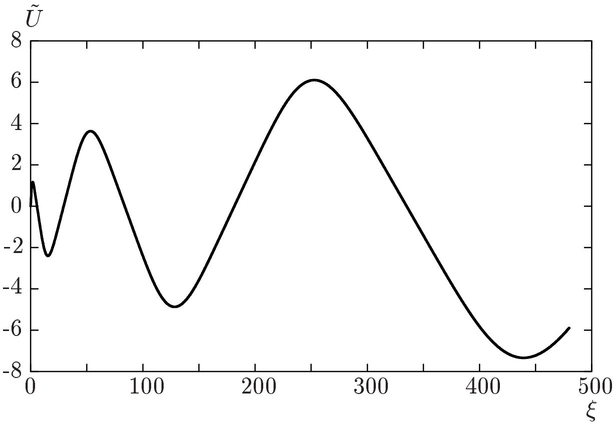
В формуле (63) F — гипергеометрическая функция. Величина K может быть также представлена в виде

$$K^2 = \pi^2\sum_{N=1}^{\infty}(2N-1)(-1)^{N+1}\frac{e^{-\pi(N-1/2)}}{1 + e^{-\pi(2N-1)}}, \tag{64}$$

следующем из формулы (62).

В рассматриваемом случае величины K, K' связаны соотношением

$$K' = (1 - i)K, \tag{65}$$



Зависимость функции $\tilde{U}$ от ξ

приводящим к формуле (64).

Численный расчет (положение нулей функции $\tilde{U}$) определяет значение параметров E, ξ_0:

$$E = 1.324, \quad \xi_0 = 1.314. \tag{66}$$

Функция $\tilde{U}(\xi)$ приведена на рисунке. Видно, что в области больших значений параметров C_1, α существует широкая область, в которой реализуется промежуточная асимптотика, определяемая формулами (54), (57), (61). Характерная черта промежуточной асимптотики — рост амплитуды колебаний функции $\tilde{U}$ как $\xi^{1/3}$ в области

$$1 < \xi < \alpha^{3/4}. \tag{67}$$

Ограничение сверху в формуле (67) связано с областью применимости уравнения (55).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Слабоколлапсирующие решения уравнения (1) образуют трехпараметрическое семейство решений $\{A, C, C_1\}$. Один из параметров (C) соответствует масштабному преобразованию и при исследовании решений может быть положен равным единице. На плоскости $\{A, C_1\}$ существует дискретный набор точек, соответствующих слабоколлапсирующим решениям с нулевой энергией. В работах [6, 7] было найдено бесконечное семейство таких решений, расположенное вблизи прямой $A = C_1/6$. Нами показано, что существует еще одна особая линия на плоскости $\{A, C_1\}$, определяемая уравнением

$$A = \alpha_c C_1, \quad \alpha_c \approx 3.1355. \tag{68}$$

Предположение состоит в том, что вблизи этой прямой расположено еще одно семейство слабоколлапсирующих решений с нулевой энергией. Исследование условия образования решений с нулевой энергией показывает, что существует бесконечный набор функционалов I_N, таких что $I_N \equiv 0$ на решениях соответствующего дифференциального уравнения, каждое из которых связано с уравнением (6). Дан рецепт построения функционалов I_N и связанных с ним дифференциальных уравнений.

Показано также, что при больших значениях параметров $\{C_1, \alpha = A/C_1\}$ существует область промежуточной асимптотики. Характерная черта этой области — рост амплитуды осцилляций $\tilde{U}(\xi)$ как $\xi^{1/3}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF (USA) (грант RP-2251), а также РФФИ и Министерством науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **62**, 1746 (1972).
2. В. Е. Захаров, В. С. Сынах, ЖЭТФ **68**, 940 (1975); V. E. Zakharov and V. Synakh, JETP **41**, 464 (1976).
3. Ю. Н. Овчинников, И. М. Сигал, ЖЭТФ **116**, 67 (1999).
4. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **11**, 303 (1970).
5. Г. М. Фрайман, ЖЭТФ **88**, 390 (1985).
6. Ю. Н. Овчинников, В. Л. Верещагин, ЖЭТФ **120**, 1509 (2001).
7. Ю. Н. Овчинников, В. Л. Верещагин, Письма в ЖЭТФ **74**, 76 (2001).
8. Ю. Н. Овчинников, Письма в ЖЭТФ **69**, 387 (1999).
9. C. Sulen and P.-L. Sulen, *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*, Springer-Verlag, New York (1999).
10. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматгиз, Москва (1961).
11. Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, Изд-во ИЛ, Москва (1954).
12. Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. II, Изд-во ИЛ, Москва (1954).
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1962).