

О ГЕНЕРАЦИИ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ В ИОНИЗУЮЩЕМСЯ ГАЗЕ И ЕЕ СВЯЗИ С ОСТАТОЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

*Н. Е. Андреев, М. Е. Вейсман, М. В. Чеготов**

*Институт теплофизики экстремальных состояний Объединенного института высоких температур
Российской академии наук
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 декабря 2002 г.

При помощи гидродинамических расчетов по модели работы [1], дополненной учетом ионизационного тока [2–5], а также расчетов на основе численного решения нестационарного одномерного уравнения Шредингера, исследована генерация гармоник низкого порядка при прохождении через газ короткого ионизирующего лазерного импульса с учетом условий пространственно-временного фазового синхронизма. Показано, что гидродинамическая модель с ионизационным током при описании спектра третьей гармоники находится в хорошем согласии с квантовомеханической моделью. В этом случае амплитуда третьей гармоники определяется напряженностью лазерного поля в момент максимальной скорости ионизации, что позволяет связать ее с величиной остаточной энергии электронов [5–8]. Это может служить основой для диагностики остаточной энергии по спектру третьей гармоники, что является важным для исследований по созданию рентгеновских лазеров на ионизационно-неравновесной плазме.

PACS: 42.65.Ky, 52.38.-r, 52.70.-m

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие активно исследуются процессы, происходящие при оптической ионизации газа мощным коротким лазерным импульсом (см., например, [1–10] и цитированную там литературу). Помимо фундаментального интереса, это связано с перспективами использования генерирующихся при этом гармоник лазерной частоты для получения источников коротковолнового излучения и генерации аттосекундных электромагнитных импульсов [11, 12], а также с возможностью использования информации о спектре гармоник для диагностики процессов в ионизируемом газе.

Гармоники воздействующего на газ мощного лазерного импульса могут генерироваться как за счет коллективных процессов — тормозного излучения электронов при их столкновении с любыми ионами образующейся в результате ионизации плазмы [13], — так и за счет индивидуального нелинейного отклика системы «ионизирующий электрон + родительский ион» на лазерное поле. Для эффектив-

ной генерации гармоник по первому механизму необходима весьма высокая плотность вещества, близкая к твердотельной [14], при этом эффективность тормозного механизма может быть увеличена за счет предварительного возбуждения ионизируемого лазерным импульсом газа [15]. В настоящей работе рассматривается генерация гармоник низкого порядка в поле фемтосекундного лазерного импульса при сравнительно небольшой плотности ионизируемого газа в пренебрежении тормозным механизмом генерации гармоник.

К настоящему времени можно считать установленной точку зрения, согласно которой генерация гармоник высокого порядка, проявляющихся в спектре поперечного поля в виде «плато» [10], происходит при излучательной рекомбинации образующегося в результате ионизации электрона при его повторном движении в поле родительского иона. Для описания этого процесса используются как чисто квантовомеханические [10, 16], так и полуклассические методы [17]. К настоящему времени отсутствует общепринятая точка зрения на механизмы генерации гармоник низкого порядка, суммарная энергия которых значительно превышает энергию гармоник

*E-mail: chegotov@ihed.ras.ru

высокого порядка в области «плато». Есть предположения, что генерация гармоник низкого порядка обусловлена связанно-связанными переходами электронов между уровнями энергии атома [18]. Кроме того, существует простая гидродинамическая модель, предложенная в работе [1], в которой рассматривается генерация гармоник вследствие того, что при туннельной ионизации концентрация электронов возрастает дважды за лазерный период в моменты времени, соответствующие максимальной напряженности лазерного поля. Эта модель очень привлекательна в силу своей простоты, позволяющей самосогласованно исследовать генерацию гармоник с учетом распространения лазерного импульса на значительные расстояния. Однако до последнего времени оставался неясным вопрос, насколько адекватно феноменологическая модель работы [1] может описывать реальную физическую ситуацию.

Для прояснения этого вопроса в разд. 3 настоящей работы проведено исследование генерации гармоник с использованием как гидродинамической, так и квантовомеханической моделей (описанных в разд. 2). Кроме того, исследовано поведение амплитуд гармоник в зависимости от количества связанных состояний в потенциальной яме. В отличие от работы [18], где исследован спектр второй производной по времени дипольного момента атома в поле заданного лазерного импульса, в настоящей работе исследуется спектр распространяющегося в ионизирующемся газе генерируемого излучения с учетом условий фазового пространственно-временного синхронизма. Последнее естественным образом учитывается при самосогласованном решении уравнения Шредингера и уравнений Максвелла. Показано, что третья гармоника несущей частоты лазерного излучения хорошо описывается гидродинамической моделью работы [1], дополненной учетом ионизационного тока, обеспечивающего выполнение законов сохранения энергии и импульса лазерного поля при ионизации газа [2–5]. Это значит, что ее амплитуда целиком определяется параметрами ионизационного фронта и напряженностью лазерного поля в области ионизационного фронта. В этом случае можно связать амплитуду третьей гармоники с величиной остаточной энергии электронов. Последняя есть энергия, необратимо перешедшая от лазерного поля к электронам при их неадиабатическом взаимодействии с полем в момент ионизации [6]. Величина остаточной энергии определяет эффективность генерации когерентного рентгеновского излучения в схемах с рекомбинационной накачкой [8]. Поэтому принципиальная возможность диагностики остаточ-

ной энергии по спектру третьей гармоники важна для построения рентгеновских лазеров с активной средой, образующейся при ионизации газа интенсивным оптическим лазерным импульсом. Заметим, что трехмерное распространение излучения третьей гармоники в нелинейном веществе изучалось, в частности, в работе [19].

Модель, связывающая спектр третьей гармоники с величиной остаточной энергии, построена в разд. 4. Поскольку процесс получения остаточной энергии образовавшимся при ионизации газа электроном, так же как и генерация гармоник, является, строго говоря, квантовомеханическим процессом, представляет интерес приведенное в разд. 4 сравнение применяемых при расчете остаточной энергии гидродинамических формул [6] с квантовомеханическим расчетом остаточной энергии.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В наиболее общей форме в рамках классической электродинамики генерация гармоник лазерного излучения в ионизируемом газе может быть описана при помощи уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \quad (1)$$

и соответствующих уравнений для дипольного момента электронов в единице объема газа,

$$\mathcal{P} = -e \sum_j \langle \mathbf{r}_j \rangle$$

(сумма берется по всем электронам в этом объеме, а угловые скобки означают усреднение по волновой функции этих электронов, $\langle \hat{f} \rangle = \langle \Psi | \hat{f} | \Psi \rangle$ для оператора \hat{f} ; e — модуль заряда электрона; вкладом движений ионов пренебрегается). В приближении среды, состоящей из невзаимодействующих одноэлектронных атомов, имеем

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = -en_{at}(\mathbf{r}, t) \int \mathbf{r}_a |\Psi(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_a)|^2 d\mathbf{r}_a. \quad (2)$$

Здесь n_{at} — суммарная концентрация атомов и ионов, равная начальной концентрации газа (далее она считается не зависящей от времени), \mathbf{r}_a — внутриатомные координаты с центром в соответствующем атомном ядре, \mathbf{r} — радиус-вектор атомного ядра, Ψ — одноэлектронная волновая функция, подчиняющаяся уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + [U(\mathbf{r}_a) + \widehat{V}_f(\mathbf{r}_a, t)] \Psi, \quad (3)$$

где дифференцирование по пространству проводится по внутриатомным координатам, $U(\mathbf{r}_a)$ — атомный потенциал, $\widehat{V}_f(\mathbf{r}_a, t)$ — оператор взаимодействия электронов с полем.

Из формул (1) и (2) получаем следующее волновое уравнение для безразмерного высокочастотного поля $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m\omega_0 c$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{2\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \Delta_{\perp} \right) \mathbf{a} = N\mathbf{R}, \quad (4)$$

$$\mathbf{R} = -a_{a.u.} \frac{\partial^2 \langle \mathbf{r}_a \rangle}{\partial t_a^2}. \quad (5)$$

Здесь $\xi = k_0(x - ct)$ и $\eta = k_0x$ — связанная с лазерным импульсом безразмерная система координат (лазерный импульс распространяется вдоль оси x),

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

ω_0 и $k_0 = \omega_0/c$ — частота и волновой вектор лазерного излучения в вакууме, $N \equiv n_{at}/n_c$,

$$n_c = \frac{m\omega_0^2}{4\pi e^2}$$

— критическая концентрация,

$$a_{a.u.} \equiv \frac{eE_{a.u.}}{m\omega_0 c}, \quad E_{a.u.} = \frac{m^2 e^5}{\hbar^4}$$

— атомная напряженность поля, источник \mathbf{R} предполагается выраженным в атомных единицах $e = \hbar = m = 1, c = 137$, при этом t_a — время, выраженное в атомных единицах,

$$\frac{\partial}{\partial t_a} = -\frac{\omega_0}{\omega_{a.u.}} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \omega_{a.u.} = \frac{me^4}{\hbar^3}$$

— атомная частота. Воспользовавшись тем, что, как следует из (3),

$$\frac{\partial \langle \mathbf{r}_a \rangle}{\partial t_a} = \langle \widehat{\mathbf{p}} \rangle + i \langle [\widehat{V}_f, \mathbf{r}_a] \rangle,$$

где $\widehat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ — оператор канонического импульса, и учитывая явный вид оператора \widehat{V}_f в калибровке длины, получаем в дипольном приближении (пренебрегая зависимостью поля от координаты \mathbf{r}_a), что

$$\mathbf{R} = -a_{a.u.} \frac{\partial}{\partial t_a} \langle \widehat{\mathbf{p}} \rangle. \quad (6)$$

Выражение (6) с помощью уравнения (3) легко привести к виду (в рассматриваемом дипольном приближении)

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + a_{a.u.} \langle \nabla U(\mathbf{r}_a) \rangle. \quad (7)$$

Таким образом, в соответствии с (5), (6) и (7), для вычисления источника \mathbf{R} необходимо определить любую из трех величин: $\langle \mathbf{r}_a \rangle$, $\langle \widehat{\mathbf{p}} \rangle$, $\langle \nabla U(\mathbf{r}_a) \rangle$. Наиболее последовательно (при наименьшем числе допущений) эта задача может быть реализована путем численного решения уравнения Шредингера (3). В последнее время разработаны различные методы такого решения [20–23], однако эта задача остается очень трудоемкой, тем более, что интегрирование волнового уравнения (4) требует ее многократного решения. По этой причине большое значение приобрели приближенные методы вычисления величины R , такие как численное решение одномерного уравнения Шредингера для модельного одномерного атома [24, 25], а также приближенное аналитическое вычисление величин $\langle \mathbf{r}_a \rangle$ [16] и $\partial \langle \widehat{\mathbf{p}} \rangle / \partial t_a$ [10] при различных допущениях. Главными среди них являются, во-первых, допущение о слабом влиянии связывающего потенциала на часть волновой функции, соответствующей непрерывному спектру, во-вторых, допущение о пренебрежении всеми связанными состояниями, кроме основного, и, в третьих, допущение о слабом влиянии истощения основного уровня и его штарковского уширения. Отметим, что допущение о незначительной роли связывающего потенциала в области непрерывного спектра приводит к тому, что соответствующие аналитические теории, строго говоря, становятся плохо применимыми для рассматриваемых в представляемой работе гармоник низкого порядка с номерами, меньшими $U_1/\hbar\omega_0$ [16], где U_1 — энергия основного состояния рассматриваемого связывающего потенциала. О другой причине возможной неточности аналитических квантовомеханических теорий применительно к расчету третьей гармоники, связанной с третьим из вышеуказанных допущений, говорится в работе [26].

Трудности, связанные с вычислением волновой функции образующегося при ионизации электрона и с последующим вычислением источника \mathbf{R} в любой из форм (5)–(7), представляются неизбежными в случае определения гармоник высокого порядка, проявляющихся в спектре поперечного поля в виде «плато» [10], генерация которых происходит при излучательной рекомбинации электрона при его повторном движении в поле родительского иона [10, 16]. В то же время ниже будет показано, что низкочастотную часть спектра поперечного поля, включающую третью гармонику, в которой сосредоточена большая часть энергии поля (за вычетом энергии несущей), можно описать значительно проще. Для этого в рассматриваемом ниже режиме туннельной ионизации [27], реализующемся в случае

достаточно коротких и интенсивных лазерных импульсов [28], достаточно знать лишь «мгновенную» частоту ионизации, например, в форме, приведенной в работе [29]. Идея такого описания была впервые выдвинута в работе [1]. Ниже показывается, что феноменологическая модель, представленная в работе [1], может хорошо описывать низкочастотную часть спектра, если наряду с учитываемым в ней током свободных электронов $\mathbf{J} = -en_e\mathbf{V}$, где n_e — концентрация, а \mathbf{V} — гидродинамическая скорость электронов, учесть также «ионизационный» ток, связанный с потерями энергии и импульса лазерного излучения на ионизацию газа [2–4]:

$$\mathbf{J}_{ion} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|^2} \sum_{z=1}^{z_n} W_z U_z n_{z-1}. \quad (8)$$

Здесь U_z — потенциал ионизации ионов с кратностью ионизации $z-1$, n_{z-1} — их концентрация, W_z — частота их ионизации, z_n — заряд ядра. При этом производная от поляризуемости определяется как сумма токов $\mathbf{J} + \mathbf{J}_{ion}$. В результате, в соответствии с уравнениями (1) и определением (4), источник \mathbf{R} вычисляется как

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{cn_{at}e} \frac{\partial(\mathbf{J} + \mathbf{J}_{ion})}{\partial\xi} \quad (9)$$

(в безразмерных координатах). Таким образом, в рамках данной модели, которую далее называем «гидродинамической», для определения \mathbf{R} достаточно найти концентрации n_{z-1} , частоты ионизации W_z и гидродинамическую скорость \mathbf{V} . Концентрация электронов в предположении, что она не отличается от квазинейтрального значения, определяется как

$$n_e = \sum_{z=1}^{z_n} z n_z.$$

В приближении слабого релятивизма величина \mathbf{V} находится из уравнения [6, 7, 30]

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{e}{m}\mathbf{E} - \frac{\mathbf{V}S}{n_e}, \quad (10)$$

где $S = n_{at}\partial Z/\partial t$,

$$Z = \frac{\sum_{z=1}^{z_n} z n_z}{n_{at}} \quad (11)$$

— средний заряд ионов, S — скорость ионизации,

для которой в приближении последовательной ионизации электронных уровней справедливы уравнения

$$\begin{aligned} S &= \sum_{z=1}^{z_n} S^{\{z\}}, \quad S^{\{z\}} = W_z n_{z-1}, \\ \frac{\partial n_z}{\partial t} &= S^{\{z\}} - S^{\{z+1\}}, \quad z = 1, \dots, z_n - 1, \\ \frac{\partial n_{z_n}}{\partial t} &= S^{\{z_n\}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из уравнений (8)–(11) в приближении слабого релятивизма и медленно (за лазерный период) меняющейся амплитуды несущей получаем следующее окончательное выражение для \mathbf{R} в гидродинамической модели:

$$\mathbf{R} = Z\mathbf{a} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial}{\partial\xi} \left\{ \mathbf{a} \sum_{z=1}^{z_n} \frac{U_z}{U_H} \frac{n_{z-1}}{n_c} \frac{W_z}{|\mathbf{a}|^2 \omega_0} \right\}, \quad (13)$$

где $\alpha \equiv e^2/\hbar c$, U_H — потенциал ионизации водорода. Второй член в правой части (13) связан с учетом ионизационного тока. Выражение (13) дополняется формулой для частот ионизации W_z . В рассматриваемом режиме туннельной ионизации, когда параметр Келдыша [27]

$$\gamma = \frac{\omega_0 \sqrt{2mU_z}}{e|\mathbf{E}|} \ll 1,$$

возможно использовать адиабатическое приближение, подставляя в формулу для частоты ионизации в постоянном поле модуль напряженности мгновенного поля $|\mathbf{E}|$ [31]. При этом можно представить W_z в виде

$$\begin{aligned} W_z &= C_z \omega_{a.u.} \left(\frac{a_{a.u.}}{|\mathbf{a}|} \right)^{\beta_z} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2}{3} \frac{a_{a.u.}}{|\mathbf{a}|} \left(\frac{U_z}{U_H} \right)^{3/2} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где C_z и β_z — постоянные, зависящие от формы атомного потенциала. Уравнения (11)–(14) полностью определяют задачу нахождения \mathbf{R} в гидродинамической модели.

3. СРАВНЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И КВАНТОВОГО РАСЧЕТОВ АМПЛИТУД ГАРМОНИК

Рассмотрим вопрос о применимости сформулированной выше гидродинамической модели, сравнивая результаты решения волнового уравнения с «гидродинамическим» источником (13) и с квантовомеханическим источником. Как говорилось выше, аналитические квантовомеханические теории для расчета

R могут быть недостаточно точны в низкочастотной области спектра. По этой причине расчеты с гидродинамическим источником (13) целесообразно, в первую очередь, сравнивать с численными квантово-механическими расчетами, для чего удобно использовать **R** в форме (7).

Считая, что поперечный размер σ_r лазерного импульса достаточно велик, а пройденное в ионизируемом газе расстояние x достаточно мало, $x < k_0 \sigma_r^2 / 2$, а также принимая во внимание узкую угловую направленность излучения гармоник [32], решаем волновое уравнение (4) в одномерной геометрии, пренебрегая поперечным лапласианом. При этом поляризацию лазерного импульса считаем линейной и направленной вдоль оси y , $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_y$. Уравнение Шредингера также решаем в одномерной геометрии для модельного одномерного одноэлектронного связывающего потенциала, при этом используем калибровку длины и дипольное приближение:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t_a} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_a^2} + \left(\frac{a}{a_{a.u.}} \right) y_a \Psi + U(y_a) \Psi. \quad (15)$$

Потенциал $U(y_a)$ считаем короткодействующим,

$$U(y_a) = -2u \exp\left(-\frac{y_a^2}{\sigma_y^2}\right), \quad (16)$$

где величины $\sigma_y \sim 1$ и $u \sim 1$ выбираются таким образом, чтобы основной уровень энергии совпадал с соответствующим атомным, с которого происходит ионизация. Для потенциала (16) константы β_1 и C_1 в формуле (14) равны, соответственно, $\beta_1 = 0$ и

$$C_1 = \sqrt{\frac{U_1}{U_H}} \left[\lim_{y_a \rightarrow \infty} \Psi_1(y_a) \exp\left\{|y_a| \sqrt{\frac{U_1}{U_H}}\right\} \right]^2, \quad (17)$$

где $\Psi_1(y_a) = \Psi(y_a, t = 0)$ — волновая функция связанного состояния. Помимо соображений простоты, такой выбор потенциала связан с тем, что для не слишком малых концентраций газа n_{at} размах колебаний электрона в поле лазерного излучения $2r_E = 2eE/m\omega_0^2$ может быть настолько велик, что влияние соседнего атомного остатка окажется таким же, как и родительского: для этого $2r_E$ должно превысить половину расстояния между соседними атомами $n_{at}^{-1/3}/2$, что достигается при

$$0.3 \frac{I(\xi_z)}{10^{14} \text{ Вт/см}^2} \left(\frac{\lambda_0}{1 \text{ мкм}} \right)^4 \left(\frac{n_{at}}{10^{18} \text{ см}^{-3}} \right)^{2/3} > 1,$$

где $I(\xi_z)$ — лазерная интенсивность в момент максимальной скорости ионизации. Таким образом, уже

при сравнительно небольших интенсивностях лазерного излучения и умеренных плотностях газа потенциал ионизируемого атома нельзя рассматривать как потенциал уединенного атома. В частности, это означает, что часть уровней энергии возбужденных состояний уединенного атома, сгущающихся к границе континуума состояний свободного электрона, переходит в непрерывный спектр и потенциальная яма атомного остатка содержит лишь конечное количество уровней энергии связанных состояний так же, как это имеет место для короткодействующего потенциала.

В дальнейшем с помощью потенциала (16) будет исследована зависимость спектра распространяющегося в ионизируемом газе излучения от количества связанных состояний в атомной потенциальной яме. Количество связанных состояний можно изменять с помощью изменения u и σ_y таким образом, что помимо связанного состояния с основным уровнем энергии в потенциальной яме оказываются два, три и т. д. уровней энергии. При этом константы σ_y и u будем выбирать таким образом, чтобы энергия основного состояния была постоянной и равной $U_1 = 24.6$ эВ, что соответствует потенциалу однократной ионизации гелия из основного состояния.

При выборе $\sigma_y = 1$ и $u = 0.807$ основное состояние с $U_1 = 24.6$ эВ оказывается единственным связанным состоянием в потенциальной яме. Для этого случая на рис. 1а представлены результаты вычислений безразмерной скорости ионизации

$$\frac{S}{n_{at}\omega_0} = \omega_0^{-1} \frac{\partial Z}{\partial t},$$

параметра Келдыша γ и среднего заряда ионов Z , определяемого в гидродинамических расчетах по формуле (11), а в квантовомеханических расчетах — по формуле

$$Z = 1 - \sum_n |\langle \Psi | n \rangle|^2, \quad (18)$$

где $|n\rangle$ — волновая функция n -го связанного состояния, на рис. 1б — результаты вычислений нормированного на максимум спектра поперечного электромагнитного поля $|\hat{a}(k)|^2$,

$$\hat{a}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \exp(-ik\xi) d\xi$$

— фурье-образ высокочастотного поля. На рис. 1а видно, что в рассматриваемом случае туннельной ионизации ($\gamma \approx 0.2$ в области максимальной скорости ионизации) уравнения (12), (14), (11) хорошо

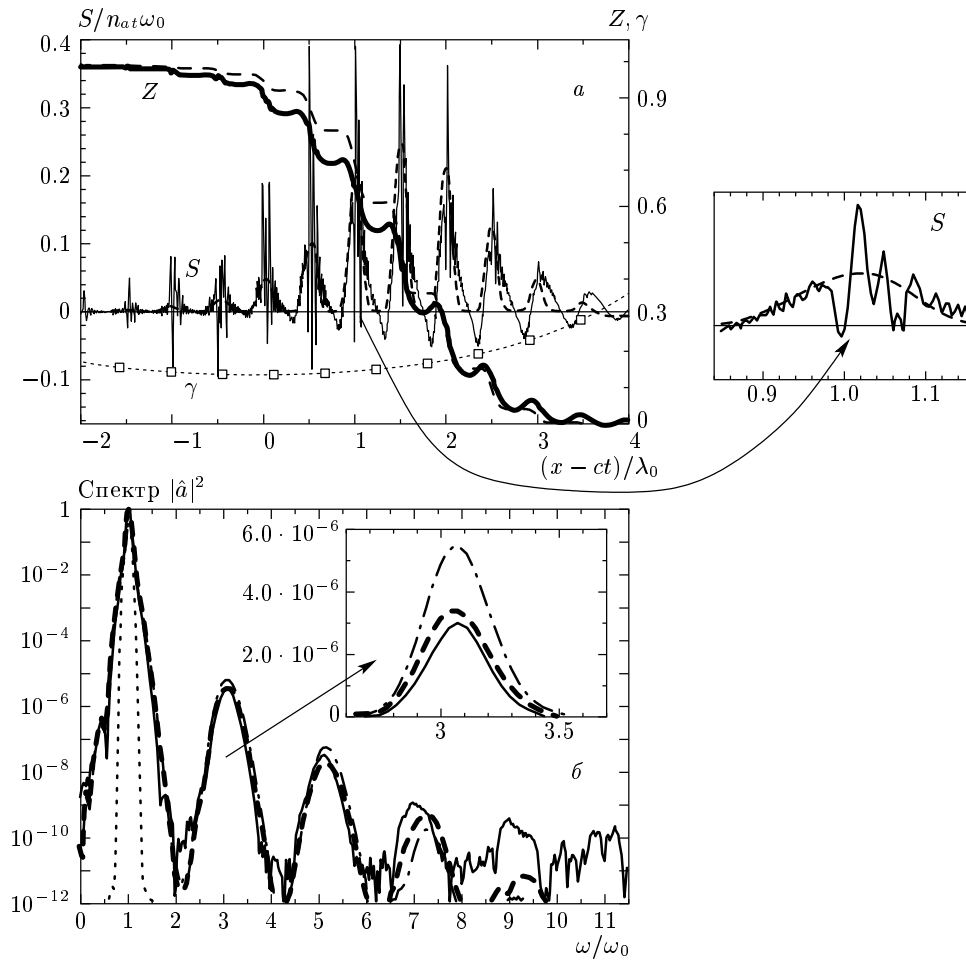


Рис. 1. *a* — безразмерная скорость ионизации $S(t)/n_{at}\omega_0$, средний заряд ионов Z (сплошные линии — из решения уравнения Шредингера (15), штриховые — гидродинамический расчет по формулам (11), (12), (14)), параметр Келдыша γ — пунктирная линия. *б* — спектр поперечного электромагнитного поля при прохождении лазерным импульсом слоя газа толщиной $x = 6L_{FWHM}$. Сплошная линия — результат расчета с «квантовомеханическим» источником (7), штриховая — расчет с «гидродинамическим» источником (13), штрих-пунктирная — гидродинамический расчет, но без ионизационного тока (второй член в (13) равен 0), пунктирная — начальный спектр лазерного импульса до входа в газ. Лазерный импульс имел интенсивность $I_{max} = 10^{16}$ Вт/см², гауссову огибающую с шириной на половине высоты $\tau_{FWHM} = L_{FWHM}/c = 13$ фс, длину волны $\lambda_0 = 0.8$ мкм; концентрация газа $n_{at}/n_c = 10^{-2}$, потенциал ионизации единственного уровня энергии $U_1 = 24.6$ эВ

описывают динамику изменения со временем среднего заряда ионов. В то же время на кривой зависимости скорости ионизации от связанной с импульсом координаты $(x - ct)/\lambda_0$, полученной из уравнения Шредингера (15), имеются дополнительные, по сравнению с расчетами по формулам (12), (14), пики. Их происхождение связано с процессами захвата образовавшихся при ионизации газа электронов на родительских ионах, проявляющихся в отрицательных значениях скорости ионизации S (см. рис. 1*a*), и, кроме того, с неадиабатическим откликом атомного диполя на быстроменяющееся электрическое по-

ле [33].

Из сравнения спектров гармоник (см. рис. 1*б*), полученных при помощи уравнений (4), (7), (15), с результатами гидродинамических расчетов по формулам (4), (11)–(14) как с учетом, так и без учета ионизационного тока (в последнем случае второй член в (13) полагался равным 0) следует, что источник (13) с ионизационным током хорошо описывает амплитуду третьей и пятой гармоник и удовлетворительно — амплитуду седьмой гармоники. При этом правильно описывается не только амплитуда, но и форма спектра третьей гармоники. Более высокие

гармоники, вычисленные по гидродинамической модели, имеют существенно заниженное значение амплитуды по сравнению с квантовомеханическими результатами. Это связано с тем, что основным механизмом их генерации являются не учитываемые в рамках гидродинамической модели процессы захвата электронов на родительских ионах [10, 16], проявляющиеся в упомянутых выше «дополнительных» пиках на кривой $S(\xi)$.

Далее σ_y и u меняем так, чтобы в потенциальной яме появлялись дополнительные уровни, а энергия основного состояния оставалась бы при этом неизменной, $U_1 = 24.6$ эВ. При $\sigma_y = 1.5$ и $u = 0.685$ появляется дополнительный уровень с энергией $U_2 = 4.85$ эВ; при $\sigma_y = 2.4$ и $u = 0.602$ — два дополнительных уровня с энергиями $U_2 = 10.4$ эВ и $U_3 = 1.5$ эВ; при $\sigma_y = 3.4$ и $u = 0.553$ — три дополнительных уровня с энергиями $U_2 = 14.54$ эВ, $U_3 = 6.63$ эВ и $U_4 = 1.35$ эВ. Спектры, соответствующие таким значениям σ_y и u , приведены на рис. 2. Константа C_1 в формуле (14), рассчитанная при помощи (17), равна $C_1 \approx 4, 8, 24, 130$ соответственно, для случаев *a*, *б*, *в*, *г*. Из рис. 2 следует, что увеличение количества связанных состояний в потенциальной яме приводит к значительному увеличению амплитуд пятой, седьмой и более высоких гармоник. При этом амплитуда третьей гармоники слабо зависит от количества связанных состояний в потенциальной яме и хорошо описывается гидродинамической моделью (с ионизационным током). Амплитуда пятой гармоники также хорошо описывается гидродинамической моделью в случае, когда отсутствуют возбужденные уровни энергии и переходы между ними (рис. 1, 2*a*). Однако при наличии возбужденных уровней энергии и переходов между ними амплитуды пятой, седьмой и девятой гармоник, рассчитанных квантовомеханически, оказываются значительно большими, чем это следует из гидродинамической модели. Отметим, что вывод о важности переходов между возбужденными уровнями энергии для генерации таких гармоник находится в согласии с результатами работы [18].

4. О СВЯЗИ АМПЛИТУДЫ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ С ОСТАТОЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

Из результатов предыдущего раздела (см. рис. 1, 2) следует, что амплитуда третьей гармоники основной частоты ω_0 хорошо описывается гидродинамической моделью. Следовательно, величина тре-

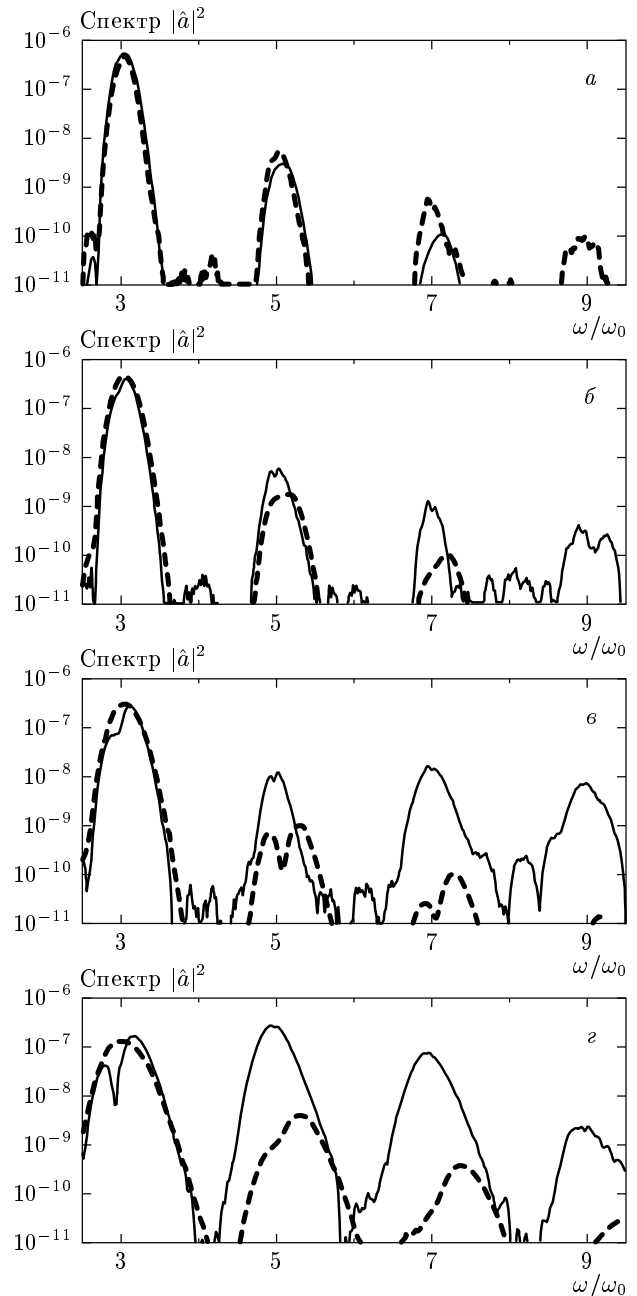


Рис. 2. Спектры третьей, пятой, седьмой и девятой гармоник для атомных потенциалов с различным числом уровней энергии; $U_1 = 24.6$ эВ. *a* — с единственным уровнем энергии U_1 ; *б* — с дополнительным уровнем энергии $U_2 = 4.85$ эВ; *в* — с двумя дополнительными уровнями энергии $U_2 = 10.4$ эВ, $U_3 = 1.5$ эВ; *г* — с тремя дополнительными уровнями энергии $U_2 = 14.54$ эВ, $U_3 = 6.63$ эВ, $U_4 = 1.35$ эВ. Сплошные линии — квантовомеханические расчеты, штриховые — гидродинамические расчеты. Приведены спектры после прохождения лазерным импульсом слоя газа $x = 2.2L_{FWHM}$; $\tau_{FWHM} = 25$ фс, остальные параметры такие же, как и на рис. 1

твей гармонике целиком определяется напряженностью лазерного поля в момент максимальной скорости ионизации. Но этой же величиной определяется и остаточная энергия электронов [6]. Это позволяет выразить величину остаточной энергии через величину амплитуды третьей гармоники, что может быть использовано для диагностики остаточной энергии по спектру третьей гармоники.

С этой целью, проведя фурье-преобразование по переменной ξ уравнений (12) и (4) с источником (13), получим следующее уравнение для фурье-образа $\hat{a}(k)$ высокочастотного поля, записанного в пренебрежении второй производной по η в уравнении (4):

$$2 \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{a}(k) = N \frac{1}{2\pi} \sum_{z=1}^{z_n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}(k-k') \times \left[\frac{\hat{S}^{(z)}(k')}{kk'} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{U_z}{U_H} \hat{\mathcal{G}}^{(z)}(k') \right] dk', \quad k \neq 0, \quad (19)$$

где $\hat{S}^{(z)}(k)$ — фурье-образ безразмерной скорости ионизации

$$S^{(z)} \equiv \frac{S^{(z)}}{n_{at}\omega_0},$$

$\hat{\mathcal{G}}^{(z)}$ — фурье-образ величины $S^{(z)}/|a|^2$.

Для дальнейших преобразований уравнения (19) будем предполагать, что безразмерное расстояние $\eta = k_0 x$, пройденное лазерным импульсом в газе, удовлетворяет неравенству $\eta \ll 6(n_{at}/n_c)^{-1}$, что позволяет пренебречь эффектами насыщения третьей гармоники, связанными с разностью групповых скоростей первой и третьей гармоник, а также с истощением лазерного импульса при ионизации. В этом случае и с учетом малости интенсивности высших гармоник по сравнению с основной из (19) следует линейная зависимость амплитуды третьей гармоники $\hat{a}(3)$ от η :

$$\hat{a}(3) = \frac{N\eta}{6} \frac{1}{2\pi} \sum_{z=1}^{z_n} \int_{2-\Delta_1}^{2+\Delta_1} \hat{a}(3-k') \times \left[\frac{\hat{S}^{(z)}(k')}{k'} - \frac{3\alpha^2}{2} \frac{U_z}{U_H} \hat{\mathcal{G}}^{(z)}(k') \right] dk', \quad (20)$$

где Δ_1 — характерная ширина спектра первой гармоники, определяющаяся длительностью лазерного импульса. Заметим, что член, пропорциональный α^2 , возник из-за учета ионизационного тока J_{ion} .

Формула (20) позволяет выразить амплитуду третьей гармоники лазерного поля через спектр скорости ионизации. Через эту же характеристику, как

будет показано ниже, можно выразить и остаточную энергию электронов Q_∞ . В рамках гидродинамической модели последнюю можно представить как $Q_\infty = Q_{fin}(\xi \rightarrow -\infty)$, где $Q_{fin}(\xi)$ — часть полной энергии, определяющая долю энергии, необратимо перешедшую от лазерного поля к рождающимся при ионизации газа электронам [6]. В случае, когда ионизация происходит в туннельном режиме ($\gamma \ll 1$) и при нерелятивистских интенсивностях, $Q_{fin}(\xi)$, в соответствии с [6, 7], можно представить в виде

$$Q_{fin}(\xi) = \frac{\sum_{z=1}^{z_n} \chi^{(z)}(\xi) Q_{fin}^{(z)}(\xi)}{\sum_{z=1}^{z_n} \chi^{(z)}(\xi)}, \quad (21)$$

$$Q_{fin}^{(z)}(\xi) = \frac{1}{\chi^{(z)}(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} S^{(z)}(\xi^*) Q_\epsilon(\xi, \xi^*) d\xi^*,$$

где $Q_{fin}^{(z)}$ — составляющая энергии группы электронов, приведенная к безразмерному виду с помощью коэффициента mc^2 [7], родившихся при z -кратной ионизации, $\chi^{(z)} = n_z/n_{at}$ — степень z -кратной ионизации,

$$Q_\epsilon(\xi, \xi^*) = \frac{1}{2} \left[\int_{\xi^*}^{\xi} a(\xi') d\xi' \right]^2$$

— безразмерная энергия, получаемая к моменту ξ электроном, родившимся в момент ξ^* . Отметим, что, как и в случае определения амплитуды третьей гармоники, гидродинамический расчет доли энергии $Q_{fin}(\xi)$ находится в хорошем согласии с квантовомеханическим расчетом полной энергии электрона по формуле

$$Q(\xi) = \left\langle \Psi(\xi, y_a) \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y_a^2} \right| \Psi(\xi, y_a) \right\rangle$$

(см. рис. 3). На рис. 3 видно, что везде, за исключением начального этапа, когда происходит ионизация, кривая $Q_{fin}(\xi)$ является огибающей снизу для кривой $Q(\xi)$.

Для установления связи Q_∞ с $\hat{a}(3)$ перепишем выражение (21) для

$$Q_\infty^{(z)} = Q_{fin}^{(z)}(\xi \rightarrow -\infty)$$

в виде

$$Q_\infty^{(z)} = \left(2\pi \chi_\infty^{(z)} \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{Q}_\epsilon(-k') \hat{S}^{(z)}(k') dk', \quad (22)$$

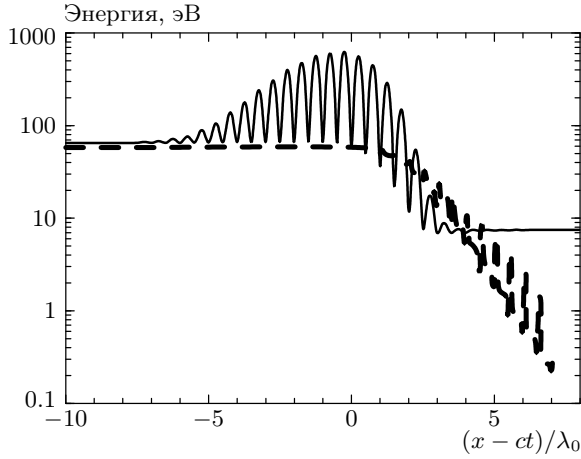


Рис. 3. Квантовомеханический расчет энергии электрона (сплошная линия) и гидродинамический расчет части энергии, перешедшей от поля к электрону (штриховая линия) для параметров, указанных на рис. 1

где $\widehat{Q}_e(k)$ — фурье-образ энергии $Q_e(-\infty, \xi^*)$, $\varkappa_\infty^{(z)} = \varkappa^{(z)}(\xi \rightarrow -\infty)$. Для аналитического определения связи Q_∞ и $\widehat{a}(3)$ выражения (22) и (20) необходимо упростить, для чего рассмотрим приближение заданного лазерного импульса:

$$a(\xi) = a_L(\xi) \cos \xi, \\ Q_e(\xi, \xi^*) \approx \frac{1}{2} a_L^2(\xi^*) \sin^2 \xi^* + \frac{1}{2} a_L^2(\xi) \sin^2 \xi - \\ - a_L(\xi^*) a_L(\xi) \sin \xi^* \sin \xi, \quad (23)$$

где $a_L(\xi)$ — огибающая. Для $a(\xi)$ и $Q_e(\xi)$ в форме (23) в предположении выполнения неравенств

$$k_0 L_{FWHM} \gg k_0 L_{S^{(z)}} \gg 1$$

(где $L_{S^{(z)}}$ — характерная ширина ионизационного фронта при образовании z -кратно ионизованных ионов, L_{FWHM} — полная ширина лазерного импульса на половине его максимальной интенсивности), можно в каждом из слагаемых суммы по z в уравнениях (20) и (22) подставить в качестве фурье-образов $\widehat{a}(k)$ и $\widehat{Q}_e(k)$ следующие аппроксимации:

$$\widehat{a}(k) = a_L(\xi_z) 2\pi \left[\frac{\delta(k-1)}{2} + \frac{\delta(k+1)}{2} \right],$$

$$\widehat{Q}_e(k) = (1/4) a_L^2(\xi_z) 2\pi \left[\delta(k) - \frac{\delta(k-2)}{2} - \frac{\delta(k+2)}{2} \right],$$

где ξ_z — момент максимума z -го ионизационного

фронта. В результате из (20) и (22) получаем следующие алгебраические уравнения для $\widehat{a}(3)$ и Q_∞ :

$$Q_\infty = \frac{\sum_{z=1}^{z_n} \varkappa_\infty^{(z)} Q_\infty^{(z)}}{\sum_{z=1}^{z_n} \varkappa_\infty^{(z)}}, \quad (24) \\ Q_\infty^{(z)} \approx \frac{1}{4} a_L^2(\xi_z) \left[1 - \mu_{2l}^{(z)} \right],$$

$$\widehat{a}(3) \approx \frac{N\eta}{24} \sum_{z=1}^{z_n} a_L(\xi_z) \varkappa_\infty^{(z)} \times \\ \times \left[\mu_{2l}^{(z)} + \frac{\mu_{4l}^{(z)}}{2} - \frac{6\alpha^2}{a_L^2(\xi_z)} \frac{U_z}{U_H} (2\mu_{2l}^{(z)} - 1) \right], \quad (25)$$

где

$$\mu_{2l}^{(z)} \equiv \frac{\widehat{S}^{(z)}(2l)}{\widehat{S}^{(z)}(0)}, \quad l = 1, 2,$$

$a_L(\xi_z)$ — величина огибающей при $\xi = \xi_z$. При выводе (25) было использовано равенство

$$a_L^2(\xi_z) \left[\widehat{\mathfrak{S}}^{(z)}(2) + \widehat{\mathfrak{S}}^{(z)}(4) \right] = 2 \left[2\widehat{S}^{(z)}(2) - \widehat{S}^{(z)}(0) \right],$$

справедливое в приближении медленно меняющихся амплитуд. Кроме того, было учтено, что

$$\widehat{S}^{(z)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S^{(z)}(\xi) d\xi = \varkappa_\infty^{(z)}.$$

Чтобы вычислить $\mu_{2l}^{(z)}$ для реальных многоэлектронных атомов, используем формулу для частот ионизации W_z из работы [29], согласно которой константы в формуле (14) равны

$$\beta_z = 2n_{*,z} - 1, \quad C_z = \left(\frac{4e^1 z^3}{n_{*,z}^4} \right)^{\beta_z} \frac{e^1 z^2}{2\pi n_{*,z}^4},$$

$$e^1 \equiv \exp(1)$$

($n_{*,z} = z\sqrt{U_H/U_z}$ — главное квантовое число). Рассматривая далее приближение медленно меняющихся амплитуд и учитывая, что максимальный вклад в гармоники скорости ионизации дает окрестность точки ее максимума ξ_z , получаем следующее выражение для $\mu_{2l}^{(z)}$:

$$\mu_{2l}^{(z)} = \frac{\mathfrak{J}_{2l}^{(z)}}{\mathfrak{J}_0^{(z)}}, \quad \mathfrak{J}_{2l}^{(z)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2l\xi)}{(\cos^2 \xi)^{n_{*,z}-1/2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2}{\varepsilon_z (\cos^2 \xi)^{1/2}} \right\} d\xi, \quad (26)$$

где

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z(a_L(\xi_z)) = 3 \frac{a_L(\xi_z)}{a_{a.u.}} \left(\frac{n_{*,z}}{z} \right)^3$$

— малая в области ионизации ($\varepsilon_z \lesssim 1/3$) величина.

Используя малость ε_z , можно получить из (26) следующее асимптотическое разложение для $\mu_2^{(z)}$, записанное ниже с точностью до членов порядка ε_z^4 :

$$\begin{aligned} \mu_2^{(z)} = & 1 - \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 \left(-n_{*,z} + \frac{9}{4} \right) + \\ & + \varepsilon_z^3 \left(-n_{*,z}^2 + \frac{21}{4} n_{*,z} - \frac{207}{32} \right) + \\ & + \varepsilon_z^4 \left(-n_{*,z}^3 + 9n_{*,z}^2 - \frac{201}{8} n_{*,z} + \frac{1419}{64} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогичный асимптотический ряд можно написать и для $\mu_4^{(z)}$, однако он обладает худшей сходимостью, чем ряд (27). В то же время общее выражение (26) неудобно для вычислений. Поэтому целесообразно использовать следующее приближенное выражение для $\mu_4^{(z)}$, основанное на данных численных расчетов:

$$\mu_4^{(z)} \approx 0.4 \mu_2^{(z)}. \quad (28)$$

Согласно (25) и (28), в туннельном режиме $\mu_4^{(z)}$ вносит небольшую добавку при вычислении $\hat{a}(3)$ по сравнению с $\mu_2^{(z)}$, поэтому возможная неточность в определении $\mu_4^{(z)}$ по формуле (28) незначительна.

Уравнения (24)–(28) позволяют, вообще говоря, выразить Q_∞ через $\hat{a}(3)$ только в случае однократной ионизации газа. В случае, когда происходит многократная ионизация, для определения остаточной энергии недостаточно информации об амплитуде третьей гармоники, необходимо также знать и информацию о ее спектре, для чего требуется рассмотрение исходной системы интегральных уравнений (21), (20). Однако в этом случае система (24)–(28) позволяет, в принципе, определить величину остаточной энергии $Q_\infty^{(z_{max})}$ группы электронов, рождающихся при образовании ионов максимальной кратности ионизации. Для этого необходимо, чтобы ионизационные пики, соответствующие ионизации различных электронных уровней, были достаточно четко разделены (как в случае гелия). Точнее говоря, необходимо выполнение неравенства

$$a_L(\xi_{z_{max}}) \gg a_L(\xi_{z_{max}-1}).$$

Подставив для оценки вместо $a_L(\xi_{z_{max}})$ величину порогового для z_{max} -кратной ионизации поля [34]

$$\frac{a_{z_{max}}}{a_{a.u.}} = \frac{(U_{z_{max}}/U_H)^2}{16z_{max}},$$

удобно переписать это неравенство в виде

$$\left(\frac{U_{z_{max}}}{U_{z_{max}-1}} \right)^2 \frac{z_{max}-1}{z_{max}} \gg 1. \quad (29)$$

В условиях, когда неравенство (29) выполняется, можно опустить в (25) все члены, кроме пропорциональных $a_L(\xi_{z_{max}})$, дающих наибольший вклад. Учитывая также численный результат (28), получаем

$$\begin{aligned} \hat{a}(3) \approx & \frac{N\eta}{24} a_L(\xi_{z_{max}}) \chi_\infty^{(z_{max})} \times \\ & \times \left[1.2 \mu_2^{(z_{max})} - \frac{6\alpha^2}{a_L^2(\xi_{z_{max}})} \frac{U_z}{U_H} (2\mu_2^{(z_{max})} - 1) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя в уравнение (30) выражение (27) для $\mu_2^{(z_{max})}$, получаем, что величина $a_L(\xi_{z_{max}})$ может быть выражена¹⁾ через отношение $\hat{a}(3)/N\eta\chi_\infty^{(z_{max})}$. Это достигается путем вычисления величины

$$\varepsilon = 3 \frac{a_L(\xi_{z_{max}})}{a_{a.u.}} \left(\frac{n_{*,z_{max}}}{z_{max}} \right)^3,$$

являющейся корнем следующего из (30), (27) уравнения

$$\begin{aligned} B + \varepsilon[A - 2B] - \varepsilon^2[C_\mu - 2BC_2] + \varepsilon^3[C_\mu - 2BC_3] - \\ - \varepsilon^4[C_\mu C_2 - 2BC_4] + \varepsilon^5[C_\mu C_3 - 2BC_5] + \dots + \\ + (-1)^{n+1} \varepsilon^n [C_\mu C_{n-2} - 2BC_n] = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} A = & \frac{72}{N\eta\chi_\infty^{(z_{max})}} \frac{\hat{a}(3)}{a_{a.u.}} \left(\frac{U_{z_{max}}}{U_H} \right)^{-3/2}, \\ B = & 54 \left(\frac{\alpha}{a_{a.u.}} \right)^2 \left(\frac{U_{z_{max}}}{U_H} \right)^{-2}, \quad C_\mu \approx 1.2, \\ C_2 \approx & \frac{9}{4} - n_{*,z}, \quad C_3 \approx \frac{207}{32} - \frac{21}{4} n_{*,z} + n_{*,z}^2, \\ C_4 \approx & \frac{1419}{64} - \frac{201}{8} n_{*,z} + 9n_{*,z}^2 - n_{*,z}^3, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь $C_n, n = 2, 3, \dots$ — коэффициенты в асимптотическом разложении

$$\mu_2^{(z_{max})} = 1 - \varepsilon_{z_{max}} + C_2 \varepsilon_{z_{max}}^2 - C_3 \varepsilon_{z_{max}}^3 + \dots,$$

¹⁾ Величина η должна быть не слишком велика, чтобы не сказывались эффекты насыщения третьей гармоники.

Сравнение расчетов остаточной энергии, выраженной через $\hat{a}(3)$, по формулам (31)–(34), (24), (27) с расчетами по формуле (21)

Параметры задачи						Данные гидродинамических расчетов $\hat{a}(3)$		$Q_{\infty}^{(z_{max})}$ по формулам (31)–(34), (24), (27)	$Q_{\infty}^{(z_{max})}$ по формуле (21)
z_{max}	$U_{z_{max}}$, эВ	I_{max} , Вт/см ²	λ_0 , мкм	τ_{FWHM} , фс	$\frac{n_{at}}{n_c}$	$\hat{a}(3)$	$\frac{\eta/c}{\tau_{FWHM}}$		
1	13.6	10^{15}	0.8	13	10^{-2}	$1.86 \cdot 10^{-4}$	3	8.2	6.6
1	13.6	10^{15}	1.08	50	10^{-2}	$2.22 \cdot 10^{-4}$	2	6.7	7.0
1	24.6	$5 \cdot 10^{15}$	0.8	13	10^{-2}	$8.8 \cdot 10^{-4}$	3.0	40	42
1	24.6	$5 \cdot 10^{15}$	0.8	50	10^{-2}	$10.7 \cdot 10^{-4}$	1.3	25	27
2	54.4	$4 \cdot 10^{16}$	0.8	13	$5 \cdot 10^{-3}$	$13.1 \cdot 10^{-4}$	2.1	215	205
2	54.4	$4 \cdot 10^{16}$	0.8	50	$5 \cdot 10^{-3}$	$14.75 \cdot 10^{-4}$	0.66	172	127
5	97.9	$4 \cdot 10^{17}$	0.8	20	$2 \cdot 10^{-3}$	$13.66 \cdot 10^{-4}$	1.5	484	305

см. (27). Учитывая малость величины ε , легко записать решение (31) в виде степенного ряда:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_{(0)} + \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \dots, \\ \varepsilon_{(0)} &= \frac{D_1 + \sqrt{D_1^2 + 4BD_2}}{2D_2}, \\ \varepsilon_{(1)} &= \frac{\varepsilon_{(0)}^3 D_3}{2\varepsilon_{(0)} D_2 - D_1} \sim \varepsilon_{(0)}^2, \\ \varepsilon_{(2)} &= \frac{3\varepsilon_{(0)}^2 \varepsilon_{(1)} D_3 - \varepsilon_{(1)}^2 D_2 - \varepsilon_{(0)}^4 D_4}{2\varepsilon_{(0)} D_2 - D_1} \sim \varepsilon_{(0)}^3 \dots, \end{aligned} \tag{33}$$

где D_n — коэффициент при ε^n , $n = 1, 2, \dots$ в уравнении (31).

Определив корень ε и величину

$$a_L(\xi_{z_{max}}) = \frac{\varepsilon a_{a.u.}}{3} \left(\frac{z_{max}}{n_{*,z_{max}}} \right)^3, \tag{34}$$

из формул (24), (27) легко найти значение $Q_{\infty}^{(z_{max})}$, зависимость которого от амплитуды третьей гармоники будет определяться зависимостью найденного значения ε от коэффициента A (32). Уравнения (31)–(34), (24), (27) показывают принципиальную возможность определения остаточной энергии в экспериментах с помощью оптических измерений

третьей гармоники лазерного излучения, создающего плазму²⁾.

Результаты сравнения расчетов $Q_{\infty}^{(z_{max})}$ по формулам (31)–(34), (24), (27) с расчетами по формуле (21) показаны в таблице для случая, когда в асимптотическом ряду (27) учтены члены вплоть до $\varepsilon_{z_{max}}^3$, а при нахождении корня полинома (31) учтены члены вплоть до $\varepsilon_{(2)}$. Приведенные расчеты показывают, что предложенная диагностика остаточной энергии электронов, ионизовавшихся с внутренних уровней энергии, по амплитуде третьей гармоники удовлетворительно (с точностью не хуже 50 %) согласуется с расчетами остаточной энергии данной группы электронов по формуле (21). Отметим, что наилучшее согласие указанных расчетов наблюдается в том случае, когда происходит однократная ионизация гелия, поскольку при этом, с одной стороны, в формулах (24) и (25) есть всего одно слагаемое с $z = 1$, а с другой стороны, условие туннельной ионизации $\gamma \ll 1$ выполняется с достаточным запасом (в расчетах $\gamma \lesssim 0.3$). Точность расчетов для водорода меньше, так как выбранные параметры при этом оказываются на границе режима туннельной ионизации ($\gamma \sim 0.5$). Для двукратно ионизованного гелия предлагаемый подход также позволяет удовлетвори-

2) Степень ионизации $\varkappa_{\infty}^{(z_{max})}$ должна оцениваться из независимых соображений. Ниже предполагается, что $\varkappa_{\infty}^{(z_{max})} = 1$.

тельно описать величину $Q_{\infty}^{(z_{max})}$, так как ионизационные пики, соответствующие последовательной ионизации первого и второго электронов, достаточно хорошо разделены³⁾, что видно также из того, что левая часть неравенства (29) в этом случае приблизительно равна 2.5. Для азота точность предлагаемого подхода несколько хуже, так как соответствующие ионизационные пики в азоте меньше разделены (величина левой части неравенства (29) при этом приблизительно равна 1.3).

5. ВЫВОДЫ

Таким образом, показано, что спектр излучения, возникающего при ионизации газа фемтосекундным интенсивным лазерным импульсом, оказывается сильно зависящим от структуры атомных уровней в области гармоник с частотой $\omega \geq 5\omega_0$. Интенсивность этих гармоник оказывается тем выше, чем больше число уровней связанных состояний в поле атомного потенциала. Максимум спектральной плотности и форма линии, соответствующей третьей гармонике лазерного излучения, оказываются практически не зависящими от внутриатомной структуры уровней и определяются величиной потенциала ионизации и параметрами лазерного импульса. Это обстоятельство позволяет построить для описания генерации третьей гармоники в процессе ионизации простую гидродинамическую модель с использованием квантовых вероятностей ионизации в поле лазерного импульса. В рамках этой модели по амплитуде спектра третьей гармоники может быть определена величина остаточной энергии электронов, рождающихся в результате ионизации. Это означает, что спектр третьей гармоники может быть использован для построения оптической диагностики вещества в ходе его ионизации.

Настоящая работа частично поддержана РФФИ (грант № 01-02-16723) и NATO PST CLG 979372.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Brunel, J. Opt. Soc. Amer. B **7**, 521 (1990).
2. Н. Е. Андреев, М. Е. Вейсман, М. Г. Кейджян, М. В. Чеготов, Физика плазмы **26**, 1010 (2000).
3. Разделение этих пиков в расчетах, отображенных в пяти строке таблицы, более четкое, чем в шестой строке, чем и объясняется ббльшая точность расчетов в пятой строке
3. В. П. Кандидов, О. Г. Косарева, С. А. Шленов, КЭ **28**, 971 (1994).
4. M. Geissler, G. Tempea, A. Scrinzi et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 2930 (1999).
5. V. B. Gildenburg, A. V. Kim, V. A. Krupnov et al., IEEE Trans. Plasma Sci. **21**, 34 (1993).
6. Н. Е. Андреев, М. Е. Вейсман, С. П. Гореславский, М. В. Чеготов, Физика плазмы **27**, 296 (2001); N. E. Andreev, M. V. Chegotov, M. E. Veisman et al., SPIE Proc. **3735**, 234 (1998).
7. Н. Е. Андреев, М. В. Чеготов, М. Е. Вейсман и др., Письма в ЖЭТФ **68**, 566 (1998).
8. P. Pulsifer, J. P. Apruzese, J. Davis, and P. Kepple, Phys. Rev. A **49**, 3958 (1994).
9. A. L'Huillier A, L-A. Lompre, G. Mainfray, and C. Manus, in *Atoms in Intense Laser Fields*, ed. by M. Gavril, Academ. Press, Inc., New York (1992), p. 139.
10. В. Т. Платоненко, В. В. Стрелков, КЭ **25**, 582 (1998).
11. A. M. Sergeev, A. V. Kim, E. V. Vanin et al., Proc. SPIE **2770**, 36 (1995).
12. P. Antoine, A. L'Huillier, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **77**, 1234 (1996).
13. В. П. Силин, КЭ **26**, 11 (1998).
14. К. Н. Овчинников, В. П. Силин, Кратк. сообщ. по физике ФИАН, вып. 10, с. 19 (1998).
15. В. П. Силин, ЖЭТФ **117**, 920 (2000).
16. M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov et al., Phys. Rev. A **49**, 2117 (1994).
17. P. B. Corcum, Phys. Rev. Lett. **71**, 1994 (1993).
18. C. F. de M. Faria, M. Dorr, and W. Sander, Phys. Rev. A **58**, 2990 (1998).
19. N. Aközbeke, A. Iwasaki, A. Becker et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 143901 (2002).
20. J. L. Krause, K. J. Schafer, and K. C. Kulander, Phys. Rev. A **45**, 4998 (1992).
21. L. Roso-Franko, A. Sanpera, M. L. Pons, and L. Plaža, Phys. Rev. A **44**, 4652 (1991).
22. A. M. Ermolaev and A. V. Selin, Phys. Rev. A **62**, 015401 (2000).
23. S. Blanes and P. C. Moan, Phys. Lett. A **265**, 35 (2000).

24. Дж. Х. Эбберли, К. Су, Дж. Джаванайнен, Изв. АН, сер. физ. **53**, 1101 (1989).
25. Е. В. Ванин, М. С. Даунер, А. В. Ким, А. М. Сергеев, Письма в ЖЭТФ **58**, 964 (1993).
26. W. Becker, S. Long, and J. K. McIver, Phys. Rev. A **50**, 1540 (1994).
27. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
28. М. В. Чеготов, Физика плазмы **26**, 940 (2000).
29. М. В. Аммосов, Н. В. Делоне, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **91**, 2008 (1986).
30. P. Mulser, F. Cornolti, and D. Bauer, Phys. Plasmas **5**, 4466 (1998).
31. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966).
32. Н. Е. Андреев, М. В. Чеготов, в сб. *Тезисы докладов XXVII звенигородской конференции по физике плазмы и УТС*, Звенигород (2000).
33. I. P. Christov, J. Zhou, J. Peatross et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 1743 (1996).
34. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, Труды ИОФАН **50**, 34 (1995).