

# ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ИНВАРИАНТОВ В ПОЛЕВЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ РАЗМЕРНОСТИ $D > 1$

*А. В. Безвербный\**

*Морской государственный университет  
690059, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 26 февраля 2003 г.

Рассмотрены скалярные (интенсивность, эллиптичность) и градиентные векторные инварианты конфигураций для монохроматического поля размерности  $D > 1$ . Проанализирована их пространственная структура и особенности векторных инвариантов (расходимость и неопределенность, вихревые поля) вблизи особых областей (экстремумы интенсивности, области циркулярной и линейной поляризации). Исследуется проблема сходимости и определенности физических величин (мультипольные моменты атомов, светоиндуцированная сила, тензор диффузии), имеющих инвариантное представление в базисе этих векторных инвариантов. На примерах симметричных двух- и трехмерных конфигураций монохроматического поля представлены различные пространственные структуры особых областей.

PACS: 32.80.Lg, 32.80.Pj, 03.65.Sq

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Полевые конфигурации, образованные когерентными световыми волнами с несовпадающими направлениями и различными поляризациями, нашли широкое применение в атомной физике, особенно в области лазерного охлаждения и захвата нейтральных атомов. Эти конфигурации характеризуются наличием пространственных градиентов у таких характеристик поля, как эллиптичность, интенсивность, общая фаза, углы поворота эллипса поляризации. Корреляционная зависимость поляризационных и кинетических характеристик атомарного ансамбля в таких полях лежит в основе работы магнито-оптической ловушки и в основе действия субдоплеровских механизмов охлаждения. Возможные новые динамические и поляризационные эффекты в атомарных структурах, оптически ориентированных полями с градиентами поляризации, являются объектом исследований в последние годы [1]. Общим свойством этих структур является формирование периодических [2] или квазипериодических [3] решеток как в плотности распределения (диссипативные [4] и недиссипативные (far-detuned) [5] ре-

шетки), так и в распределении мультипольных моментов атомов  $\rho_{\chi}$ . Например, диссипативные решетки формируются при одновременном действии дипольной силы  $\mathbf{F}_0$ , приводящей к пространственной локализации атомов, и радиационной силы трения  $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \hat{\chi} \cdot \mathbf{v} \sim \mathbf{v}$ , охлаждающей атомарный ансамбль до субдоплеровских температур  $k_B T \ll \hbar \gamma$  ( $\gamma$  — радиационная константа спонтанного распада возбужденного состояния). Очевидно, что такие решетки формируются всякий раз, когда используется техника субдоплеровского охлаждения атомов в световых полях с градиентами поляризации.

В квазиклассическом приближении кинетика медленных атомов в неоднородно поляризованном поле описывается уравнением Фоккера–Планка для функции распределения атомов в фазовом пространстве [6]. В работе [7] было показано, что векторная структура  $\mathbf{F}_0$ , а также тензорная структура  $\hat{\chi}$  и тензора диффузии в импульсном пространстве  $\hat{D}$  в нулевом порядке по скорости определяются пространственными градиентами поля. Таким образом, несложный и наглядный анализ градиентной структуры для произвольной конфигурации поля позволяет выделить характерные черты в динамике отдельных атомов и кинети-

\*E-mail: alexb@mail.vntc.ru, alexb@msun.ru

ке атомарного ансамбля, определив, например, топологию и симметрию областей локализации, пространственное распределение мультипольных моментов и т. д. Основной целью настоящей работы является исследование свойств полевых градиентов в монохроматических конфигурациях размерности  $D > 1$ .

В разд. 2 приводится определение векторных полевых инвариантов. В следующем разделе рассмотрен характер расходимости либо неопределенности этих величин в особых областях. Показано, что, в отличие от одномерных конфигураций, для градиентов общей фазы и угла поворота эллипса поляризации обычной является вихревая структура с центрами вихрей в областях циркулярной поляризации и с расходимостью этих градиентов порядка  $1/r$  ( $r$  — расстояние до центра вихря). Этот факт оказывается сопряженным с отсутствием гладкости у непрерывного параметра эллиптичности  $c = \cos(2\varepsilon)$  в этих областях ( $\varepsilon$  — угол эллиптичности). Особыми также следует считать области линейной поляризации, где по закону  $1/r$  расходится градиент угла поворота малой оси эллипса поляризации поля. Вырожденными областями конфигураций являются узлы, в которых интенсивность общего поля равна нулю. Здесь в общем случае пересекаются области циркулярной и линейной поляризации и эллиптичность поля не определена, а ее градиент расходится по закону  $1/r$ .

В разд. 4 и 5 исследуются проблемы однозначности и сходимости для мультипольных моментов  $\rho_{\varepsilon}^g$  атомов в основном состоянии и кинетических характеристик  $\mathbf{F}_0$ ,  $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\hat{\mathcal{D}}$ , определенных через векторные полевые инварианты. Показана конечность этих величин всюду, кроме узловых точек, при имеющейся неопределенности некоторых вкладов в  $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\hat{\mathcal{D}}$  за счет градиентов эллиптичности и общей фазы (в областях циркулярной поляризации) и градиента угла поворота малой оси эллипса поляризации поля (в областях линейной поляризации).

В разд. 6 для известных и новых двух- и трехмерных полевых конфигураций рассматриваются пространственные структуры особых областей, исследуются асимптотики полевых инвариантов в этих областях. Показано топологическое многообразие областей с циркулярной и линейной поляризацией, максимумов интенсивности и узлов.

В Заключении обсуждается связь пространственной структуры полевых инвариантов со структурой атомарных решеток. Отмечено, в частности, существенное различие в структурах (диссипативных) решеток в зависимости от типа перехода. Так, для

переходов  $J \rightarrow J$  ( $J$  — полуцелые) преимущественными областями локализации являются минимумы интенсивности наряду с областями циркулярной поляризации, тогда как для переходов  $J \rightarrow J + 1$  таковыми являются максимумы интенсивности и области циркулярной поляризации. В точках пересечения этих областей должен наблюдаться максимальный эффект. В других случаях возможно формирование протяженных локализованных структур, например, в виде колец в двумерных конфигурациях. Особенности пространственных градиентов общей фазы, угловых характеристик эллипса поляризации имеют непосредственное отношение к вихревой компоненте дипольной силы  $\mathbf{F}_0$ , влияющей на динамику отдельных атомов в областях локализации.

## 2. ИНВАРИАНТЫ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Рассмотрим полевую конфигурацию, образованную наложением  $s$  когерентных световых пучков одинаковой частоты  $\omega$  с волновыми векторами  $\mathbf{k}_n$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^s \{ \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}) \mathbf{E}_n + \text{c.c.} \} = \exp(-i\omega t) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \exp(i\omega t) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}), \quad (1)$$

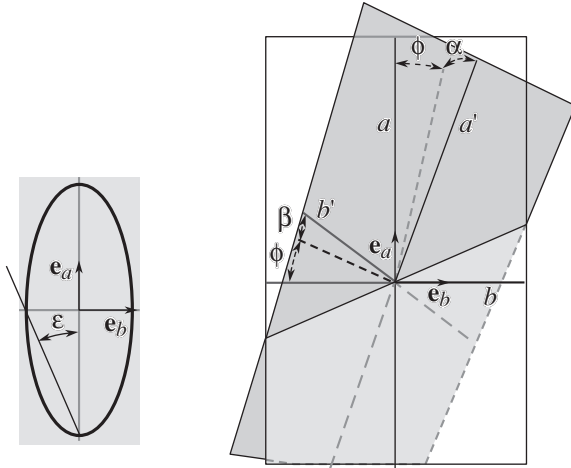
где  $(\dots)^*$  — комплексное сопряжение. Формально можно выделить в частотных компонентах поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r})$  амплитуду  $E \geq 0$ , общую фазу  $\Phi$  и единичный комплексный вектор поляризации ( $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* = 1$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= E(\mathbf{r}) \exp(i\Phi(\mathbf{r})) \mathbf{e}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) &= E(\mathbf{r}) \exp(-i\Phi(\mathbf{r})) \mathbf{e}^*(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2)$$

определив их непосредственно через удобные в анализе конкретных конфигураций инварианты поля  $I_0 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ ,  $I_1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ ,  $I_1^*$ :

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{I_0}, \quad \exp(2i\Phi(\mathbf{r})) = \frac{I_1}{\sqrt{I_1 I_1^*}}, \\ \mathbf{e}(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{E \exp(i\Phi(\mathbf{r}))}. \end{aligned} \quad (3)$$

Определение (3) означает выбор  $c = \sqrt{I_1 I_1^*} / I_0 \geq 0$  для параметра эллиптичности  $c(\mathbf{r}) = \cos(2\varepsilon) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}$ , связанного со степенью линейной поляризации  $l = c^2$  поля [8] и углом эллиптичности поля  $\varepsilon(\mathbf{r})$  (рис. 1), так как между  $c(\mathbf{r})$  и фазовым множителем  $\exp(2i\Phi(\mathbf{r}))$  имеется связь  $c \exp(2i\Phi) = I_1 / I_0$ . Приведенный далее анализ неодномерных ( $D > 1$ )



**Рис. 1.** Локальный эллипс поляризации (слева) и углы поворота эллипса поляризации при вариации  $\mathbf{r}$ :  $a, b$  и  $a', b'$  — соответственно, исходные и измененные направления главных осей эллипса поляризации поля (1)

полевых конфигураций показывает, что при ином выборе согласования с фазовым множителем функция  $c(\mathbf{r})$  будет разрывной в окрестностях типичных<sup>1)</sup> областей с циркулярной поляризацией поля (изолированные точки в двумерных и линии в трехмерных конфигурациях). Принципиально, что в определении единичного вектора поляризации  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  в (3) остается неоднозначным фазовый множитель  $\exp(i\Phi(\mathbf{r}))$  из-за неоднозначности взятия квадратного корня.

В качестве векторных инвариантов выберем градиентные функции [7]: амплитуды  $\mathbf{g}_1 = \nabla E$ , параметра эллиптичности  $\mathbf{g}_3 = \nabla c$ , а также фазы

$$\mathbf{g}_2 = \nabla \Phi = \frac{i}{4} \frac{I_1}{I_1^*} \nabla \frac{I_1^*}{I_1} = \frac{i}{2} \frac{I_1}{\sqrt{I_1 I_1^*}} \nabla \frac{I_1^*}{\sqrt{I_1 I_1^*}}, \quad (4)$$

причем, в отличие от  $\Phi$ , вектор (4) определен однозначно.

Дополнительными векторными инвариантами могут служить градиенты от трех угловых параметров, задающих пространственную ориентацию эллипса поляризации:  $\phi(\mathbf{r})$  — угла поворота относительно оси  $\mathbf{e}_0$ , ортогональной эллипсу поляризации, а также  $\alpha(\mathbf{r})$  и  $\beta(\mathbf{r})$  — углов поворота большой,  $\mathbf{e}_a$ , и малой,  $\mathbf{e}_b$ , осей эллипса поляризации относительно

<sup>1)</sup> Случаи определения непрерывного параметра эллиптичности  $-1 \leq \tilde{c} \leq 1$  приведены в разд. 6.

исходной плоскости поляризации (рис. 1), где оси имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \frac{i\mathbf{e} \times \mathbf{e}^*}{\sqrt{1-c^2}}, & \mathbf{e}_a &= \frac{\mathbf{e} + \mathbf{e}^*}{\sqrt{2(1+c)}}, \\ \mathbf{e}_b &= -\frac{i(\mathbf{e} - \mathbf{e}^*)}{\sqrt{2(1-c)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

В отличие от самих углов, для их градиентов возможны инвариантные представления. Так, в локальном циклическом базисе

$$\left\{ \mathbf{e}_0; \mathbf{e}_{\pm 1} = \mp \frac{\mathbf{e}_a \pm i\mathbf{e}_b}{\sqrt{2}} \right\}$$

вектор поляризации имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) \exp(-i\phi) \mathbf{e}_{+1} + \\ &+ \sin\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) \exp(i\phi) \mathbf{e}_{-1}. \end{aligned}$$

Рассматривая векторные поля  $(\mathbf{e} \nabla_i \mathbf{e}^*)$  и  $(\mathbf{e}_0 \nabla_i \mathbf{e}^*)$ , можно получить следующие представления для градиентов от угловых величин:

$$g_{4,i} = \nabla_i \phi = \frac{\text{Im}(\mathbf{e} \nabla_i \mathbf{e}^*)}{\sqrt{1-c^2}}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} g_{5,i} &= \nabla_i \alpha = \sqrt{\frac{2}{1+c}} \text{Re}(\mathbf{e}_0 \nabla_i \mathbf{e}), \\ g_{6,i} &= \nabla_i \beta = \sqrt{\frac{2}{1-c}} \text{Im}(\mathbf{e}_0 \nabla_i \mathbf{e}). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что, в отличие от  $\mathbf{g}_4$ , векторы  $\mathbf{g}_5$  и  $\mathbf{g}_6$  в (7) содержат в неявной форме фазовые множители вида  $\exp(\pm i\Phi)$  и потому не определены однозначно.

Между векторами  $\mathbf{g}_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) имеются связи, вытекающие из поперечности частотных компонент  $\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) = 0$  и следствий  $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\nabla^2 \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) = -k^2 \mathbf{E}^*(\mathbf{r})$  волнового уравнения для общего поля конфигурации (1). Выделим также важную связь между градиентами фазовых характеристик:

$$\sqrt{1-c^2} \mathbf{g}_4 - \mathbf{g}_2 = \frac{\mathbf{G}}{I_0}, \quad (8)$$

где вектор  $G_i = \text{Im}(\mathbf{E} \nabla_i \mathbf{E}^*)$  является вихревым ( $\nabla \mathbf{G} = 0$ ).

### 3. ОСОБЕННОСТИ ПОЛЕВЫХ ИНВАРИАНТОВ

В одномерных полевых конфигурациях волновые векторы  $\mathbf{k}_n$  исходных полей коллинеарны и всегда отсутствуют  $\mathbf{g}_5$  и  $\mathbf{g}_6$ . Здесь легко реализуются

простейшие конфигурации с единственным градиентом [9]: только  $\mathbf{g}_2$  имеется в плоской бегущей волне,  $\mathbf{g}_1$  — в стоячей волне,  $\mathbf{g}_3$  — у двух встречных волн одинаковой интенсивности с ортогональными линейными поляризациями,  $\mathbf{g}_4$  — у встречных волн с ортогональными круговыми поляризациями (конфигурации, соответственно,  $\text{lin}\perp\text{lin}$  и  $\sigma_+\sigma_-$  [10]). Последние три конфигурации, как и модель  $\text{lin}-\vartheta\text{-lin}$  [11], являются частными случаями симметричной модели  $\varepsilon-\vartheta-\bar{\varepsilon}$  [12, 7], образуемой двумя встречными волнами с одинаковыми интенсивностями, эллиптичностью и углом  $\vartheta$  между главными осями эллипсов поляризации. В таких моделях инварианты (в том числе и градиентного типа) легко определяются в виде гладких функций для всей области конфигурации. Если параметр эллиптичности задан в интервале  $-1 \leq \tilde{c} \leq 1$ , особенности возникают лишь в предельных случаях, например, при  $\vartheta \rightarrow 0$  в  $\text{lin}-\vartheta\text{-lin}$  модели [11].

Качественно иная картина имеет место в конфигурациях с градиентами поляризации размерности  $D > 1$ . Независимо от способа согласования знаков  $c(\mathbf{r})$  и  $\exp(2i\Phi)$ , у векторных инвариантов возникают особенности в предельных случаях  $I_0 = 0$  (узлы поля),  $I_0 = |I_1|$  (линейная поляризация),  $I_1 = 0$  (циркулярная поляризация).

В невырожденном случае  $I_0(0) = \mathcal{I} > 0$  в окрестности точек с циркулярной поляризацией асимптотика инварианта  $I_1 \approx \mathbf{A}(0) \cdot \mathbf{R}$ , где всюду далее  $\mathcal{I}$  обозначает величину  $I_0$  в особых точках, а радиус-вектор  $\mathbf{R}$  предполагается заданным в локальной системе координат с началом в особой области (с линейной, циркулярной поляризацией либо в экстремуме интенсивности) в зависимости от контекста. Здесь  $\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \nabla I_1$  — комплексный вектор:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2$ , причем в общем случае  $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \neq 0$ . Последнее свойство имеет непосредственное отношение к выбору только неотрицательного параметра эллиптичности,  $c \approx |\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}|/\mathcal{I} \geq 0$ , если мы хотим определить его непрерывным. В исключительных случаях, когда  $\mathbf{A} = e^{i\alpha} \mathbf{A}_0$ , где  $\mathbf{A}_0$  — вещественный вектор,  $\alpha$  — некоторая постоянная фаза, возможно определение непрерывного знакопеременного параметра эллиптичности в виде

$$-1 \leq \tilde{c} \approx \frac{\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{R}}{\mathcal{I}} \leq 1$$

при одновременном задании фазового множителя  $e^{2i\Phi} \approx e^{i\alpha}$ . Однако в общем случае в фазовом множителе имеется особенность:  $e^{2i\Phi} \approx \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}/|\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}|$  при

$\mathbf{R} \rightarrow 0$ . Соответственно,  $\mathbf{g}_2$  расходится при  $c \rightarrow 0$  как

$$\mathbf{g}_2 \approx \frac{[\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2] \times \mathbf{R}}{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}|^2}, \quad (9)$$

а его поле имеет вихревой вид с осью вихря вдоль  $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ . Очевидно,  $\mathbf{g}_4$  имеет ту же асимптотику, поскольку вектор  $\mathbf{G}$  в (8) всегда конечен. Вектор  $\mathbf{g}_3$ , являясь конечным, не определен в самой точке  $c = 0$ , так как имеет асимптотику

$$\mathbf{g}_3 \approx \frac{\hat{P}(0) \cdot \mathbf{R}}{\mathcal{I} (\mathbf{R} \cdot \hat{P}(0) \cdot \mathbf{R})^{1/2}}, \quad (10)$$

$$\hat{P} = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_2,$$

где  $\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i$  обозначает прямое произведение соответствующих векторов.

Градиенты  $\mathbf{g}_5$  и  $\mathbf{g}_6$  конечны в окрестности циркулярной поляризации и имеют вид

$$\mathbf{g}_5 \approx \left(\frac{2}{\mathcal{I}^3}\right)^{1/2} (\mathbf{B}_2 \cos \Phi - \mathbf{B}_1 \sin \Phi),$$

$$\mathbf{g}_6 \approx -\left(\frac{2}{\mathcal{I}^3}\right)^{1/2} (\mathbf{B}_1 \cos \Phi + \mathbf{B}_2 \sin \Phi),$$

где  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  — вещественная и мнимая компоненты определенного всюду вектора

$$B_i = [\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*] \cdot \nabla_i \mathbf{E}.$$

Однако, как отмечено ранее, величины  $\sin \Phi$ ,  $\cos \Phi$  не определены однозначно (в отличие от величин  $\sin(2\Phi)$  и  $\cos(2\Phi)$ ).

В окрестности точек с линейными поляризациями в невырожденном случае ( $\mathcal{I} > 0$ ) асимптотики инвариантов имеют вид

$$I_0 \approx \mathcal{I} + (\text{Re } \tilde{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \hat{\mathcal{R}}_1 \cdot \mathbf{R}, \quad I_1 \approx \mathcal{I} + \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \hat{\mathcal{R}}_2 \cdot \mathbf{R},$$

где  $\hat{\mathcal{R}}_1$  — вещественный, а  $\hat{\mathcal{R}}_2$  — комплексный тензор. Очевидно, векторы

$$\mathbf{g}_1 \approx \frac{\text{Re } \tilde{\mathbf{A}}}{2\mathcal{I}}, \quad \mathbf{g}_2 \approx -\frac{\text{Im } \tilde{\mathbf{A}}}{2\mathcal{I}}$$

и  $\mathbf{g}_4$  конечны, а градиент эллиптичности  $\mathbf{g}_3 \approx -2\hat{\mathcal{R}}_3 \cdot \mathbf{R}$  мал вследствие экстремальности параметра эллиптичности  $\nabla c = 0$  в точках с линейной поляризацией. Здесь  $c \approx 1 - \mathbf{R} \cdot \hat{\mathcal{R}}_3 \cdot \mathbf{R}$ , причем собственные значения тензора  $\hat{\mathcal{R}}_3$  неотрицательны. Величины  $\mathbf{g}_5$  и  $\mathbf{g}_6$  при  $c \rightarrow 1$  имеют вид

$$\mathbf{g}_5 \approx \pm \frac{\mathbf{B}_2}{\sqrt{2\mathcal{I}^3 \mathbf{R} \cdot \hat{\mathcal{R}}_3 \cdot \mathbf{R}}}, \quad (11)$$

$$\mathbf{g}_6 \approx \pm \frac{\mathbf{B}_1}{\mathcal{I}^{3/2} \mathbf{R} \cdot \hat{\mathcal{R}}_3 \cdot \mathbf{R}},$$

где знаки векторов, будучи одинаковыми, не определяются однозначно. Введенные ранее векторы имеют асимптотическое поведение:  $\mathbf{B}_1 \approx \mathbf{S} \times \mathbf{R}$ , тогда как  $\mathbf{B}_2 \approx \hat{S} \cdot \mathbf{R}$ , где вещественный тензор  $\hat{S}$  содержит также симметричную компоненту. Вектор  $\mathbf{S}$ , определяющий плоскость вихревого поля  $\mathbf{B}_1$ , можно представить через характеристики полей, образующих конфигурацию (1):

$$\mathbf{S} = 2 \sum_{m,n}^s (\mathbf{E}(0) \cdot [\text{Re } \mathbf{E}_m \times \text{Re } \mathbf{E}_n]) [\mathbf{k}_m \times \mathbf{k}_n].$$

Таким образом, вектор  $\mathbf{g}_5$  конечен и не определен при  $c = 1$ , тогда как  $\mathbf{g}_6$  имеет вихревой характер и является расходящимся при  $c \rightarrow 1$ .

В окрестностях особых точек инварианта  $I_0$ , пропорционального интенсивности общего поля (1), где  $\nabla I_0 = 0$ , его асимптотика имеет вид  $I_0 \approx \mathcal{I} + \mathbf{R} \cdot \hat{Q} \cdot \mathbf{R}$ , а собственные значения  $q_m$  тензора  $\hat{Q}$  определяют тип экстремума либо седловидную точку.

Вырожденными случаями в полевых конфигурациях являются узлы ( $\mathcal{I} = 0$ ), где  $q_m \geq 0$ . Здесь градиент

$$\mathbf{g}_1 \approx \frac{\hat{Q} \cdot \mathbf{R}}{\sqrt{\mathbf{R} \cdot \hat{Q} \cdot \mathbf{R}}}$$

не определен. Асимптотика инварианта  $I_1 \approx \mathbf{R} \cdot \hat{Q}_1 \cdot \mathbf{R}$ , причем для комплексного тензора  $\hat{Q}_1$  должно выполняться условие  $|\mathbf{R} \cdot \hat{Q}_1 \cdot \mathbf{R}| \leq \mathbf{R} \cdot \hat{Q} \cdot \mathbf{R}$ . В общем случае параметр эллиптичности  $c = |I_1|/I_0$  не определен, а вектор  $\mathbf{g}_3$  в окрестности узлов расходуется как  $1/R$ . Такой же характер расходимости у векторов  $\mathbf{g}_{2,4}$ , за исключением случаев, когда  $(\hat{Q}_1)^* = e^{i\alpha} \hat{Q}_1$ . Вектор  $\mathbf{g}_6$  в узлах также имеет расходимость типа  $1/R$ .

Размерность особых областей с очевидностью зависит от размерности полевой конфигурации. Области циркулярной поляризации при  $I_0 > 0$  задаются двумя условиями:  $\text{Re } I_1 = 0$  и  $\text{Im } I_1 = 0$ . Обычно в двумерных конфигурациях это — изолированные точки, а в трехмерных — одномерные линии. Однако, если  $I_1 \sim |I_1|$  с точностью до постоянного фазового множителя, что соответствует рассмотренному ранее случаю  $\mathbf{A} = e^{i\alpha} \mathbf{A}_0$ , то остается только одно условие, и размерность области увеличивается. Пример двумерной модели с областями циркулярной поляризации в виде замкнутых линий приведен в разд. 6.1. Области линейной поляризации, соответствующие максимальным значениям  $c = 1$ , как и области экстремальных значений интенсивности поля (1), удовлетворяют условиям  $\nabla F = 0$  ( $F = \{c; I_0\}$ ), что приводит в общем случае к  $D$  независимым уравнениям, определяющим эти области в

виде изолированных точек. Однако число независимых уравнений может оказаться меньшим. Различные варианты экстремумов интенсивности и областей линейной поляризации в виде изолированных точек, линий и двумерных поверхностей (в трехмерных конфигурациях) приведены ниже в разд. 6.

#### 4. МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ АТОМОВ

Рассмотрим проблему однозначности и конечности в особых точках тех физических величин, в представлении которых присутствуют градиентные инварианты.

В работах [13, 14] показано, что стационарные<sup>2)</sup> мультипольные моменты неподвижных атомов,  $\rho_\varkappa$ , с полным угловым моментом  $J_g > 0$  в основном состоянии, ориентированных полем (1) в цикле резонансной оптической накачки, можно представить инвариантным образом в виде разложений по базису тензорных произведений векторов  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}^*$ . Характерные времена установления таких стационарных распределений (по внутренним степеням свободы) имеют порядок  $t_\varkappa \sim \max\{\gamma^{-1}, (\gamma S)^{-1}\}$ , где  $S$  — параметр насыщения, определенный через частоту Раби  $\Omega$  и отстройку  $\delta = \omega - \omega_0$  частоты поля от частоты атомного перехода следующим образом:

$$S = \frac{|\Omega|^2}{\gamma^2/4 + \delta^2}. \quad (12)$$

Например, при малых насыщениях  $S \ll 1$  для неподвижных атомов в основном состоянии разложение мультипольных моментов  $\rho_\varkappa^g$  рангов  $0 < \varkappa \leq 2J_g$  имеет вид [14]

$$\rho_\varkappa^g = \sum_{l=\bar{\varkappa}-\varkappa}^{\varkappa} a^{\varkappa,l} \{ \{ \mathbf{e} \}_l \otimes \{ \mathbf{e}^* \}_{\bar{\varkappa}-l} \}_\varkappa. \quad (13)$$

Здесь  $\bar{\varkappa} = 2[(\varkappa + 1)/2]$ , где  $[X]$  означает взятие целой части числа  $X$ . В (13) использованы обозначения:  $\{ \cdots \otimes \cdots \}_\varkappa$  — для неприводимого тензорного произведения ранга  $\varkappa$  [15],  $\{ \mathbf{e} \}_l = \{ \cdots \{ \{ \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \}_2 \otimes \mathbf{e} \}_3 \cdots \otimes \mathbf{e} \}_l$  — сокращения, предложенные в работах [16, 17].

Для медленных атомов при условии

$$\min(\gamma, \gamma S) \gg \max\left(kv, \frac{v}{\Delta r}\right), \quad (14)$$

<sup>2)</sup> Разложение вида (13) также имеет место в нестационарном случае при равновесном начальном распределении по зеемановским подуровням атома.

где  $\Delta r$  — пространственный масштаб для градиентов поляризации, аналогичное разложение имеет место для линейных по скорости поправок  $\delta\rho_{\mathcal{Z}}^g$  [14]:

$$\delta\rho_{\mathcal{Z}}^g = \frac{1}{\gamma S} \left[ \sum_{l=\overline{\mathcal{Z}}-\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} \left( (\delta a)_3^{\mathcal{Z},l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_3 + (\delta a)_4^{\mathcal{Z},l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_4 \right) \times \{ \{\mathbf{e}\}_l \otimes \{\mathbf{e}^*\}_{\overline{\mathcal{Z}}-l} \}_{\mathcal{Z}} + \sum_{l=\underline{\mathcal{Z}}-\mathcal{Z}}^{\mathcal{Z}} \left( (\delta a)_5^{\mathcal{Z},l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_5 + (\delta a)_6^{\mathcal{Z},l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_6 \right) \times \{ \{\mathbf{e}\}_l \otimes \{\mathbf{e}^*\}_{\underline{\mathcal{Z}}-l} \}_{\mathcal{Z}} \right]. \quad (15)$$

Здесь  $\underline{\mathcal{Z}} = \overline{\mathcal{Z}} + 1 - 1$ .

В выражениях (13), (15) нет неоднозначности из-за неопределенности фазовых множителей  $\exp(\pm i\Phi)$  в векторах поляризации  $\mathbf{e}, \mathbf{e}^*$  (3). Четность  $\overline{\mathcal{Z}}$  обеспечивает тензорным произведениям с коэффициентами  $a^{\mathcal{Z},l}, (\delta a)_3^{\mathcal{Z},l}, (\delta a)_4^{\mathcal{Z},l}$  четное число векторов  $\mathbf{e}, \mathbf{e}^*$ . Итоговые фазовые множители имеют вид  $[\exp(\pm 2i\Phi)]^n$  и однозначно определены в соответствии с (3). Аналогичная структура у фазовых множителей для вкладов с коэффициентами  $(\delta a)_5^{\mathcal{Z},l}$  и  $(\delta a)_6^{\mathcal{Z},l}$ : при нечетном числе  $\underline{\mathcal{Z}}$  векторов  $\mathbf{e}, \mathbf{e}^*$  в каждом тензорном произведении возникающая неопределенность компенсируется соответствующими фазовыми множителями  $\exp(\pm i\Phi)$  в векторах  $\mathbf{g}_{5,6}$ .

Анализируя конечность выражений (13) и (15), заметим, что коэффициенты разложения  $a^{\mathcal{Z},l}, (\delta a)_3^{\mathcal{Z},l}, (\delta a)_4^{\mathcal{Z},l}, (\delta a)_5^{\mathcal{Z},l}$  и  $(\delta a)_6^{\mathcal{Z},l}$  являются дробно-рациональными функциями параметра эллиптичности  $c(\mathbf{r})$ , не имеющими особенностей в случае  $c \rightarrow 0$ , тогда как при  $c \rightarrow 1$  коэффициенты  $(\delta a)_{4,5,6}^{\mathcal{Z},l}$  имеют особенности вида  $1/\sqrt{1-c^2}$ , а коэффициенты  $(\delta a)_3^{\mathcal{Z},l}$  — особенности вида  $1/(1-c^2)$ . Тем не менее итоговые вклады в  $\delta\rho_{\mathcal{Z}}^g$  конечны всюду, за исключением узлов. Для момента первого ранга  $\delta\rho_1^g$  это показано в работе [14] на примере перехода  $1/2 \rightarrow 1/2$ . Оказывается, что в мультиполи более высокого ранга при  $J_g > 1/2$  градиенты, расходящиеся ( $\mathbf{g}_{2,4}$ ) и неопределенные ( $\mathbf{g}_3$ ) в окрестности  $c \rightarrow 0$ , входят в конечных комбинациях  $c^n \mathbf{g}_m$ , где  $n \geq 1$  и  $m = 3, \dots, 6$ . Конечность в другом пределе,  $c \rightarrow 1$ , можно показать только после суммирования всех вкладов с учетом особенностей тензоров  $\{ \{\mathbf{e}\}_l \otimes \{\mathbf{e}^*\}_L \}_{\mathcal{Z}}$  в области линейной поляризации, где  $\mathbf{e}^* \approx \mathbf{e}$ , так что расходимости отдельных вкладов компенсируются и асимптотики оказываются конечными. Например, расходящийся градиент  $\mathbf{g}_6$

входит в конечной комбинации  $\sqrt{1-c} \mathbf{g}_6$ . Асимптотики  $\delta\rho_{\mathcal{Z}}^g$  для конкретных переходов с  $J > 1/2$  являются громоздкими и здесь не приведены.

Очевидно, в области узлов ( $S = 0$ ) разложения (13) и (15) неприменимы: здесь  $t_{\mathcal{Z}} \rightarrow \infty$ , а также нарушены условия (14) для параметра эллиптичности из-за  $\Delta r \rightarrow 0$ . При этом структура мультипольных моментов в окрестности узлов определяется не локальными значениями  $I_0, \mathbf{e}(\mathbf{r}), \mathbf{e}^*(\mathbf{r})$  и их градиентов, а зависит от усредненных (интегральных) параметров поля.

### 5. КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Рассмотрим приложение векторных инвариантов к проблеме инвариантного представления кинетических коэффициентов, актуальной при рассмотрении процессов локализации и охлаждения атомов в полевых конфигурациях с  $D > 1$ . В работе [7] показано, что в квазиклассическом приближении, эквивалентном условию

$$\min(\gamma, \gamma S) \gg \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (16)$$

при выполнении приближений, приведенных в предыдущем разделе, кинетический этап эволюции ( $t \gg \max(t_{\mathcal{Z}})$ ) атомарного ансамбля в световом поле описывается уравнением Фоккера–Планка для функции распределения атомов  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  в фазовом пространстве

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) f = -\nabla_{\mathbf{p}} \cdot \left[ (\mathbf{F}_0 + \hat{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{v}) f \right] + \frac{1}{2} \left( \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (\hat{\mathcal{D}}^{ind} + \hat{\mathcal{D}}^{spont}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) f \quad (17)$$

( $\mathbf{v} = \mathbf{p}/M$  — скорость атомов), где имеют место инвариантные разложения для коэффициентов (17):

$$\mathbf{F}_0 = \hbar \gamma S \sum_{i=1}^4 F_i \mathbf{g}_i, \quad \hat{\mathcal{X}} = \hbar \left( \sum_{i,j=1}^4 X_{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \sum_{l,m=5}^6 X_{lm} \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}_m \right), \quad (18)$$

$$\hat{\mathcal{D}}^{ind} = \hbar^2 \gamma S \times \left( \sum_{i,j=1}^4 D_{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \sum_{l,m=5}^6 D_{lm} \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}_m \right). \quad (19)$$

Здесь коэффициенты разложения  $F$ ,  $X$  и  $D$  есть функции только  $E$ ,  $c$  и отстройки  $\delta$  частоты светового поля от резонанса<sup>3)</sup>. Для примера мы приведем явный вид этих коэффициентов для перехода  $1/2 \rightarrow 1/2$  в приближении малых насыщений  $S \ll 1$  (для переходов  $1/2 \rightarrow 3/2$  и  $1 \rightarrow 2$  эти коэффициенты приведены в работе [7]):

$$F_1 = -\frac{2\tilde{\delta}c^2}{3}, \quad F_2 = \frac{c^2}{3}, \quad F_3 = -\frac{\tilde{\delta}c}{3}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} X_{13} &= 3\tilde{\delta}c, & X_{23} &= -\frac{3c}{2}, & X_{33} &= -\frac{3\tilde{\delta}c^2}{2A^2}, \\ X_{43} &= \frac{3c}{2A}, & X_{(55)} &= \pm 24\tilde{\delta}A^2cN, & & \\ X_{(56)} &= -3A(1 \pm c)(A \mp B)N, & & & & \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{c^2}{4}(1 + 12\tilde{\delta}^2A^2), & D_{12} &= -\frac{3\tilde{\delta}A^2c^2}{2}, \\ D_{13} &= -\frac{c}{8}(12\tilde{\delta}^2c^2 - 1), & D_{14} &= \tilde{\delta}Ac^2, \\ D_{22} &= \frac{c^2}{4}(1 + 3A^2), & D_{23} &= \frac{3\tilde{\delta}c^3}{4}, \\ D_{24} &= -\frac{Ac^2}{2}, & D_{33} &= \frac{2 - c^2 + 12\tilde{\delta}^2c^4}{16A^2}, \\ D_{34} &= -\frac{\tilde{\delta}c^3}{2A}, & D_{44} &= \frac{c^2}{2}, \\ D_{(55)} &= \frac{1 \pm c}{8}[1 + (\mathbb{C} \pm \mathbb{D})N], \\ D_{56} &= 8\tilde{\delta}Ac^3N, \end{aligned} \quad (22)$$

$$D_{i>j} = D_{ji},$$

остальные коэффициенты равны нулю. Здесь  $A = \sqrt{1 - c^2}$  — коэффициент, связанный со степенью линейной поляризации  $A^2$  поля (1),  $\tilde{\delta} = \delta/\gamma$  — относительная отстройка,

$$\mathbb{N} = [2(9 - c^2 + 36\tilde{\delta}^2A^2)]^{-1}, \quad \mathbb{A} = (12\tilde{\delta}^2 - 1)c,$$

$$\mathbb{B} = 12\tilde{\delta}^2 + 3, \quad \mathbb{C} = 2c^2(13 + 84\tilde{\delta}^2) - 18(1 + 4\tilde{\delta}^2),$$

$$\mathbb{D} = 8c^3(12\tilde{\delta}^2 - 1).$$

В выражениях (18), (19) векторы  $\mathbf{g}_{5,6}$  присутствуют только в виде квадратичных комбинаций, поэтому не возникает неопределенности за счет фазовых множителей. Анализ замкнутых атомных дипольных переходов  $J \rightarrow J + 1$  (целые и полуцелые  $J$ ) и  $J \rightarrow J$  (полуцелые  $J$ ) показал, что по

<sup>3)</sup> Тензор спонтанной диффузии  $\hat{D}^{spont}$  имеет аналогичное (13) разложение и диагонализуется в базисе  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b\}$  в соответствии с [7].

крайней мере для  $J \leq 2$  физические величины  $\mathbf{F}_0$ ,  $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\hat{D}^{ind}$  являются всюду конечными, но не гладкими в особых точках, если выполнены приближения (14), (16). Рассмотрим этот вопрос на примере представленных коэффициентов (20)–(22) для перехода  $1/2 \rightarrow 1/2$ .

Вклад, содержащий  $\mathbf{g}_1$  в выражении для силы  $\mathbf{F}_0$ , как и аналогичный вклад в выражении для тензора  $\hat{D}^{ind}$ , всюду определен, так как входит в комбинации  $I_0 \mathbf{g}_1$  (с учетом  $S \propto I_0$ ). Для тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  коэффициенты (21) неприменимы в области узлов по причинам, изложенным в предыдущем разделе. Здесь для уточнения  $\hat{\mathcal{X}}$  требуется учет нелинейных по скорости вкладов, аналогичный проведенному в работе [11] для одномерной модели lin- $\theta$ -lin.

Рассмотрим окрестности точек с циркулярной поляризацией. Анализ силы  $\mathbf{F}_0$  и тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  показывает, что вклады с градиентом эллиптичности  $\mathbf{g}_3$  входят в конечном виде  $c\mathbf{g}_3$ . Компоненты, содержащие  $\mathbf{g}_{2,4}$ , также входят в виде  $c^2\mathbf{g}_2$  либо в комбинации  $\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_4 \approx -\mathbf{G}/I_0$ , не имеющей особенностей. Вклады с  $\mathbf{g}_{5,6}$  в выражении для тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  также конечны, однако их асимптотика принципиально различна при  $c \rightarrow 0$  для переходов  $J \rightarrow J + 1$  и  $J \rightarrow J$ . Так, для перехода  $1/2 \rightarrow 1/2$  в соответствии с (21) это антисимметричный тензор

$$\hat{\mathcal{X}} \approx \frac{\hbar}{2}(\mathbf{g}_5 \otimes \mathbf{g}_6 - \mathbf{g}_6 \otimes \mathbf{g}_5),$$

соответствующий вкладу эффективной силы Лоренца  $\hat{\mathcal{X}}\mathbf{v} \approx \mathbf{B}_{eff} \times \mathbf{v}$  с эффективным полем  $\mathbf{B}_{eff} = \hbar\mathbf{g}_5 \times \mathbf{g}_6$ . Для перехода  $1/2 \rightarrow 3/2$  асимптотика имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}} \approx \frac{2\hbar}{4\tilde{\delta}^2 + 1} & \left[ (4\tilde{\delta}^2 - 1) \times \right. \\ & \left. \times (\mathbf{g}_5 \otimes \mathbf{g}_5 + \mathbf{g}_6 \otimes \mathbf{g}_6) + 4\tilde{\delta}(\mathbf{g}_5 \otimes \mathbf{g}_6 - \mathbf{g}_6 \otimes \mathbf{g}_5) \right], \end{aligned}$$

где первое слагаемое, являясь симметричным тензором, описывает процессы радиационного охлаждения за счет вкладов от  $\mathbf{g}_{5,6}$ .

В окрестностях точек с линейной поляризацией особенности тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  связаны только с членами, содержащими  $\mathbf{g}_{5,6}$ . Из выражений (21) видно, что эти вклады конечны в соответствии с асимптотикой ранее введенных векторов  $\mathbf{B}_i$ , но не определены непосредственно в точке линейной поляризации:

$$\hat{\mathcal{X}} \approx \frac{3\hbar}{2} \frac{\mathbf{B}_2 \otimes \mathbf{B}_1 - 2\tilde{\delta} \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_1}{I_0^3 \mathbf{R} \cdot \hat{\mathcal{Q}}_3 \cdot \mathbf{R}}. \quad (23)$$

Для других переходов имеет место аналогичная асимптотика, но с иными коэффициентами при слагаемых.

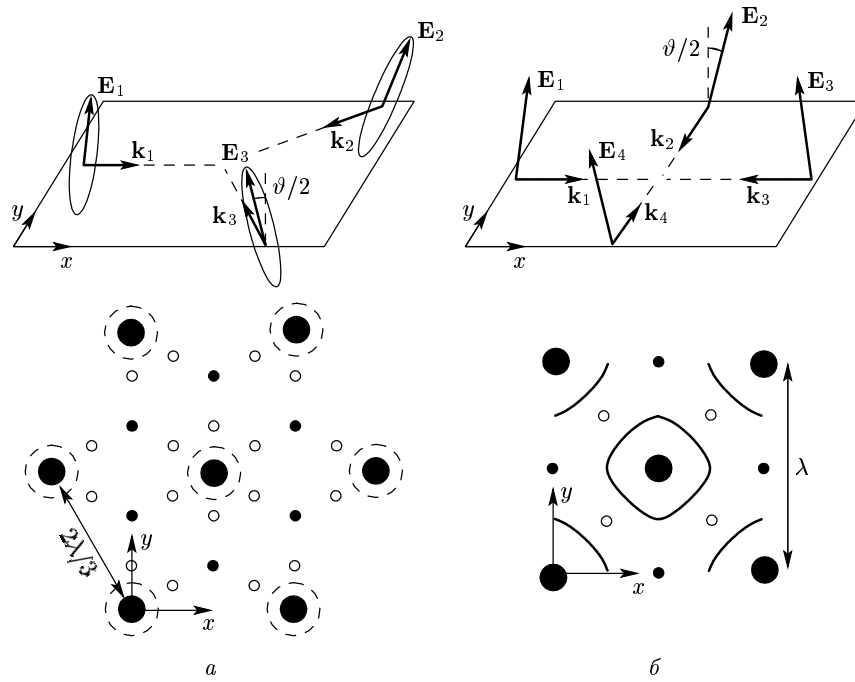


Рис. 2. Вверху — двумерные конфигурации поля А (а) и В (б); внизу — расположение точек, соответствующих экстремальным значениям инвариантов  $I_0, I_1$

Доказательство конечности тензора диффузии  $\hat{D}^{ind}$  в окрестностях с линейной и циркулярной поляризациями более громоздко. Рассмотрим лишь кратко вклады от наиболее «опасных» градиентов. В области циркулярной поляризации слагаемые с коэффициентами  $D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{23}, D_{34}$  конечны вследствие непрерывности и конечности комбинаций вида  $c^2 \mathbf{g}_{2,4}$  и  $c \mathbf{g}_3$ . Вклады с  $D_{22}, D_{24}, D_{44}$  конечны как по причине возникающих комбинаций вида  $\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}$  при их суммировании, так и вследствие конечности векторов  $(c \mathbf{g}_{2,4})$ . Аналогично показывается конечность вкладов с  $\mathbf{g}_{5,6}$ . Следует заметить, что в выражении для тензора диффузии также имеют место аналогичные (23) неопределенности как в точках циркулярной поляризации (за счет вкладов типа  $c^2 \mathbf{g}_{2,4} \otimes \mathbf{g}_{2,4}$  и  $\mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3$ ), так и в точках линейной поляризации (за счет вкладов, содержащих  $\mathbf{g}_{5,6}$ ).

### 6. ПОЛЕВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ СВЕТОВОГО ПОЛЯ

Рассмотрение полевых инвариантов в особых областях для размерностей конфигураций  $D > 1$  дополним и уточним характерными примерами, имеющими следующие общие черты: исходные световые пучки с одинаковой амплитудой  $\tilde{E}$  расположены та-

ким образом, чтобы отсутствовал дрейф атомов, достаточно быстро выводящий их из области взаимодействия с полем. То есть не должно быть эффекта выпрямления дипольной силы, что выражается условием  $\langle \mathbf{F}_0(\mathbf{r}) \rangle_d = 0$  для усредненной силы в любом направлении в масштабе  $d \gg \lambda$ , соответствующем диаметру пучков. Эти конфигурации пригодны и активно используются в экспериментах (модели А2, В, Г) по формированию атомарных решеток [2, 4] и их исследованию. Все конфигурации, кроме случая В, образованы  $D + 1$  световыми пучками, так что структура инвариантов обладает пространственной периодичностью, характеризуемой векторами обратной решетки вида  $\mathbf{s}_n = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{n+1}$ ,  $n = 1, \dots, D$  [18].

#### 6.1. Двумерные конфигурации поля

А. Рассмотрим наиболее общую конфигурацию из трех лучей одинаковой эллиптичности  $\tilde{\epsilon}$ , удовлетворяющую этим условиям. Такой конфигурацией является обобщение предложенной впервые в работе [12] одномерной конфигурации  $\epsilon - \vartheta - \tilde{\epsilon}$ . Пусть волновые векторы  $\mathbf{k}_n$  трех бегущих волн лежат в одной плоскости  $\{\mathbf{k}\}$  под углом  $120^\circ$  относительно друг друга (рис. 2а), а углы наклона между большей осью



поляризации каждой волны и нормалью  $\mathbf{e}_z$  к плоскости одинаковы и равны  $\vartheta/2$ . Для данной конфигурации инварианты  $I_0$  и  $I_1$  имеют вид

$$I_0 = \tilde{E}^2 [3 + C(Z^*Z - 3)], \quad Z = \sum_{n=1}^3 \exp(i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}),$$

$$C = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^*)_{i \neq j},$$

$$I_1 = \tilde{E}^2 [(1 + 2C)(Z^2 - 2Z^*) - 2H(Z^2 - 3Z^*)],$$

$$H = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)_{i \neq j},$$

где

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e}_z + \epsilon \cdot \mathbf{k}_i \times \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + |\epsilon|^2}}$$

— вектор поляризации  $i$ -го луча,

$$\epsilon = \frac{t + i\mathbf{e}}{1 - i t \mathbf{e}}$$

определяется параметрами  $\tilde{\epsilon}, \vartheta$  эллипса поляризации луча. Здесь и далее использованы обозначения  $\mathbf{e} = \text{tg } \tilde{\epsilon}, t = \text{tg } \vartheta/2$ .

Выделим следующие значения параметров  $\vartheta$  и  $\tilde{\epsilon}$ :  
 А1: при эллиптичности

$$\text{tg}^2 \tilde{\epsilon}_0 = \frac{3 \cos \vartheta + 1}{3 \cos \vartheta - 1},$$

когда  $C = 0$ , амплитуда суммарного поля,  $E(\mathbf{r}) = \sqrt{3} \tilde{E}$ , постоянна ( $\mathbf{g}_1 = 0$ ), а поле (1) имеет изолированные точки с циркулярной поляризацией, определяемые условием  $Z = 0$  (малые черные кружки на рис. 2а), к которым добавляются точки (малые белые кружки) в случае  $\tilde{\epsilon} = 0$ , определяемые условием  $Z^2 = 2Z^*$  при  $Z \neq 0$ ;

А2: при  $\vartheta \rightarrow \pi, \tilde{\epsilon} \rightarrow 0$  (линейные поляризации лучей лежат в плоскости  $\{\mathbf{k}\}$ ) в точках, обозначенных на рис. 2а малыми черными кружками, совмещаются максимумы  $E(\mathbf{r})$  и точки циркулярной поляризации, а в точках, обозначенных большими черными кружками, находятся узлы поля с линейной поляризацией, образующиеся лишь в этом и другом предельном ( $\vartheta = 0$ ) случаях;

А3: при  $\vartheta \sim \tilde{\epsilon} \rightarrow 0$  (поляризации лучей близки к линейным и почти перпендикулярны плоскости  $\{\mathbf{k}\}$ ) в областях, обозначенных на рис. 2а малыми черными кружками, очень близко находятся минимумы  $E$  и точки циркулярной поляризации, максимумы  $E$  находятся в точках, обозначенных большими черными кружками.

Первой особенностью конфигурации являются фиксированные (не зависящие от  $\tilde{\epsilon}$  и  $\vartheta$ ) изолированные точки с циркулярной поляризацией, определяемые условием  $Z = 0$  и отмеченные малыми черными

кружками. К ним в случае линейно поляризованных пучков,  $\tilde{\epsilon} = 0$ , и при углах наклона  $t \gtrsim 4$  добавляются замкнутые линии с циркулярной (или почти циркулярной) поляризацией (помечены пунктиром на рис. 2а), формирующиеся вокруг фиксированных точек с линейной поляризацией  $\mathbf{r}_{lin}$  (см. далее). Здесь кривизна линий

$$k r_0 \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \arccos \frac{2t^2 - 1}{2(1 + t^2)}.$$

При меньших углах наклона  $\vartheta$  эти линии трансформируются в фигуры из шести изолированных точек в форме правильных шестиугольников [19] (например, это белые кружки в случае А1). С увеличением эллиптичности  $\tilde{\epsilon}$  исходных пучков эта структура разрушается.

В окрестности фиксированных изолированных точек с циркулярной поляризацией  $\mathbf{r}_{circ}$  (далее выбрана точка  $\mathbf{r}_1 = (x_1 = \lambda/3, y_1 = \lambda/3\sqrt{3})$  на рис. 2) асимптотика инварианта

$$I_0 \approx 9 \tilde{E}^2 [4(\mathbf{e}^2 + t^2) + k^2(x^2 + y^2)(2 - t^2 - \mathbf{e}^2 + 2(\mathbf{e}t)^2)] [8(1 + \mathbf{e}^2)(1 + t^2)]^{-1}$$

указывает на экстремальные интенсивности в этих точках: при  $\tilde{\epsilon} > \tilde{\epsilon}_0$  это минимумы, а при  $\tilde{\epsilon} < \tilde{\epsilon}_0$  — локальные максимумы интенсивности. Из асимптотики другого инварианта  $I_1 \approx \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}$  следует, что

$$\mathbf{A} = \frac{9(k\tilde{E})^2}{4} \exp(i\varphi_0)(1 - \cos 2\tilde{\epsilon} - \cos \vartheta)(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y),$$

где  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  — декартовы орты, постоянная фаза

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{6} - 2 \arctg \frac{t}{\mathbf{e}} + 2 \arctg(t\mathbf{e}).$$

Таким образом, фазовый множитель в окрестности точки  $\mathbf{r}_1$  имеет вид  $\exp(i2\Phi(\mathbf{r})) \approx \exp(i(\tilde{\varphi} + \varphi_0))$ , где  $\tilde{\varphi} = \arctg(y/x)$  — полярный угол. Можно показать, что у соседних точек  $\mathbf{r}_{circ}$  чередуются знаки при  $\tilde{\varphi}$ . То есть векторные поля  $\mathbf{g}_{2,4} \propto \pm \nabla \tilde{\varphi}$  в окрестностях узлов  $\mathbf{r}_{circ}$  решетки направлены азимутально, и направление циркуляции этих полей связано с поляризацией поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_{circ})$ .

Второй особенностью конфигурации являются фиксированные изолированные точки с линейной поляризацией  $\mathbf{r}_{lin}$ , отмеченные большими черными кружками, положение которых определяется условием  $Z = 3$ , или  $\cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_{lin}) = 1, n = 1, \dots, 3$ . В окрестности этих точек (далее выбрана точка  $\mathbf{r}_0 = (x_0 = 0; y_0 = 0)$  на рис. 2)

$$I_0 \approx 9 \tilde{E}^2 [4(1 + \mathbf{e}^2 t^2) - 9k^2(x^2 + y^2)(2 - t^2 - \mathbf{e}^2 + 2(\mathbf{e}t)^2)] [4(1 + \mathbf{e}^2)(1 + t^2)]^{-1}.$$

Это также точки экстремумов интенсивности, однако в отличие от  $\mathbf{r}_{circ}$  в них при  $\tilde{\varepsilon} > \tilde{\varepsilon}_0$  будут локальные максимумы, а при  $\tilde{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}_0$  — минимумы. Анализ полей  $\mathbf{g}_{5,6}$  в окрестности этих точек показал их вихревую структуру: вектор  $\mathbf{g}^{(5)} \propto [\mathbf{c}_1 \times \mathbf{r}]/r$  конечен, но не определен в точке линейной поляризации; вектор  $\mathbf{g}^{(6)} \propto [\mathbf{c}_2 \times \mathbf{r}]/r^2$  асимптотически расходится, в соответствии с общими результатами (11). Здесь

$$\mathbf{c}_1 = \frac{27 \varepsilon t (\varepsilon^2 - 1)}{2 \sqrt{(1 + \varepsilon^2)^3 (1 + t^2) (1 + (\varepsilon t)^2)}} \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{2(\varepsilon^2 - 1)t}{(1 + t^2)\varepsilon} \mathbf{c}_1,$$

$\mathbf{e}_z$  — нормаль к плоскости  $\mathbf{k}$ .

Следует также отметить, что более значимые вихревые структуры у поля  $\mathbf{g}_5$  отмечены в седловидных точках  $\mathbf{r}_{sad}$  поверхности  $s(\mathbf{r})$ .

Б. В двумерных конфигурациях, образуемых четырьмя и более лучами, структура  $I_0, I_1$  существенно зависит от соотношения фаз лучей  $\tilde{\Phi}_i$  [18], что представляет определенные трудности в экспериментальной реализации устойчивых во времени конфигураций. К тому же пространственная структура инвариантных полей в общем случае теряет периодичность [4]. С другой стороны, при определенном подборе параметров становятся в принципе возможными уникальные топологические структуры, не свойственные трехлучевым конфигурациям. Рассмотрим четырехлучевую конфигурацию, являющуюся комбинацией двух перпендикулярных конфигураций  $\text{lin}-\vartheta-\text{lin}$  [11]: лучи имеют одинаковую интенсивность, линейно поляризованы и наклонены под углом  $\vartheta/2$  к нормали  $\mathbf{e}_z$  к  $\{\mathbf{k}\}$ -плоскости с взаимно перпендикулярными соседними волновыми векторами  $\mathbf{k}_n$  (рис. 2б). Для этой модели

$$I_0 = 4\tilde{E}^2 \left\{ \cos^2 \frac{\vartheta}{2} [\cos^2(kx) + 2 \cos(\Delta\Phi) \cos(kx) \cos(ky) + \cos^2(ky)] + \sin^2 \frac{\vartheta}{2} [\sin^2(kx) + \sin^2(ky)] \right\},$$

$$I_1 = 2\tilde{E}^2 \left( \cos \vartheta + \cos(2kx) + 4 \exp(i\Delta\Phi) \times \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos(kx) \cos(ky) + \exp(2i\Delta\Phi) \times [\cos \vartheta + \cos(2ky)] \right),$$

где  $\Delta\Phi$  — относительный сдвиг фаз между конфигурациями  $\text{lin}-\vartheta-\text{lin}$ . Если в трехлучевой конфигурации относительное изменение  $\tilde{\Phi}_i$  приводит к простому сдвигу всей пространственной структуры инвариантов в плоскости  $\{\mathbf{k}\}$ , то теперь с изменением  $\Delta\Phi$  изменяется топологическая структура полей инвариантов.

При  $\Delta\Phi = \pi/2$  и  $\vartheta = \pi/2$  форма полей аналогична варианту А: циркулярная поляризация имеет место в изолированных точках  $\mathbf{r}_{circ}$  (рис. 2б, малые белые кружки); векторные поля  $\mathbf{g}_{2,4}$  имеют форму вихрей с центрами в  $\mathbf{r}_{circ}$ ; распределение интенсивности однородно ( $E = 2\tilde{E}$ ).

При  $\Delta\Phi = 0$  векторные поля  $\mathbf{g}_2$  и  $\mathbf{g}_4$  исчезают, что, например, означает исчезновение соответствующих вкладов в силу  $\mathbf{F}_0$  (18), иначе называемых силой светового давления; этого нельзя добиться в трехлучевой конфигурации. Распределение интенсивности становится неоднородным: на рис. 2б узлы помечены малыми черными кружками, а максимумы — большими черными кружками. Структура областей циркулярной поляризации имеет форму замкнутых линий  $\tilde{I}_1(x, y) = 0$ , определяемых функцией

$$\tilde{I}_1(x, y) = \cos(2kx) + 2 \cos(kx) \cos(ky) + \cos(2ky).$$

Это соответствует случаю, когда удается ввести параметр эллиптичности  $\tilde{c}$  в виде гладкой знакопеременной функции

$$\tilde{c} = \frac{\tilde{I}_1(x, y)}{2[1 + \cos(kx) \cos(ky)]}$$

для всей области полевой конфигурации.

### 6.2. Трехмерные конфигурации поля

Приведенные далее конфигурации  $B, \Gamma, D$  (рис. 3) демонстрируют большое топологическое разнообразие возможных пространственных структур полевых инвариантов даже в сравнительно простых четырехлучевых трехмерных моделях. Варианты  $B, \Gamma$  хорошо известны [2, 4] и часто использовались при исследовании различных процессов в светоиндуцированных пространственных атомарных решетках.

В. Конфигурация образована четырьмя линейно поляризованными лучами одинаковой интенсивности: одна пара пучков с поляризациями вдоль оси  $y$  имеет волновые векторы  $\mathbf{k}_{1,2}$  в плоскости  $xz$  с одинаковым углом  $\vartheta$  между  $\mathbf{k}_i$  ( $i = 1, 2$ ) и осью  $z$ , у второй пары с поляризациями вдоль оси  $x$  волновые векторы  $\mathbf{k}_{3,4}$  лежат в плоскости  $yz$  под тем же углом к оси

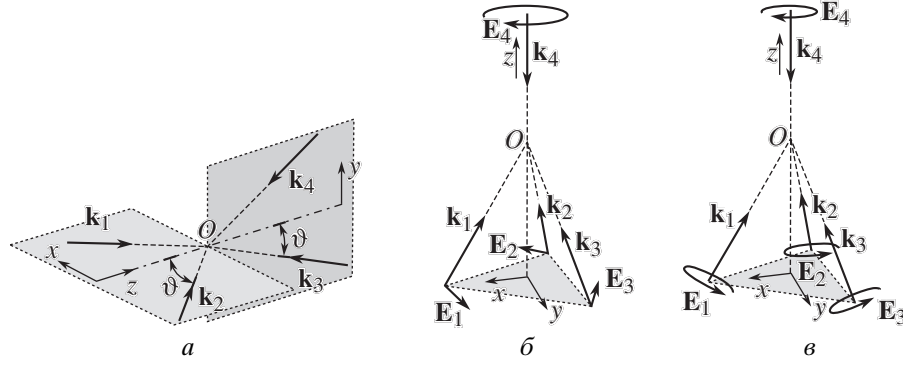


Рис. 3. Трехмерные конфигурации поля  $B$  (а),  $\Gamma$  (б),  $\Delta$  (в)

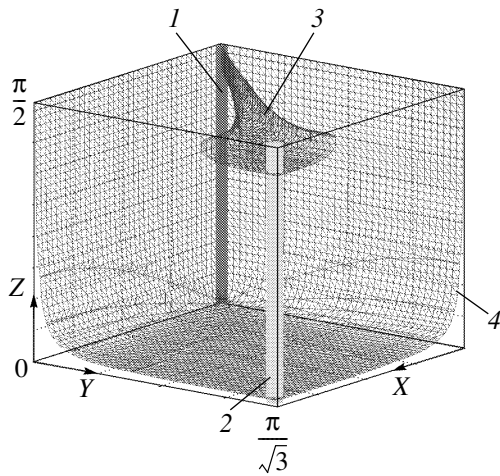


Рис. 4. Линии узлов (1), максимумов интенсивности (2), циркулярной поляризации (3), поверхность линейной поляризации (4) в конфигурации  $B$

$z$  и направлены навстречу первой паре (рис. 3а). В конфигурации отсутствуют градиенты  $g_{5,6}$ , поскольку имеется ось симметрии  $z$ , вдоль которой всегда направлен вектор  $e_0$ , определенный в (5).

В этой модели инварианты имеют простой вид:

$$I_0 = 2\tilde{E}^2 [2 - \cos(2X) - \cos(2Y)],$$

$$I_1 = 2\tilde{E}^2 \{ \cos(2Z) [\cos(2X) + \cos(2Y) - 2] + i \sin(2Z) [\cos(2X) - \cos(2Y)] \},$$

где  $X = kx \sin \vartheta$ ,  $Y = ky \sin \vartheta$ ,  $Z = kz \cos \vartheta$ .

Особые области также имеют простую форму: на прямых, задаваемых условиями  $\cos(2X) = \cos(2Y) = 1$ , лежат узлы поля, тогда как максимумы лежат на прямых  $\cos(2X) = \cos(2Y) = -1$ .

Области циркулярной поляризации задаются прямыми  $\cos(2Z) = \cos(2X) - \cos(2Y) = 0$ . Области линейной поляризации являются поверхностями. Взаимное расположение особых областей показано на рис. 4, где рассмотрена часть периодической структуры, соответствующая половине пространственных периодов по каждому из направлений. Приведена структура (3) поверхности  $c(\mathbf{r}) = 0.1$  вокруг линии циркулярной поляризации, демонстрирующая существенное различие градиента эллиптичности вблизи узлов (1) и максимумов интенсивности (2).

Представляют интерес асимптотики инвариантов в окрестности узлов. Например, в окрестности оси  $z$ , содержащей узлы,

$$I_0 \approx 4\tilde{E}^2 (X^2 + Y^2),$$

$$I_1 \approx 4\tilde{E}^2 [i \sin(2Z)(Y^2 - X^2) - \cos(2Z)(Y^2 + X^2)].$$

Для параметра эллиптичности и общей фазы имеем

$$c = [1 - \sin^2(2\tilde{\varphi}) \sin^2(2Z)]^{1/2},$$

$$\text{tg}(2\Phi) = \cos(2\tilde{\varphi}) \text{tg}(2Z),$$

где  $\text{tg} \tilde{\varphi} = Y/X$ . В окрестности точек пересечения узловых прямых и прямых, соответствующих циркулярной поляризации, фазовый множитель

$$\exp(2i\Phi) = i \text{sign}(\tilde{Y}^2 - \tilde{X}^2),$$

параметр эллиптичности  $c \approx |\cos(2\tilde{\varphi})|$ . Из их вида следует, что при согласовании знаков  $\exp(2i\Phi)$  и  $c(\mathbf{r})$  при выполнении связи  $c \exp(2i\Phi) = I_1/I_0$  в данном случае<sup>4)</sup> удобнее определить знакопеременный непрерывный параметр эллиптичности

<sup>4)</sup> Приведенная выше конфигурация Б при  $\Delta\Phi = 0$  также является таким случаем.

$-1 \leq \tilde{c} \leq 1$ . Например, можно выбрать  $\tilde{c} \approx \cos(2\tilde{\varphi})$  при  $\exp(2i\Phi) = -i$ . В итоге вектор  $\mathbf{g}_3$  имеет расходимость вида  $1/r$  в вырожденной точке, тогда как величины  $\mathbf{g}_{2,4}$  пренебрежимо малы.

Г. Более сложной является четырехлучевая конфигурация с волновыми векторами  $\mathbf{k}_i$ , образующими тетраэдр [2]: циркулярно поляризованная волна  $\mathbf{k}_4$  направлена вдоль оси  $z$ , остальные волны линейно поляризованы, их поляризации лежат в плоскости  $xy$  (рис. 3б). Вдоль оси симметрии  $z$  направлен вектор  $\mathbf{e}_0$  (5), так что градиенты  $\mathbf{g}_{5,6}$ , как и в предыдущей модели, здесь отсутствуют. Инварианты имеют вид

$$I_0 = \tilde{E}^2 \left[ 4 - \sum_{m < n} \cos \left( (\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n) \cdot \mathbf{r} + (-1)^{m+n} \frac{2\pi}{3} \right) + \sqrt{2} \sum_m \cos(\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{r}) \right],$$

$$I_1 = \exp \left( -\frac{3i\tilde{\Phi}}{2} \right) \times \left\{ \sum_{m < n} \exp \left[ i \left( (\mathbf{s}_m + \mathbf{s}_n) \cdot \mathbf{r} - \frac{2\pi(m+n)}{3} \right) \right] \right\} \times \left\{ \sum_{m < n} \exp[i(\mathbf{s}_m + \mathbf{s}_n) \cdot \mathbf{r}] + \sqrt{2} \exp(i\tilde{\Phi}_D) \right\},$$

где  $\mathbf{s}_m = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_m$  ( $m = 1, \dots, 3$ ) — векторы обратной решетки [18],

$$\tilde{\Phi}_D = \sum_m \mathbf{s}_m \cdot \mathbf{r}.$$

В данной конфигурации нет узлов, а минимумы,  $I_0 \approx 0.35 \tilde{E}^2$ , и максимумы,  $I_0 = (11 + 6\sqrt{2}) \tilde{E}^2/2$ , интенсивности располагаются в изолированных точках. Области циркулярной поляризации являются линиями двух видов. Области I, определяемые уравнением

$$\sum_{m < n} \cos \left( (\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n) \cdot \mathbf{r} + (-1)^{m+n} \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3}{2},$$

— это прямые линии, параллельные оси  $z$ . Области II, определяемые уравнением

$$\sqrt{2} \sum_m \cos(\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{r}) + \sum_{m < n} \cos((\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n) \cdot \mathbf{r}) = -\frac{5}{2},$$

представляют неплоские замкнутые линии, проекции которых на плоскость  $xy$  являются окружностями радиуса  $kr_0 \approx 1.75$ . Относительное расположение особых областей представлено на рис. 5. Отметим, что минимумы интенсивности расположены

близко к областям II, а максимумы интенсивности расположены только на тех линиях I, которые окружены областями II. Не показаны области линейной поляризации, являющиеся поверхностями со сложной структурой.

Д. Наконец, рассмотрим симметризованную четырехлучевую конфигурацию с расположением волновых векторов  $\mathbf{k}_i$ , как в предыдущем случае, и с одинаковыми циркулярными поляризациями у всех волн (рис. 3в). Здесь имеются все виды градиентов  $\mathbf{g}_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ). Пусть начало отсчета  $O$  выбрано так, что  $\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_n = -\tilde{E}^2/3$  при  $m \neq n$  для компонент  $\mathbf{E}_m$  ( $m = 1, \dots, 4$ ) лучей конфигурации. Тогда инварианты имеют следующий вид:

$$I_0 = \tilde{E}^2 \left[ 4 - \frac{2}{3} \sum_{m < n} \cos((\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r}) \right], \quad (24)$$

$$I_1 = \frac{2\tilde{E}^2}{3} \sum_{m \neq n} \exp[i(\mathbf{k}_m + \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r} + i\tilde{\Phi}_{mn}] = \frac{8\tilde{E}^2}{3} \left[ \exp \left( -\frac{2\pi i}{3} \right) \cos((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}) + \cos((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}) + \exp \frac{2\pi i}{3} \cos((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{r}) \right] \quad (25)$$

с учетом соотношений

$$\sum_{m=1}^4 \mathbf{k}_m = 0, \quad \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m = 0.$$

Здесь фазовые множители

$$\tilde{\Phi}_{mn} = \frac{\pi}{3} \left( (-1)^{\lfloor (m+n)/2 \rfloor} - (-1)^{\lfloor (m+n+1)/2 \rfloor} \right)$$

определены через операцию  $[a]$  взятия целой части числа  $a$ .

Анализ инвариантов (24), (25) позволяет определить распределение особых областей. Узлы поля располагаются в изолированных точках и образуют объемно-центрированную решетку  $\{\mathbf{r}_{\min}\}$ , задаваемую в соответствии с (24) соотношениями вида  $\cos(\mathbf{s}_n \cdot \mathbf{r}_{\min}) = 1$ , где  $\mathbf{s}_n$  при  $n = 1, \dots, 3$  — векторы обратной решетки ( $\mathbf{s}_n$  в конфигурациях Г и Д совпадают). Области циркулярной поляризации являются прямыми, задаваемыми в соответствии с (25) уравнениями

$$\cos((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}) = \cos((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}) = \cos((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4) \cdot \mathbf{r}).$$

Через каждый узел, являющийся изолированной точкой, проходит четыре таких прямых (на рис. 6

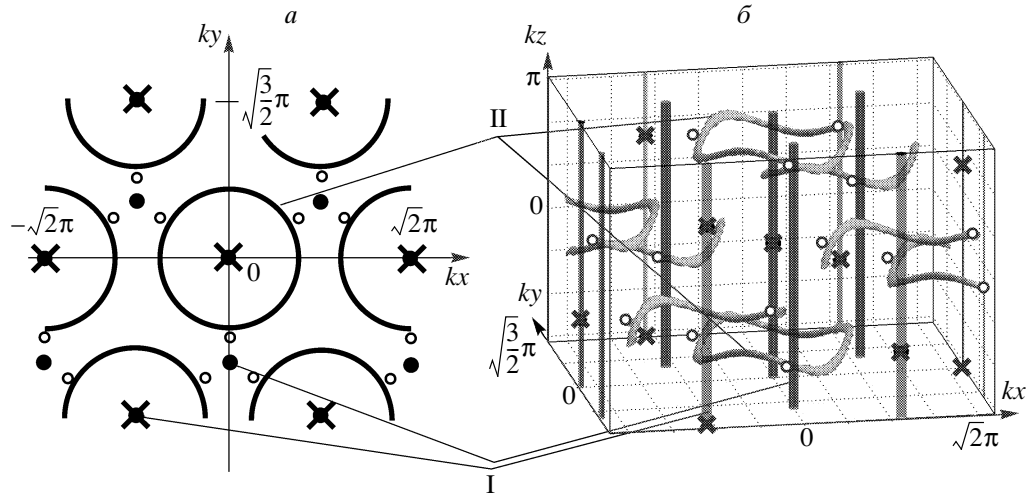


Рис. 5. Точки минимумов (белые кружки) и максимумов (крестики) интенсивности, линии циркулярной поляризации в конфигурации  $\Gamma$ :  $a$  — вид сверху,  $b$  — вид сбоку

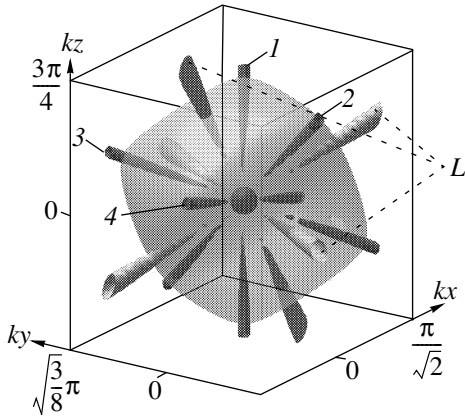


Рис. 6. Узел поля (в центре), направления-лучи с циркулярной (1-4), линейной ( $L$ ) поляризацией и поверхность максимальной интенсивности вокруг узла в конфигурации  $D$

показаны поверхности  $c(\mathbf{r}) = 0.1$ ). Области линейной поляризации также являются прямыми линиями-лучами  $L$ . Три прямых, соответствующих линейной поляризации, взаимно перпендикулярны и задают лучи, перпендикулярные граням воображаемого куба (показаны поверхности  $c(\mathbf{r}) = 0.995$ ). Здесь же легко увидеть кубическую симметрию поверхностей, соответствующих максимальной интенсивности поля. Асимптотики инвариантов в области узлов имеют вид (рассмотрена точка  $\mathbf{r}_{min} = 0$  и здесь выбраны векторы обратной решетки  $\mathbf{s}_m = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_m$ ,

$m = 1, \dots, 3$ ):

$$I_0 \approx \tilde{E}^2 \left[ \sum_n (\mathbf{s}_n \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{2}{3} \sum_{m < n} (\mathbf{s}_m \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{s}_n \cdot \mathbf{r}) \right], \quad (26)$$

$$I_1 \approx -\frac{4\tilde{E}^2}{3} \left[ \exp \frac{2\pi i}{3} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{r}) + \exp \left( -\frac{2\pi i}{3} \right) (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{r}) \right]. \quad (27)$$

Их представление в декартовых координатах имеет вид

$$I_0 \approx \frac{16(k\tilde{E})^2}{9} (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$I_1 \approx \frac{8 \exp(i\pi/3)(k\tilde{E})^2}{9} ((x - iy)^2 - 2\sqrt{2}z(x + iy)),$$

а представление параметра эллиптичности  $c$  в соответствующих сферических координатах,

$$c = \frac{|\sin \theta|}{2\sqrt{2}} [9 + 7 \cos(2\theta) + 2\sqrt{2} \sin(3\varphi - 2\theta) - 2\sqrt{2} \sin(3\varphi + 2\theta)]^{1/2}, \quad (28)$$

показывает его сложную структуру в особой точке. В узле  $\mathbf{r}_{min} = 0$  четыре направления циркулярной поляризации задаются сферическими углами  $1(\theta = 0; \varphi)$ ,  $2(\alpha_0; 0)$ ,  $3(\alpha_0; 2\pi/3)$ ,  $4(\alpha_0; -2\pi/3)$  (рис. 6), где  $\cos \alpha_0 = 1/3$ , и соответствуют направлениям диагоналей в объемно-центрированной решетке. Явный вид (27), (28) показывает, что градиентные инварианты  $\mathbf{g}_2$ ,  $\mathbf{g}_3$  и  $\mathbf{g}_4$  расходятся в области узлов как  $1/r$ .

В представленных трехмерных конфигурациях общими чертами в пространственной структуре векторных инвариантов  $\mathbf{g}_n$  ( $n = 1, \dots, 6$ ) являются: вихревая структура фазовых градиентов  $\mathbf{g}_{2,4}$  вокруг линий циркулярной поляризации, вихревая структура поля  $\mathbf{g}_6$  вокруг линий линейной поляризации (вариант Д).

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выделим основные положения проведенного анализа. В полевых конфигурациях размерности  $D > 1$  имеются особые области, в которых векторные инварианты поля не определены либо расходятся: для градиентов общей фазы и угла поворота эллипса поляризации вокруг своей оси — это области циркулярной поляризации, где их поля в общем случае имеют вихревую структуру и расходятся как  $1/r$ ; для градиента угла поворота малой оси эллипса поляризации это области линейной поляризации, где его поле также имеет вихревую структуру и расходится как  $1/r$ . Вырожденными областями являются узлы поля. В них эллиптичность поля не определена, градиент эллиптичности расходится по закону  $1/r$ , здесь могут пересекаться области циркулярной и линейной поляризации. В окрестностях узлов неприменимо квазиклассическое приближение при рассмотрении кинетики атомов.

Анализ структуры инвариантов в конфигурациях размерности  $D > 1$  позволяет на качественном уровне выделить главные особенности кинетики атомарных ансамблей, что следует из структуры силы  $\mathbf{F}_0$  и тензора трения  $\mathcal{X}$  (18). Аспекты, связанные с рассмотрением механизмов охлаждения и захвата и физической интерпретацией различных вкладов в этих разложениях, обсуждались в работах [7, 20]. При отстройках  $|\delta| \gtrsim 10\gamma$  основной вклад в величины  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathcal{X}$  дают градиенты амплитуды  $\mathbf{g}_1$  и эллиптичности  $\mathbf{g}_3$ . Из явного вида (21) для простейшего перехода  $1/2 \rightarrow 1/2$  следует, что стационарный кинетический режим возможен только при отстройках  $\delta > 0$ , когда имеет место радиационное охлаждение<sup>5)</sup>. Это общее свойство переходов  $J \rightarrow J$  с получелыми  $J$ . Тогда из явного вида  $F_{1,3}$  из (20) и свойств  $\mathbf{g}_{1,3}$  следует, что атомы притягиваются к минимумам интенсивности либо к областям циркулярной поляризации, а из областей максимумов и линейной поляризации происходит их выталкивание. Для

переходов  $J \rightarrow J + 1$  ситуация иная [7]: охлаждение имеет место при  $\delta < 0$ , центрами локализации являются области циркулярной поляризации и максимумы интенсивности, центрами выталкивания — минимумы интенсивности и области линейной поляризации.

Результаты численного моделирования динамики атомов с переходами  $1/2 \rightarrow 1/2$  и  $1/2 \rightarrow 3/2$ , описываемой уравнением Ланжевена, соответствующим уравнению (17), для приведенных выше двумерных конфигураций  $A, B$  показали [21], что степень локализации атомов в области экстремумов интенсивности заметно сильнее в сравнении с таковой в области циркулярной поляризации, если указанные особые области пространственно разделены. Возможно, здесь сказывается влияние остальных составляющих в  $\mathbf{F}_0$ , называемых силой светового давления. В областях циркулярной поляризации они, будучи пропорциональными векторам  $\mathbf{g}_{2,4}$ , имеют вихревую структуру и снижают эффекты локализации. Наложение процессов локализации и выталкивания, порожденных различными градиентами, может привести к многосвязной топологической структуре областей локализации. Например, если происходит совмещение центра притяжения за счет градиента  $\mathbf{g}_1$  ( $\mathbf{g}_3$ ) с центром выталкивания за счет другого градиента  $\mathbf{g}_3$  ( $\mathbf{g}_1$ ), то в двумерных конфигурациях области локализации имеют в этом месте форму кольца [21]. Наибольший эффект при точечной локализации, очевидно, достигается в местах пересечения циркулярной поляризации и соответствующих экстремумов интенсивности. В этом смысле у переходов  $J \rightarrow J + 1$  имеется существенное преимущество, так как пересечение максимумов интенсивности и областей циркулярной поляризации легко реализуемо как в двух- (A2), так и в трехмерных конфигурациях поля, где такие точки пересечения есть<sup>6)</sup> в моделях  $B, \Gamma, D$ . Именно эти области, являющиеся вполне устойчивыми при флуктуациях, образующих конфигурацию полей, определяют главную структуру реализованных к настоящему времени в экспериментах диссипативных решеток [2, 4]. Напротив, в узлах интенсивности эллиптичность не определена и имеет большой градиент в их окрестности, а их положение чувствительно к флуктуациям исходных пучков.

На динамику атомов имеют влияние силовые и диффузионные вклады, происходящие от других

<sup>5)</sup> Коэффициент  $X_{33} < 0$ , что связано с проявлением сизифовского механизма охлаждения [10, 11]

<sup>6)</sup> Пример конфигурации, где таких точек пересечения нет, однако эффекты локализации и субдоплеровского охлаждения также имеют место, рассмотрен в работе [22].

векторных инвариантов  $\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_{5,6}$ . Эти эффекты остаются заметными даже при отстройках  $|\delta| \sim 10\gamma$ , что связано с большими значениями указанных градиентов в определенных областях конфигурации. В итоге формируются дополнительные структуры в плотности атомарных решеток с топологией, не сводящейся к точкам локализации, возникают локализованные вихревые потоки частиц. Их влияние существенно уменьшает среднее время удержания атомов в области локализации. Динамические аспекты здесь могут оказаться весьма разнообразными.

Метод инвариантных величин позволяет по-иному подойти к проблеме пробного светового поля, важной для таких задач, как спектроскопия атомарных решеток и брэгговское рассеяние [4], фоторефракция на атомарных решетках [23] и т.д. Очевидно, даже при малых интенсивностях пробного поля может качественно измениться структура инвариантов общего поля. Во-первых, добавление лишнего поля нарушает их пространственную периодичность. Во-вторых, могут исчезнуть (либо появиться в новых местах) вырожденные точки (узлы). В этом же ряду стоит вопрос об оценке влияния флуктуаций параметров световых пучков, образующих конфигурацию, на свойства конфигурации и в итоге на кинетические и поляризационные характеристики атомарных ансамблей.

Работа выполнена при частичной поддержке программы Министерства образования РФ «Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России» (грант УР.01.01.062).

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Grynberg, C. Triché, L. Guidoni et al., *Europhys. Lett.* **51**, 506 (2000); E. Demler and F. Zhou. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 163001 (2002).
2. G. Grynberg, B. Lounis, P. Verkerk et al., *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2249 (1993).
3. L. Guidoni, C. Triché, P. Verkerk et al., *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3363 (1997).
4. G. Grynberg and C. Robilliard, *Phys. Rep.* **355**, 335 (2001).
5. D. L. Haycock, S. E. Hamman, G. Klose et al., *Phys. Rev. A* **55**, R3991 (1997); D. Boiron, A. Michaud, J. M. Fournier, L. Simard et al., *Phys. Rev. A* **57**, R4106 (1998); S. Friebe, C. D'Andrea, J. Walz, M. Weitz et al., *Phys. Rev. A* **57**, R20 (1998).
6. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. B* **18**, 1661 (1985); J. Javanainen, *Phys. Rev. A* **44**, 5857 (1991).
7. А. В. Безвербный, О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев и др., *ЖЭТФ* **123**, 437 (2003).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
9. G. Nienhuis, P. van der Straten, and S-Q. Shang, *Phys. Rev. A* **44**, 462 (1991).
10. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Amer. B* **6**, 2023 (1989).
11. V. Finkelstein, P. R. Berman, and J. Guo, *Phys. Rev. A* **45**, 1829 (1992).
12. О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин и др., *Письма в ЖЭТФ* **70**, 439 (1999).
13. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин и др., *ЖЭТФ* **114**, 125 (1998).
14. А. В. Безвербный, *ЖЭТФ* **118**, 1066 (2000).
15. Д. А. Варшалович, А. И. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
16. N. L. Manakov, S. I. Marmo, and A. V. Meremianin, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **29**, 2711 (1996).
17. N. L. Manakov, A. V. Meremianin, and A. Starace, *Phys. Rev. A* **61**, 022103 (2000).
18. K. I. Petsas, A. B. Coates, and G. Grynberg, *Phys. Rev. A* **50**, 5173 (1994).
19. A. V. Bezverbny, G. Nienhuis, and A. M. Tumaikin, *Opt. Comm.* **148**, 151 (1998).
20. А. В. Безвербный, *Письма в ЖЭТФ* **74**, 162 (2001).
21. А. В. Безвербный, *Изв. вузов. Физика*, **46**, № 5, 7 (2003).
22. C. Mennerat-Robilliard, L. Guidoni, K. I. Petsas et al., *Eur. Phys. J. D* **1**, 33 (1998).
23. S. Guibal, C. Mennerat-Robilliard, D. Larousserie et al., *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4709 (1997).