

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СКАЧКОВ В ПРОЦЕССЕ ВРАЩЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ ДВУХПОДРЕШЕТОЧНОГО ФЕРРИМАГНЕТИКА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

*Е. В. Розенфельд**

*Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук
620219, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 27 января 2003 г.

Показано, что в двухподрешеточном ферримагнетике вклад межподрешеточного обменного взаимодействия в энергию магнитной анизотропии может дать только высшие константы, удовлетворяющие условию $2K_2 + 3K_3 + \dots > 0$. Поэтому при разных знаках первых констант анизотропии подрешеток этот вклад может обусловить возникновение спонтанного спин-переориентационного перехода второго рода, но не переходов первого рода и связанных с ними скачков при вращении намагниченности. Такие скачки могут возникать только при выполнении противоположного неравенства, и соответствующий вклад в анизотропию может обеспечить только достаточно сильное магнитоупругое взаимодействие.

PACS: 75.10.Nk, 75.10.Jm, 75.25.+z, 75.60.Ej

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание полевых зависимостей намагниченности кристаллов гексагональной системы обычно проводится на основе стандартного феноменологического разложения их энергии:

$$\mathcal{E}(\mathbf{H}, \mathbf{M}) = K_1(M) \cos^2 \theta + K_2(M) \cos^4 \theta + \dots - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}. \quad (1)$$

Входящие в это разложение в качестве параметров константы анизотропии K_1 , K_2 и т. д. определяются из условия наилучшего совпадения получаемых при минимизации выражения (1) зависимостей намагниченности \mathbf{M} от внешнего магнитного поля \mathbf{H} с экспериментальными кривыми намагничивания. Обычно достаточно бывает ограничиться первыми двумя-тремя членами разложения, причем константы анизотропии K_2 и K_3 , описывающие те же вклады в энергию, которые определяют анизотропию кубических кристаллов, малы по сравнению с K_1 . Однако при экспериментальном исследовании поведения соединений редкоземельных (R) и переход-

ных (T) 3d-металлов нередко обнаруживаются аномалии, для описания которых приходится использовать значения K_2 , сравнимые или даже превышающие величину K_1 .

Такое возрастание модуля отношения $|K_2/K_1|$ всегда свидетельствует о возможности возникновения спин-переориентационного перехода. В зависимости от знака K_2 это может быть переход либо второго ($K_2 > 0$), либо первого ($K_2 < 0$) рода. Наибольший интерес для нас в этой работе представляют именно процессы намагничивания первого рода (first order magnetization processes, FOMP), т. е. скачки намагниченности в процессе вращения. На угловой зависимости энергии (1) при этом возникают сразу два минимума (рис. 1а). В результате во внешнем поле, направление которого близко к направлению «трудной» оси, плавное вращение намагниченности будет прервано скачком (рис. 1б). Список соединений, в которых наблюдаются такие скачки, можно найти в [1].

В отсутствие внешнего магнитного поля для возникновения двух минимумов на угловой зависимости энергии необходимо выполнение условия [2]

$$0 < K_1 < -2K_2. \quad (2)$$

*E-mail: rosenfeld@imp.uran.ru

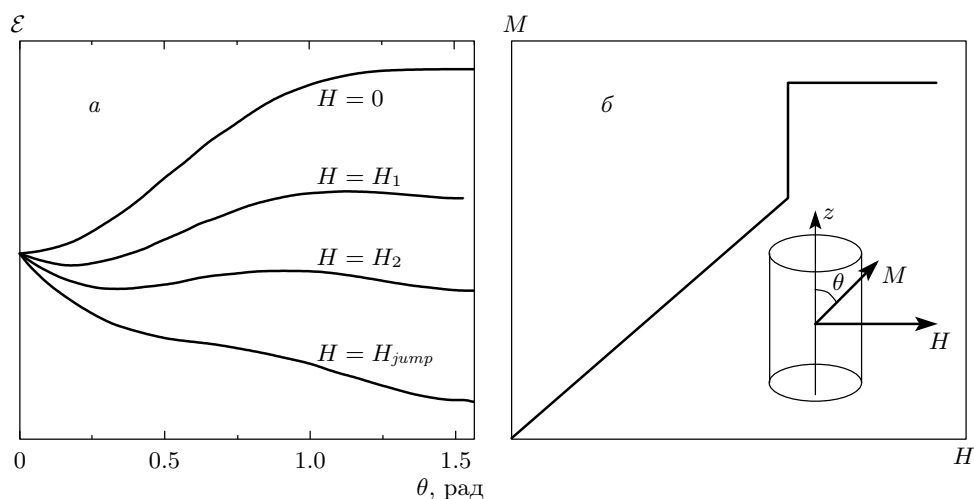


Рис. 1. а) Угловые зависимости энергии (1) при различных напряженностях $0 < H_1 < H_2 < H_{jump}$ внешнего поля, приложенного вдоль трудной оси, и б) проекция намагниченности на поле как функция его напряженности. Скачок возникает при исчезновении метастабильного состояния в поле $H = H_{jump}$

Смысл условия (2) очень прост. Пропорциональное $\cos^4 \theta$ (или $\sin^4 \theta$, если использовать разложение по степеням $\sin \theta$) слагаемое в (1) описывает кривую, которая вблизи одного из своих экстремумов является параболой второго порядка, а вблизи другого — параболой четвертого порядка. Этот последний экстремум оказывается «плоским» — кривизна кривой $K_2 \cos^4 \theta$ в нем равна нулю, и главное из трех объединенных в (2) условие $K_2 < 0$ требует, чтобы этот экстремум был максимумом. Если теперь первое слагаемое имеет в этой области минимум ($K_1 > 0$), то при сложении с плоским максимумом он сохранится. Если к тому же первое слагаемое не слишком велико, $K_1 < 2|K_2|$, то сохранится и минимум, расположенный у подножия плоского максимума (см. рис. 1а). В этой простейшей модели два минимума всегда соответствуют направлениям намагниченности \mathbf{M} вдоль ($\theta = 0$) и поперек ($\theta = \pi/2$) гексагональной оси c (z). Добавив в разложение (1) третье слагаемое $K_3 \cos^6 \theta$, можно сдвинуть минимумы в область $0 < \theta < \pi/2$ [3].

Условие (2) является достаточным, но не необходимым для возникновения скачков намагниченности. Второй минимум на кривой $\mathcal{E}(\theta)$ может появиться и после включения внешнего поля в трудном направлении. Для этого в отсутствие поля кривизна кривой $\mathcal{E}(\theta)$ вблизи максимума должна быть меньше, чем вблизи минимума (кривая с «уплощенным» максимумом). При учете зеемановской энергии на месте этого уплощенного максимума появится второй минимум, если

$$K_2 < 0, \quad 4K_2 < K_1 < -6K_2. \quad (3)$$

Таким образом, необходимым для возникновения скачков намагниченности является только условие $K_2 < 0$. При выполнении обратного неравенства, $K_2 > 0$, более плоским, как нетрудно убедиться, оказывается не максимум, а минимум на зависимости $\mathcal{E}(\theta)$. В этом случае минимум оказывается единственным, но с ростом величины K_2 он может сдвинуться в область $0 < \theta < \pi/2$ — возникает спонтанный (в отсутствие поля) спин-переориентационный переход второго рода (рис. 2).

Такой подход, будучи при феноменологическом описании практически идеальным с точки зрения соотношения простота/качество подгонки, мало что дает для понимания физики возникновения скачков намагниченности. Дело в том, что ни в \mathbf{R} -, ни в \mathbf{T} -подрешетке нет оснований ожидать появления вторых констант большой величины. В первом случае это маловероятно в соответствии с теорией кристаллического поля [4, 5], во втором имеется экспериментальное основание — в однотипных соединениях \mathbf{T} -металла с немагнитным иттрием или лантаном для описания анизотропии достаточно одной лишь первой константы. Следовательно, ни \mathbf{R} -, ни \mathbf{T} -подрешетка сами по себе не могут иметь двух минимумов на угловой зависимости энергии. Поэтому необходим тщательный анализ всех вкладов в энергию магнитной анизотропии, чтобы понять, какие именно взаимодействия ответственны за появление большой второй константы вообще и за возникновение метастабильных состояний в частности.

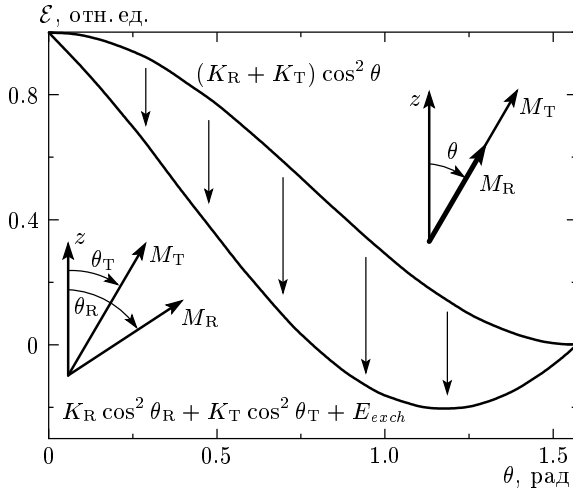


Рис. 2. При бесконечно сильном межподрешеточном обменном взаимодействии моменты подрешеток параллельны и константа анизотропии кристалла равна сумме подрешеточных констант (верхняя кривая). С уменьшением обменной энергии моменты подрешеток в области $0 < \theta < \pi/2$ начинают отклоняться к своим легким осям — возникает новая степень свободы, что понижает энергию (нижняя кривая). В результате максимум обязательно становится более крутым, а минимум — более плоским или даже сдвигается в область $0 < \theta < \pi/2$

Имеются два основных вклада в энергию магнитной анизотропии — обменные взаимодействия магнитных моментов между собой и их взаимодействие с решеткой. Эти вклады рассмотрены в двух следующих разделах работы. Ограничившись областью низких температур, мы не будем учитывать изменение обменной энергии, связанное с изменением модуля спина при его вращении [6, 7]. Поэтому далее считается, что обменный вклад дает только межподрешеточное обменное взаимодействие, энергия которого меняется с изменением угла между спинами подрешеток. Этот вклад во вторую константу анизотропии кристалла всегда положителен и отвечает за возникновение спин-переориентационного перехода второго рода. Что же касается скачков намагниченности, то, если не учитывать возможности возникновения трех и более подрешеток со специфическими обменными взаимодействиями между ними, как это сделано в [1], единственным возможным источником отрицательного вклада в K_2 оказывается магнитоупругое взаимодействие. Полученные выводы использованы для описания кривых намагничивания соединений $Nd_xY_{1-x}Co_5$.

2. ВКЛАД МЕЖПОДРЕШЕТОЧНОГО ОБМЕНА В АНИЗОТРОПИЮ

Для начала рассмотрим классический двухподрешеточный магнетик, т.е. магнетик с очень сильным обменным взаимодействием внутри подрешеток. В этом случае их намагниченности M_R и M_T можно считать классическими векторами, модули которых зависят только от температуры. Ясно, что если M_R и M_T не параллельны осям кристалла, то они не могут быть также параллельными и друг другу, и угол между ними меняется при их вращении. Поэтому, как показано в [8], в такой ситуации необходимо явно учитывать вклад $-I_{RT}(M_R \cdot M_T)/M_R M_T$ в анизотропию от межподрешеточного обменного взаимодействия, где I_{RT} — константа этого взаимодействия. Наиболее существенным он оказывается, когда легкие оси подрешеток взаимно перпендикулярны, и именно этот случай мы будем рассматривать далее.

Ограничиваясь лишь первыми константами анизотропии подрешеток, K_{1R} и K_{1T} , и обозначая через θ_R , θ_T и θ_H углы, составляемые M_R , M_T и H с осью z , запишем энергию системы в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\theta_R, \theta_T) = & -I_{RT} \cos(\theta_R - \theta_T) - \\ & - K_{1T} \cos^2 \theta_T + K_{1R} \cos^2 \theta_R - \\ & - H \{M_R \cos(\theta_H - \theta_R) + M_T \cos(\theta_H - \theta_T)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Эту функцию двух переменных легко свести к функции одной переменной, аналогичной (1):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\theta_R, \theta_T) \rightarrow \mathcal{E}(\theta_T) = & \min \{E_R(\theta_R, \theta_T)\} - \\ & - K_{1T} \cos^2 \theta_T - H M_T \cos(\theta_H - \theta_T), \\ E_R(\theta_R, \theta_T) = & -I_{RT} \cos(\theta_R - \theta_T) + \\ & + K_{1R} \cos^2 \theta_R - H M_R \cos(\theta_H - \theta_R). \end{aligned} \quad (5)$$

Минимизация здесь ведется по θ_R , т.е. считается, что любое вращение вектора M_T сопровождается поворотом вектора M_R в положение, соответствующее минимуму энергии E_R . Если теперь зеemannовская энергия мала по сравнению с константами анизотропии подрешеток, а последние малы по сравнению с межподрешеточной обменной энергией, то в низшем порядке по K_{1R}/I_{RT} можно провести эту минимизацию в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_R - \theta_T) \approx & \frac{K_{1R}}{I_{RT}} \sin(2\theta_T), \\ \mathcal{E}(\theta_T) \approx & (K_{1R} - K_{1T}) \cos^2 \theta_T - \frac{(K_{1R})}{2|I_{RT}|} \times \\ & \times \sin^2(2\theta_T) - H |M_R \pm M_T| \cos(\theta_H - \theta_T). \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку угол между \mathbf{M}_R и \mathbf{M}_T в этом случае мал, намагниченность кристалла в зависимости от знака I_{RT} равна просто сумме или разности намагниченностей подрешеток. Сравнивая (1) и (6), получаем полные константы анизотропии кристалла с энергией (1) как функции подрешеточных констант анизотропии и обменного параметра:

$$K_1 \approx K_{1R} - K_{1T} - 2 \frac{K_{1R}^2}{|I_{RT}|}, \quad K_2 \approx 2 \frac{K_{1R}^2}{|I_{RT}|}. \quad (7)$$

Таким образом, возникающий за счет межподрешеточного обмена вклад в K_2 в таком приближении всегда положителен.

Нетрудно убедиться, что этот вывод остается справедливым при любой величине I_{RT} . Действительно, при бесконечно сильном межподрешеточном обменном взаимодействии моменты подрешеток всегда точно параллельны друг другу. Энергия кристалла при этом равна просто сумме энергий анизотропии подрешеток (см. верхнюю кривую на рис. 2). Если теперь межподрешеточный обмен становится конечным, то появляется новая степень свободы — может меняться угол между намагниченностями подрешеток. Но появление новых степеней свободы у любой системы всегда ведет только к понижению ее энергии. Поэтому, когда обмен становится конечным, энергия должна понижаться, что указано стрелками на рис. 2. Однако в направлениях высокой симметрии — вдоль оси c или в базисной плоскости — моменты подрешеток всегда остаются параллельными и разность энергий этих состояний не меняется. В любых других положениях моменты начинают отклоняться каждый к своей легкой оси, угол между ними растет и энергия понижается. Очевидно, что максимум энергии при этом обязательно становится более крутым, а минимум — более пологим, что означает появление положительной константы анизотропии K_2 .

Мы не стали изображать на рис. 2 кривую с более плоским минимумом, ограничившись случаем, когда $|I_{RT}|$ уменьшается настолько, что выполняется условие [8]

$$|I_{RT}(K_{1R} - K_{1T})| < 2K_{1R}K_{1T}. \quad (8)$$

При этом минимум энергии, оставаясь единственным, смещается внутрь области $0 < \theta < \pi/2$, т.е. за счет фазового перехода второго рода возникает неколлинеарная магнитная структура. Минимизируя (4) при $H = 0$, нетрудно определить положение минимума:

$$\theta_R = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 - 2\alpha_R(\alpha_R - \alpha_T)}{\sqrt{1 + 4\alpha_R\alpha_T}} \right]}, \quad (9)$$

$$\theta_T = \text{sign } I_{RT} \arccos(\alpha_R - \alpha_T) - \theta_R,$$

где

$$\alpha_R = \frac{I_{RT}}{2K_{1R}}, \quad \alpha_T = \frac{I_{RT}}{2K_{1T}}.$$

Использование выражения (5) для энергии, несмотря на зависимость только от одной переменной, в этом случае менее эффективно и резко осложняет вывод выражений (9). Однако приближенные формулы (6), (7) весьма полезны. Они позволяют оценить минимальную величину второй константы анизотропии, которую должна была бы иметь одна из подрешеток, чтобы у системы в целом возникло метастабильное состояние. В низшем порядке по K_{1R}/I_{RT} условие (2) теперь принимает вид

$$2 \frac{K_{1R}^2}{|I_{RT}|} < \frac{K_{1R} - K_{1T}}{2} + \frac{K_{1R}^2}{|I_{RT}|} < -K_{2v}, \quad (10)$$

$$v = R, T.$$

Таким образом, все же существуют условия, при которых даже маленькие по величине вторые константы анизотропии подрешеток могут вызвать появление скачков намагниченности в классическом двухподрешеточном магнетике. Для этого нужно, чтобы величины первых подрешеточных констант были близки, знаки их — противоположны, а межподрешеточное обменное взаимодействие было достаточно сильным. Только в этом случае существенно положительный обменный вклад во вторую константу анизотропии кристалла может не играть главной роли. Однако с уменьшением $|I_{RT}|$ этот вклад становится преобладающим и возникновение скачков намагниченности оказывается невозможным.

Полученные для классического ферромагнетика результаты нельзя непосредственно использовать при анализе магнитных свойств реальных RT-соединений. Дело в том, что у последних обычно практически отсутствует обмен внутри R-подрешетки. Поэтому ее намагниченность не может рассматриваться как классический вектор, что ведет к кардинальному изменению энергии E_R в выражении (5).

Полагая, что классическим вектором является только намагниченность T-подрешетки, а R-ионы «парамагнитны» в действующем с ее стороны обменном поле, вместо (4), (5) получим

$$\mathcal{E}(\theta_T) = F_R(\mathbf{m}) - K_{1T} \cos^2 \theta_T - HM_T \cos(\theta_H - \theta_T),$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}_T/M_T,$$

$$F_R(\mathbf{m}) = -T \ln(Q(\mathbf{m})),$$

$$Q(\mathbf{m}) = \text{Tr} \left\{ -\frac{H_R(\mathbf{m})}{T} \right\}, \quad (11)$$

$$H_R(\mathbf{m}) = I_J(\mathbf{m} \cdot \mathbf{J}) + k_1 J_z^2 + k_2 J_z^4 + \dots + k_{66}(J_+^6 + J_-^6) - g_J \mu_B(\mathbf{H} \cdot \mathbf{J}),$$

где T — абсолютная температура в энергетических единицах, k_i — параметры анизотропии. Магнитный момент R-иона, \mathbf{M}_R , теперь из классического вектора превращается в обычное квантовомеханическое среднее значение:

$$\mathbf{M}_R = g_J \text{Tr} \{ \mathbf{J} \rho(\mathbf{m}) \},$$

$$\rho(\mathbf{m}) = \frac{1}{Q(\mathbf{m})} \exp \left(-\frac{H_R(\mathbf{m})}{T} \right). \quad (12)$$

Здесь \mathbf{J} и $g_J \mathbf{J}$ — операторы полного механического и магнитного моментов R-иона¹⁾, g_J — фактор Ланде, а \mathbf{m} — единичный вектор в направлении момента T-узлов, \mathbf{M}_T .

Если межподрешеточный обмен I_J очень силен, свободная энергия F_R , то совпадающая при $T = 0$ с энергией основного состояния R-иона, в первом порядке теории возмущений равна

$$F_R(\theta) = K_{1R} \cos^2 \theta + K_{2R} \cos^4 \theta + \dots \approx$$

$$\approx [k_1 + k_2(3J - 2)] J \left(J - \frac{1}{2} \right) \cos^2 \theta +$$

$$+ k_2 J \left(J - \frac{1}{2} \right) (J - 1) \left(J - \frac{3}{2} \right) \cos^4 \theta + \dots \quad (13)$$

В этом случае условие (2) возникновения двух минимумов энергии может быть записано в явном виде. Если два минимума должна иметь энергия R-подрешетки, то из (2) и (13) получаем условие

$$0 < k_1 < -k_2(J - 1)(2J - 3).$$

В общем случае в гексагональных решетках $|k_1| \gg \gg |k_2| J^2$ [4, 5], так что и в этой модели R-подрешетка не может быть триггером, запускающим механизм возникновения скачков намагниченности. Два минимума может, однако, иметь и полная энергия $\mathcal{E}(\theta_T)$ в (11), в которой вклад $F_R(\theta_T)$ играет ту же роль, что $K_2 \cos^4 \theta$ в (1). При $H = 0$ для этого нужно, чтобы функция $F_R(\theta_T)$ имела более плоский максимум при $\theta_T = 0$ и достаточно резкий минимум при $\theta_T = \pi/2$:

$$0 < -\frac{\partial^2 F_R}{\partial \theta_T^2} \Big|_{\theta_T=0} < 2K_{1T} < \frac{\partial^2 F_R}{\partial \theta_T^2} \Big|_{\theta_T=\pi/2}. \quad (14)$$

В этом случае при добавлении к $F_R(\theta_T)$ энергии анизотропии T-подрешетки, $-K_T \cos^2 \theta_T$, минимум при $\theta_T = \pi/2$ сохранится, а при $\theta_T = 0$ возникнет еще один. Подставляя (13) в (14), получаем

$$K_{1R} + 2K_{2R} < K_{1T} < K_{1R}. \quad (15)$$

Следовательно, снова, как и для классического ферромагнетика, мы приходим к выводу, что скачок намагниченности в принципе мог бы возникнуть, если бы межподрешеточный обмен оказался сильным, а первые константы анизотропии подрешеток почти точно компенсировали бы друг друга. Но нам не известны двухподрешеточные системы, в которых существование скачков намагниченности действительно было бы связано с такой компенсацией первых подрешеточных констант. Энергия анизотропии в таком соединении должна была бы оказаться гораздо меньше, чем в однотипном соединении T-металла с иттрием или лантаном, а в эксперименте картина обратная.

В реальных RT-соединениях анизотропия R-подрешетки часто примерно того же порядка величины, что и межподрешеточный обмен, и в этой области значений параметров мы предприняли численные расчеты угловой зависимости F_R . В качестве R-элемента был взят Nd ($J = 9/2$, $g_J = 8/11$), и расчеты велись при разных величинах отношения k_v/I_J , $v = 1, 2$.

Если не ограничиваться низшим порядком теории возмущений, то любого одного оператора $k_m J_z^{2m}$ в гамильтониане H_R (11) достаточно, чтобы в разложении (13) возникли сразу все члены, пропорциональные четным степеням $\cos \theta$. Однако соотношение между константами K_{JR} будет, очевидно, сильно зависеть от того, какой именно из параметров k_m отличен от нуля и насколько он велик по сравнению с I_J .

На рис. 3а-в приведены результаты расчета зависимости $F_R(\theta)$ для случая, когда только величина k_1 в (11) отлична от нуля. Видно, что в соответствии с (13), при малых $|k_1|/I_J$ получается симметричная функция, пропорциональная $\cos^2 \theta$. Однако с ростом $|k_1|/I_J$ максимум функции $F_R(\theta)$ становится все более крутым, а минимум — все более пологим. Эта тенденция сохраняется даже после того, как происходит смена основного состояния, т. е. при $k_1 > I_J/(2J - 1)$. Одновременно, естественно, растет роль высших констант в разложении (13). Результаты подгонки рассчитанных численно функций $F_R(\theta)$ тремя первыми членами разложения (13) таковы:

¹⁾ Будем считать эти моменты параллельными.

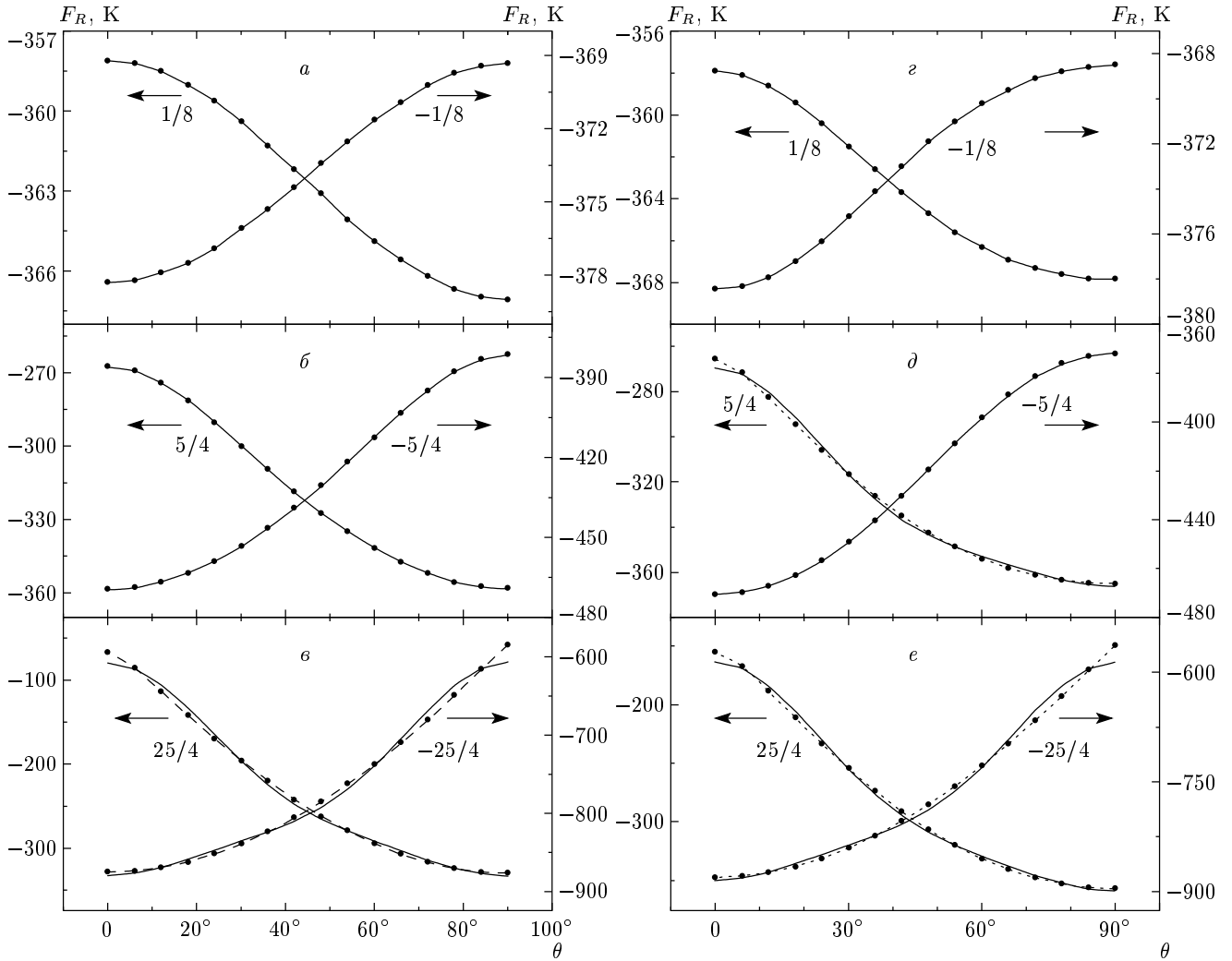


Рис. 3. Зависимости $F_R(\theta)$ при $T = 4$ К, $J = 9/2$, $g_J = 8/11$, $I = 300$ К в случаях, когда в гамильтониане (11) отличны от нуля только k_1 (а-в) и только k_2 (z-e). Штриховые линии с точками — расчет, сплошные линии — аппроксимация функциями (16)–(18) и (19)–(21) соответственно для случаев а-в и z-е. Около стрелок приведены значения $k_1 J^2 / I_J$ (а-в) и $k_2 J^4 / I_J$ (z-д)

рис. 3а —

$$\begin{aligned}
 F_R(\theta)|_{k_1=-0.5 \text{ К}} &\approx -370 - 9.43 \cos^2 \theta + \\
 &\quad + 0.48 \cos^4 \theta - 0.04 \cos^6 \theta, \\
 F_R(\theta)|_{k_1=0.5 \text{ К}} &\approx -367 + 8.61 \cos^2 \theta + \\
 &\quad + 0.37 \cos^4 \theta + 0.04 \cos^6 \theta,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

рис. 3б —

$$\begin{aligned}
 F_R(\theta)|_{k_1=-5 \text{ К}} &\approx -382 - 142 \cos^2 \theta + \\
 &\quad + 87 \cos^4 \theta - 32.6 \cos^6 \theta, \\
 F_R(\theta)|_{k_1=5 \text{ К}} &\approx -358 + 68.5 \cos^2 \theta - \\
 &\quad - 16.3 \cos^4 \theta + 38.7 \cos^6 \theta,
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

рис. 3z —

$$\begin{aligned}
 F_R(\theta)|_{k_2=-25 \text{ К}} &\approx -607 - 721 \cos^2 \theta + \\
 &\quad + 878 \cos^4 \theta - 430 \cos^6 \theta, \\
 F_R(\theta)|_{k_2=25 \text{ К}} &\approx -333 + 220 \cos^2 \theta - \\
 &\quad - 305 \cos^4 \theta + 338 \cos^6 \theta.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Здесь следует заметить, что в разложениях с числом членов, большим двух, условия возникновения более плоских максимумов и минимумов при $\theta = 0, \pi/2$ меняются и вместо $K_2 < 0$ ($K_2 > 0$) возникает условие $2K_2 + 3K_3 + \dots < 0$ ($2K_2 + 3K_3 + \dots > 0$).

На рис. 3z-e показаны результаты таких же расчетов для случая, когда в выражении (11) для H_R отлична от нуля только величина k_2 . Аппроксимация

проводилась с использованием следующих функций:
рис. 3г —

$$\begin{aligned} F_R(\theta)|_{k_2=-0.025 \text{ К}} &\approx -368.5 - 5.33 \cos^2 \theta + \\ &+ 5.44 \cos^4 \theta + 0.88 \cos^6 \theta, \\ F_R(\theta)|_{k_2=0.025 \text{ К}} &\approx -367.8 + 5.11 \cos^2 \theta + \\ &+ 3.78 \cos^4 \theta + 1.02 \cos^6 \theta, \end{aligned} \quad (19)$$

рис. 3д —

$$\begin{aligned} F_R(\theta)|_{k_2=-0.25 \text{ К}} &\approx -372 - 104 \cos^2 \theta - \\ &- 12.6 \cos^4 \theta + 18.2 \cos^6 \theta, \\ F_R(\theta)|_{k_2=0.25 \text{ К}} &\approx -366 + 70.7 \cos^2 \theta - \\ &- 103 \cos^4 \theta + 129 \cos^6 \theta, \end{aligned} \quad (20)$$

рис. 3е —

$$\begin{aligned} F_R(\theta)|_{k_2=-1.25 \text{ К}} &\approx -587 - 778 \cos^2 \theta + \\ &+ 935 \cos^4 \theta - 456 \cos^6 \theta, \\ F_R(\theta)|_{k_2=1.25 \text{ К}} &\approx -3589 + 156 \cos^2 \theta - \\ &- 210 \cos^4 \theta + 249 \cos^6 \theta. \end{aligned} \quad (21)$$

В этом случае при малом отношении $|k_2 J^2 / I_J|$ главным оказывается член, пропорциональный $\cos^4 \theta$ и на зависимости $F_R(\theta)$ может появиться более плоский максимум (рис. 3г). Однако с ростом $|k_2 J^2 / I_J|$ растет вклад поправок следующих порядков, что ведет к отклонению M_R от M_T . В результате в выражении для F_R появляется значительный обменный вклад и при любом знаке k_2 кривизна кривой $F_R(\theta)$ вблизи максимума оказывается больше, чем вблизи минимума (рис. 3д, е). Подчеркнем, что этот вывод справедлив даже при больших отрицательных значениях k_2 (или, что то же, K_{2R} , см. (13)), при которых в классическом случае функция $\min\{E_R\}$ в (5) имела бы более плоский максимум.

Итак, в ферримагнетике с парамагнитной R-подрешеткой, как и в классическом двухподрешеточном ферримагнетике, уменьшение величины межподрешеточного обмена ведет к росту высших констант анизотропии кристалла. По величине они могут сравниваться с первой константой и даже превосходить ее, но практически всегда они связаны условием $2K_2 + 3K_3 + \dots > 0$. Следовательно, энергия межподрешеточного обменного взаимодействия может вести только к появлению спин-переориентационного перехода второго рода. Переход первого рода может возникнуть только при $2K_2 + 3K_3 + \dots < 0$, и для его объяснения необходимо включить в рассмотрение еще какие-то не учтенные до сих пор взаимодействия.

3. СКАЧКИ НАМАГНИЧЕННОСТИ В СИСТЕМЕ СПЛАВОВ $Nd_x Y_{1-x} Co_5$

В конце семидесятых годов Ермоленко [9] обнаружил в сплавах $Nd_x Y_{1-x} Co_5$ с $x \leq 0.4$ резкие скачки намагниченности, которые позднее объяснил [10] на основе модели классического двухподрешеточного магнетика. В этих сплавах атомы кобальта имеют анизотропию типа «легкая ось», атомы неодима — типа «легкая плоскость», а атомы иттрия являются немагнитным аналогом атомов неодима. Поэтому намагниченность и константа анизотропии R-подрешетки, а также энергия межподрешеточного обмена оказываются в такой системе сплавов пропорциональными концентрации x атомов неодима.

На вычисленных в [10] зависимостях полной энергии от θ_{Co} для всех сплавов с $x > 0.1$ имеется по два минимума — один при $\theta_{Co} = 0$ и второй, сдвигающийся с ростом x к $\theta_{Co} = \pi/2$. Это дало возможность не только объяснить скачки на кривых намагничивания сплавов с $x \leq 0.4$, но и предсказать в сплаве $NdCo_5$ существование скачков намагниченности в параллельном оси c поле с напряженностью порядка 350 кЭ. Позднее это предсказание было подтверждено экспериментально [11], что заставляет нас еще раз внимательно рассмотреть предложенные в [10] набор параметров и механизм возникновения скачков намагниченности.

Как указывает автор работы [10], принципиальным моментом в ней является то, что первая константа анизотропии Nd-подрешетки принята равной нулю. Такое значение было выбрано потому, что при небольших углах отклонения намагниченности от оси c кривые намагничивания сплавов с разными x имели примерно одинаковый наклон, т. е. вклад Nd-подрешетки в анизотропию при малых θ_{Nd} отсутствовал. С точки зрения проведенного выше обсуждения это означает, что функция $F_{Nd}(\theta)$ здесь имеет уплощенный максимум. Этот максимум автор работы [10] получил, используя модель (4) и введя слагаемое, пропорциональное $\sin^4 \theta_{Nd}$. В результате вместо соотношений (5) при использовании принятого в [10] разложения по синусам возникают следующие:

$$\begin{aligned} E_{Nd}(\theta_{Nd}, \theta_{Co}) &= -I_{NdCo} \cos(\theta_{Nd} - \theta_{Co}) - \\ &- K_{2Nd} \sin^4 \theta_{Nd}, \\ \sin(\theta_{Nd} - \theta_{Co}) &= \frac{4K_{2Nd}}{I_{NdCo}} \sin^3 \theta_{Nd} \cos \theta_{Nd}. \end{aligned} \quad (22)$$

Нетрудно убедиться, что если межподрешеточный обмен I_{NdCo} не слишком силен, то последнее уравнение относительно θ_{Nd} в некоторой области значений

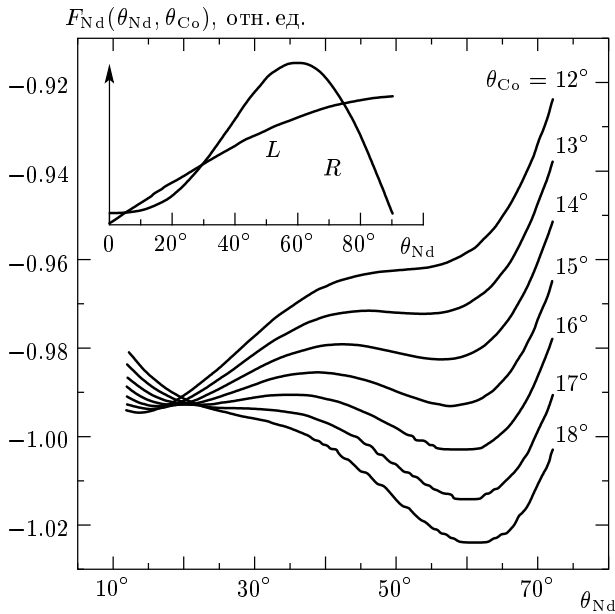


Рис. 4. Зависимость энергии $E_{Nd}(\theta_{Nd}, \theta_{Co})$ сплава $NdCo_5$ от θ_{Nd} (первое уравнение в (22)) при выбранных в [10] значениях параметров. На вставке — графическое решение второго уравнения в (22), буквами «L» и «R» отмечены графики левой и правой частей

θ_{Co} будет иметь три решения. Именно так и обстоит дело при выбранных в [10] значениях параметров (см. вставку к рис. 4). При $\theta_{Co} < 12^\circ$ вектор \mathbf{M}_{Nd} может располагаться только вблизи оси c , а при $\theta_{Co} > 18^\circ$ — только вблизи базисной плоскости. Но при $12^\circ < \theta_{Co} < 18^\circ$ вектор \mathbf{M}_{Nd} имеет одновременно два устойчивых состояния (рис. 4).

Таким образом, намагниченность Nd-подрешетки \mathbf{M}_{Nd} в модели [10] ведет себя подобно триггеру. Она совершает скачкообразные переходы из положения вблизи оси c в положение вблизи базисной плоскости и обратно, когда вектор \mathbf{M}_{Co} поворачивается всего лишь на 6° от $\theta_{Co} = 12^\circ$ до $\theta_{Co} = 18^\circ$. Соответственно, поверхность, являющаяся графиком полной энергии $\mathcal{E}(\theta_{Nd}, \theta_{Co})$, имеет два локальных минимума, разделенных узким «хребтом» в полосе $12^\circ < \theta_{Co} < 18^\circ$.

Как уже говорилось выше, с помощью использованного в [10] предположения удалось не только объяснить уже имевшиеся к тому времени экспериментальные результаты, но и сделать правильные предсказания. Однако все проведенное в настоящей работе обсуждение указывает, что намагниченность R-подрешетки не может вести себя таким образом. Действительно, с одной стороны, крайне маловероятно существование кристаллического поля, в котором $|K_{2R}| \gg |K_{1R}|$. С другой стороны, как подчеркивалось в конце предыдущего раздела, даже в этом случае плоский максимум энергии «парамагнитных» R-ионов возникает, только если анизотропия мала по сравнению с междоузельным обменом. Поскольку R-ионы в реальных соединениях типа RCO_5 действительно практически парамагнитны, а междоузельный обмен относительно невелик, R-подрешетка не может являться триггером сама и не может обеспечить существование метастабильного состояния для Co-подрешетки.

Таким образом, встает вопрос о построении непротиворечивой модели, в которой вклад R-подрешетки в энергию системы $Nd_x Y_{1-x} Co_5$ обеспечивал бы близкую к полученной в [10] угловую зависимость полной энергии. Единственным не учтенным пока вкладом в анизотропию остается магнитоупругое взаимодействие, и вполне естественно связать скачки намагниченности именно с ним. Действительно, при повороте вектора намагниченности кристаллическая решетка всегда деформируется так, чтобы полная энергия кристалла понизилась. В частности, вблизи «трудной» оси магнитоstriction всегда уменьшает константу анизотропии и делает максимум энергии более плоским. Такой эффект, если только он достаточно силен, автоматически обеспечивает возникновение скачков намагниченности, делая «бывшее трудное» направление намагниченности устойчивым. Вопрос, следовательно, сводится лишь к тому, может ли магнитоупругая энергия иметь достаточную величину.

Для ответа на этот вопрос проведем простейшие оценки, действуя в духе общей теории [12]. Чтобы получить основной магнитоупругий вклад, нужно ввести зависимость параметров анизотропии k_i в гамильтониане (11) от параметров решетки a, b, c и деформации ε ,

$$\begin{aligned}
 c &= (1 + \varepsilon) c_0, \quad a = b = \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) a_0, \\
 k_1\left(\frac{c}{a}\right) &= k_1\left(\frac{c_0}{a_0}\right) + \\
 &+ \frac{3}{2}\varepsilon \frac{c_0}{a_0} \frac{\partial}{\partial x} k_1(x) \Big|_{x=c_0/a_0} + \dots \equiv \\
 &\equiv k_{cf} + \varepsilon q_{me} + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

и учесть упругую энергию. Ограничившись единственной упругой постоянной C , записав обменный параметр с учетом правила Де Жена в виде $I_J = (g_J - 1)I$ и полагая, что I не зависит от ε , получим гамильтониан R-иона в виде

$$H_R = (g_J - 1)I(\mathbf{m} \cdot \mathbf{J}) + k_{cf} \left[J_z^2 - \frac{J(J+1)}{3} \right] + \delta H_{me}(\varepsilon) - g_J \mu_B (\mathbf{H} \cdot \mathbf{J}), \quad (24)$$

$$\delta H_{me}(\varepsilon) = \varepsilon q_{me} \left[J_z^2 - \frac{J(J+1)}{3} \right] + \frac{1}{2} C \varepsilon^2.$$

В отличие от (11), здесь вместо J_z^2 используется, как это принято обычно [3, 4], оператор-эквивалент \hat{O}_{20} . В коэффициент перед этим оператором кроме обычной константы анизотропии k_{cf} , связанной с кристаллическим полем недеформированной решетки, входит теперь магнитоупругий вклад εq_{me} . Величина его зависит от деформации ε , которая определяется из условия минимума среднего значения энергии (24). При этом знак величины q_{me} определяет лишь знак деформации ε , а магнитоупругая поправка к энергии всегда отрицательна:

$$\langle \delta H_{me} \rangle = -\frac{q_{me}^2}{C} \left[\langle J_z^2 \rangle - \frac{J(J+1)}{3} \right]^2, \quad (25)$$

где $\langle X \rangle \equiv \text{Tr}(X\rho)$.

Формулы (11), (12), связанные с вычислением матрицы плотности ρ , средних и т. д., остаются для гамильтониана (24) справедливыми, он просто должен быть самосогласован по $\langle J_z^2 \rangle$. Однако в первую формулу в (11), определяющую угловую зависимость полной энергии $\mathcal{E}(\theta_{Co})$, необходимо внести изменения.

В бинарных RT-соединениях кристалл деформируется однородно, средние значения на всех R-узлах одинаковы, и формула (11) для $\mathcal{E}(\theta_{Co})$ остается справедливой. Но в твердом растворе $R_x Y_{1-x} Co_5$, как уже упоминалось выше, те ячейки, где R-узлы заняты атомами иттрия, не дают вклада в энергии анизотропии и обмена с Co-подрешеткой. Поэтому в расчете на ячейку эти энергии должны быть просто пропорциональными концентрации x . Зависимость от x магнитоупругой энергии оказывается более сложной. При отклонении концентрации от $x = 1$ меняется и становится неоднородной сама величина деформации ε , а с ней и плотность магнитоупругой энергии. Поэтому магнитоупругая добавка к энергии в расчете на ячейку будет сложной нелинейной функцией x . Однако, стремясь не количественно объяснить эксперимент, а лишь исследовать возможность возникновения скачков намагниченности за счет магнитоупругости, мы не будем пытаться вычислить эту функцию²⁾. Интересуясь в основном

²⁾ Если полагать, что деформации одинаковы во всех ячейках и их величина пропорциональна x , то это, очевидно, будет функция x^2 .

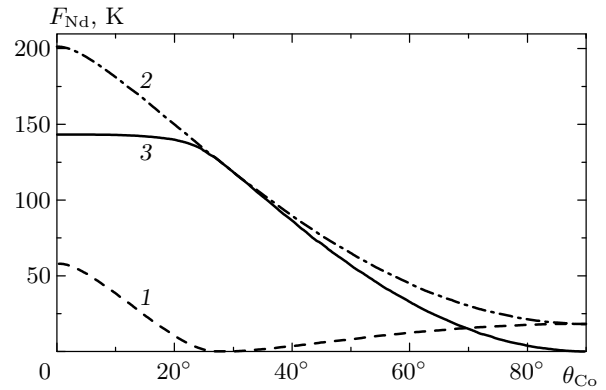


Рис. 5. Угловые зависимости магнитоупругого вклада (кривая 1) и суммы вкладов от магнито-кристаллической анизотропии и междоузельного обменного взаимодействия (кривая 2) в полную энергию F_{Nd} Nd-подрешетки (кривая 3) для сплава NdCo₅. Значения параметров указаны в тексте

областью малых концентраций неодима, будем считать, что деформируемые области вокруг каждого атома неодима не перекрываются. В этом приближении магнитоупругая энергия просто пропорциональна концентрации x и полная энергия системы $R_x Y_{1-x} Co_5$ принимает вид

$$\mathcal{E}(x, \theta_{Co}) = x F_R(\theta_{Co}) - K_{1Co} \cos^2(\theta_{Co}) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}_{Co}. \quad (26)$$

Отличие этого выражения от формулы (11) только в появлении зависимости от концентрации и в необходимости самосогласования.

На рис. 5, 6 приведены результаты численных расчетов по формуле (26) для системы $Nd_x Y_{1-x} Co_5$ со следующими значениями параметров: $I = 350$ К, $J = 9/2$, $g_J = 8/11$, $k_{cf} = 10$ К, $k_{me} \equiv q_{me}^2 J(J+1)/C = 20$ К, $K_{1Co} = 42$ К, $M_{Co} = 8\mu_B/\text{форм. ед.}$ Указанные значения параметров Co-подрешетки взяты из [9, 10], а параметры Nd-подрешетки, как видно из их значений, особенно не подгонялись.

На рис. 5 изображена зависимость полученной из самосогласованного расчета при этих значениях параметров энергии F_{Nd} атома неодима от угла θ_{Co} . Видно, что магнитоупругий вклад (кривая 1) в энергию анизотропии относительно невелик и составляет примерно четверть от суммы вкладов магнито-кристаллической анизотропии и обмена (кривая 2). Однако его появление превращает обсуждавшийся в предыдущем разделе острый пик при $\theta_{Co} = 0$ в широкий и пологий максимум, аналогичный получавшемуся в [10]. С учетом энергии анизотропии

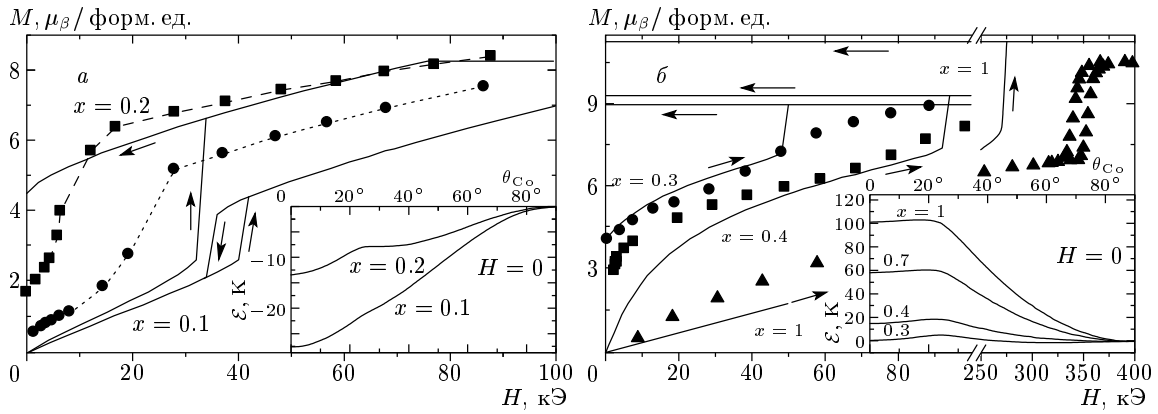


Рис. 6. Кривые намагничивания в полях, параллельных осям *a* (*a*) и *c* (*b*), для сплавов $Nd_xY_{1-x}Co_5$ при *a*) $x = 0.1$ (эксперимент — кружки [9]) и $x = 0.2$ (эксперимент — квадратики [9]); *b*) $x = 0.3$ (эксперимент — кружки [9]), $x = 0.4$ (эксперимент — квадратики [9]); и $x = 1$ (эксперимент — треугольники [11]). На вставках — вычисленные по формуле (26) угловые зависимости энергий этих сплавов

Со-подрешетки мы получаем теперь на угловой зависимости полной энергии всех сплавов $Nd_xY_{1-x}Co_5$ с $x > 0.1$ по два минимума (см. вставки к рис. 6). Поэтому при выключении поля на кривых намагничивания этих сплавов должны возникать скачки и связанные с ними гистерезисные явления. Расчетные кривые намагничивания для сплавов с $x = 0.1$ и $x = 0.2$ в поле, перпендикулярном оси *c*, приведены на рис. 6*a*. Экспериментальная кривая намагничивания [9] для сплава с $x = 0.1$ изображена на этом рисунке кружками, а для сплава с $x = 0.2$ — квадратики. На рис. 6*b* изображены рассчитанные кривые намагничивания для сплавов с $x = 0.3, 0.4, 1$ в поле, параллельном оси *c*, и соответствующие экспериментальные значения — кружки [9], квадратики [9] и треугольники [11]. На вставках к рис. 6 приведены вычисленные зависимости энергий различных сплавов от направления их намагниченности.

Несмотря на отсутствие специальной подгонки, согласие с экспериментом этих полученных при $T = 0$ результатов нельзя, как нам кажется, считать плохим. Однако в соединениях $Nd_xY_{1-x}Co_5$ и в аналогичных им соединениях $Tb_xY_{1-x}Co_5$ кроме низкотемпературных скачков намагниченности имеются спин-переориентационные переходы, возникающие при повышении температуры. Поэтому для определения истинных значений параметров R-подрешетки необходимо добиваться совпадения экспериментальных и рассчитанных положений как скачков намагниченности, так и спин-переориентационных переходов, что выходит за рамки этой работы.

Остается выяснить, возможны ли столь боль-

шие магнитоупругие вклады в анизотропию сплавов $Nd_xY_{1-x}Co_5$. При низких температурах величина упругих модулей этих соединений исследована в [13], где найдено значение $C_{33} \approx 2.5 \cdot 10^{11}$ Дж/м³. Магнитострикционные деформации $\epsilon \approx \delta l/l \approx \lambda_2^{\alpha,2}$ в этой системе сплавов достигают значений около $3 \cdot 10^{-3}$ [14]. Следовательно, магнитоупругий вклад $-C(\delta l/l)^2/2 \approx -10^6$ Дж/м³ действительно может приближаться к 0.1 от полной энергии магнитной анизотропии, составляющей около $2 \cdot 10^7$ Дж/м³ [15]. Здесь, однако, возникает еще один любопытный вопрос — каким образом при $\epsilon \approx 10^{-3}$ магнитоупругий вклад в первую константу анизотропии, т. е. величина q_{me} в (17), может быть столь велик?

Такое соотношение величин вкладов было бы вполне естественным в чистых металлах редкоземельных элементов (РЗ), где при разложении потенциала кристаллического поля на узле в ряд по сферическим функциям коэффициент при Y_{20} равен [5]

$$k_1 \approx Q [(c/a)_{id} - c/a]. \quad (27)$$

Здесь $(c/a)_{id} = \sqrt{8/3} \approx 1.633$ — идеальная величина отношения c/a , при которой ГПУ-решетка становится кубической, а Q — коэффициент, зависящий от зарядов соседних ионов и величины расстояния до них. Поскольку в чистых РЗ-металлах $c_0/a_0 \approx 1.58-1.6$, величина $k_{cf} = Q(1.633 - c_0/a_0)$ оказывается примерно на два порядка меньше, чем Q , а $q_{me} = 1.5(c_0/a_0)Q \approx 2.5Q$. Поэтому при $\epsilon \approx 10^{-3}$ действительно выполняется соотношение $\epsilon q_{me}/k_{cf} \approx 10^{-1}$.

При вычислении величины кристаллического поля на узле РЗ-металла вклады разных знаков в (27)

дают лиганды, лежащие в «своей» и в «чужих» гексагональных плоскостях. Можно, видимо, ожидать, что и в других случаях, когда малые изменения параметров решетки ведут к большим относительным изменениям константы анизотропии, она должна быть суммой двух больших вкладов разных знаков, почти точно компенсирующих друг друга и не одинаково изменяющихся при деформации решетки.

Подчеркнем, что отнюдь не стремление объяснить возникновение скачков намагниченности является причиной введения такого предположения. Оно может быть проверено совершенно независимыми расчетами и экспериментами. В частности, для этого достаточно, зная экспериментальные значения упругих модулей и магнитострикции, сравнить магнитоупругую энергию с энергией магнитной анизотропии.

Что же касается соединений RCO_5 , здесь имеются еще и расчеты кристаллического поля, создаваемого ионами кобальта на R-узле [16]. Геометрия решетки здесь, в отличие от случая чистых R3-металлов, такова, что возможность компенсации вкладов в кристаллическое поле от различных гексагональных плоскостей исключается. Поэтому полученные в [16] значения первой константы анизотропии при разных R оказываются на два порядка больше по величине и имеют противоположные по сравнению с экспериментом знаки. В принципе, разрешить это противоречие можно было бы, введя в рассмотрение какие-либо эффекты сильного экранирования с изменением знака эффективного заряда лиганда [17]. Однако, с учетом экспериментальных значений констант магнитострикции и упругих постоянных [13, 14], нам кажется, следует искать другую причину. Более естественно предположить существование еще одного, близкого по величине, но имеющего противоположный знак вклада в кристаллическое поле, природа которого пока не ясна.

4. ВЫВОДЫ

1. Вклады от межподрешеточного обменного и магнитоупругого взаимодействий в магнитную анизотропию двухподрешеточного ферритмагнетика ведут к росту экспериментально определяемых значений его высших констант анизотропии, которые могут оказаться сравнимыми по величине с первой константой.

2. Высшие константы, связанные с межподрешеточным обменом, удовлетворяют неравенству

$2K_2 + 3K_3 + \dots > 0$. Те же константы, возникающие при учете магнитоупругого вклада, удовлетворяют противоположному неравенству $2K_2 + 3K_3 + \dots < 0$.

3. Только при этом последнем условии возможно возникновение скачков при вращении вектора намагниченности. Поэтому именно магнитоупругие взаимодействия, если только величина их превышает некоторое пороговое значение, могут обусловить возникновение скачков намагниченности в двухподрешеточных ферритмагнетиках.

4. Возможность оценки величины этого порогового значения в аналитическом виде для магнетика с парамагнитной подрешеткой требует отдельного рассмотрения. Для классического магнетика учет магнитострикции означает просто добавление к энергии (4) слагаемого $K_{me}[\cos^2 \theta_R - 1/3]^2$. Следовательно, в этом случае величина K_{me} играет роль константы K_{2R} и может быть оценена из (10).

5. Чтобы при малых деформациях магнитоупругая поправка к константе анизотропии имела заметную величину, энергия магнитной анизотропии должна быть суммой двух больших и примерно равных по величине, но противоположных по знаку вкладов, по-разному зависящих от параметров решетки. В частности, в RCO_5 должен существовать какой-то вклад в кристаллическое поле на R-узле, компенсирующий потенциал ионов кобальта.

6. Если возникновение скачков намагниченности действительно связано с магнитоупругими взаимодействиями, то очень легко оказывается объяснить отсутствие гистерезиса на экспериментальных кривых намагничивания. В реальном кристалле всегда присутствуют сильные внутренние напряжения сжатия и растяжения, в одних областях стабилизирующие зародыши фазы с намагниченностью вблизи оси *c*, а в других — вблизи базисной плоскости. Поэтому переход может идти за счет сдвигов межфазных границ, как это (без конкретизации природы фаз) рассматривалось в [18].

7. Расчеты энергии (20) сплавов $\text{Nd}_x\text{Y}_{1-x}\text{Co}_5$ с указанными выше значениями параметров при отличных от нуля температурах дают неплохо совпадающие с экспериментом области спонтанной спиновой переориентации. Однако, в отличие от обычной теории [8], они предсказывают превращение спин-переориентационных переходов по температуре в переходы первого рода. Параметром, который определяет, будет ли спиновая переориентация идти непрерывно или будет возникать скачок, является энергия магнитоупругого взаимодействия. Если она в области перехода мала, то имеется один минимум и появляется переход второго рода,

а если велика, то минимумов оказывается два и возникает переход первого рода. Подтвердить или опровергнуть это экспериментально можно было бы, исследуя магнитные и/или акустические шумы Баркгаузена при изменении температуры в области перехода.

Автор благодарен Ю. П. Ирхину за многочисленные ценные дискуссии, а также А. С. Ермоленко и Н. В. Мушникову за полезные обсуждения экспериментальных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-16440).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Yu. Irkhin, *J. Phys.: Condens. Matter* **14**, 6865 (2002).
2. Л. Г. Оноприенко, *ФММ* **17**, 350 (1964).
3. Т. Asti and F. Bolzoni, *J. Magn. Magn. Mat.* **20**, 29 (1980).
4. M. T. Hutchings, *Sol. St. Phys.* **16**, 227 (1964).
5. Т. Kasuya, *Magnetism*, Vol. 2B, Acad. Press, New York–London (1966), p. 212.
6. E. R. Callen and H. V. Callen, *J. Phys. Chem. Sol.* **16**, 310 (1960).
7. А. С. Ермоленко, Е. В. Розенфельд, Ю. П. Ирхин и др., *ЖЭТФ* **69**, 1743 (1975).
8. Ю. П. Ирхин, Е. В. Розенфельд, *ФТТ* **16**, 485 (1974).
9. А. С. Ермоленко, *ФММ* **50**, 952 (1980).
10. А. С. Ермоленко, *ФММ* **53**, 706 (1982).
11. M. I. Bartashevich, T. Goto, M. Yamaguchi et al., *Sol. St. Comm.* **87**, 1093 (1993).
12. E. R. Callen and H. V. Callen, *Phys. Rev.* **139**, A455 (1965).
13. А. В. Дерягин, Г. М. Квашнин, А. М. Капитонов, *ФТТ* **26**, 3106 (1984).
14. А. В. Андреев, А. В. Дерягин, С. М. Задворкин, *ЖЭТФ* **85**, 974 (1983).
15. E. Tatsumoto, T. Ocamoto, H. Fujii, and G. Inoue, *J. de Phys.* **32**, Suppl. C1-550 (1971).
16. Ю. П. Ирхин, Е. И. Заболоцкий, Е. В. Розенфельд, В. П. Карпенко, *ФТТ* **15**, 2963 (1973).
17. V. Yu. Irkhin and Yu. P. Irkhin, *Phys. Rev. B* **57**, 2697 (1998).
18. Ю. П. Ирхин, *ФТТ* **45**, 676 (2003).