

СТРУКТУРНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ПОЛЯ И ТОКА В ЗАДАЧЕ О ПРОВОДИМОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД. ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин*

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119991, ГСП-1, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 апреля 2003 г.

Рассмотрены структурные флуктуации — средние по объему образца — от квадратов напряженности электрического поля Δ_E^2 и плотности тока Δ_j^2 в различных неоднородных проводящих системах. Найдены явные выражения для Δ_E^2 и Δ_j^2 в случае слабонеоднородной среды, а также в линейном по концентрации одной из компонент приближении. Для системы с фазовым переходом металл–диэлектрик критическое поведение величин Δ_E^2 и Δ_j^2 рассмотрено в рамках стандартной феноменологической гипотезы подобия. В ходе численного эксперимента на неупорядоченных решетках структурные флуктуации определены и затабулированы в широкой области изменения входящих в задачу параметров.

PACS: 41.20.Cv, 72.80.Ng

1. ВВЕДЕНИЕ

В неоднородной проводящей среде распределение тока и поля очевидным образом является неоднородным. Это приводит к тому, что среднее (по объему образца) от квадрата напряженности электрического поля E или плотности тока j не равно квадрату среднего значения $\langle E \rangle$ или $\langle j \rangle$. Поэтому структурные флуктуации поля Δ_E^2 и тока Δ_j^2 , вычисленные по формулам (3), (4) из разд. 2, могут служить характеристиками степени неоднородности в распределении этих величин, а также, опосредованно, степени неоднородности системы. Во избежание недоразумений подчеркнем, что величины Δ_E^2 и Δ_j^2 определяются геометрией (структурой) среды и не связаны с температурными флуктуациями, существующими и в однородных системах и имеющими, как правило, малый порядок величины.

Резко неоднородными являются системы с фазовым переходом металл–диэлектрик, где следует ожидать особенно больших флуктуаций поля и тока в окрестности критической концентрации (порога протекания) p_c . Так, из точных выражений, полученных в работе Дыхне [1] для двумерных двухкомпонентных систем с критическим составом ($p = p_c = 1/2$),

следует, что величины Δ_E^2 и Δ_j^2 неограниченно растут при $h = \sigma_2/\sigma_1 \rightarrow 0$, где σ_i ($i = 1, 2$) — проводимость i -й компоненты. Согласно работе [2] неограниченный рост флуктуаций должен наблюдаться также при $p \rightarrow p_c$ и $h = 0$ как в двумерном, так и в трехмерном случаях. В [3] найдены общие выражения для величин Δ_E^2 и Δ_j^2 , связывающие их с безразмерной эффективной проводимостью f . Соответствующие соотношения позволяют обобщить результаты работ [1, 2] и дать полное описание критического поведения структурных флуктуаций поля и тока.

В настоящей работе структурные флуктуации поля Δ_E^2 и тока Δ_j^2 рассмотрены в широкой области изменения концентрации p и параметра $h = \sigma_2/\sigma_1$. Для величин Δ_E^2 и Δ_j^2 найдены явные аналитические выражения в случае слабонеоднородной среды, а также в линейном по концентрации включений приближении. С помощью общих соотношений, полученных в [3], выяснено (в рамках гипотезы подобия [4]) критическое поведение структурных флуктуаций.

В работе приведены также результаты численного эксперимента на неупорядоченных решетках (задача связей), в ходе которого определялась как эффективная проводимость σ_e , так и величины Δ_E^2 и Δ_j^2 . Структурные флуктуации представлены в гра-

*E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

фическом виде во всем интервале изменения концентрации p при ряде фиксированных значений параметра h . Из поведения величин Δ_E^2 и Δ_j^2 в окрестности порога протекания p_c определены их критические индексы, согласующиеся с соответствующими индексами эффективной проводимости.

Из аналитических и численных результатов работы следует, что структурные флуктуации Δ_E^2 и Δ_j^2 в некоторой области изменения параметров p и h связаны определенным соотношением: $\Delta_j^2 = \Delta_E^2$ в двумерном и $\Delta_j^2 = 2\Delta_E^2$ в трехмерном случаях. Подстановка в эти равенства общих выражений для Δ_E^2 и Δ_j^2 (см. формулы (13), (14) в тексте) дает для безразмерной эффективной проводимости f дифференциальные уравнения. Решениями этих уравнений являются выражения, совпадающие с соответствующими формулами для f , полученными в рамках так называемой теории эффективной среды [5].

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В задаче о проводимости неоднородной среды необходимо решить уравнения постоянного тока

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \hat{\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad (1)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ — плотность тока, $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ — тензор проводимости среды в точке \mathbf{r} . Тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ определяется обычным образом:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \hat{\sigma}_e \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (2)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ — среднее по объему образца V при $V \rightarrow \infty$. Наряду с проводимостью существенный интерес представляет и изучение величин

$$\Delta_E^2 = \frac{\langle (\mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle)^2 \rangle}{\langle \langle \mathbf{E} \rangle \rangle^2}, \quad (3)$$

$$\Delta_j^2 = \frac{\langle (\mathbf{j} - \langle \mathbf{j} \rangle)^2 \rangle}{\langle \langle \mathbf{j} \rangle \rangle^2}, \quad (4)$$

которые будем называть структурными флуктуациями напряженности электрического поля и плотности тока.

В силу известного тождества (см., например, [1])

$$\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \langle \mathbf{j} \rangle, \quad (5)$$

эффективная проводимость изотропной среды может быть представлена в виде

$$\sigma_e = \frac{\langle \sigma \mathbf{E}^2 \rangle}{\langle \langle \mathbf{E} \rangle \rangle^2}. \quad (6)$$

Для N -компонентной системы (композита) согласно (6) имеем

$$\sigma_e = \sum_{i=1}^N \sigma_i \psi_i, \quad \psi_i = \langle \mathbf{E}^2 \rangle^{(i)} / \langle \langle \mathbf{E} \rangle \rangle^2. \quad (7)$$

Здесь $\langle \dots \rangle^{(i)}$ — интеграл по объему i -й компоненты V_i , деленный на объем образца V ; σ_i — проводимость i -й компоненты. Из (5) следует также, что

$$\psi_i = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i}. \quad (8)$$

В справедливости равенства (8) можно убедиться, умножив его на σ_i и просуммировав по всем i . В результате получим тождество

$$\sum_i \sigma_i \psi_i = \sum_i \sigma_i \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i},$$

в котором левая сторона равна σ_e согласно (7), а правая равна σ_e в силу теоремы Эйлера об однородных функциях. Из выражений (3), (4) с учетом (7), (8) находим

$$\Delta_E^2 = \sum_i \psi_i - 1, \quad \Delta_j^2 = \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_i \sigma_i^2 \psi_i - 1 \quad (9)$$

или

$$\Delta_E^2 = \sum_i \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i} - 1, \quad \Delta_j^2 = \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_i \sigma_i^2 \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i} - 1. \quad (10)$$

Для изотропной бинарной системы эффективную проводимость σ_e представим в виде

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 f(p, h), \quad h = \sigma_2 / \sigma_1, \quad (11)$$

где p — концентрация (доля занимаемого объема) первой компоненты. В этом случае из выражений (8)–(10) следует [3], что

$$\psi_1 = f - hf', \quad \psi_2 = f', \quad f' \equiv \partial f(p, h) / \partial h, \quad (12)$$

$$\Delta_E^2 = f + (1 - h)f' - 1, \quad (13)$$

$$\Delta_j^2 = [f(1 - f) - h(1 - h)f'] f^{-2}. \quad (14)$$

Исключение из (13), (14) производной f' дает соотношение [2]

$$h\Delta_E^2 + f^2\Delta_j^2 = (1 - f)(f - h). \quad (15)$$

Из соотношения (15) при $h = 0$ следует, что ($p \geq p_c$)

$$f(p, 0) = (1 + \Delta_j^2)^{-1}. \quad (16)$$

Поскольку $f(p, 0) \rightarrow 0$ при стремлении p к критической концентрации p_c , $\Delta_j^2 \rightarrow \infty$ при $h = 0$ и $p \rightarrow p_c + 0$.

Для двумерной случайно-неоднородной системы с критическим составом ($p = p_c = 1/2$) согласно [1] имеем

$$f\left(\frac{1}{2}, h\right) = \sqrt{h}. \quad (17)$$

Подстановка (17) в (13), (14) дает

$$p = \frac{1}{2}: \quad \Delta_E^2 = \Delta_j^2 = \frac{1}{2}(h^{-1/4} - h^{1/4})^2, \quad (18)$$

что совпадает с соответствующим результатом работы [1]. Из (18) следует, что в этом случае $\Delta_E^2 = \Delta_j^2 \rightarrow \infty$ при $p = p_c$ и $h \rightarrow 0$. Отметим, что выражения (17), (18) справедливы при произвольных h .

Для анизотропной N -компонентной среды вместо (8) получаем

$$\langle E_\alpha E_\beta \rangle^{(i)} = \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}^e}{\partial \sigma_{\alpha\beta}^i} \langle E_\gamma \rangle \langle E_\delta \rangle, \quad (19)$$

где $\langle \dots \rangle^{(i)}$ — то же, что и в (7), $\sigma_{\gamma\delta}^e = (\hat{\sigma}_e)_{\gamma\delta}$, $\sigma_{\alpha\beta}^i = (\hat{\sigma}_i)_{\alpha\beta}$. В этом случае

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \sum_i \left\{ \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}^e}{\partial \sigma_{xx}^i} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}^e}{\partial \sigma_{yy}^i} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}^e}{\partial \sigma_{zz}^i} \right\} \langle E_\gamma \rangle \langle E_\delta \rangle, \quad (20)$$

$$\langle \mathbf{j}^2 \rangle = \sum_i \sigma_{\alpha\beta}^i \sigma_{\alpha\gamma}^i \frac{\partial \sigma_{\mu\nu}^e}{\partial \sigma_{\beta\gamma}^i} \langle E_\mu \rangle \langle E_\nu \rangle. \quad (21)$$

Отметим, что в анизотропном случае величины $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ и $\langle \mathbf{j}^2 \rangle$ зависят от направления $\langle \mathbf{E} \rangle$.

3. СЛАБОНЕОДНОРОДНАЯ СРЕДА

Для изотропной слабонеоднородной среды согласно [6] получаем

$$\sigma_e = \langle \sigma \rangle \left\{ 1 - \frac{1}{D} \frac{\langle (\sigma - \langle \sigma \rangle)^2 \rangle}{(\langle \sigma \rangle)^2} \right\}, \quad (22)$$

где D — размерность пространства ($D = 2, 3$). Методом [6] можно найти и структурные флуктуации

$$\Delta_E^2 = \frac{1}{D} \frac{\langle (\sigma - \langle \sigma \rangle)^2 \rangle}{(\langle \sigma \rangle)^2}, \quad (23)$$

$$\Delta_j^2 = \frac{D-1}{D} \frac{\langle (\sigma - \langle \sigma \rangle)^2 \rangle}{(\langle \sigma \rangle)^2}. \quad (24)$$

Выражения (22)–(24) справедливы при произвольной зависимости проводимости σ от координат;

$\langle \dots \rangle$ — среднее по объему образца или, что то же, по ансамблю. В частности, для N -компонентной среды

$$\langle \langle \dots \rangle \rangle = \sum_{i=1}^N p_i \langle \dots \rangle_i, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad (25)$$

где p_i — концентрация i -й компоненты.

Для двухкомпонентной системы из (22)–(24) следует, что

$$f = 1 - (1-p)(1-h) - \frac{1}{D} p(1-p)(1-h)^2, \quad (26)$$

$$\Delta_E^2 = \frac{1}{D} p(1-p)(1-h)^2, \quad (27)$$

$$\Delta_j^2 = (D-1)\Delta_E^2, \quad (28)$$

где h — то же, что и в (11). Формулы (26)–(28) справедливы с точностью до членов порядка $(1-h)^2$ включительно во всем интервале изменения концентрации. В частности, при $D = 2$ и $p = 1/2$ согласно (26)–(28) имеем

$$f = 1 - \frac{1}{2}(1-h) - \frac{1}{8}(1-h)^2,$$

$$\Delta_E^2 = \Delta_j^2 = \frac{1}{8}(1-h)^2.$$

Эти же результаты следуют из точных формул (17), (18) при $|1-h| \ll 1$. Нетрудно убедиться также, что подстановка формулы (26) в общие соотношения (13), (14) приводит к выражениям (27), (28).

Для слабонеоднородной анизотропной среды методом работы [6] (см. также [7]) получаем

$$\sigma_{\alpha\beta}^e = \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle - \langle \delta \sigma_{\alpha\gamma} \delta \sigma_{\beta\delta} \rangle q_{\gamma\delta}, \quad \delta \hat{\sigma} = \hat{\sigma} - \langle \hat{\sigma} \rangle, \quad (29)$$

$$q_{\alpha\beta} = \frac{\overline{m_\alpha m_\beta}}{\mathbf{m} \langle \hat{\sigma} \rangle \mathbf{m}}. \quad (30)$$

Здесь \mathbf{m} — единичный вектор, черта в (30) означает усреднение по углам. Если главные оси тензора $\langle \hat{\sigma} \rangle$ совпадают с декартовыми осями координат, то матрица $q_{\alpha\beta}$ диагональна, причем

$$q_{xx} = \frac{n^{(x)}}{\langle \sigma_{xx} \rangle}, \quad q_{yy} = \frac{n^{(y)}}{\langle \sigma_{yy} \rangle}, \quad q_{zz} = \frac{n^{(z)}}{\langle \sigma_{zz} \rangle}, \quad (31)$$

где $n^{(\alpha)}$ — коэффициенты деполяризации эллипсоида с полуосями

$$a_x = \frac{1}{\langle \sigma_{xx} \rangle}, \quad a_y = \frac{1}{\langle \sigma_{yy} \rangle}, \quad a_z = \frac{1}{\langle \sigma_{zz} \rangle}. \quad (32)$$

В этом же приближении находим, что

$$\langle (\mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle)^2 \rangle = Q_{\alpha\beta} \langle \delta \sigma_{\alpha\gamma} \delta \sigma_{\beta\delta} \rangle \langle E_\gamma \rangle \langle E_\delta \rangle, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{j} - \langle \mathbf{j} \rangle)^2 \rangle &= \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle \langle \sigma_{\alpha\gamma} \rangle Q_{\beta\gamma\mu\nu} \langle \delta\sigma_{\mu\delta} \delta\sigma_{\nu\rho} \rangle \langle E_\delta \rangle \langle E_\rho \rangle - \\ &- 2 \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle q_{\beta\gamma} \langle \delta\sigma_{\alpha\mu} \delta\sigma_{\gamma\nu} \rangle \langle E_\mu \rangle \langle E_\nu \rangle + \\ &+ \langle \delta\sigma_{\alpha\beta} \delta\sigma_{\alpha\gamma} \rangle \langle E_\beta \rangle \langle E_\gamma \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $q_{\alpha\beta}$ — то же, что и в (30),

$$Q_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left[\frac{m_\alpha m_\beta m_\gamma m_\delta}{\langle \hat{\sigma} \rangle \mathbf{m}^2} \right] = - \frac{\partial q_{\alpha\beta}}{\partial \langle \sigma_{\gamma\delta} \rangle}, \quad (35)$$

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta\gamma\gamma}. \quad (36)$$

Можно убедиться, что для изотропной среды из (29), (33) и (34) следуют выражения (22)–(24). Заметим, что результаты (22)–(24) справедливы и для неупорядоченных решеток (задача связей) — квадратной для $D = 2$ и простой кубической для $D = 3$.

4. ЛИНЕЙНОЕ ПО КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При произвольном соотношении между проводимостями компонент среды изложенный в предыдущем разделе метод нахождения величин σ_e , Δ_E^2 и Δ_j^2 наталкивается на известные трудности, так как в этом случае необходимо просуммировать бесконечный ряд теории возмущений. Можно, однако, вычислить эффективную проводимость σ_e и структурные флуктуации Δ_E^2 , Δ_j^2 в достаточно общем виде для бинарной системы с малой концентрацией одной из компонент.

Пусть в изотропной среде проводимости σ_1 имеется включение (тело) произвольной формы с проводимостью σ_2 , находящееся во внешнем однородном электрическом поле E_0 . На больших от тела расстояниях выражение для потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ имеет обычный дипольный вид

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (37)$$

в трехмерном и

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + 2 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + \dots \quad (38)$$

в двумерном случаях. Здесь

$$p_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} E_{0\beta}, \quad \Lambda_{\alpha\beta} = v \alpha_{\alpha\beta}, \quad (39)$$

где v — объем (площадь при $D = 2$) тела (включения). В задаче о диэлектрической проницаемости \mathbf{p} — электрический дипольный момент тела; $\hat{\alpha}$ — безразмерный тензор дипольной поляризуемости, зависящий от формы включения и отношения диэлектрических проницаемостей компонент $\varepsilon_2/\varepsilon_1$. В рассматриваемой задаче о проводимости вместо отношения $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ следует подставлять $h = \sigma_2/\sigma_1$.

В линейном по концентрации второй компоненты с приближении эффективная проводимость бинарной системы имеет вид (см., например, [8])

$$\sigma_e = \sigma_1 \left\{ 1 + c \frac{4\pi}{D} \text{Sp } \hat{\alpha} \right\}. \quad (40)$$

Здесь и ниже предполагается, что включения одинаковы и хаотически ориентированы. В том же приближении для величины $\langle \mathbf{E} \rangle$ имеем (ср. с [8])

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_0 \left\{ 1 - c \frac{4\pi}{D^2} \text{Sp } \hat{\alpha} \right\}, \quad (41)$$

где \mathbf{E}_0 — напряженность электрического поля в среде в отсутствие включений. При выводе формул (40) и (41) использованы соотношения (П.5) и (П.6).

Выражение для функции ψ_1 (см. (7)) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{E}) \rangle^2 \psi_1 &= \frac{1}{V} \int_{V_1} \mathbf{E}^2 dV \equiv \frac{1}{V} \int_{V_1} (\mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle)^2 dV + \\ &+ 2 \langle \mathbf{E} \rangle \frac{1}{V} \int_{V_1} \mathbf{E} dV - p \langle (\mathbf{E}) \rangle^2, \end{aligned} \quad (42)$$

где $p = V_1/V$. С учетом соотношения (П.17) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{V_1} (\mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle)^2 dV &= \frac{1}{V} \sum_a \int_{V_e} (\mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle)^2 dV = \\ &= -c \left\{ \frac{4\pi}{D} \left[\frac{1+h}{1-h} \text{Sp } \hat{\alpha} + h \frac{\partial}{\partial h} \text{Sp } \hat{\alpha} \right] + 1 \right\} \langle (\mathbf{E}) \rangle^2. \end{aligned} \quad (43)$$

Далее, с учетом (П.5) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{V_1} \mathbf{E} dV &= \langle \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{V} \sum_a \int_v \mathbf{E} dV = \\ &= \left\{ 1 + c \frac{4\pi}{D} \frac{1}{1-h} \text{Sp } \hat{\alpha} \right\} \langle \mathbf{E} \rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

В соотношениях (43) и (44) суммирование идет по всем включениям, число которых равно N_a , так что $c = v N_a/V$. В выражении (43) $V_e = V_a - v$, где $V_a = V/N_a$ — объем образца, приходящийся на одно включение ($V_a \gg v$). Подстановка (43) и (44) в (42) дает

$$\psi_1 = 1 + c \frac{4\pi}{D} \left\{ \text{Sp } \hat{\alpha} - h \frac{\partial}{\partial h} \text{Sp } \hat{\alpha} \right\}. \quad (45)$$

Соответственно для ψ_2 с учетом (П.12) находим:

$$\psi_2 = c \frac{4\pi}{D} \frac{\partial}{\partial h} \text{Sp } \hat{\alpha}. \quad (46)$$

Подстановка (45) и (46) в (9) дает окончательно

$$\Delta_E^2 = c \frac{4\pi}{D} \left\{ \text{Sp } \hat{\alpha} + (1-h) \frac{\partial}{\partial h} \text{Sp } \hat{\alpha} \right\}, \quad (47)$$

$$\Delta_j^2 = -c \frac{4\pi}{D} \left\{ \text{Sp } \hat{\alpha} + h(1-h) \frac{\partial}{\partial h} \text{Sp } \hat{\alpha} \right\}. \quad (48)$$

Нетрудно видеть, что выражения (40), (45)–(48) удовлетворяют соотношениям (12)–(14). Для «слабо-неоднородного» ($|\sigma_1 - \sigma_2|/\sigma_1 \ll 1$) тела согласно [8] с точностью до членов порядка $(1-h)^2$ включительно имеем

$$\text{Sp } \hat{\alpha} = -\frac{1}{4\pi} [D(1-h) + (1-h)^2]. \quad (49)$$

Подстановка (49) в (40), (47), (48) приводит к выражениям (26)–(28) в линейном по $c = 1 - p$ приближении.

Для включений сферической (круговой при $D = 2$) формы $\alpha_{\alpha\beta} = \alpha \delta_{\alpha\beta}$, где

$$\alpha = -\frac{D}{4\pi} \frac{1-h}{D-1+h},$$

так что из (40), (47), (48) следует ($c \ll 1$), что

$$f = 1 - cD \frac{1-h}{D-1+h}, \quad (50)$$

$$\Delta_E^2 = cD \left(\frac{1-h}{D-1+h} \right)^2, \quad \Delta_j^2 = (D-1)\Delta_E^2. \quad (51)$$

Выражение (50) согласуется с [6]. В дискретном случае (задача связей) результаты (50), (51) справедливы соответственно для квадратной ($D = 2$) и простой кубической ($D = 3$) решеток.

5. КРИТИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ

Для случайно-неоднородной системы с фазовым переходом металл–диэлектрик безразмерная эффективная проводимость f в критической области ($h \ll 1$, $|\tau| \ll 1$, $\tau = (p - p_c)/p_c$) в рамках гипотезы подобия имеет вид [4] (см. также [9, 10])

$$\tau > 0, \quad \Delta_0 \ll \tau \ll 1:$$

$$f = \tau^t \left\{ A_0 + A_1 \frac{h}{\tau^{t/s}} + \dots \right\}, \quad (52)$$

$$|\tau| \ll \Delta_0: \quad f = h^s \left\{ a_0 + a_1 \frac{\tau}{h^{s/t}} + \dots \right\}, \quad (53)$$

$$\tau < 0, \quad \Delta_0 \ll |\tau| \ll 1:$$

$$f = \frac{h}{(-\tau)^q} \left\{ B_1 + B_2 \frac{h}{(-\tau)^{t/s}} + \dots \right\}, \quad (54)$$

$$\frac{t}{s} = t + q. \quad (55)$$

Здесь $\Delta_0 = h^{s/t}$ — размер области размазки [4], p_c — критическая концентрация (порог протекания). Критические индексы t , s и q положительны (причем $s < 1$) и связаны между собой соотношением (55), являющимся следствием гипотезы подобия [4]. Численные коэффициенты в разложениях (52)–(54) имеют порядок единицы, при этом A_0 , A_1 , a_0 , a и B_1 — положительны, а $B_2 < 0$. Согласно (17) в двумерном случае $s = 1/2$, $a_0 = 1$. Из соотношения взаимности [1] следует, что для двумерной системы $t = q$ и $A_0 B_1 = 1$, $A_0 B_2 + A_1 B_1 = 0, \dots$ [9].

Из (13), (14) с учетом (52)–(54) находим критическое поведение структурных флуктуаций Δ_E^2 и Δ_j^2 (выписываем только главные члены соответствующих разложений) —

$$\tau > 0, \quad \Delta_0 \ll \tau \ll 1:$$

$$\Delta_E^2 \approx \frac{A_1}{\tau^{q'}}, \quad \Delta_j^2 \approx \frac{1}{A_0} \frac{1}{\tau^t}, \quad (56)$$

$$|\tau| \ll \Delta_0: \quad \Delta_E^2 \approx s a_0 \frac{1}{h^{1-s}}, \quad \Delta_j^2 \approx \frac{1-s}{a_0} \frac{1}{h^s}, \quad (57)$$

$$\tau < 0, \quad \Delta_0 \ll |\tau| \ll 1:$$

$$\Delta_E^2 \approx \frac{B_1}{(-\tau)^q}, \quad \Delta_j^2 \approx -\frac{B_2}{B_1} \frac{1}{(-\tau)^{t'}}, \quad (58)$$

где

$$q' = \frac{t}{s} - t, \quad t' = \frac{t}{s} - q. \quad (59)$$

При выполнении соотношения (55) имеем $t' = t$ и $q' = q$, так что критические индексы величины Δ_E^2 (как и Δ_j^2) выше и ниже точки фазового перехода (вне области размазки) оказываются одинаковыми. Для двумерной системы, кроме того, в этом случае $\Delta_E^2/\Delta_j^2 \approx \text{const}$ во всех трех областях применимости формул (56)–(58).

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Численный эксперимент на неупорядоченных решетках (задача связей) ставился стандартным образом [5] (см. также [9, 10]). Каждому узлу решетки r приписывался потенциал V_r . Проводимость связи между соседними узлами принимала значение $\sigma_1 = 1$ с вероятностью p («чистые» связи) и $\sigma_2 = h$ с вероятностью $1 - p$ («дефектные» связи). При

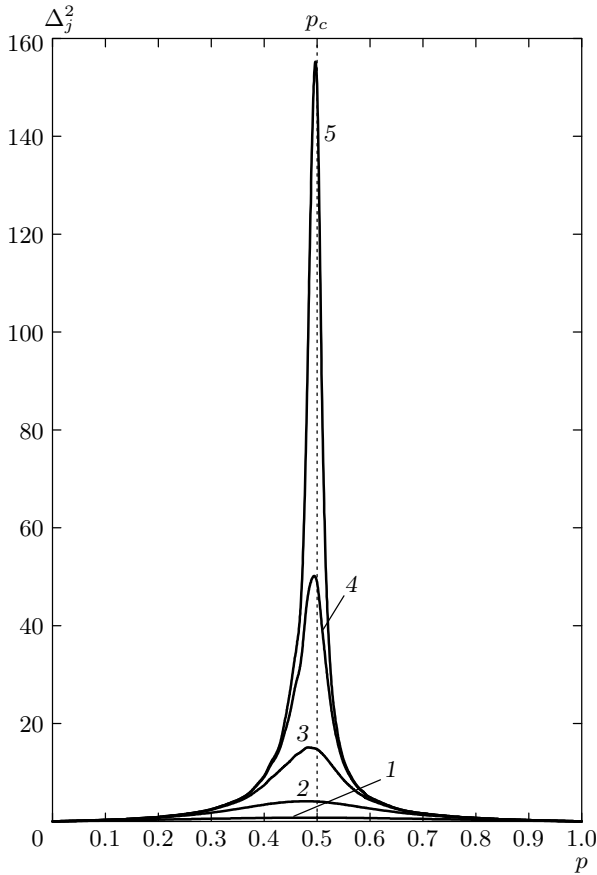


Рис. 1. Величина Δ_j^2 как функция концентрации p при пяти значениях аргумента h : 1 — $h = 10^{-1}$, 2 — $h = 10^{-2}$, 3 — $h = 10^{-3}$, 4 — $h = 10^{-4}$, 5 — $h = 10^{-5}$. Двумерный случай

некоторой фиксированной концентрации p осуществлялась «реализация», т. е. соответствующая доля $1 - p$ связей в исходно чистой решетке случайным образом заменялась на дефектные. Затем решалась на ЭВМ система уравнений Кирхгофа при заданных граничных условиях. Найденные таким образом потенциалы V_r использовались для вычисления различных эффективных характеристик решеточной модели — безразмерной проводимости f и структурных флуктуаций Δ_E^2, Δ_j^2 . (Более подробно организация численного эксперимента описана в [9, 10].) В трехмерном случае рассматривалась простая кубическая решетка размером $51 \times 51 \times 51$ узлов, в двумерном — квадратная решетка размером 401×401 узлов. При исследовании критической области для каждой фиксированной концентрации производилось 20 реализаций при $D = 3$ и 15 реализаций при $D = 2$. Результаты численного эксперимента для величин Δ_E^2 и Δ_j^2 представлены на рис. 1–4.

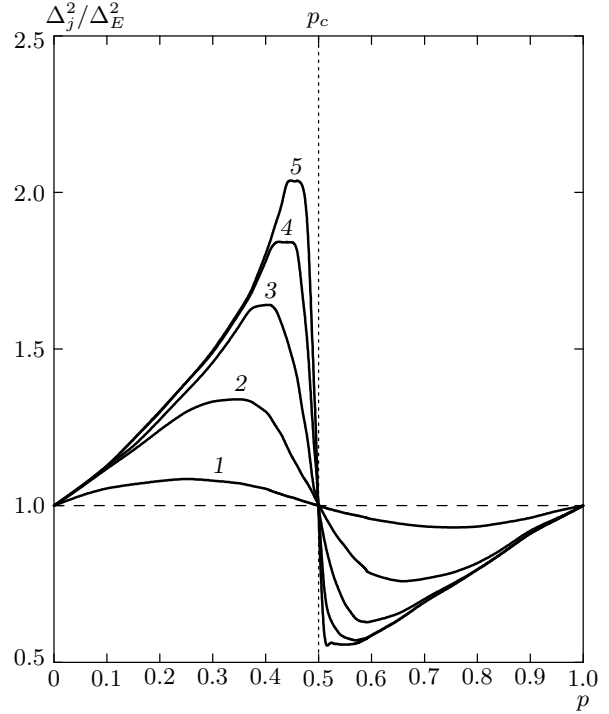


Рис. 2. Отношение Δ_j^2/Δ_E^2 как функция концентрации p при тех же значениях аргумента h , что и на рис. 1. Двумерный случай

В двумерном случае обработка данных численного эксперимента для Δ_E^2 и Δ_j^2 в критической области дает следующие оценки индексов и коэффициентов:

$$t = 1.3 \pm 0.1, \quad t' = 1.3 \pm 0.2, \quad s = 0.50 \pm 0.05,$$

$$q = 1.3 \pm 0.1, \quad q' = 1.3 \pm 0.2, \quad (60)$$

$$A_0 = 1.8 \pm 0.2, \quad A_1 = 1.0 \pm 0.2, \quad a_0 = 1.00 \pm 0.05,$$

$$B_1 = 0.60 \pm 0.05, \quad B_2 = -0.8 \pm 0.3, \quad (61)$$

несколько уточняющие результаты работы [9]. Значение индекса t соответствует литературным данным.

Поскольку $q' \approx q$ и $t' \approx t$, $\Delta_E^2/\Delta_j^2 \approx \text{const}$ в интервалах концентрации, указанных в (56) и (58). Отсюда находим

$$A_0 A_1 = 1.80 \pm 0.06, \quad \frac{B_2}{B_1^2} = -2.20 \pm 0.05. \quad (62)$$

Наконец, из отношений величин $\Delta_E^2(\tau > 0)/\Delta_E^2(\tau < 0)$ и $\Delta_j^2(\tau > 0)/\Delta_j^2(\tau < 0)$, взятых в симметричных относительно $\tau = 0$ точках (вне области размазки), получаем

$$\frac{A_1}{B_1} = 1.65 \pm 0.05, \quad A_0 \frac{B_2}{B_1} = -2.30 \pm 0.05. \quad (63)$$

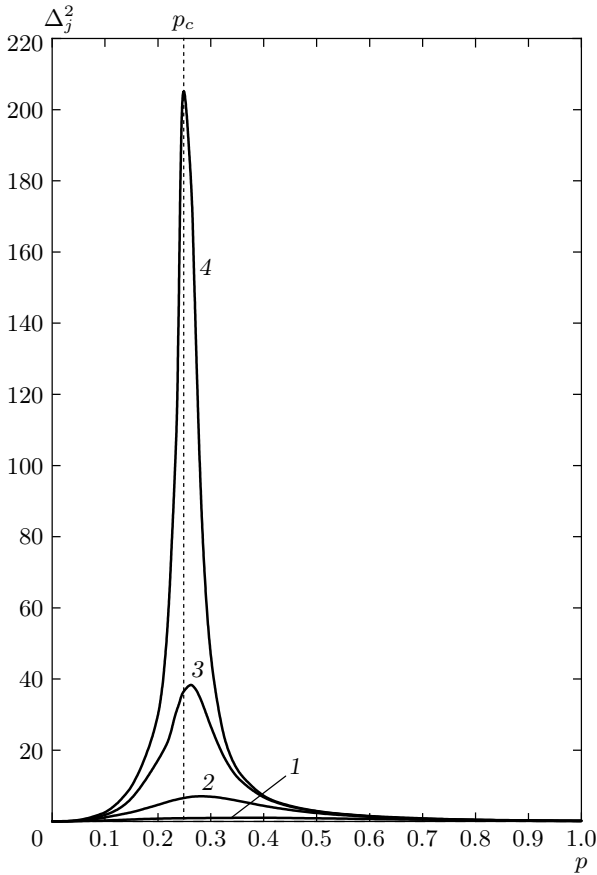


Рис. 3. Величина Δ_j^2 как функция p при четырех значениях аргумента h : 1 – $h = 10^{-1}$, 2 – $h = 10^{-2}$, 3 – $h = 10^{-3}$, 4 – $h = 10^{-4}$. Трехмерный случай

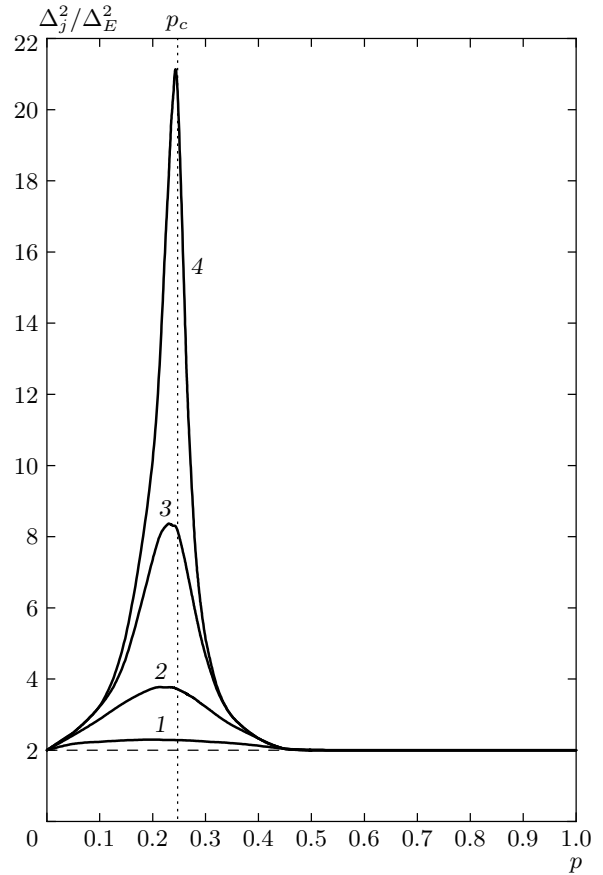


Рис. 4. Отношение Δ_j^2/Δ_E^2 как функция p при тех же значениях h , что и на рис. 3. Трехмерный случай

Отметим, что точность определения комбинаций коэффициентов (62), (63) выше, чем точность определения самих коэффициентов, см. (61).

В трехмерном случае обработка данных численного эксперимента для Δ_E^2 и Δ_j^2 дает

$$t = 2.0 \pm 0.1, \quad t' = 2.0 \pm 0.1, \quad s = 0.7 \pm 0.1, \\ q = 0.8 \pm 0.1, \quad q' = 0.8 \pm 0.1, \quad (64)$$

$$A_0 = 0.4 \pm 0.1, \quad A_1 = 3.0 \pm 0.2, \quad a_0 = 1.0 \pm 0.1, \\ B_1 = 0.7 \pm 0.2, \quad B_2 = -1.0 \pm 0.6. \quad (65)$$

Из отношения величин Δ_E^2 (а также Δ_j^2) выше и ниже точки фазового перехода аналогично (63) получим

$$\frac{A_1}{B_1} = 4.2 \pm 0.1, \quad A_0 \frac{B_2}{B_1} = -0.6 \pm 0.2. \quad (66)$$

Оценки (64), (65) согласуются с результатами работы [10]. Значения критических индексов (64) соответствуют литературным данным.

В настоящей работе величины Δ_E^2 и Δ_j^2 вычислены только при $h < 1$. Исследованная система является, однако, случайно-неоднородной, макроскопические свойства которой не меняются при одновременной замене $p \rightarrow 1 - p$ и $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$. Это означает, в частности, что для эффективной проводимости имеет место равенство $\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_e(1 - p; \sigma_2, \sigma_1)$, откуда следует соотношение

$$f(p, h) = hf(1 - p, 1/h). \quad (67)$$

При малой концентрации первой компоненты p из (67) с учетом (50) получаем

$$p \ll 1: \quad f = h \left\{ 1 + pD \frac{1 - h}{(D - 1)h + 1} \right\}. \quad (68)$$

Для структурных флуктуаций Δ_E^2 и Δ_j^2 из (13), (14) и равенства (67) следует, что

$$\Delta_E^2(p, 1/h) = \Delta_E^2(1 - p, h), \\ \Delta_j^2(p, 1/h) = \Delta_j^2(1 - p, h). \quad (69)$$

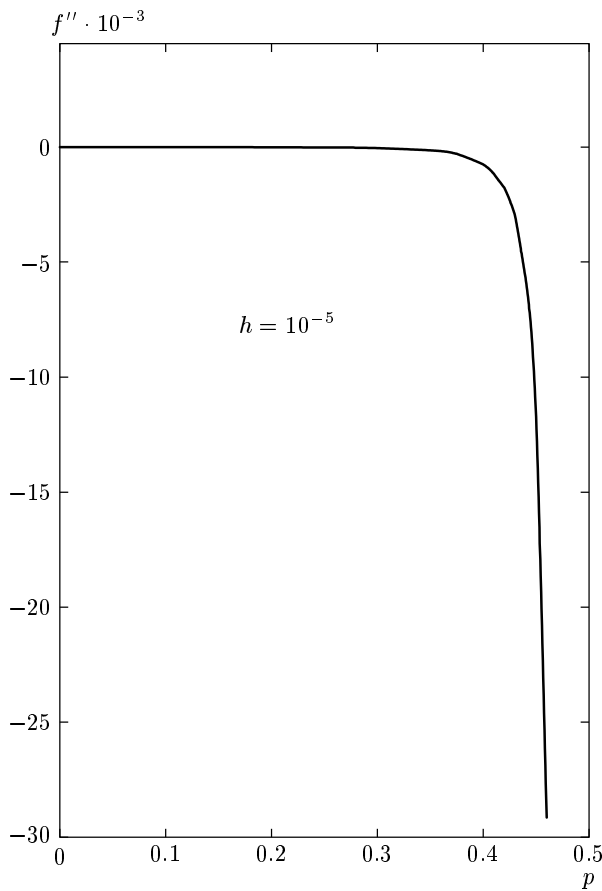


Рис. 5. Вторая производная $f'' = \partial^2 f / \partial h^2$ при $h \rightarrow 0$ как функция концентрации p ($p < p_c$). Двумерный случай

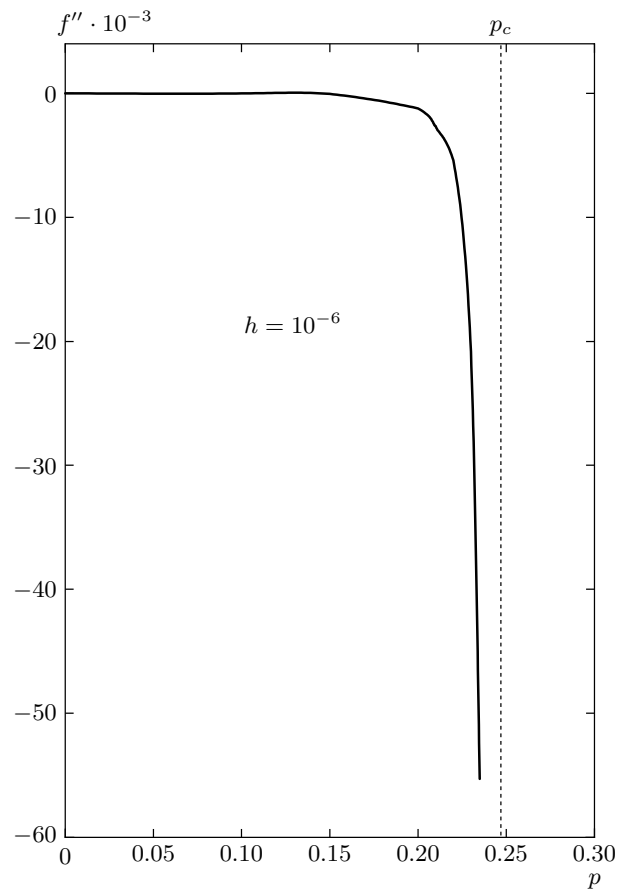


Рис. 6. Величина f'' при $h \rightarrow 0$ как функция p ($p < p_c$). Трехмерный случай.

При малых p из (51) с помощью (69) находим

$$p \ll 1 :$$

$$\Delta_E^2 = pD \left[\frac{1-h}{(D-1)h+1} \right]^2, \quad \Delta_j^2 = (D-1)\Delta_E^2. \quad (70)$$

Соотношения (67) и (69) позволяют находить величины f и Δ_E^2, Δ_j^2 при $h > 1$, если они известны при $h < 1$ во всем интервале изменения концентрации.

При малых h и произвольных p имеем

$$h \rightarrow 0 : \quad f(p, h) = f(p, 0) + h \left(\frac{\partial f}{\partial h} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \right)_0 + \dots$$

Поскольку $f(p, 0) \equiv 0$ при $p < p_c$, в этом случае для функции ψ_1 из (12) получаем

$$h \rightarrow 0 : \quad \psi_1 \approx -\frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \right)_0, \quad p < p_c. \quad (71)$$

Вычисляя ψ_1 согласно определению (7), находим вторую производную $\partial^2 f / \partial h^2$ при $h = 0$ во всем интервале $0 < p < p_c$, см. рис. 5, 6.

7. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

Согласно формулам (18), (28), (51) и (70) величины Δ_E^2 и Δ_j^2 во всех этих предельных случаях при $D = 2$ равны:

$$\Delta_j^2 = \Delta_E^2. \quad (72)$$

Если предположить, что это равенство выполняется и при промежуточных значениях p и h , то подстановка выражений (13) и (14) в (72) дает дифференциальное уравнение для функции f :

$$(1-h)(f^2+h) \frac{\partial f}{\partial h} + f(f^2-1) = 0. \quad (73)$$

Разделив равенство (73) на $(1-h)^2 f^2$, замечаем, что это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{1}{1-h} \left(f - \frac{h}{f} \right) \right] = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{1-h} \left(f - \frac{h}{f} \right) = C, \quad (74)$$

где C — константа интегрирования, зависящая от параметра p .

Соотношение (74) представляет собой квадратное уравнение относительно f , решением которого является величина

$$f = \frac{1}{2} \left\{ C(1-h) + [C^2(1-h)^2 + 4h]^{1/2} \right\}. \quad (75)$$

Константу C найдем из сравнения формулы (75) с выражением для f в случае слабонеоднородной среды (26). Соответствующее «граничное условие», справедливое при произвольных D , можно записать в виде

$$\left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h=1} = 1 - p. \quad (76)$$

В результате получаем $C = 2p - 1$, так что окончательно

$$f = \left(p - \frac{1}{2} \right) (1-h) + \left[\left(p - \frac{1}{2} \right)^2 (1-h)^2 + h \right]^{1/2}, \quad D = 2. \quad (77)$$

Таким образом, из равенства (72) для функции f следует выражение, совпадающее с формулой, даваемой так называемой теорией эффективной среды (см., например, [5], где случаю $D = 2$ отвечает $z = 4$).

Как следует из результатов численного эксперимента (см. рис. 2), равенство (72) приближенно выполняется при $h \geq 0.1$, так что формула (77) при этих h является удовлетворительным интерполяционным выражением для f во всем интервале изменения концентрации p . С учетом соотношения (67) условие применимости формулы (77) при всех p принимает вид $0.1 \leq h \leq 10$.

При произвольном D в предельных случаях (28), (51) и (70) имеем

$$\Delta_j^2 = (D-1)\Delta_E^2. \quad (78)$$

Подстановка выражений (13) и (14) в (78) дает следующее дифференциальное уравнение для f :

$$(1-h) [(D-1)f^2 + h] \frac{\partial f}{\partial h} + [(D-1)f + 1] f(f-1) = 0. \quad (79)$$

Разделив (79) на $(1-h)^2 f^2$, приведем это уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial h} \left\{ \frac{1}{1-h} \left[(D-1)f - (D-2) - \frac{h}{f} \right] \right\} = 0,$$

откуда для функции f получаем

$$f = \frac{1}{2(D-1)} \left\{ C(1-h) + D - 2 + \left[(C(1-h) + D - 2)^2 + 4(D-1)h \right]^{1/2} \right\}. \quad (80)$$

Константу C определяем из условия (76):

$$C = pD - (D-1). \quad (81)$$

Для трехмерной системы из (80), (81) следует, что

$$f = \frac{1}{4} \left\{ 3p - 1 + (2 - 3p)h + \left[(3p - 1 + (2 - 3p)h)^2 + 8h \right]^{1/2} \right\}, \quad D = 3. \quad (82)$$

Выражение (82) также совпадает с соответствующей формулой для f из [5], где случаю $D = 3$ отвечает $z = 6$.

Из результатов численного эксперимента (см. рис. 4) следует, что равенство (78) при $D = 3$ выполняется с точностью до нескольких процентов при $h \geq 0.1$, так что в согласии с [5] при этих h выражение (82) удовлетворительно описывает функцию f при всех p в случае задачи связей. С учетом (67) условием применимости формулы (82) является неравенство $0.1 \leq h \leq 10$. Если же величина h не удовлетворяет этим неравенствам, то, как следует из рис. 4, имеется, тем не менее, довольно широкий интервал концентрации, в котором с достаточной точностью выполняется (при $D = 3$) равенство (78) и применима интерполяционная формула (82).

8. СЛОИСТАЯ СРЕДА

Представляет интерес также и рассмотрение структурно (геометрически) анизотропных сред, анизотропия которых задается формой, расположением и ориентацией включений при изотропной проводимости самих компонент. Для такой системы вместо (8) получим

$$\psi_{\alpha i} \equiv \frac{\langle (\mathbf{E}^{(\alpha)})^2 \rangle^{(i)}}{|\langle \mathbf{E}^{(\alpha)} \rangle|^2} = \frac{\partial \sigma_{\alpha e}}{\partial \sigma_i}. \quad (83)$$

Здесь $\sigma_{\alpha e}$ ($\alpha = x, y, z$) — главные значения эффективного тензора проводимости. Индекс « (α) » у $\mathbf{E}^{(\alpha)}$

означает, что поле $\langle \mathbf{E}^{(\alpha)} \rangle$ направлено вдоль оси α . Соответственно вместо (10) получим

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha E}^2 &= \sum_i \frac{\partial \sigma_{\alpha e}}{\partial \sigma_i} - 1, \\ \Delta_{\alpha j}^2 &= \frac{1}{\sigma_{\alpha e}^2} \sum_i \sigma_i^2 \frac{\partial \sigma_{\alpha e}}{\partial \sigma_i} - 1. \end{aligned} \quad (84)$$

Отметим, что структурные флуктуации поля и тока для таких сред зависят от направления средней напряженности $\langle \mathbf{E}^{(\alpha)} \rangle$.

Предельным случаем структурно анизотропной системы является слоистая среда, изотропная локальная проводимость которой зависит только от одной координаты, например, z : $\sigma = \sigma(z)$. Для такой среды величины $\sigma_{\alpha e}$, $\Delta_{\alpha E}^2$ и $\Delta_{\alpha j}^2$ могут быть найдены в общем виде. Если поле $\langle \mathbf{E} \rangle$ направлено вдоль оси x , то $E(z) = E = \text{const}$ и тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{xe} &= \langle \sigma \rangle, \quad \Delta_{xE}^2 = 0, \\ \Delta_{xj}^2 &= \langle (\sigma - \langle \sigma \rangle)^2 \rangle / \langle \sigma \rangle^2. \end{aligned} \quad (85)$$

Соответственно при $\langle \mathbf{E} \rangle \parallel z$ сохраняется условие $j(z) = j = \text{const}$, так что

$$\begin{aligned} \sigma_{ze} &= \left(\left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle \right)^{-1}, \\ \Delta_{zE}^2 &= \frac{\langle (\sigma^{-1} - \langle \sigma^{-1} \rangle)^2 \rangle}{\langle \sigma^{-1} \rangle^2}, \quad \Delta_{zj}^2 = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Нетрудно убедиться, что для N -компонентной среды выражения (85), (86) удовлетворяют соотношениям (84). Для двухкомпонентной слоистой системы из уравнений (85), (86) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{xe} &= p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2, \quad \Delta_{xE}^2 = 0, \\ \Delta_{xj}^2 &= p(1-p) \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{[p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2]^2}, \\ \sigma_{ze} &= \frac{\sigma_1\sigma_2}{p\sigma_2 + (1-p)\sigma_1}, \\ \Delta_{zE}^2 &= p(1-p) \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{[p\sigma_2 + (1-p)\sigma_1]^2}, \\ \Delta_{zj}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (87)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть некоторое тело проводимости σ_2 , находящееся в среде проводимости σ_1 , помещено в однородное электрическое поле напряженности \mathbf{E}_0 . Асим-

птотическое выражение для соответствующего потенциала имеет вид (37)–(39). Покажем, что ряд интегралов, содержащих напряженность электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, может быть выражен через тензор дипольной поляризуемости $\hat{\Lambda}$.

1. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{A} = \int (\mathbf{j} - \sigma_1 \mathbf{E}) dV, \quad (\text{П.1})$$

где интегрирование ведется по всему пространству. Поскольку подынтегральное выражение в (П.1) отлично от нуля только внутри тела, с одной стороны,

$$\mathbf{A} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \int_v \mathbf{E} dV, \quad (\text{П.2})$$

где интегрирование ведется по объему тела v . С другой стороны, в силу уравнения $\text{div } \mathbf{j} = 0$ величина A может быть записана в виде

$$A_\alpha = \int \frac{\partial}{\partial x_\beta} (x_\alpha j_\beta + \sigma_1 \varphi \delta_{\alpha\beta}) dV. \quad (\text{П.3})$$

Преобразуя этот интеграл в поверхностный (по сфере радиуса $R \rightarrow \infty$) и вычисляя его с помощью асимптотики (37)–(39), получим

$$\mathbf{A} = 4\pi\sigma_1 \mathbf{p} = 4\pi\sigma_1 \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0. \quad (\text{П.4})$$

Сравнение (П.2) с (П.4) дает

$$\int_v \mathbf{E} dV = -\frac{4\pi}{1-h} \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0, \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (\text{П.5})$$

Вычисляя тем же способом интеграл

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) dV &= - \int \nabla(\varphi - \varphi_0) dV, \\ \varphi_0(\mathbf{r}) &= -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}, \end{aligned}$$

находим

$$\int (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) dV = -\frac{4\pi}{D} \mathbf{p} = -\frac{4\pi}{D} \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0, \quad (\text{П.6})$$

где D — размерность пространства; интегрирование в (П.6) ведется по всему пространству.

2. Рассмотрим теперь интеграл

$$J = \int \left\{ \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{j} \cdot \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_1} \tilde{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{E} \right\} dV, \quad (\text{П.7})$$

где тильдой отмечены величины, относящиеся к той же задаче, но с измененными проводимостями ($\sigma_1 \rightarrow \tilde{\sigma}_1$, $\sigma_2 \rightarrow \tilde{\sigma}_2$). Поскольку подынтегральное выражение в (П.7) отлично от нуля только внутри тела,

$$J = (h - \tilde{h}) \int_v (\mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) dV, \quad (\text{II.8})$$

где $\tilde{h} = \tilde{\sigma}_2/\tilde{\sigma}_1$. С другой стороны, величина (II.7) может быть представлена в виде

$$J = - \int \nabla \left\{ \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{j} \tilde{\varphi} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_1} \tilde{\mathbf{j}} \varphi \right\} dV. \quad (\text{II.9})$$

Преобразуя этот интеграл в поверхностный и вычисляя его с помощью асимптотик (37)–(39) и аналогичных выражений для $\tilde{\varphi}$, получим

$$J = 4\pi \mathbf{E}_0 (\hat{\Lambda} - \hat{\tilde{\Lambda}}) \mathbf{E}_0, \quad (\text{II.10})$$

где $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(h)$, $\hat{\tilde{\Lambda}} = \hat{\tilde{\Lambda}}(\tilde{h})$. Сравнение (II.8) с (II.10) дает

$$(h - \tilde{h}) \int_v (\mathbf{E} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) dV = 4\pi \mathbf{E}_0 (\hat{\Lambda} - \hat{\tilde{\Lambda}}) \mathbf{E}_0. \quad (\text{II.11})$$

Отсюда предельным переходом $\tilde{h} \rightarrow h$ находим соотношение

$$\int_v \mathbf{E}^2 dV = 4\pi \left(\mathbf{E}_0 \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial h} \mathbf{E}_0 \right). \quad (\text{II.12})$$

3. Рассмотрим, наконец, интеграл

$$I = \int \left(\frac{1}{\sigma_1} \mathbf{j} - \mathbf{E}_0 \right) (\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}_0) dV, \quad (\text{II.13})$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$ — то же, что и в (II.7). Величина (II.13) может быть представлена в виде

$$I = - \int \nabla \left\{ \left(\frac{1}{\sigma_1} \mathbf{j} - \mathbf{E}_0 \right) (\tilde{\varphi} - \varphi_0) \right\} dV. \quad (\text{II.14})$$

Преобразуя этот интеграл в поверхностный и вычисляя его с помощью асимптотических выражений для $\varphi(\mathbf{r})$ и $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$, найдем, что $I = 0$. Поэтому из (II.13) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{V_e} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) \cdot (\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}_0) dV &= \\ &= \int_v (h\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) \cdot (\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}_0) dV. \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Здесь в левой части равенства интегрирование ведется по всему пространству за исключением объема тела v . Вычисляя правую часть (II.15) с помощью (II.5) и (II.11), получаем

$$\begin{aligned} \int_{V_e} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) \cdot (\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{E}_0) dV &= \frac{4\pi}{h - \tilde{h}} \left\{ \tilde{h} \frac{1 - h}{1 - \tilde{h}} \times \right. \\ &\times \left(\mathbf{E}_0 \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0 \right) - h \frac{1 - \tilde{h}}{1 - h} \left(\mathbf{E}_0 \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0 \right) \left. \right\} - v \mathbf{E}_0^2. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

С помощью предельного перехода $\tilde{h} \rightarrow h$ из (II.16) находим

$$\begin{aligned} \int_{V_e} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0)^2 dV &= -4\pi \left\{ \frac{1 + h}{1 - h} \left(\mathbf{E}_0 \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0 \right) + \right. \\ &\left. + h \left(\mathbf{E}_0 \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial h} \mathbf{E}_0 \right) \right\} - v \mathbf{E}_0^2. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Используя соотношения (II.5) и (II.12), получим также

$$\begin{aligned} \int_v (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0)^2 dV &= 4\pi \left\{ \frac{2}{1 - h} \left(\mathbf{E}_0 \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0 \right) + \right. \\ &\left. + \left(\mathbf{E}_0 \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial h} \mathbf{E}_0 \right) \right\} + v \mathbf{E}_0^2. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Суммирование равенств (II.17) и (II.18) дает

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0)^2 dV &= 4\pi \times \\ &\times \left\{ \left(\mathbf{E}_0 \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0 \right) + (1 - h) \left(\mathbf{E}_0 \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial h} \mathbf{E}_0 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

где интегрирование ведется по всему пространству.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. Б. Я. Балагуров, ФТТ **20**, 3332 (1978).
3. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **93**, 1888 (1987).
4. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
5. S. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **45**, 574 (1973).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992), § 9.
7. C. Herring, J. Appl. Phys. **31**, 1939 (1960).
8. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **89**, 1796 (1985).
9. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **106**, 811 (1994).
10. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **110**, 1001 (1996).