

# ЗЕРКАЛЬНЫЙ НЕСТИНГ КОНТУРА ФЕРМИ И ЛИНИЯ НУЛЕЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

*В. И. Белявский\*, Ю. В. Копеев\*\*, В. М. Софронов, С. В. Шевцов*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 мая 2003 г.

Сверхпроводящий параметр порядка, возникающий благодаря спариванию носителей заряда с большим суммарным импульсом пары при экранированном кулоновском отталкивании в вырожденной квазидвумерной электронной системе, найден как функция импульса относительного движения пары. Из-за кинематического ограничения, обусловленного ферми-заполнением, упорядоченное состояние существует в ограниченной области импульсного пространства, размеры и форма которой определяются суммарным импульсом пары. Параметр порядка не является знакопостоянной функцией импульса, меняя знак на некоторой линии внутри кинематически разрешенной области. Сверхпроводящая неустойчивость возникает при сколь угодно малой величине отталкивательного взаимодействия при определенных импульсах пары, для которых выполняется условие зеркального нестинга, следствием которого является возникновение парного контура Ферми, т. е. линии совпадения участков контура Ферми с изолинией кинетической энергии относительного движения пары. Исследована температурная зависимость сверхпроводящего параметра порядка. Благодаря эффекту близости в импульсном пространстве, сверхпроводящее упорядочение продолжается в кинематически запрещенную область.

PACS: 78.47.+p, 78.66.-w

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Квазидвумерные (2D) высокотемпературные сверхпроводящие (ВТСП) купратные соединения как в сверхпроводящем (SC), так и в нормальном (N) состоянии обнаруживают ряд свойств, которые существенно отличают их от обычных сверхпроводников, вполне удовлетворительно описываемых теорией Бардина, Купера и Шриффера (БКШ) [1]. Согласно теории БКШ, фазовый переход из N-состояния (ферми-жидкость с четко определенной поверхностью Ферми) в SC-состояние обусловлен неустойчивостью основного состояния N-фазы по отношению к образованию синглетных куперовских пар с нулевым суммарным импульсом при сколь угодно слабом взаимодействии притяжения между компонентами пары. Благодаря тому, что электронный (или дырочный) закон дисперсии является четной функцией импульса,  $\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon(-\mathbf{k})$ , SC-неустойчивость развивается на

всей поверхности Ферми  $\varepsilon(\mathbf{k}) = \mu$  ( $\mu$  — химический потенциал электронов), результатом чего является возникновение  $s$ -волновой энергетической щели в спектре элементарных возбуждений. Эффективное притяжение между электронами в модели БКШ обусловлено электрон-фононным взаимодействием и имеет место в узком (порядка характерного дебаевского импульса) слое импульсного пространства, охватывающем поверхность Ферми, с чем связаны известные соображения относительно ограничения сверху на величину температуры SC-перехода [2].

Недопированные (или слабо допированные) купраты являются антиферромагнитными (AF) диэлектриками, поэтому конкуренция или сосуществование SC-, AF- и, возможно, иных упорядоченных состояний [3] в значительной степени определяет свойства ВТСП-соединений. Сильные электронные корреляции в купратах [4, 5] дают основания полагать, что состояние, из которого при понижении температуры система переходит в SC-состояние, возникающее в допированных соединениях, отличается от ферми-жидкости [4]. Однако фотоэмиссионная спек-

\*E-mail: vib@spu.ac.ru

\*\*E-mail: kopeev@lebedev.sci.ru

троскопия с угловым разрешением (ARPES) не только недвусмысленно указывает на наличие контура Ферми (ФС) в допированных купратах (т. е. аналога поверхности Ферми в электронной  $2D$ -системе), но и позволяет определить его размеры и форму в зависимости от уровня допирования  $x$  (отклонения концентрации носителей от половинного заполнения). Так, в купратах с дырочным допированием наблюдается «большой», определяемый полной концентрацией дырок  $(1+x)$ , контур Ферми в виде «квадрата со скругленными углами» [5], обнаруживающий, таким образом, достаточно ярко выраженный нестинг (как правило, в направлениях вдоль сторон  $2D$ -зоны Бриллюэна). Сам факт существования ФС является свидетельством того, что, несмотря на важную роль электронных корреляций [4, 5], многие свойства ВТСП-купратов могут быть вполне адекватно описаны в терминах импульсного пространства в рамках зонной схемы.

SC-упорядочение в ВТСП-купратах существует в ограниченном интервале допирования, на границах которого температура SC-перехода  $T_c$  обращается в нуль, достигая максимального значения при некотором оптимальном допировании  $x_{opt}$  внутри этого интервала. При  $x < x_{opt}$  в области температур  $T_c(x) < T < T^*(x)$  имеет место существенное подавление плотности состояний, которое интерпретируется как возникновение псевдощели, что может быть связано [6] с малой фазовой жесткостью SC-параметра порядка. С увеличением допирования температура образования пар  $T_p$ , соответствующая возникновению модуля параметра порядка, убывает, а температура установления фазовой когерентности  $T_\vartheta$ , напротив, растет, так что при  $x \gtrsim x_{opt}$  фазовая когерентность, как и в обычных сверхпроводниках, устанавливается непосредственно при возникновении пар. При  $x < x_{opt}$  некогерентные состояния пар существуют при  $T < T^*$ , и фазовый SC-переход может рассматриваться как бозе-конденсация уже существующих пар.

Угловая зависимость SC-щели, как и псевдощели, наблюдаемая в ВТСП-купратах с дырочным допированием, при синглетном спаривании может соответствовать либо  $d$ -волновой, либо анизотропной  $s$ -волновой симметрии. В последнем случае параметр порядка  $\Delta_{\mathbf{k}}$  как функция угловой координаты имеет постоянный знак, в отличие от  $d$ -волновой симметрии, когда при полном повороте  $\Delta_{\mathbf{k}}$  меняет знак четырежды (как об этом свидетельствует ряд чувствительных к фазе параметра порядка экспериментов [7, 8] для некоторых из купратных соединений). Случаю расширенной  $s$ -волновой симметрии

соответствует возможность изменения знака параметра порядка в зависимости от величины импульса при неизменном его направлении [6].

С зависимостью SC-параметра порядка от импульса связана электрон-дырочная асимметрия, проявляющаяся в туннельных характеристиках ВТСП-купратов [9, 10], для интерпретации которых предполагается [11], что параметр порядка является линейной функцией кинетической энергии дырки,

$$\Delta_{\mathbf{k}} = a - b\varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами  $a$  и  $b$ . Наличие коэффициента  $b$ , определяющего наклон SC-щели, приводит к определенному сдвигу химического потенциала  $\mu$  при SC-конденсации, так что линия, отвечающая минимуму энергии возбуждения пары, не совпадает с ФС [12].

Имеются основания считать [6], что к SC-спариванию в купратах приводит отталкивание между носителями и что, в отличие от теории БКШ, выигрыш в энергии основного состояния при SC-конденсации пар обусловлен, главным образом, перенормировкой кинетической энергии [13, 14]. В случае отталкивания замена в уравнении БКШ матричного элемента взаимодействия  $U(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|)$ , зависящего от импульса  $\kappa = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , передаваемого при рассеянии, некоторым постоянным значением  $U_0 > 0$  приводит только к тривиальному решению  $\Delta = 0$ . Поэтому для SC-спаривания при отталкивательном взаимодействии зависимость  $U(\kappa)$  в кинематически разрешенной области рассеяния является существенной и должна приводить к зависящему от импульса нетривиальному решению для SC-параметра порядка  $\Delta_{\mathbf{k}} \neq 0$ .

Механизм сверхпроводимости [15–19], основанный на предположении о том, что основным каналом SC-спаривания является формирование пар с большим суммарным импульсом  $\mathbf{K}$  ( $K \approx 2k_F$ , где  $k_F$  — импульс Ферми в направлении импульса пары) при экранированном кулоновском отталкивании, позволяет качественно интерпретировать ключевые экспериментальные данные, полученные для ВТСП-купратов.

В настоящей работе сформулированы общие условия, необходимые для SC-спаривания в рамках этого механизма, а также найден и исследован зависящий от импульса относительного движения пары и от температуры SC-параметр порядка. В разд. 2 обсуждаются кинематические ограничения на спаривание одноименно заряженных частиц с отличным от нуля суммарным импульсом пары и условие зеркального нестинга для участков ФС, играю-

щих роль парного контура Ферми для кинетической энергии относительного движения пары. Рассматриваются примеры реализации зеркального нестинга в купратах. В разд. 3 описана процедура сведения уравнения самосогласования, определяющего SC-параметр порядка, к интегральному уравнению с вырожденным ядром. Раздел 4 посвящен исследованию общей структуры решения полученного уравнения. Параметры, определяющие общее решение, найдены и исследованы в разд. 5 при нулевой температуре и в разд. 6 при температуре, отличной от нуля. В разд. 7 исследован вопрос о связи температуры SC-перехода с параметром порядка при нулевой температуре. В разд. 8 рассмотрен класс разрывных решений уравнения самосогласования, приближенно представляющих точное непрерывное по импульсу относительного движения пары решение. В разд. 9 обсуждается эффект близости в импульсном пространстве, т. е. продолжение SC-упорядочения в кинематически запрещенную область. В Заключение (раздел 10) обсуждаются полученные результаты, относящиеся к внутренней структуре SC-параметра порядка (его зависимости от импульса относительного движения пары) и возможным свойствам его симметрии в ВТСП-купратах.

## 2. СПАРИВАНИЕ С БОЛЬШИМ ИМПУЛЬСОМ: ЗЕРКАЛЬНЫЙ НЕСТИНГ

Кинематические ограничения, обусловленные заполнением состояний внутри FC, имеют следствием то, что импульсы  $\mathbf{k}_\pm$  одноименно заряженных частиц, составляющих пару с заданным суммарным импульсом  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_+ + \mathbf{k}_-$  ( $\mathbf{K}$ -пару), должны оба находиться либо внутри, либо вне FC. Таким образом, они принадлежат некоторой зависящей от импульса пары области импульсного пространства  $\Xi_K$  [20, 21], определяющей статистический вес, т. е. число квантовых состояний, линейной комбинацией которых формируется пара. В общем случае эта область симметрична по отношению к преобразованию инверсии  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$  импульса относительного движения пары  $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_-)/2$  и состоит из двух частей  $\Xi_K^{(-)}$  и  $\Xi_K^{(+)}$ , соответственно внутренней и внешней по отношению к FC.

Энергия возбуждения  $\mathbf{K}$ -пары, т. е. кинетическая энергия составляющих ее частиц,

$$2\xi_{Kk} = \varepsilon_s(\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}) + \varepsilon_{s'}(\mathbf{K}/2 - \mathbf{k}) - 2\mu, \quad (2)$$

отсчитанная от химического потенциала пары  $2\mu$ , обращается в нуль на границе, разделяющей запол-

ненную,  $\Xi_K^{(-)}$ , и вакантную,  $\Xi_K^{(+)}$ , части области определения импульса относительного движения; здесь  $\varepsilon_s(\mathbf{k}_\pm)$  — электронный (или дырочный) закон дисперсии в  $s$ -й энергетической зоне. Частицы, составляющие  $\mathbf{K}$ -пару, могут принадлежать либо одной и той же ( $s = s'$ ), либо двум разным ( $s \neq s'$ ) энергетическим зонам, причем в случае возбуждения пары частиц в одной и той же зоне спектр возбуждения (2) симметричен относительно преобразования инверсии  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$  импульса относительного движения, тогда как при  $s \neq s'$  такая симметрия в общем случае не имеет места.

При  $K = 0$  импульсы относительного движения  $\pm\mathbf{k}$  совпадают с импульсами частиц, составляющих пару, поэтому границей между заполненной частью  $\Xi_0^{(-)}$  области  $\Xi_0$ , совпадающей с  $2D$ -зоной Бриллюэна, и вакантной частью  $\Xi_0^{(+)}$  является полный FC. При  $K \neq 0$  граница между  $\Xi_K^{(-)}$  и  $\Xi_K^{(+)}$  вырождается, вообще говоря, в совокупность нескольких точек. Однако при особом виде закона дисперсии и для определенного импульса пары такая граница может представлять собой отдельные участки FC. Эти участки совпадают с частями той изолинии кинетической энергии относительного движения  $\mathbf{K}$ -пары

$$\varepsilon_{ss'}^{(r)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = \varepsilon_s(\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}) + \varepsilon_{s'}(\mathbf{K}/2 - \mathbf{k}) - \varepsilon_{ss'}^{(c)}(\mathbf{K}), \quad (3)$$

которая соответствует разности между химическим потенциалом пары  $2\mu$  и энергией ее центра масс

$$\varepsilon_{ss'}^{(c)}(\mathbf{K}) = \varepsilon_s(\mathbf{K}/2) + \varepsilon_{s'}(\mathbf{K}/2). \quad (4)$$

В таком случае граница между  $\Xi_K^{(-)}$  и  $\Xi_K^{(+)}$  играет роль своеобразного FC по отношению к относительному движению пары и может быть названа парным контуром Ферми (PFC). Условие, определяющее PFC, имеет вид

$$\varepsilon_{ss'}^{(r)}(\mathbf{K}, \mathbf{k}) = 2\mu - \varepsilon_{ss'}^{(c)}(\mathbf{K}). \quad (5)$$

В силу того что  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ , оба импульса относительного движения,  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$ , принадлежат PFC. При этом граница, разделяющая  $\Xi_K^{(-)}$  и  $\Xi_K^{(+)}$ , обладает зеркальной симметрией относительно вектора  $\mathbf{K}$ , поэтому соотношение (5) может быть названо условием зеркального нестинга. Для того чтобы удовлетворить условию (5), вектор  $\mathbf{K}$  должен быть направлен вдоль одного из симметричных направлений в  $2D$ -зоне Бриллюэна. В случае тетрагональной симметрии это направления либо вдоль сторон зоны Бриллюэна, либо вдоль ее диагоналей. Отметим, что преобразование инверсии  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$  при условии зеркального нестинга приводит к совмещению заполненных состояний с заполненными и вакантными с вакантными.

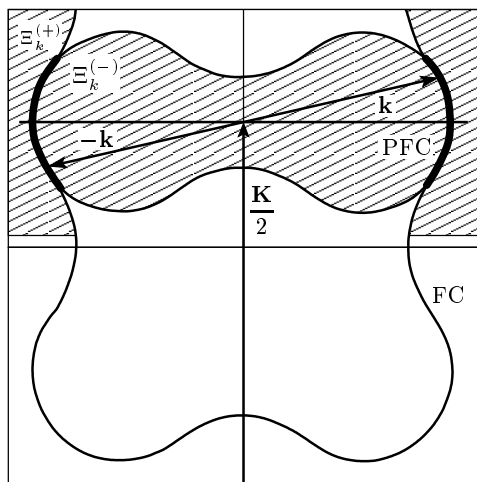


Рис. 1. Внутризонный зеркальный нестинг. Формирование PFC (жирные линии) при совпадении изолинии кинетической энергии относительного движения пары с импульсом  $K$  вдоль направления с участком FC

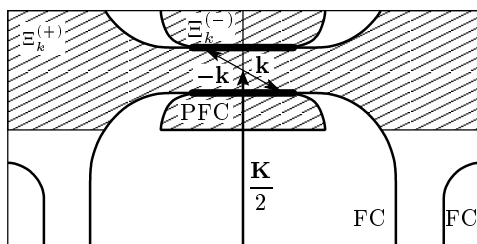


Рис. 2. Межзонный зеркальный нестинг. Формирование PFC в двухзонной модели электронного спектра. FC состоит из двух односвязных частей. Показана лишь верхняя половина  $2D$ -зоны Бриллюэна

Можно привести несколько примеров возникновения PFC при определенном суммарном импульсе пары. Так, если FC является односвязным и имеет форму квадрата со скругленными углами, как следует из экспериментов ARPES для купратов с дырочным допированием [5], то уже достаточно малое изменение знака кривизны почти прямолинейных участков FC, располагающихся в протяженной окрестности седловой точки дырочного закона дисперсии [5], может обеспечить выполнение условия зеркального нестинга, благодаря сильной анизотропии эффективных масс, как это схематически показано на рис. 1.

В том случае, когда уровень Ферми пересекает две энергетические зоны, возникает двухсвязный FC [22], и два участка FC, принадлежащие разным

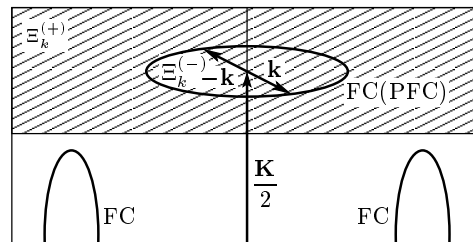


Рис. 3. FC в виде дырочных карманов в сильно недодопированных купратах. Показана лишь верхняя половина  $2D$ -зоны Бриллюэна

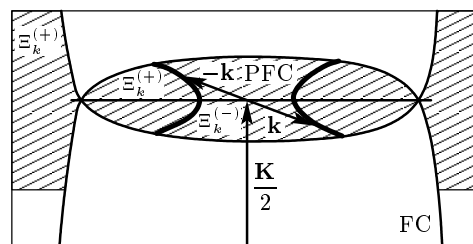


Рис. 4. Формирование PFC при возникновении страйп-структуры. PFC (жирные линии внутри  $\Xi_k$ ) возникает благодаря перераспределению частиц в импульсном пространстве. Показана лишь верхняя половина  $2D$ -зоны Бриллюэна

зонам, также могут обеспечить выполнение условия зеркального нестинга [18] (рис. 2). В рассмотренных случаях PFC является лишь некоторой частью полного FC, на которой энергия возбуждения пары с определенным импульсом обращается в нуль.

Можно, однако, привести пример, когда PFC фактически совпадает с полным FC. Так, в недодопированных купратах FC может представлять собой несколько дырочных карманов [23, 24], центрированных в точках, принадлежащих симметричным направлениям, как показано на рис. 3 (с увеличением допирования такие карманы непрерывным образом превращаются в «большой» FC [24]). В этом случае условие зеркального нестинга идеально выполняется на всей линии, ограничивающей карман, если половине импульса пары соответствует центр кармана. Следует отметить, что вполне аналогичная ситуация возникает в вырожденных многодолинных полупроводниках [25, 26].

Возникновение PFC может быть также связано с неустойчивостью основного состояния нормальной фазы, приводящей к изменению формы FC вследствие перераспределения носителей в импульсном пространстве при образовании страйп-структу-

ры [16, 17], как это схематически показано на рис. 4. Благодаря гиперболической метрике импульсного пространства, может быть минимизировано соответствующее увеличение кинетической энергии, которое компенсируется либо частичным восстановлением АФ-порядка в обедненных дырками областях реального пространства, либо возникновением орбитального АФ-упорядочения, как предполагается в [3].

### 3. УРАВНЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

В этом разделе обсуждаются необходимые условия SC-спаривания при отталкивательном взаимодействии между частицами, составляющими пару с большим суммарным импульсом. Предложена процедура сведения уравнения для SC-параметра порядка к приближенному нелинейному сингулярному уравнению с вырожденным ядром.

Экранированное кулоновское отталкивание между компонентами пары определено во всей кинематически разрешенной области  $\Xi_K$ . Наличие ферми-заполнения и связанной с ним сингулярности диэлектрической проницаемости приводит к возникновению известных фриделевских осцилляций эффективного потенциала, пространственный масштаб которых имеет порядок обратного фермиевского импульса  $k_F^{-1}$  [27]. В связи с этим отметим, что в модели БКШ взаимодействие, приводящее к спариванию, определено лишь в узкой полосе вдоль FC с характерной шириной  $2\Delta\varepsilon \ll E_F$ , где  $E_F$  — энергия Ферми,  $\Delta\varepsilon$  в случае электрон-фононного взаимодействия имеет смысл дебаевской энергии.

Уравнение самосогласования, определяющее SC-параметр порядка, обусловленный спариванием частиц с большим суммарным импульсом  $\mathbf{K}$ , при конечной температуре  $T$  может быть записано в виде

$$\Delta_{\mathbf{K}\mathbf{k}} = -\frac{1}{2S} \sum_{\mathbf{k}' \in \Xi_K} \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Delta_{\mathbf{K}\mathbf{k}'}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{K}\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{K}\mathbf{k}'}}} h_{\mathbf{K}\mathbf{k}'}(T), \quad (6)$$

где  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  — импульсы относительного движения пар с одним и тем же суммарным импульсом  $\mathbf{K}$ ,  $U(\boldsymbol{\kappa})$  — матричный элемент потенциала эффективного взаимодействия частиц, составляющих пару,  $S$  — нормировочная площадь. Входящий в матричный элемент импульс  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , передаваемый при рассеянии и равный разности между конечным и начальным импульсами частицы,  $\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}'_+$ , равен также изменению импульса относительного движения при рассеянии.

Температурный фактор в уравнении самосогласования имеет вид

$$h_{\mathbf{K}\mathbf{k}'}(T) = \text{th} \left( \frac{\sqrt{\xi_{\mathbf{K}\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{K}\mathbf{k}'}}} {2T} \right). \quad (7)$$

Суммирование в (6) проводится по всей кинематически разрешенной области  $\Xi_K$ , в которой и определен SC-параметр порядка.

При решении уравнения (6) перейдем от суммирования к интегрированию и, опустив индекс  $\mathbf{K}$ , соответствующий суммарному импульсу пары, будем рассматривать величины  $\Delta_{\mathbf{K}\mathbf{k}} = \Delta(\mathbf{k})$  и  $\xi_{\mathbf{K}\mathbf{k}} = \xi(\mathbf{k})$  как непрерывные функции импульса относительно движения. Обозначая также

$$\eta(\mathbf{k}) = \sqrt{\xi^2(\mathbf{k}) + \Delta^2(\mathbf{k})}, \quad f(\mathbf{k}) = h(\mathbf{k})/4\pi\eta(\mathbf{k}), \quad (8)$$

уравнение самосогласования (6) можно переписать как

$$\Delta(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Xi} U(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) f(\mathbf{k}') \Delta(\mathbf{k}') d^2k'. \quad (9)$$

Отталкиванию между частицами пары соответствует положительный матричный элемент  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , связанный с эффективным потенциалом взаимодействия  $U(r)$  в  $r$ -пространстве преобразованием Фурье:

$$U(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) = \int U(r) \exp [i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}] d^2r. \quad (10)$$

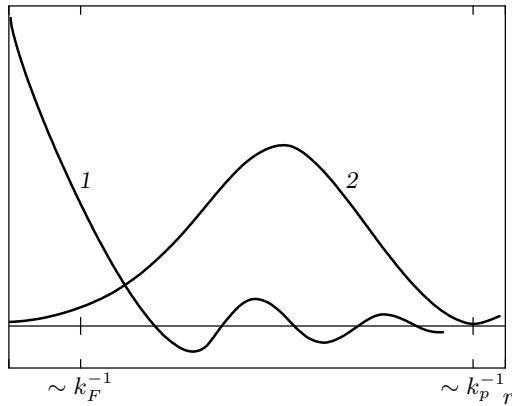
Можно установить простой критерий отсутствия нетривиальных решений уравнения (9). Для этого умножим это уравнение на функцию  $f(\mathbf{k})\Delta(\mathbf{k})$  и проинтегрируем полученное соотношение по  $\mathbf{k}$  в пределах области  $\Xi$ . Выражая  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  согласно (10) и меняя порядок интегрирования по  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{r}$ , получим

$$\int_{\Xi} \Delta^2(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) d^2k = -\frac{1}{2\pi} \int U(r) L(\mathbf{r}) d^2r, \quad (11)$$

где введено обозначение

$$L(\mathbf{r}) = \left| \int_{\Xi} \Delta(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}) \exp (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^2k \right|^2 \quad (12)$$

для неотрицательной функции аргумента  $\mathbf{r}$ . Интегрирование по  $\mathbf{r}$  в (11) проводится по всему  $2D$ -пространству. В силу определения (8) выполняется неравенство  $f(\mathbf{k}) \geq 0$ , так что левая часть (11) неотрицательна. Если при всех  $r$  потенциал  $U(r)$  положителен, то правая часть (11), напротив, имеет



**Рис. 5.** Графики (схематические) функций, определяющих интеграл в правой части (11): 1 — функция  $rU(r)$ , 2 — усредненная по угловой переменной функция  $L(r)$ , определенная в (12)

отрицательный знак, так что равенство (11) может выполняться в этом случае, только если  $\Delta(\mathbf{k}) \equiv 0$  всюду в области  $\Xi$ . Таким образом, при условии, что в реальном пространстве взаимодействие имеет чисто отталкивательный характер, и  $U(r) > 0$  при всех  $r$ , уравнение самосогласования имеет только тривиальное решение. Следовательно, возникновение SC-упорядочения возможно только в системах, где эффективный потенциал взаимодействия частиц является знакопеременной функцией расстояния между ними. Таким потенциалом, в частности, является, как уже отмечено выше, экранированный кулоновский потенциал в вырожденной ферми-системе, обнаруживающий фриделевские осцилляции [27]. На рис. 5 схематически представлена зависимость функции  $rU(r)$ , такой, что условие (11) может быть выполнено при  $\Delta(\mathbf{k}) \neq 0$ .

Действительно, в правой части (11) в интеграле, вычисляемом в полярных координатах, знакопеременная функция  $rU(r)$ , наибольшее (положительное) значение которой достигается при  $r = 0$  (рис. 5), умножается на неотрицательную функцию  $L(\mathbf{r})$ , общий характер зависимости которой от аргумента установить нетрудно. Модуль произведения  $\Delta(\mathbf{k})f(\mathbf{k})$  достигает максимального значения на PFC (на котором  $\xi(\mathbf{k}) = 0$ ), быстро уменьшаясь по мере удаления от PFC, поэтому основной вклад в интеграл, определяющий  $L(\mathbf{r})$ , дает малая часть области  $\Xi$ , в виде узкой полосы, прилегающей к PFC. Как непосредственно следует из уравнения (9), при  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') > 0$  нетривиальное решение  $\Delta(\mathbf{k})$ , если оно существует, должно быть знакопеременной в области  $\Xi$  функцией своего аргумента, меняющей знак

(как будет показано ниже) на некоторой линии, пересекающей PFC. Поэтому интеграл в (12) представляет собой функцию  $r$  с убывающими с ростом аргумента максимумами, разделенными характерным расстоянием  $\pi/k_P$ , где  $k_P$  — величина порядка длины PFC. Первый и наибольший из максимумов соответствует тому, что в интеграле (12) произведение знакопеременного множителя  $\Delta(\mathbf{k})f(\mathbf{k})$  и экспоненты оказывается, в основном, знакопостоянным. Значение  $L(0)$ , которое определяется интегралом по области  $\Xi$  от произведения  $\Delta(\mathbf{k})f(\mathbf{k})$ , оказывается, вообще говоря, малой величиной благодаря частичной взаимной компенсации вкладов в нее от участков области  $\Xi$ , где  $\Delta(\mathbf{k})$  имеет противоположные знаки. Таким образом, можно считать, что при малых значениях  $r$  функция  $L(\mathbf{r})$  близка к нулю. При полной компенсации вкладов  $\Delta(\mathbf{k})$  с разными знаками  $L(r) \propto r^4$ , что приводит к существенному подавлению основного (положительного) экстремума функции  $rU(r)$ , имеющей при  $r \rightarrow 0$  конечный предел. В противоположном предельном случае больших  $r$  эта функция также мала из-за наличия в интеграле (12) быстроосциллирующего множителя  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . Поскольку величина  $k_P$  заведомо меньше  $k_F$ , значение первого максимума функции (12) удовлетворяет условию  $r_1 \sim \pi/k_P > \pi/k_F$ , так что этот максимум естественно попадает в область фриделевских осцилляций, как это показано на рис. 5. Видно, что имеется значительная область  $r$ -пространства, в которой подынтегральное выражение в правой части равенства (11) существенно отрицательно, тогда как вклады от областей, где оно положительно, сравнительно невелики, благодаря чему сам интеграл оказывается отрицательным. Равенство (11) в этом случае может быть обеспечено благодаря тому, что функция  $f(\mathbf{k})$ , входящая в левую часть формулы (11) в первой степени, а в правую — во второй, имеет при  $T = 0$  особенность на PFC и может стать сколь угодно большой при уменьшении  $\Delta(\mathbf{k})$ . Амплитуда осцилляций функции  $L(r)$  зависит от  $\Delta(\mathbf{k})$ , поскольку именно функцией  $\Delta(\mathbf{k})$  определяется эффективная ширина полосы в окрестности PFC, которая дает основной вклад в интеграл (12). Таким образом, условие (11) может выполняться при достаточно малых  $\Delta(\mathbf{k}) \neq 0$ .

Уравнение (9) представляет собой нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна с симметричным ядром  $U(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|)$ . Как известно [28], все характеристические числа такого ядра вещественны и образуют дискретный спектр  $\lambda_n$ , имеющий в случае невырожденного ядра точку сгущения  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если ядро  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  есть фурье-образ

(10) всюду положительного эффективного потенциала  $U(r)$ , то, как нетрудно видеть, оно является положительно определенным и, соответственно, все его характеристические числа положительны. В таком случае, как было показано, уравнение (9) имеет только тривиальное решение. Следовательно, необходимым условием существования нетривиальных решений уравнения самосогласования является наличие в спектре ядра  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  хотя бы одного отрицательного характеристического числа.

Функция, определяющая нелинейность интегрального оператора в уравнении (9), имеет специальный вид  $\Delta f(\Delta)$ , где  $f(\Delta)$  — фактор нелинейности, определенный согласно (8). В этом смысле уравнение (9) может быть отнесено к классу квазилинейных интегральных уравнений [28], важной особенностью которых является то, что в случае вырожденного ядра решение (если оно вообще существует) квазилинейного уравнения, как и в случае линейного интегрального уравнения, по своей форме повторяет структуру этого ядра [28]. Ядро  $U(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|)$  может быть приближенно сведено к вырожденному, если учесть, что обе переменные,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , определены в относительно небольшой области импульсного пространства  $\Xi$ , вследствие чего при разложении функции (10) в ряд Тейлора по аргументу  $\kappa = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|$  можно ограничиться несколькими первыми членами. Как следует из определения (10), все коэффициенты при нечетных степенях вектора  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  в этом разложении обращаются в нуль тождественно, так что фурье-образ потенциала взаимодействия может быть записан как

$$U(\kappa) = 2\pi \left[ u_0 - \frac{1}{2} u_2 \kappa^2 + \frac{3}{8} u_4 \kappa^4 - \dots \right], \quad (13)$$

где

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty U(r) r^{n+1} dr. \quad (14)$$

Если в (13) оборвать ряд, оставив несколько первых слагаемых, то получится вырожденное ядро, которое в случае достаточно малой области  $\Xi$  хорошо аппроксимирует истинное невырожденное ядро.

Отметим, что фурье-образ  $U(\kappa)$ , соответствующий отталкивательному взаимодействию, при малых  $\kappa$  является убывающей функцией своего аргумента, поэтому  $u_0 > 0$  и  $u_2 > 0$ . При решении уравнения (9) удобно перейти к безразмерным величинам, используя в качестве характерных масштабов энергии и длины константы  $U_0$  и  $r_0$ , определяемые

соотношениями  $U_0 r_0^2 = u_0$ ,  $U_0 r_0^4 = u_2$ . Отметим, что в случае экранированного кулоновского потенциала параметры  $r_0$  и  $U_0 = e^2/r_0$  имеют смысл соответственно радиуса экранирования и характерной кулоновской энергии. Таким образом, энергия  $U_0$  определяет масштаб величин  $\Delta(\mathbf{k})$ ,  $\xi(\mathbf{k})$  и  $T$ , импульс измеряется в единицах  $r_0^{-1}$ , размерность матричного элемента равна  $U_0 r_0^2$ . Если сохранить для введенных таким образом безразмерных величин их прежние обозначения, то в уравнении самосогласования (9), которое не изменяет своего вида при переходе к безразмерным величинам, следует считать, что область  $\Xi$  импульсного пространства, по которой проводится интегрирование в (9), также приведена к безразмерным переменным — компонентам импульса  $k_1$  и  $k_2$ . Если эта область достаточно мала, то в разложении (13) можно оставить два первых слагаемых и, таким образом, прийти к вырожденному ядру

$$U_d(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) = 2\pi [1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2/2]. \quad (15)$$

Можно убедиться в том, что вырожденное ядро (15) имеет четыре характеристических числа, три из которых положительны, тогда как четвертое отрицательно. Два из положительных характеристических чисел равны  $\lambda_{1,2} \sim u_0^{-1}$ , еще одно положительное число  $\lambda_3 \sim u_2^{-1}$ . Отрицательное характеристическое число  $\lambda_4 \sim u_0^{-1}/u_2^2$ .

Очевидно, что при отталкивательном взаимодействии приближение (15) может считаться достаточным, если  $(k + k')^2 < 2$ , поэтому далее будем полагать, что область  $\Xi$  такова, что любой определенный в ней импульс относительного движения удовлетворяет условию

$$k^2 < 1/2. \quad (16)$$

Таким образом, если учесть, что радиус экранирования  $r_0$  составляет несколько межатомных расстояний, то ограничение (16) приводит к тому, что характерный размер области  $\Xi$  должен быть в несколько раз меньше размера зоны Бриллюэна. Кроме того, пренебрежение следующим по малости третьим членом разложения (13) законно только при условии [29, 30], что его среднеквадратичное по области  $\Xi$  значение гораздо меньше обратной абсолютной величины любого из характеристических чисел вырожденного ядра (15):

$$2|u_4| \sqrt{\int_{\Xi} d^2k \int_{\Xi} d^2k' (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^8} \ll |\lambda|^{-1}. \quad (17)$$

Для положительных характеристических чисел это неравенство выполняется при естественном условии,

что третий член разложения (13) мал по сравнению со вторым. Для отрицательного же характеристического числа ядра (15) неравенство (17) сводится к условию  $u_0|u_4| < cu_2^2$ , где  $c \ll 1$ . Это соотношение заведомо не имеет места в случае всюду положительного потенциала  $U(r)$ , поскольку для такого потенциала величины  $u_n$ , определенные в (14), должны быть связаны обратным неравенством, вытекающим из неравенства Коши–Буняковского для интегралов (14). Таким образом, аппроксимируя истинное ядро  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  вырожденным ядром (15), будем предполагать условия (16) и (17) выполненными.

#### 4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Подставляя ядро (15) в уравнение (9) и группируя в правой части слагаемые, не зависящие от импульса, линейные и квадратичные по импульсу, можно убедиться в том, что зависимость параметра порядка от импульса относительного движения пары должна иметь вид

$$\Delta(\mathbf{k}) = a + (\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{k}) - bk^2, \quad (18)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые коэффициенты, а  $\boldsymbol{\chi}$  — постоянный вектор. Таким образом, решение уравнения (9) действительно повторяет характер зависимости вырожденного ядра (15) от импульса и сводится к определению параметров  $a$ ,  $b$  и  $\boldsymbol{\chi}$ . Чтобы найти эти параметры, подставим в уравнение (9) выражение для матричного элемента (15) и явный вид решения (18), после чего приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\mathbf{k}$ . В результате получается система интегральных уравнений относительно  $a$ ,  $b$  и  $\boldsymbol{\chi}$ , одно из которых, вытекающее из сравнения коэффициентов при первой степени  $\mathbf{k}$ , имеет вид

$$\boldsymbol{\chi} = - \int_{\Xi} f(\mathbf{k}) \Delta(\mathbf{k}) \mathbf{k} d^2 k. \quad (19)$$

Уравнение (19) неявно определяет вектор  $\boldsymbol{\chi}$  с компонентами  $\chi_i$ ,  $i = 1, 2$ , поскольку правая часть этого уравнения содержит зависимость от  $\boldsymbol{\chi}$  в  $\Delta$ . Нетрудно убедиться в том, что уравнение (19) имеет не более одного решения. Для доказательства этого утверждения введем вспомогательную функцию  $H(\Delta) \equiv \Delta f(\eta(\Delta))$ , которая является монотонно возрастающей функцией своего аргумента, поскольку  $H'(\Delta) > 0$ , где штрихом обозначено дифференцирование по  $\Delta$ . Записав уравнение (19) покомпонентно,

можно убедиться в том, что его правая часть есть убывающая функция  $\chi_i$ . Действительно, дифференцирование интеграла в (19) по параметру  $\chi_i$  с учетом того, что  $dH(\Delta)/d\chi_i = H'(\Delta)k_i$ , показывает, что эта производная всюду отрицательна,

$$- \int_{\Xi} H'(\Delta) k_i^2 d^2 k < 0, \quad (20)$$

так что правая часть равенства (19) является убывающей функцией  $\chi_i$ , тогда как левая часть возрастает с  $\chi_i$ . Таким образом, равенство (19) оказывается возможным при единственном значении  $\boldsymbol{\chi}$ .

В том случае, когда возбуждению соответствует пара частиц в одной и той же энергетической зоне, очевидным решением уравнения (19) является  $\boldsymbol{\chi} = 0$ . В самом деле, в силу центральной симметрии области интегрирования  $\Xi$  правая часть равенства (19) при  $\boldsymbol{\chi} = 0$  также обращается в нуль как интеграл от нечетной функции по симметричной области, благодаря тому что при  $\boldsymbol{\chi} = 0$  энергетическая щель является четной функцией импульса, а энергия возбуждения  $\xi(-\mathbf{k}) = \xi(\mathbf{k})$ . Других решений уравнение (19) не имеет. Таким образом, при внутризонном зеркальном нестинге в случае вырожденного ядра (15) уравнение (9) допускает простое решение вида

$$\Delta(k) = a - bk^2, \quad (21)$$

определяющее энергетическую щель в  $\Xi$  как параболу функцию импульса относительного движения. Коэффициенты  $a$  и  $b$ , задающие соответственно положение вершины и кривизну параболы, определяются размерами и формой области  $\Xi$ , видом одночастичного закона дисперсии и температурой. Отметим, что в (21)  $a$  и  $b$  — безразмерные величины соответственно в единицах  $U_0$  и  $U_0 r_0^2$ .

Процедура определения параметров  $a$ ,  $b$  и  $\boldsymbol{\chi}$ , помимо уравнения (19), дает еще два уравнения, которые, с учетом того, что  $\boldsymbol{\chi} = 0$ , принимают вид

$$\begin{aligned} \left( J_0 - \frac{1}{2} J_1 + 1 \right) a - \left( J_1 - \frac{1}{2} J_2 \right) b &= 0, \\ \frac{1}{2} J_0 a - \left( \frac{1}{2} J_1 - 1 \right) b &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где для однотипных интегралов по области  $\Xi$  использовано обозначение

$$J_n \equiv \int_{\Xi} f(\mathbf{k}) k^{2n} d^2 k. \quad (23)$$

Все три интеграла (23), входящие при  $n = 0, 1, 2$  в систему уравнений (22), положительны и зависят от  $a$



и  $b$  как от параметров. Таким образом, (22) представляет собой систему двух квазилинейных уравнений относительно двух неизвестных  $a$  и  $b$ .

Умножая условие  $k^2 < 1/2$ , при котором допустимо использование приближенного ядра (15), сначала на  $f(\eta(\mathbf{k}))$ , а затем на  $k^2 f(\eta(\mathbf{k}))$ , и интегрируя полученные неравенства по области  $\Xi$ , можно получить два неравенства,  $J_1 < J_0/2$  и  $J_2 < J_1/2$ , на основании которых можно заключить, что оба коэффициента при неизвестных в первом из уравнений системы (22) положительны. Следовательно, решения  $a$  и  $b$  системы (22) имеют одинаковый (например, положительный) знак. Поэтому сверхпроводящий параметр порядка, определяемый выражением (21), меняет свой знак при некотором  $k = k_0$ , где  $k_0^2 = a/b$ , и может быть записан как

$$\Delta(k) = b(k_0^2 - k^2). \quad (24)$$

Параметр  $b$  характеризует энергетический масштаб сверхпроводящей щели, а  $k_0$  определяет радиус окружности в импульсном пространстве, на которой энергетическая щель обращается в нуль. В обсуждаемом здесь случае отталкивательного взаимодействия обращение в нуль сверхпроводящего параметра порядка имеет место в пределах области  $\Xi$ , поскольку при  $U(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) > 0$  уравнение (9) заведомо не имеет знакопостоянных решений. На окружности  $k = k_0$  параметр порядка меняет знак (фаза параметра порядка меняется на  $\pi$ ), поэтому эта линия может быть названа линией  $\pi$ -сдвига фазы параметра порядка.

Условия  $a > 0$  и  $b > 0$ , как можно видеть из второго уравнения системы (22), предполагают выполнение неравенства  $J_1 > 2$ , которое налагает некоторые ограничения на возможные значения параметров задачи. Это соотношение является следствием более сильного неравенства, вытекающего из условия нетривиальной совместности системы уравнений (22). Вычисляя определитель системы, это условие можно записать как

$$(J_1/2 - 1)^2 = J_0(J_2/4 - 1), \quad (25)$$

откуда видно, что должно иметь место неравенство  $J_2 > 4$ , из которого, с учетом того что  $J_1 > 2J_2$ , можно получить  $J_1 > 8$ .

Принимая во внимание явный вид интеграла  $J_2$ , а также неравенство  $f(\mathbf{k}) \leq (8\pi T)^{-1}$ , условию  $J_2 > 4$  можно придать вид

$$T < \frac{1}{32\pi} \int_{\Xi} k^4 d^2k. \quad (26)$$

Условие (26) налагает ограничение сверху на температуру возникновения сверхпроводящего порядка, а также показывает, что при конечной температуре порядок, связанный с образованием конденсата пар с суммарным импульсом  $\mathbf{K}$ , может возникать при достаточно большой величине соответствующей области  $\Xi$ .

Вместо пары неизвестных параметров  $a$  и  $b$ , характеризующих сверхпроводящую щель, удобно рассмотреть другую пару параметров,  $b$  и  $k_0^2$ , для определения которых можно воспользоваться любыми двумя из уравнений (22) и (25). В качестве одного из них удобно взять второе из уравнений (22), записав его с учетом того, что  $k_0^2 = a/b$ , в виде

$$J_1 - k_0^2 J_0 = 2. \quad (27)$$

Выразив левую часть уравнения (25) с помощью второго из уравнений (22), равенство (25) можно переписать как

$$J_2 - k_0^4 J_0 = 4. \quad (28)$$

Система уравнений (27) и (28) полностью эквивалентна исходной системе (22) и может быть использована для определения параметров  $b$  и  $k_0^2$  сверхпроводящей щели. В связи с этим отметим, что интегралы  $J_0$ ,  $J_1$  и  $J_2$ , зависящие от  $\Delta$ , сами зависят от  $b$  и  $k_0^2$ .

При межзонном зеркальном нестинге ( $s \neq s'$ ) энергия возбуждения пары (2), вообще говоря, не является четной функцией импульса относительно движения,  $\xi(-\mathbf{k}) \neq \xi(\mathbf{k})$ . В этом случае уравнение (19), определяющее вектор  $\chi$ , также имеет единственное решение, которое может оказаться отличным от нуля. Действительно, записав уравнение (19) покомпонентно и исследовав асимптотическое поведение при  $\chi_i \rightarrow \pm\infty$  его правой и левой частей, можно убедиться в том, что левая часть с ростом  $\chi_i$  монотонно возрастает от  $-\infty$  до  $+\infty$ , тогда как правая часть монотонно убывает от конечного положительного значения при  $\chi_i \rightarrow -\infty$  до конечного отрицательного значения при  $\chi_i \rightarrow +\infty$ . Две функции с таким поведением обязательно имеют единственную точку пересечения, соответствующую решению уравнения (19). Из условия зеркального нестинга следует, что такое решение может приводить к вектору  $\chi \neq 0$ , коллинеарному суммарному импульсу пары  $\mathbf{K}$ , что отражает асимметрию энергии возбуждения пары (2) в разных энергетических зонах (когда  $s \neq s'$ ).

Уравнения, описывающие случай  $\chi \neq 0$ , могут быть сведены к уже рассмотренным при  $\chi = 0$  урав-

нениям. Для этого достаточно сместить начало отсчета импульсов относительного движения из центра области  $\Xi$  в точку, которой соответствует вершина параболоида (18). Полагая в (18)  $\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}_0$ , где  $\mathbf{q}_0 = \chi/2b$  — положение вершины, а  $\mathbf{p}$  — импульс, отсчитываемый от нового начала, можно прийти к прежнему выражению (21) для параметра порядка как функции импульса  $\mathbf{p}$ , в котором  $a$  и  $b$  — параметры, подлежащие определению. Система уравнений для  $a$  и  $b$  получается описанным выше способом из основного уравнения (9), если в нем перейти к новым переменным  $\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{q}_0$  и  $\mathbf{p}' = \mathbf{k}' - \mathbf{q}_0$ , и имеет в точности такой же вид (22), как и в случае  $\chi = 0$ . Однако коэффициенты полученной таким образом системы уравнений, содержащие интегралы  $J_n$  по области  $\Xi$  от функций вида  $f(\mathbf{p})p^{2n}$ , где  $f(\mathbf{p})$  определяется выражением (8), зависят, вообще говоря, от вектора  $\mathbf{q}_0$ , который теперь должен входить в определение энергии возбуждения пары (2). Таким образом, решение  $a, b$  системы уравнений (22) оказывается зависящим от  $\mathbf{q}_0$  как от параметра, для определения которого необходимо воспользоваться дополнительным условием

$$\int_{\Xi} f(\mathbf{p})(a - bp^2) \mathbf{p} d^2p = 0, \quad (29)$$

возникающим из уравнения (19) при переходе к новой переменной  $\mathbf{p}$ . В случае  $\chi = 0$  условие (29) удовлетворяется тождественно в силу симметрии системы. При  $\chi \neq 0$  оно неявно определяет связь вектора  $\mathbf{q}_0$  с параметрами  $a$  и  $b$ .

Таким образом, при  $\chi \neq 0$  SC-параметр порядка также является простой квадратичной функцией вида (21), зависящей от импульса  $\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{q}_0$ , с параметрами  $a$  и  $b$ , определяемыми системой уравнений (22) при дополнительном условии (29). Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением случая  $\chi = 0$ .

### 5. ПАРАМЕТР ПОРЯДКА ПРИ $T = 0$

В предельном случае нулевой температуры функция  $h(T)$ , определенная в (7), равна единице, и уравнения (27) и (28) принимают вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \frac{(k^{2n} - k_0^{2n})d^2k}{\sqrt{\xi^2(\mathbf{k}) + b^2(k^2 - k_0^2)^2}} = 2^n, \quad (30)$$

здесь и далее  $n = 1, 2$ . Аналитическое решение уравнений (30) во всей области определения неизвестных

( $b > 0, 0 < k_0^2 < 1/2$ ) получить невозможно, поскольку интегралы в (30) зависят от формы области интегрирования. Однако нетрудно установить их вид в двух предельных случаях очень больших ( $b \rightarrow \infty$ ) и очень малых ( $b \rightarrow +0$ ) значений энергетического масштаба щели. Так, при больших  $b$  можно пренебречь первым слагаемым в подкоренном выражении каждого из интегралов по сравнению со вторым, так что интегралы в (30) оказываются пропорциональными  $1/b$ , и решение системы (30) находится элементарно.

При рассмотрении поведения интегралов в (30) в физически интересном случае малых  $b$  необходимо принять во внимание то, что энергия возбуждения пары (2) обращается в нуль на линии, разделяющей заполненную,  $\Xi^{(-)}$ , и вакантную,  $\Xi^{(+)}$ , части области  $\Xi$ , поскольку эта линия (РФС) является частью РС. Поэтому при  $b \rightarrow +0$  интегралы (30) расходятся. Решение системы уравнений (30) при малых  $b$  определяется характером этой расходимости, который можно установить, если учесть, что при  $b \rightarrow +0$  основной вклад в интегралы (30) вносит небольшая часть области  $\Xi$  в виде узкой полосы вдоль линии  $\xi(\mathbf{k}) = 0$ . Обозначим ширину этой полосы  $2\Delta k$  и будем описывать форму линии  $\xi(\mathbf{k}) = 0$  в полярных координатах:  $k = k(\varphi)$ . Рассмотрим интеграл общего вида,

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \frac{F(k) k dk d\varphi}{\sqrt{\xi^2(k, \varphi) + b^2(k_0^2 - k^2)^2}}, \quad (31)$$

где  $F(k)$  — непрерывная функция, не имеющая особенностей, и установим его поведение при  $b \rightarrow +0$ , приняв в качестве области интегрирования узкую полосу шириной  $2\Delta k$  вдоль РС. Выполняя внешнее интегрирование по полярному углу в пределах от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , соответствующих точкам окончания РС (линии  $\xi(k, \varphi) = 0$ ), а внутреннее — по аргументу  $k$  в пределах от  $k(\varphi) - \Delta k$  до  $k(\varphi) + \Delta k$ , перейдем во внутреннем интеграле к новой переменной  $\xi$ . Ввиду малой ширины полосы  $\Delta k$  переменные  $k$  и  $\xi$  линейно связаны друг с другом:

$$\xi \approx (d\xi(k(\varphi))/dk)(k - k(\varphi)).$$

Кроме того, в принятом приближении аргумент  $k$  в подынтегральном выражении в (31) может быть заменен своим постоянным (при данном  $\varphi$ ) значением на РС,  $k = k(\varphi)$ . Выполнив интегрирование по  $\xi$ , можно, таким образом, получить сингулярный (логарифмический по  $b$ ) вклад в интеграл (31). Помимо сингулярного вклада, имеется также регулярный (не имеющий особенности при  $b \rightarrow +0$ ) вклад, который определяется интегралом по всей области  $\Xi$  и

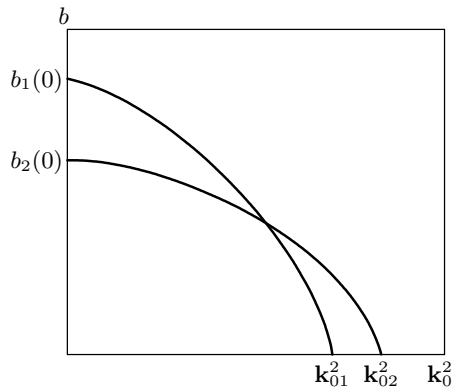


Рис. 6. Графическая иллюстрация решения системы уравнений (30)

поэтому зависит от ее размеров и формы, а также от вида одночастичного закона дисперсии и от  $k_0^2$  как от параметра. Таким образом, интеграл (31) может быть представлен как

$$J = A \ln(1/b) + C, \tag{32}$$

где коэффициент перед логарифмом имеет вид

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{kF(k)}{|\xi'_k|} d\varphi. \tag{33}$$

Интегрирование в (33) проводится вдоль PFC, т.е. по линии  $\xi(k, \varphi) = 0$ , на которой  $k = k(\varphi)$ , а  $\xi'_k = (\partial \xi / \partial k)_{k=k(\varphi)}$ . Регулярная по  $b$  часть интеграла, обозначенная  $C$ , в случае малых  $b$  может быть принята равной своему значению при  $b = 0$ .

Таким образом, при малых  $b$  система уравнений (30) принимает вид

$$(A_n - k_0^{2n} A_0) \ln(1/b) = P_n, \tag{34}$$

где коэффициенты  $A_n$  определяются выражением (33) при  $F(k) = k^{2n}$ , а правые части уравнений (34) зависят от  $k_0^2$  и равны

$$P_n = 2^n - C_n + k_0^{2n} C_0. \tag{35}$$

Здесь  $C_n$  — регулярные части интегралов (23) при  $T = 0$ .

С помощью формулы (34) можно показать, что система уравнений (30) заведомо имеет решение, определяющее параметры SC-щели  $b$  и  $k_0^2$ . Для этого будем рассматривать каждое из уравнений (30) по отдельности, как определяющее некоторую линию на плоскости  $b, k_0^2$ . Тогда решению системы соответствует точка пересечения этих двух линий. Положим в уравнениях (30)  $k_0^2 = 0$ ; тогда левые части

каждого из них определяют некоторые функции аргумента  $b$ , монотонно убывающие от значения  $+\infty$  при  $b \rightarrow +0$  до нуля при  $b \rightarrow +\infty$ . При этом, в силу неравенства (16), вторая из этих функций, соответствующая  $n = 2$ , заведомо меньше первой ( $n = 1$ ) при любом данном  $b$ . Поэтому решение  $b_1(0)$  первого уравнения (30), соответствующее  $k_0^2 = 0$ , оказывается всегда больше, чем решение  $b_2(0)$  второго уравнения, правая часть которого больше правой части первого (рис. 6). Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда  $b \rightarrow +0$ , и воспользуемся асимптотической формой уравнений (30) в виде (34). Поскольку правые части уравнений (34) конечны, а  $\ln(1/b) \rightarrow +\infty$  при  $b \rightarrow +0$ , значения  $k_0^2(0)$ , соответствующие  $b \rightarrow +0$ , определяются как  $k_{01}^2 = A_1/A_0$  при  $n = 1$  и  $k_{02}^2 = \sqrt{A_2/A_0}$  при  $n = 2$ . Учитывая условие (16), можно убедиться в том, что  $k_{0n}^2 < 1/2$ . Для величин  $A_0, A_1$  и  $A_2$ , определяемых интегралами вида (33), имеет место неравенство Коши–Буняковского  $A_1^2 \leq A_0 A_2$ , поэтому  $k_{01}^2 \leq k_{02}^2$ , как показано на рис. 6, из которого с очевидностью вытекает наличие точки пересечения рассматриваемых линий и, следовательно, существование решения системы уравнений (30).

Для получения такого решения в случае малых  $b$  необходимо провести почленное деление уравнений (34) друг на друга, что позволяет прийти к замкнутому уравнению для определения параметра  $k_0^2$ , которое, как было показано выше, всегда имеет требуемое решение  $k_0^2 < 1/2$ . Тогда энергетический масштаб сверхпроводящей щели при  $T = 0$  определяется по найденному значению  $k_0^2$  с помощью любого из уравнений (34), например,

$$b = \exp\left(-\frac{P_1}{A_1 - A_0 k_0^2}\right), \tag{36}$$

что в соответствии с (24) полностью задает зависимость энергетической щели от импульса относительного движения пары при  $T = 0$ . Поскольку  $b \ll 1$ , очевидно, что дробь в показателе экспоненты положительна.

Отметим одно важное обстоятельство: в рассматриваемом случае малых  $b$  значение параметра  $k_0$ , определяемое из системы уравнений (30), таково, что отвечающая ему линия  $\pi$ -сдвига фазы SC-параметра порядка ( $k = k_0$ ) обязательно пересекается с PFC. Действительно, пусть  $b, k_0$  — решение системы (30). При  $b \rightarrow +0$  интегралы в (30) определяются их сингулярными частями, происходящими от интегрирования по малой окрестности PFC. Если бы окружность  $k = k_0$  не пересекала PFC, то PFC вместе со своей малой окрестностью распола-

гался бы целиком внутри или вне этой окружности. Поэтому всюду в пределах такой окрестности выполнялось бы либо неравенство  $k < k_0$ , либо противоположное неравенство  $k > k_0$ , так что подынтегральные функции в (30) сохраняли бы в этой окрестности постоянный знак (очевидно, положительный, поскольку знак правой части равенства (30) согласуется с неравенством  $k > k_0$ ). В таком случае интеграл с  $n = 2$  в (30) оказался бы меньше интеграла с  $n = 1$  ввиду неравенства  $k^2 + k_0^2 < 1$ , вытекающего из условия (16). Таким образом, при сделанном предположении о том, что окружность  $k = k_0$  и PFC не пересекаются, уравнения в системе (30) оказываются несовместными. Следовательно, при  $b \rightarrow +0$  параметр  $k_0$  непременно оказывается таким, что пересечение PFC и окружности  $k = k_0$  имеет место, так что величина  $k^2 - k_0^2$  на разных участках PFC (по разные стороны от окружности  $k = k_0$ ) имеет разные знаки. Этот вывод, справедливый при  $b \rightarrow +0$ , сохраняет свою силу и при достаточно малых конечных значениях параметра  $b$ .

Для  $b$  и  $k_0$ , являющихся решениями уравнений (30), интеграл, входящий во второе из них ( $n = 2$ ), должен быть больше, чем интеграл в первом ( $n = 1$ ), хотя и содержит дополнительный весовой множитель  $k^2 + k_0^2 < 1$ . Следовательно, положительный и отрицательный вклады во второй интеграл, возникающие от участков области  $\Xi$ , в которых подынтегральная функция положительна ( $k > k_0$ ) и отрицательна ( $k < k_0$ ), компенсируются в значительно меньшей степени, чем это имеет место для первого интеграла. Поскольку в случае малых  $b$  при вычислении интегралов достаточно учитывать только вклады от малой окрестности PFC, наличие весового множителя  $k^2 + k_0^2$  сказывается тем сильнее, чем заметнее различаются минимальное ( $k_m$ ) и максимальное ( $k_M$ ) расстояния от центра области  $\Xi$  до PFC. Если  $k_m$  и  $k_M$  близки друг к другу, т. е. PFC на всем своем протяжении располагается вблизи линии  $\pi$ -сдвига фазы SC-параметра порядка ( $k = k_0$ ), то наличие весового множителя  $k^2 + k_0^2$  может оказаться существенным лишь в том случае, когда другой множитель в подынтегральной функции (30) сильно меняется в окрестности PFC, что имеет место в случае предельно малых  $b$ . Таким образом, при сближении PFC с линией  $\pi$ -сдвига фазы должно иметь место существенное уменьшение энергетического масштаба SC-щели.

Поскольку окружность  $k = k_0$  пересекает PFC, то  $k_m < k_0 < k_M$ . Поэтому, используя явные выражения (33) для величин  $A_n$  (при  $F(k) = k^{2n}$ ), нетрудно оценить их комбинацию  $A_1 - k_0^2 A_0$ , входя-

щую в выражение (36), как

$$|A_1 - k_0^2 A_0| \leq \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \frac{k_M^3 - k_m^3}{\langle v_F \rangle}, \quad (37)$$

где  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  — угловая протяженность PFC,  $\langle v_F \rangle$  — некоторая средняя на PFC безразмерная фермиевская скорость:

$$\frac{1}{\langle v_F \rangle} = \frac{1}{\Delta\varphi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{|\xi'_k|} \quad (38)$$

(ввиду того что PFC представляет собой некоторую часть FC, для всей этой части имеет место оценка  $|\xi'_k| = k^{-1} |(\mathbf{k}, \nabla_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{k}))| \approx v_F$ ). Таким образом, как видно из выражения (36) и оценки (37), величина SC-щели экспоненциально убывает с уменьшением угловой протяженности PFC  $\Delta\varphi$ , т. е. с уменьшением длины PFC; кроме того, величина SC-щели экспоненциально убывает с уменьшением разности  $k_M - k_m$ , характеризующей степень анизотропии PFC.

## 6. ПАРАМЕТР ПОРЯДКА ПРИ $T \neq 0$

Параметры SC-щели при отличной от нуля температуре определяются теми же уравнениями (27) и (28), в которых температурная зависимость интегралов (23) содержится в функции  $f(\eta(\mathbf{k}, T))$ , заданной вторым из соотношений (8). Удобно переписать уравнения (27) и (28) в виде

$$I_n(b, \tau) \equiv \int_{\Xi} (k^{2n} - k_0^{2n}) f(\mathbf{k}) d^2k = 2^n, \quad (39)$$

где введена новая безразмерная переменная  $\tau = 2T$ . Как следует из неравенства (26), система (39) имеет решение в ограниченном интервале значений параметра  $\tau$ :  $0 \leq \tau \leq \tau^*$ , причем из физических соображений ясно, что энергетический масштаб SC-щели  $b$  является монотонно убывающей функцией  $\tau$ , обращающейся в нуль при  $\tau = \tau^*$ . Аналитическое решение уравнений (39), определяющее две функции  $b(\tau)$  и  $k_0(\tau)$ , во всем интервале изменения температуры  $\tau$  получить не удастся, однако путем несложных преобразований эти уравнения можно привести к виду, позволяющему исследовать поведение их решения в двух важных предельных случаях: вблизи абсолютного нуля ( $\tau \rightarrow +0$ ) и вблизи температуры  $\tau^*$  исчезновения SC-щели ( $\tau \rightarrow \tau^* - 0$ ).

Продифференцируем интегралы в левых частях уравнений (39) по параметру  $\tau$ :

$$\frac{\partial I_n}{\partial \tau} = -\frac{1}{4\pi\tau^2} \int_{\Xi} \frac{k^{2n} - k_0^{2n}}{\text{ch}^2(\eta(\mathbf{k})/\tau)} d^2k. \quad (40)$$

Естественно считать, что энергетический масштаб области изменения энергии возбуждения пары  $\xi(\mathbf{k})$ , соответствующий области импульсного пространства  $\Xi$ , гораздо больше энергии, соответствующей температуре SC-перехода. В таком случае основной вклад в интегралы (40) дает малая окрестность PFC, тогда как во всей остальной части  $\Xi$ , где отношение  $\eta(\mathbf{k})/\tau$  велико, подынтегральная функция исчезающе мала. Поэтому аналогично тому, как это было сделано при вычислении интегралов в (30), перейдем в (40) к интегрированию по угловой переменной  $\varphi$  и приведенной энергии возбуждения  $u = \xi/\tau$ , пределы изменения которой можно распространить до бесконечности. Возвращаясь от частных производных (40) к исходным величинам  $I_n(b, \tau)$ , запишем их как

$$I_n(b, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial I_n}{\partial \tau} d\tau + I_n(b, 0), \quad (41)$$

где  $I_n(b, 0) = J_n - k_0^{2n} J_0$  — значения рассматриваемых интегралов при  $\tau = 0$ . Входящий в (41) интеграл заменой переменной  $\tau = b|k^2 - k_0^2|/v$  преобразуется к виду

$$\int_0^\tau \frac{\partial I_n}{\partial \tau} d\tau = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_v^{\infty} \frac{k(k^{2n} - k_0^{2n}) dv du d\varphi}{4\pi|\xi'_k|v \text{ch}^2(\sqrt{u^2 + v^2})}, \quad (42)$$

где внешнее интегрирование по углу  $\varphi$  проводится, как и в (33), по PFC,  $k = k(\varphi)$ , а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответствуют точкам окончания PFC. Наконец, двойной интеграл по полупространству переменных  $u, v$  в (42) после преобразования к полярным координатам  $\psi, w = \sqrt{u^2 + v^2}$  и элементарного интегрирования по  $w$  сводится к однократному, так что после подстановки  $\sin \psi = 1/\text{ch } z$  выражение (42) принимает вид

$$\int_0^\tau \frac{\partial I_n}{\partial \tau} d\tau = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} G\left(\frac{b|k^2 - k_0^2|}{\tau}\right) \frac{k(k_0^{2n} - k^{2n}) d\varphi}{\pi|\xi'_k|}, \quad (43)$$

где символом « $G(v)$ » обозначена вспомогательная функция

$$G(v) = \int_0^\infty \frac{dz}{1 + \exp(2v \text{ch } z)}, \quad (44)$$

быстро убывающая с ростом своего аргумента. Согласно (43), первое слагаемое в (41) зависит от отношения  $b/\tau$ . Явный вид этой зависимости в общем

случае установить не удастся, поскольку он определяется конкретной формой PFC, и, кроме того, интеграл (44) не выражается через известные функции. Однако выражение (43) позволяет проанализировать характер решения системы (39) при  $\tau \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow \tau^*$  и качественно проследить его поведение во всем интервале  $0 \leq \tau \leq \tau^*$ . Предположим, что при  $\tau = 0$  SC-щель достаточно мала, так что для интегралов  $J_n$  можно использовать представление (32), и запишем уравнения (39) с учетом (41) в виде

$$(A_n - k_0^{2n} A_0) \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \int_0^\tau \frac{\partial I_n}{\partial \tau} d\tau = P_n, \quad (45)$$

где  $A_n$  и  $P_n$  имеют тот же смысл, что и в (34).

Для определения вида функций  $k_0(\tau)$  и  $b(\tau)$  в пределе низких температур при вычислении интегралов (43) достаточно ограничиться рассмотрением случая больших значений отношения  $b/\tau$ , поскольку при  $\tau \rightarrow 0$  параметр  $b$  близок к своему значению  $b(0)$  при  $\tau = 0$ . В этом случае основной вклад в значения интегралов (43) вносят те участки PFC, для которых величина  $|k^2 - k_0^2|$  минимальна, т. е. участки, примыкающие к точкам пересечения PFC с линией  $k = k_0$   $\pi$ -сдвига фазы SC-параметра порядка. В случае малых  $b$  такое пересечение ввиду симметрии области  $\Xi$  имеет место, по крайней мере, в четырех точках импульсного пространства, расположенных симметрично в каждом квадранте системы координат с центром в  $\mathbf{K}/2$ .

Вклады в интеграл (43) от каждой такой точки одинаковы и определяются небольшой их окрестностью, в пределах которой величину  $q = k - k_0$  следует считать малой, а зависимость  $q(\varphi)$  — линейной. Выполняя в (43) интегрирование по указанной окрестности, удобно перейти от угла  $\varphi$  к переменной  $q$ , ограничиваясь ввиду малости последней первыми членами разложения разности  $k^{2n} - k_0^{2n}$  по степеням  $q$  и считая величину  $|\xi'_k|$  постоянной. Ввиду большой величины отношения  $b/\tau$  при  $\tau \rightarrow 0$  функция (44) с ростом  $|q|$  быстро приближается к нулю, поэтому интегрирование по  $q$  можно распространить на всю числовую ось, после чего оно выполняется элементарно по обоим переменным  $q$  и  $z$  и приводит к выражению

$$\int_0^\tau \frac{\partial I_n}{\partial \tau} d\tau \approx Q_n \frac{\tau^3}{b^3}, \quad (46)$$

где  $Q_n$  — зависящие от параметра  $k_0$  коэффициенты. Таким образом, в пределе низких температур система уравнений (39) принимает вид

$$(A_n - k_0^{2n} A_0) \ln \left( \frac{1}{b} \right) = P_n - Q_n \frac{\tau^3}{b^3}. \quad (47)$$

Вторые слагаемые в правых частях уравнений (47) являются малыми добавками, поэтому эта система при  $\tau \rightarrow 0$  может быть решена методом последовательных приближений. Используя в качестве нулевого приближения решение системы уравнений (34), положим в добавочных слагаемых величины  $k_0$  и  $b$  равными их значениям при  $\tau = 0$ . Теперь значения  $b(\tau)$  и  $k_0(\tau)$  можно найти тем же способом, которым была решена система (34), причем наличие в (47) малых слагаемых порядка  $\tau^3$  приводит к поправкам того же порядка в решении:

$$k_0(\tau) = k_0(0) + \gamma_1 \tau^3, \quad b(\tau) = b(0) - \gamma_2 \tau^3, \quad (48)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — некоторые коэффициенты, второй из которых должен быть положительным числом, так как с ростом температуры энергетический масштаб щели, очевидно, уменьшается. Выражения (48) определяют первые два члена разложения функций  $b(\tau)$  и  $k_0(\tau)$  в ряд по степеням  $\tau$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Как показывают формулы (48), вблизи  $\tau = 0$  SC-параметр порядка с ростом температуры уменьшается по кубическому закону.

Уменьшение  $b$  с ростом температуры должно приводить к тому, что при некоторой температуре  $\tau = \tau^*$  SC-параметр порядка обращается в нуль:  $b(\tau^*) = 0$ . Чтобы определить эту температуру и установить характер приближения  $b(\tau)$  к нулю, следует рассмотреть поведение интегралов (43) при малых значениях отношения  $b/\tau$ . При малых значениях аргумента функция  $G(v)$ , определяемая в (44), может быть записана как

$$G(v) \approx \frac{1}{2} \ln \left( \frac{c_1}{v} \right) + c_2 v^2, \quad (49)$$

где  $c_1 \approx 1$  и  $c_2 > 0$ , причем сингулярное при  $v \rightarrow 0$  слагаемое в разложении (49) может быть получено из (44), если, учитывая малость  $v$ , заменить в (44) экспоненту ее первыми двумя членами разложения в ряд. То, что регулярная часть (49) не содержит слагаемого, линейного по  $v$ , связано с тем, что функция  $G(v)$  является первообразной от нечетной функции аргумента  $v$ , фигурирующей в подынтегральном выражении в (42). После подстановки (49) в (43) система уравнений (45) может быть преобразована к виду

$$(A_n - k_0^{2n} A_0) \ln \left( \frac{1}{\tau} \right) = R_n + S_n \frac{b^2}{\tau^2}, \quad (50)$$

где  $S_n$  и  $R_n$  — зависящие от  $k_0$  коэффициенты.

Если в уравнениях (50) положить  $\tau = \tau^*$ , то в силу условия  $b(\tau^*) = 0$  эти уравнения примут вид

$$(A_n - k_0^{2n} A_0) \ln(1/\tau^*) = R_n. \quad (51)$$

Система (51) подобна (34) и может быть решена аналогичным способом. Она позволяет определить температуру  $\tau^*$ , при которой SC-параметр порядка обращается в нуль, а также значение параметра  $k_0$  при  $\tau = \tau^*$ .

Зависимости  $b(\tau)$  и  $k_0(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \tau^* - 0$  определяются из системы уравнений (50), в которой слагаемые, пропорциональные  $b^2/\tau^2$ , представляют собой малые добавки, ввиду того что  $b \rightarrow 0$ . Поэтому уравнения (50) можно решить методом последовательных приближений, используя в качестве нулевого приближения решение  $\tau^*$ ,  $k_0(\tau^*)$  системы (51). Ввиду формальной аналогии между (50) и (47) легко найти, что при  $\tau \rightarrow \tau^* - 0$  поведение параметров  $b$  и  $k_0$  описывается соотношениями

$$b(\tau) \propto \sqrt{1 - \tau/\tau^*}, \quad k_0(\tau) = k_0(\tau^*) + \gamma_3(\tau^* - \tau), \quad (52)$$

где  $\gamma_3$  — некоторый коэффициент. Отметим, что первое из них соответствует вытекающей из общей теории фазовых переходов второго рода зависимости параметра порядка от температуры в несимметричной фазе вблизи точки перехода. Поэтому формально введенную температуру  $\tau^*$  можно рассматривать как температуру фазового перехода, ниже которой система переходит в SC-состояние.

При помощи уравнений (45) можно качественно проследить зависимость  $b(\tau)$  во всем интервале температур  $0 \leq \tau \leq \tau^*$ , если предварительно преобразовать их следующим образом. Вычтем из второго ( $n = 2$ ) уравнения первое, умноженное на  $2k_0^2$ , а затем прибавим к обеим сторонам полученного равенства величину  $(A_2 - 2k_0^2 A_1 + k_0^4 A_0) \ln \tau$ . Учитывая явный вид (33) для  $A_n$  как интегралов вдоль PFC, а также выражение (43), можно получить уравнение вида

$$\Phi(\tau/b) = \Psi(\tau), \quad (53)$$

где

$$\Psi(\tau) = \ln \left( \frac{1}{\tau} \right) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{k(k^2 - k_0^2)^2 d\varphi}{2\pi |\xi'_k|} - (P_2 - 2k_0^2 P_1) \quad (54)$$

— простая логарифмическая функция с положительным коэффициентом перед логарифмом, а функция в левой части (53) определяется как

$$\Phi(\tau/b) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{k(k^2 - k_0^2)^2}{|\xi'_k|} \times \left[ 2G\left(\frac{b|k^2 - k_0^2|}{\tau}\right) + \ln\left(\frac{b}{\tau}\right) \right] d\varphi. \quad (55)$$

Учитывая определение (44) для  $G(v)$ , можно убедиться, что подинтегральное выражение в (55) неотрицательно, а сама функция (55) монотонно убывает с возрастанием своего аргумента, причем при  $\tau/b \rightarrow \infty$  она имеет конечный предел  $\Phi_0 > 0$ , а при  $\tau/b \rightarrow 0$  — логарифмическую особенность вида  $\ln(b/\tau)$ . Такой характер функций  $\Phi$  и  $\Psi$ , как ясно из их определения, сохраняется при любых значениях параметра  $k_0$ . Учитывая сравнительно малый интервал изменения этого параметра ( $0 < k_0^2 < 0.5$ ), можно качественно исследовать зависимость  $\tau/b$  от  $\tau$  при помощи формулы (53), приняв  $k_0^2$  равным некоторому среднему его значению в интервале  $0 < k_0^2 < 0.5$ . Изображая графики функций  $\Phi$  и  $\Psi$  соответственно от аргументов  $\tau/b$  и  $\tau$  в первом и третьем квадрантах координатной системы, а прямую  $\Phi = \Psi$  — во втором, можно получить график зависимости  $\tau/b$  от  $\tau$  в четвертом квадранте (рис. 7). Видно, что при малых  $\tau$  имеется участок, на котором  $\tau/b \propto \tau$ , что соответствует тому, что при  $\tau \rightarrow 0$  функция  $b(\tau)$  близка к константе  $b(0)$ . При  $\tau \rightarrow \tau^* - 0$  график зависимости  $\tau/b$  от  $\tau$  асимптотически приближается к прямой  $\tau = \tau^*$ , что соответствует уменьшению параметра  $b$  до нуля, когда

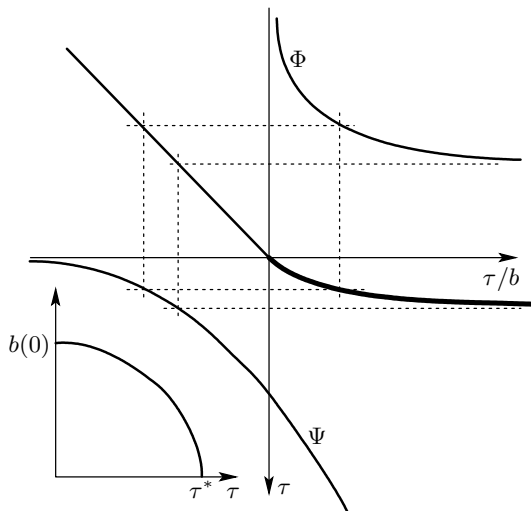


Рис. 7. Графическое решение уравнения (53), определяющее температурную зависимость параметра порядка. Температурная зависимость SC-параметра порядка (вставка слева внизу)

$\tau \rightarrow \tau^*$ . Общий характер зависимости параметра щели  $b$  от  $\tau$  показан на рис. 7.

### 7. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЩЕЛЬ И ТЕМПЕРАТУРА СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ПЕРЕХОДА

Температура SC-перехода может быть связана со средней величиной параметра порядка при нулевой температуре  $\Delta_0$ . Действительно, параметры щели при нулевой температуре  $b(0)$  и  $k_0(0)$  определяются системой уравнений (34), а температура перехода  $\tau^*$  и соответствующий ей параметр  $k_*$  — системой (51), которую удобно выписать здесь более подробно, явным указав аргумент всех функций:

$$(A_n - k_*^{2n} A_0) \ln(1/\tau^*) = P_n(k_*^2) + T_n(k_*^2). \quad (56)$$

При записи равенства (56) учтено, что, как следует из вывода уравнений (51),  $R_n = P_n + T_n$ , где через  $T_n$  обозначены интегралы вдоль РФС:

$$T_n(k_*^2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{k(k^{2n} - k_*^{2n})}{2\pi|\xi'_k|} \ln\left(\frac{c_1}{|k^2 - k_*^2|}\right) d\varphi, \quad (57)$$

а  $P_n(k_*^2)$  определяются согласно (35), но, в отличие от системы (34), вычисляются для  $k_0 = k_*$ .

Преследуя цель установить приближенно, по порядку величины, соотношение между средним значением  $\Delta_0 \equiv \overline{\Delta_0(k)}$  SC-щели,

$$\Delta_0(k) = b(0)(k_0^2(0) - k^2), \quad (58)$$

при  $\tau = 0$  и температурой перехода, покажем, прежде всего, что величины  $k_0(0)$  и  $k_*$  весьма незначительно отличаются друг от друга, и в достаточно хорошем приближении могут считаться равными. Действительно, значение  $k_*$  может быть найдено из системы (56) путем почленного деления ее уравнений. В результате получается определяющее величину  $k_*$  соотношение, которое отличается от вытекающего из системы (34) уравнения для  $k_0(0)$  тем, что содержит дополнительные слагаемые вида

$$(A_1 - k_*^2 A_0) T_2(k_*^2) - (A_2 - k_*^4 A_0) T_1(k_*^2). \quad (59)$$

Нетрудно убедиться в том, что последнее выражение, вообще говоря, весьма мало. В самом деле, согласно равенству (57), величина  $T_n(k_*^2)$  отличается от соответствующей величины  $(A_n - k_*^{2n} A_0)$ , записанной в виде интеграла вдоль РФС, наличием дополнительного логарифмического множителя в подинтегральном выражении. Однако, благодаря

присутствию в интегралах (57) множителя  $k^2 - k_*^2$ , обращающегося в нуль в точках  $k = k_*$  пересечения PFC с линией  $\pi$ -сдвига фазы параметра порядка, логарифмическая особенность существенно подавляется. Кроме того, абсолютная величина разности  $k^2 - k_*^2$  на всем PFC принимает значения, значительно меньшие  $1/2$ . В таких условиях логарифмический множитель может быть заменен постоянным значением, соответствующим некоторому  $\tilde{k}$ , взятому на PFC. Если бы для  $T_1$  и  $T_2$  эти значения случайно оказались одинаковыми, то рассматриваемое выражение (59) строго обратилось бы в нуль. Небольшое различие между указанными значениями приводит к тому, что это выражение, хотя и отлично от нуля, но весьма мало, и им можно пренебречь. В этом приближении уравнение, определяющее параметр  $k_*$ , совпадает по форме с уравнением для  $k_0(0)$  и, следовательно, можно принять, что  $k_* = k_0(0)$ . Учитывая это, вычтем уравнения системы (34) из соответствующих уравнений системы (56) и заменим логарифмы в  $T_n$  их средними значениями. Сокращая затем полученные равенства на  $A_n - k^{2n}(0)A_0$  и пренебрегая в рамках сделанного приближения различием указанных средних значений, придем как при  $n = 1$ , так и при  $n = 2$  к приближенному соотношению

$$\ln \left( \frac{b(0)}{\tau^*} \right) \approx \ln \left( \frac{c_1}{|\tilde{k}^2 - k_0^2(0)|} \right), \quad (60)$$

где  $\tilde{k}$  — значение  $k$  в некоторой точке PFC и, как отмечалось в связи с (49),  $c_1 \approx 1$ . Из соотношения (60) можно сделать вывод, что с точностью до множителя порядка единицы выполняется соотношение

$$\tau^* \sim \frac{1}{\Delta\varphi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |\Delta_0(k)| d\varphi \equiv \Delta_0, \quad (61)$$

где интегрирование проводится вдоль PFC, точки окончания которого имеют полярные углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Согласно (61) температура перехода в SC-состояние по порядку величины равна среднему на PFC значению абсолютной величины SC-параметра порядка при нулевой температуре.

Принимая во внимание явный вид (58) величины  $\Delta_0(k)$ , можно заключить, что интеграл в (61) численно равен произведению  $2b(0)$  на площадь области, заключенной между PFC и линией  $\pi$ -сдвига фазы SC-параметра порядка в интервале полярных углов от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ . Отсюда непосредственно вытекает следующая оценка для температуры SC-перехода:

$$T^* \lesssim b(0)(k_M^2 - k_m^2), \quad (62)$$

где, как и раньше,  $k_m$  и  $k_M$  — минимальное и максимальное расстояния от центра области  $\Xi$  до PFC. Отметим, что оценка (62) существенно отличается от известного результата теории БКШ, согласно которому отношение удвоенной величины SC-щели при  $T = 0$  к температуре перехода  $T_C$ ,  $2\Delta/T_C$ , есть универсальная постоянная, равная 3.52. Согласно неравенству (62), дробь  $b(0)/T^*$  зависит от степени анизотропии PFC, причем при малой степени анизотропии (близких значениях  $k_m$  и  $k_M$ ) ее величина может, в принципе, быть сколь угодно большим числом.

### 8. РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ

Уравнение самосогласования (9) помимо точного непрерывного решения  $\Delta(\mathbf{k})$  допускает также приближенные разрывные решения. Чтобы получить такие решения, следует произвольным образом разбить область  $\Xi$  на некоторое число подобластей  $\Xi_p$  ( $p = 1, 2, \dots, m$ ) так, чтобы каждая из них содержала участок PFC, и в каждой такой подобласти определить среднее значение параметра порядка

$$\Delta_p = \frac{1}{\Xi_p} \int_{\Xi_p} \Delta(\mathbf{k}) d^2k. \quad (63)$$

Тогда среднее значение параметра порядка по всей области  $\Xi$  записывается как

$$\Delta = \frac{1}{\Xi} \int_{\Xi} \Delta(\mathbf{k}) d^2k = \sum_{p=1}^m \frac{\Xi_p}{\Xi} \Delta_p, \quad (64)$$

где  $\Xi$  равна сумме площадей  $\Xi_p$ . Выполняя усреднение по каждой из подобластей непосредственно в уравнении самосогласования (9), можно, используя некоторые приближения, получить замкнутую систему  $m$  уравнений относительно неизвестных величин  $\Delta_p$ . Совокупность  $m$  значений  $\Delta_p$ , являющаяся решением полученной системы, определяет кусочно-постоянную функцию импульса относительного движения, которая «в среднем» передает ход функции  $\Delta(\mathbf{k})$  в области  $\Xi$ . С ростом числа подобластей  $m$  получаемые таким образом разрывные решения все более детально представляют точное непрерывное решение.

Отметим, что, в отличие от модели БКШ с притяжением между частицами, в случае отталкивательного взаимодействия нельзя ограничиться рассмотрением единственного среднего во всей области



$\Xi$  значения (64), т.е. положить  $m = 1$ , поскольку, как уже отмечалось, уравнение самосогласования (9) в случае отталкивания не допускает знакопостоянных решений. Поэтому простейшему разрывному решению при отталкивании соответствует выбор  $m = 2$ , когда область  $\Xi$  разбивается всего на две подобласти  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$ , а уравнение самосогласования сводится к системе двух уравнений, определяющих неизвестные величины  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , которые, очевидно, имеют разные знаки. Далее мы ограничимся рассмотрением именно такого простейшего случая.

Запишем уравнение самосогласования (9) при  $T = 0$ ,

$$\Delta(\mathbf{k}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\Xi} \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Delta(\mathbf{k}')}{\sqrt{\xi^2(\mathbf{k}') + \Delta^2(\mathbf{k}')}} d^2k', \quad (65)$$

и представим интеграл в его правой части в виде суммы интегралов по областям  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$ . Выполняя усреднение записанного таким образом уравнения (65) по области  $\Xi_1$  в соответствии с правилом (63), в левой его части получим величину  $\Delta_1$ , а в правой — сумму интегралов по переменным  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . В первом из них обе переменные изменяются в пределах одной и той же области  $\Xi_1$ , тогда как во втором интегрирование по  $\mathbf{k}$  проводится по  $\Xi_1$ , а по  $\mathbf{k}'$  — по области  $\Xi_2$ . Аналогично, усредняя (65) по области  $\Xi_2$ , можно получить второе уравнение с левой частью, равной  $\Delta_2$ , и с правой частью в виде суммы двух интегралов с соответствующими областями изменения переменных  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ .

Поскольку ядро интегрального уравнения  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  зависит от разности аргументов  $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \boldsymbol{\kappa}$ , удобно в каждом из полученных интегралов перейти к новой паре переменных  $\boldsymbol{\kappa}$  и  $\mathbf{k}'$ . Если интегрирование по старым переменным  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  выполняется по одной и той же области, например,  $\Xi_1$ , то переменная  $\boldsymbol{\kappa}$  будет изменяться в пределах некоторой области импульсного пространства, которую мы обозначим  $\Xi_{11}^*$ ; она соответствует всем таким векторам передачи импульса при рассеянии, когда и начальный ( $\mathbf{k}$ ), и конечный ( $\mathbf{k}'$ ) импульсы принадлежат  $\Xi_1$ . Если же интегрирование по  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  проводится по разным областям, например, соответственно по  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$ , то переменная  $\boldsymbol{\kappa}$  определена в некоторой области  $\Xi_{12}^*$ , которая соответствует таким  $\boldsymbol{\kappa}$ , при которых начальный импульс  $\mathbf{k}$  определен в  $\Xi_1$ , а конечный импульс  $\mathbf{k}'$  — в  $\Xi_2$ . Вообще говоря, области  $\Xi_{pp'}^*$ , где  $p, p' = 1, 2$ , зависят от импульса  $\mathbf{k}'$ , однако при приближенном вычислении интегралов можно считать эти области одинаковыми для всех  $\mathbf{k}'$ , определив соответствующие усредненные якобианы  $J_{pp'}$  преобразования

переменных интегрирования из условия сохранения числа состояний

$$\int_{\Xi_{p'}} \int_{\Xi_p} d^2k d^2k' = J_{pp'} \int_{\Xi_{p'}} \int_{\Xi_{p'}^*} d^2\kappa d^2k'. \quad (66)$$

Как следует из равенства (66),  $J_{pp'} = \Xi_p / \Xi_{pp'}^*$ . Используя такие усредненные якобианы, интегрирование по переменным  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  можно выполнять независимо друг от друга. Отметим, что  $\Xi_{pp'}^* = \Xi_{p'p}^*$ .

Введем средние по областям  $\Xi_{pp'}^*$  значения матричного элемента взаимодействия,

$$U_{pp'} = U_{p'p} = \frac{1}{\Xi_{pp'}^*} \int_{\Xi_{pp'}^*} U(\boldsymbol{\kappa}) d^2\kappa, \quad (67)$$

и определим функционалы  $f_p\{\Delta(\mathbf{k})\}$  соотношениями

$$\Delta_p f_p\{\Delta(\mathbf{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^2 \Xi_p} \int_{\Xi_p} \frac{\Delta(\mathbf{k}') d^2k'}{\sqrt{\xi^2(\mathbf{k}') + \Delta^2(\mathbf{k}')}}. \quad (68)$$

Заменяя определенные в (68) функционалы их значениями, соответствующими средним в  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$  значениям их аргумента  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , т.е. полагая

$$f_p \rightarrow f_p(\Delta_p) = \frac{1}{(2\pi)^2 \Xi_p} \int_{\Xi_p} \frac{d^2k'}{\sqrt{\xi^2(\mathbf{k}') + \Delta_p^2}}, \quad (69)$$

и вводя обозначения  $\alpha = \Xi_1 / \Xi$  и, соответственно,  $1 - \alpha = \Xi_2 / \Xi$ , можно получить интегральные соотношения, связывающие две неизвестные величины  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ :

$$\begin{aligned} 2\Delta_1 &= -\alpha \Xi U_{11} \Delta_1 f_1 - (1 - \alpha) \Xi U_{12} \Delta_2 f_2, \\ 2\Delta_2 &= -\alpha \Xi U_{21} \Delta_1 f_1 - (1 - \alpha) \Xi U_{22} \Delta_2 f_2. \end{aligned} \quad (70)$$

После вычисления функций (69) уравнения (70) образуют замкнутую систему трансцендентных уравнений относительно  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , подобную системе (22), возникающей при определении точного непрерывного решения уравнения самосогласования (9) с вырожденным ядром (15). Входящие в (69) интегралы по областям  $\Xi_p$ , содержащим участки РФС, вполне аналогичны интегралам (23) при  $T = 0$  и, как функции  $\Delta_p$ , имеют логарифмические особенности, обусловленные РФС. Поэтому при достаточно малых значениях  $\Delta_p$  они могут быть представлены в виде (32) с заменой  $b$  на  $\Delta_p$ . Анализ условия нетривиальной совместности системы уравнений (70) показывает, что эта система может

иметь ненулевое решение лишь при выполнении условия

$$U_{12}U_{21} - U_{11}U_{22} > 0, \quad (71)$$

которое здесь заменяет неравенство Коши–Буняковского  $A_1^2 - A_0A_2 < 0$  для величин  $A_0, A_1$  и  $A_2$ , введенных выше при рассмотрении непрерывного решения уравнения самосогласования. Отметим, что пренебрежение зависимостью матричного элемента  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  от своего аргумента, которое обычно делается в теории БКШ, приводит к одинаковым средним значениям матричного элемента  $U_{11} = U_{22} = U_{12}$ , вследствие чего  $U_{12}U_{21} - U_{11}U_{22} = 0$ . Это соответствует тому, что при условии  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \text{const}$  в случае отталкивательного взаимодействия уравнение самосогласования может иметь лишь тривиальное решение. Разумеется, система уравнений (70) приводит только к тривиальному решению и в случаях  $\alpha = 0$  или  $\alpha = 1$ , т. е. когда одна из подобластей  $\Xi_1$  или  $\Xi_2$  совпадает со всей областью  $\Xi$ .

Систему уравнений (70) можно привести к более симметричному виду, умножив первое из уравнений на  $\alpha$ , а второе — на  $(1 - \alpha)$ , а также полагая, что  $\alpha\Xi U_{11} \approx (1 - \alpha)\Xi U_{22} \equiv U'_0$ , и  $\alpha(1 - \alpha)\Xi U_{12} \approx \beta U'_0$ , где  $U'_0$  и  $\beta$  — некоторые параметры. Таким образом, система (70) принимает вид

$$\begin{aligned} 2\alpha\Delta_1 &= -\alpha U'_0\Delta_1 f_1 - \beta U'_0\Delta_2 f_2, \\ 2(1 - \alpha)\Delta_2 &= -\beta U'_0\Delta_1 f_1 - (1 - \alpha)U'_0\Delta_2 f_2. \end{aligned} \quad (72)$$

Система уравнений (72), записанная в эквивалентной форме как

$$\begin{aligned} 2(1 - \alpha)[\alpha\Delta_1 - \beta\Delta_2] &= U'_0\gamma\Delta_1 f_1, \\ 2\alpha[(1 - \alpha)\Delta_2 - \beta\Delta_1] &= U'_0\gamma\Delta_2 f_2, \end{aligned} \quad (73)$$

где  $\gamma = \beta^2 - \alpha(1 - \alpha)$ , была получена и исследована в работе [19], в которой в качестве областей  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$  для усреднения параметра порядка были выбраны заполненная,  $\Xi^{(-)}$ , и вакантная,  $\Xi^{(+)}$ , части области  $\Xi$ , разделенные РФС. В общем случае входящие в систему уравнений (70) величины  $U_{pp'}$  следует рассматривать как феноменологические параметры, зависящие от того, каким способом проводится разбиение области  $\Xi$  на две части  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$ . В этом смысле система уравнений (73) приводит к семейству разрывных решений, из которых следует выбрать то, которое наилучшим образом аппроксимирует точное непрерывное решение. Если в качестве меры близости приближенного разрывного

решения  $\Delta_d(\mathbf{k})$  к точному решению  $\Delta(\mathbf{k})$  выбрать среднеквадратичное отклонение

$$\delta^2 = \frac{1}{\Xi} \int_{\Xi} [\Delta(\mathbf{k}) - \Delta_d(\mathbf{k})]^2 d^2k, \quad (74)$$

то условие минимума  $\delta^2$  с учетом определения (63) для средних значений  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  приводит к требованию максимальности величины  $\alpha\Delta_1^2 + (1 - \alpha)\Delta_2^2$ . Поскольку эта величина неотрицательна и обращается в нуль при  $\alpha = 0$  (когда  $\Xi_2 = \Xi$ ) и  $\alpha = 1$  (когда  $\Xi_1 = \Xi$ ), очевидно, что она достигает максимума при некотором выборе разделения области  $\Xi$  на две части и, соответственно, при некотором  $\alpha$  из интервала  $0 < \alpha < 1$ . То из решений  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  системы (73), которое согласуется с таким выбором деления области  $\Xi$ , и может быть выбрано в качестве наилучшего приближенного решения.

Поскольку непрерывное решение (24) уравнения самосогласования обладает круговой симметрией относительно центра области  $\Xi$ , например, в случае, когда сама эта область представляет собой круг некоторого радиуса  $k_2$ , очевидно, что подобласти  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$  естественно выбирать так, чтобы и они обладали той же симметрией. Если  $\Xi_1$  представляет собой круг  $0 < k < k_1$ , а  $\Xi_2$  — кольцо  $k_1 < k < k_2$  ( $k_1 < k_2$ ), то введенные выше области  $\Xi_{pp'}^*$  также являются кругами:  $\Xi_{11}^*$  имеет радиус  $2k_1$ ,  $\Xi_{22}^*$  — радиус  $2k_2$ , а  $\Xi_{12}^* = \Xi_{21}^*$  — радиус  $k_1 + k_2$ . Для простоты можно ограничиться рассмотрением РФС в виде замкнутой линии, ограничивающей анизотропный карман. Тогда радиус  $k_1$  заполненной области следует выбрать так, чтобы окружность  $k = k_1$  пересекала РФС, чтобы одна часть РФС принадлежала  $\Xi_1$ , а другая —  $\Xi_2$ .

Для вырожденного ядра (15) интегрального уравнения (9) средние значения матричного элемента (67) принимают вид

$$U_{pp'} = 2\pi[1 - (k_p + k_{p'})^2/4], \quad (75)$$

из чего следует, что неравенство (71) определенно выполняется, и, следовательно, система уравнений (73) имеет нетривиальное решение, зависящее от  $k_1$  как от параметра, который должен быть найден из условия минимума величины (74). После этого могут быть найдены параметры  $b$  и  $k_0^2$ , определяющие непрерывное решение уравнения самосогласования и связанные в случае рассматриваемых здесь круговых областей с разрывным решением  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соотношениями

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} b [2k_0^2 - k_1^2], \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} b [2k_0^2 - (k_2^2 + k_1^2)], \quad (76)$$

вытекающими из определения (63) и формы непрерывного решения (24).

### 9. ЭФФЕКТ БЛИЗОСТИ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Возникновение конденсата пар с суммарным импульсом  $\mathbf{K}$ , сопровождающееся переходами частиц через РФС, приводит к изменению химического потенциала подсистемы частиц, принадлежащих области  $\Xi$  импульсного пространства. Только такие частицы учитываются в гамильтониане типа БКШ, который, таким образом, действует в подпространстве пар с импульсом  $\mathbf{K}$ . Из общего условия термодинамического равновесия следует, что изменение химического потенциала в подсистеме  $\Xi$  приводит к изменению химического потенциала всей электронной системы, т. е. к перераспределению частиц в импульсном пространстве. Таким образом, заполнение состояний как вне, так и внутри ФС изменяется:

$$n_{\mathbf{k}_{\pm}\sigma} = n_{\mathbf{k}_{\pm}\sigma}^{(0)} + \delta n_{\mathbf{k}\sigma}. \quad (77)$$

Здесь  $n_{\mathbf{k}_{\pm}\sigma}$  — число заполнения состояния частицы с импульсом  $\mathbf{k}_{\pm}$  и спином  $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ,  $n_{\mathbf{k}_{\pm}\sigma}^{(0)}$  — соответствующее число заполнения в несверхпроводящей фазе:  $n_{\mathbf{k}_{\pm}\sigma}^{(0)} = 1$  при  $k_{\pm} < k_F$  и  $n_{\mathbf{k}_{\pm}\sigma}^{(0)} = 0$  при  $k_{\pm} > k_F$ ,  $k_F$  — фермиевский импульс в направлении импульса частицы  $\mathbf{k}_{\pm}$ . Изменение функции распределения  $\delta n_{\mathbf{k}\sigma}$ , обусловленное малым сдвигом химического потенциала при конденсации, существенно отлично от нуля лишь в малой окрестности ФС, ширина которой определяется величиной возникающего SC-параметра порядка. Далее для упрощения обозначений вместо комбинированных индексов  $\mathbf{k}_{+}\uparrow$  и  $\mathbf{k}_{-}\downarrow$  будем использовать соответственно  $\uparrow$  и  $\downarrow$ . Таким образом,  $n_{\uparrow}^{(0)} n_{\downarrow}^{(0)}$  может рассматриваться как характеристическая функция области  $\Xi^{(-)}$ , равная единице внутри  $\Xi^{(-)}$  и нулю снаружи. Аналогично,  $(1 - n_{\uparrow}^{(0)})(1 - n_{\downarrow}^{(0)})$  есть характеристическая функция области  $\Xi^{(+)}$ . Таким образом, характеристическая функция всей кинематически разрешенной области  $\Xi$  записывается как

$$\Theta_0(\mathbf{k}) = n_{\uparrow}^{(0)} n_{\downarrow}^{(0)} + (1 - n_{\uparrow}^{(0)})(1 - n_{\downarrow}^{(0)}), \quad (78)$$

где  $\mathbf{k}$  — импульс относительного движения пары. Перераспределение частиц в импульсном пространстве благодаря конденсации пар с импульсом  $\mathbf{K}$  приводит к эффективному «расширению» области  $\Xi$ : вне этой области заполняются (с малым, в меру SC-параметра порядка, весом) состояния, которые

также могут принимать участие в формировании пары с импульсом  $\mathbf{K}$ . Сверхпроводящий порядок, возникающий в ранее недоступной области импульсного пространства вне  $\Xi$ , как некий вторичный эффект (эффект близости в импульсном пространстве) должен описываться уравнением самосогласования с учетом частичного заполнения состояний, принимающих участие в спаривании с суммарным импульсом  $\mathbf{K}$ . Вводя соответствующую функцию  $\Theta(\mathbf{k})$ , которая характеризует распределение частиц, формирующих пару с данным  $\mathbf{K}$ , во всей  $2D$ -зоне Бриллюэна,

$$\Theta(\mathbf{k}) = n_{\uparrow} n_{\downarrow} + (1 - n_{\uparrow})(1 - n_{\downarrow}), \quad (79)$$

уравнение самосогласования при  $T = 0$  можно записать как

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Delta_{\mathbf{k}'}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}}} \Theta(\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{k}'), \quad (80)$$

где суммирование проводится по всей  $2D$ -зоне Бриллюэна. Множитель  $\Theta(\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{k}')$  в правой части равенства (80) учитывает тот факт, что оба состояния относительного движения пары ( $\mathbf{k}'$ , из которого происходит рассеяние при взаимодействии, и  $\mathbf{k}$ , в которое рассеивается пара) должны иметь отличные от нуля числа заполнения. Замена этого множителя на  $\Theta_0(\mathbf{k}) \Theta_0(\mathbf{k}')$  ограничивает суммирование по  $\mathbf{k}'$  областью  $\Xi$  и приводит к уравнению вида (6), из которого, кстати, следует, что множитель  $\Theta(\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{k}')$  играет роль, в некотором смысле аналогичную роли температурного фактора  $h_{\mathbf{K}k}(T)$ .

Представим произведение  $\Theta(\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{k}')$  в виде

$$\Theta(\mathbf{k}) \Theta(\mathbf{k}') = [\Theta_0(\mathbf{k}) + \delta\Theta(\mathbf{k})][\Theta_0(\mathbf{k}') + \delta\Theta(\mathbf{k}')], \quad (81)$$

где

$$\delta\Theta(\mathbf{k}) = (2n_{\downarrow}^{(0)} - 1)\delta n_{\uparrow} + (2n_{\uparrow}^{(0)} - 1)\delta n_{\downarrow} + 2\delta n_{\uparrow} \delta n_{\downarrow}. \quad (82)$$

Тогда для импульсов относительного движения, принадлежащих кинематически разрешенной области  $\Xi$ , т. е. для  $\mathbf{k} \in \Xi$ , уравнение (80) записывается как

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}' \in \Xi} \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Delta_{\mathbf{k}'}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}}} [1 + \delta\Theta(\mathbf{k}')] [1 + \delta\Theta(\mathbf{k})] - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}' \notin \Xi} \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Delta_{\mathbf{k}'}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}}} \delta\Theta(\mathbf{k}') [1 + \delta\Theta(\mathbf{k})], \quad (83)$$

тогда как для импульсов относительного движения,

не принадлежащих  $\Xi$ , т. е.  $\mathbf{k} \notin \Xi$ , из уравнения (80) получаем

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}' \in \Xi} \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Delta_{\mathbf{k}'}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}}} [1 + \delta\Theta(\mathbf{k}')] \delta\Theta(\mathbf{k}) - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}' \notin \Xi} \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Delta_{\mathbf{k}'}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}}} \delta\Theta(\mathbf{k}') \delta\Theta(\mathbf{k}). \quad (84)$$

Как видно из формулы (82), функции  $\delta\Theta(\mathbf{k})$  и  $\delta\Theta(\mathbf{k}')$  заметно отличны от нуля лишь в узкой полосе состояний в окрестности FC, поэтому в (84) вкладом, пропорциональным произведению этих функций, можно пренебречь, переписав это уравнение в виде

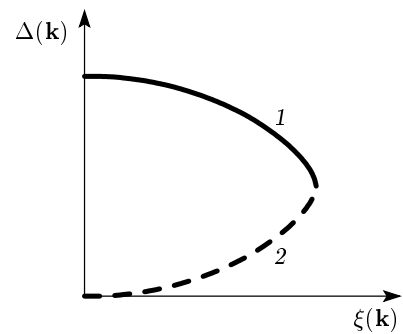
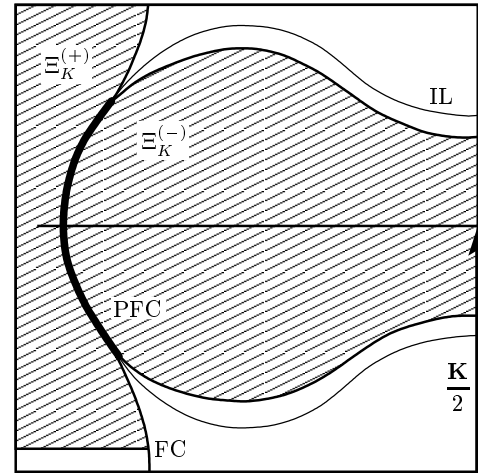
$$\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_{\mathbf{k}}^{(0)} \delta\Theta(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \notin \Xi. \quad (85)$$

Величина

$$\Delta_{\mathbf{k}}^{(0)} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}' \in \Xi} \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Delta_{\mathbf{k}'}}{\sqrt{\xi_{\mathbf{k}'}^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}}} \quad (86)$$

представляет собой сумму по кинематически разрешенной области  $\Xi$ ; однако импульс  $\mathbf{k}$  принадлежит запрещенной области, в которой, как следует из формулы (85), параметр порядка заметно отличен от нуля лишь в малой окрестности FC. Поэтому выражение (86) может приближенно рассматриваться как значение параметра порядка в некоторой точке на границе кинематически разрешенной области, которая соответствует импульсу, близкому  $\mathbf{k}$ .

Функции  $\delta\Theta(\mathbf{k})$  и  $\delta\Theta(\mathbf{k}')$  в квадратных скобках в (83) существенно отличны от нуля только в окрестности PFC, статистический вес которой мал по сравнению с весом всей области суммирования  $\Xi$ . Поэтому этими функциями можно пренебречь по сравнению с единицей, так что первая сумма в (83) есть в точности то решение для SC-параметра порядка, которое было найдено при учете кинематических ограничений на импульс относительного движения пары. Это решение, имеющее вид (86) при условии, что  $\mathbf{k} \in \Xi$ , представляет собой вклад кинематически разрешенной области в зависящий от импульса относительного движения пары SC-параметр порядка. Во второй сумме в (83) суммирование по  $\mathbf{k}'$  проводится по кинематически запрещенной области импульсного пространства, которой принадлежит часть той изолинии кинетической энергии относительного движения, участки которой образуют PFC в кинематически разрешенной области (рис. 8). На этой изолинии  $\xi_{\mathbf{k}'} = 0$ , в результате чего суммирование по  $\mathbf{k}'$  могло бы приводить к сингулярному (логарифмическому) вкладу во вторую сумму в (83), частич-



**Рис. 8.** Кинематически разрешенная область  $\Xi_K$  (заштрихована), в которой определен SC-параметр порядка. Показана четверть зоны Бриллюэна. Изолиния (IL) энергии возбуждения пары с суммарным импульсом  $\mathbf{K}$  (показана тонкой линией), совпадающая с FC (жирная линия), образует PFC, разделяющий заполненную ( $\Xi_K^{(-)}$ ) и вакантную ( $\Xi_K^{(+)}$ ) части области  $\Xi_K$ . Внизу схематически показана зависимость SC-параметра порядка  $\Delta(\mathbf{k})$  от энергии возбуждения  $\xi(\mathbf{k})$  в кинематически запрещенной области импульсного пространства. Цифрами 1 и 2 отмечены решения уравнения самосогласования, непрерывно продолжающиеся в запрещенную область SC- и N-решения в кинематически разрешенной области

но компенсирующему малость функции  $\delta\Theta(\mathbf{k}')$ , если изолиния проходит достаточно близко к FC, где  $\delta\Theta(\mathbf{k}') \neq 0$ . Однако роль параметра, обрезающего логарифм сверху, в этом случае играет малый энергетический масштаб, соответствующий продолжению параметра порядка в кинематически запрещенную область. Поэтому вклады слагаемых, равных примерно  $\delta\Theta$ , малы по сравнению с основным вкладом, и ими можно пренебречь.

Таким образом, SC-параметр порядка вне ки-

нематически разрешенной области  $\Xi$  определяется уравнением (85), в котором функция  $\delta\Theta(\mathbf{k})$  сама зависит от параметра порядка  $\Delta(\mathbf{k})$  вне области  $\Xi$  и, следовательно, подлежит определению. Для качественного исследования эффекта близости в импульсном пространстве можно, однако, предположить, что

$$\delta\Theta(\mathbf{k}) = 1 - \frac{\xi_1(\mathbf{k})}{\sqrt{\xi_1^2(\mathbf{k}) + \Delta^2(\mathbf{k})}}, \quad (87)$$

где  $\xi_1(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}) - \mu$  есть энергия возбуждения частицы за пределами кинематически разрешенной области (которой, однако, принадлежит состояние  $\mathbf{K}/2 - \mathbf{k}$ ). Такое представление функции  $\delta\Theta(\mathbf{k})$  выбрано по аналогии с функцией распределения  $v_k^2$ , возникающей в теории БКШ, отличаясь от нее множителем 2, учитывающим то обстоятельство, что вне кинематически разрешенной области может оказаться частица с любой проекцией спина. Опуская аргумент  $\mathbf{k}$ , уравнение (85) можно записать как

$$1 - s = \frac{x}{\sqrt{x^2 + s^2}}, \quad (88)$$

где введены неотрицательные величины

$$s \equiv \Delta(\mathbf{k})/\Delta^{(0)}(\mathbf{k}), \quad x \equiv \xi_1(\mathbf{k})/|\Delta^{(0)}(\mathbf{k})|. \quad (89)$$

Условие  $s \geq 0$  вытекает из того, что если  $\mathbf{k} \notin \Xi$ , то  $-\mathbf{k} \in \Xi$ ; поэтому, если, например,  $n_{\uparrow}^{(0)} = 0$  и  $\delta n_{\uparrow} > 0$ , то  $n_{\downarrow}^{(0)} = 1$  и  $\delta n_{\downarrow} < 0$ , так что из определения (82) следует, что  $\delta\Theta(\mathbf{k}) \geq 0$ . Поскольку частице с импульсом относительного движения  $-\mathbf{k}$  соответствует состояние в глубине ферми-заполнения,  $\delta n_{\uparrow} \gg |\delta n_{\downarrow}|$ , и в этом случае приближенно можно положить  $\delta\Theta(\mathbf{k}) \approx \delta n_{\uparrow}$  (именно это приближение использовано при записи соотношения (87)).

Очевидное решение уравнения (88)  $s = 0$  при любых  $x$  соответствует N-фазе. Из равенства (88) также видно, что на FC, где  $x = 0$ , помимо решения  $s = 0$  имеется еще одно решение  $s = 1$ , соответствующее тому, что SC-решение непрерывным образом переходит из кинематически разрешенной области в запрещенную. При  $x > 0$  имеются два нетривиальных решения, которые при  $x \rightarrow 0$  переходят в  $s \rightarrow 1$  и  $s \rightarrow 0$ . Сверхпроводящий параметр порядка в кинематически запрещенной области, таким образом, должен быть непрерывным продолжением SC-решения  $s = 1$  на границе этой области. Поскольку после возведения в квадрат уравнения (87) оно приводится к кубическому уравнению относительно

$s$ , оба нетривиальных решения могут быть записаны в явном виде:

$$s = \frac{2}{3} \left[ 1 - \sqrt{1 - 3x^2} \cos \left( \frac{\omega}{3} \mp \frac{\pi}{3} \right) \right], \quad (90)$$

где верхний (нижний) знак соответствует продолжению решения  $s = 1$  ( $s = 0$ ) на границе области  $\Xi$ ,

$$\cos \omega = \frac{1 - 18x^2}{(1 - 3x^2)^{3/2}}. \quad (91)$$

Оба (вещественных) решения существуют при  $0 \leq x \leq x_m$ , совпадая при  $x = x_m = \sqrt{(5\sqrt{5} - 11)}/2$ . Значение параметра порядка, соответствующее  $x_m$ , равно  $s_m = (3 - \sqrt{5})/2$ . Таким образом, SC-параметр порядка проникает в кинематически запрещенную область на конечную глубину, отличаясь от нуля в узкой полосе вблизи FC (рис. 8). При удалении от FC параметр порядка монотонно уменьшается и при  $x = x_m$  скачком обращается в нуль.

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнение самосогласования (9), определяющее SC-параметр порядка в квазидвумерной электронной системе, основное состояние которой в N-фазе представляет собой область ферми-заполнения в импульсном пространстве, отделенную от области вакантных одночастичных состояний контуром Ферми, допускает нетривиальное решение при отталкивательном взаимодействии между электронами, т. е. в случае положительной длины рассеяния при относительном движении пары в синглетном  $s$ -состоянии (при  $u_0 > 0$ , где определенная в (14) величина  $u_0$ , очевидно, пропорциональна соответствующей длине рассеяния).

Необходимым условием существования нетривиального решения является наличие у ядра  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  интегрального уравнения (9) хотя бы одного отрицательного собственного значения. Выполнение подобного условия в случае неотрицательного ядра оказывается возможным, если потенциал взаимодействия частиц в реальном пространстве  $U(r)$ , преобразованием Фурье которого является ядро уравнения (9), принимает отрицательные значения в пределах хотя бы одного конечного отрезка на полуоси  $0 < r < \infty$ . Таким свойством обладает, например, экранированный кулоновский потенциал в ферми-системе, испытывающий, благодаря наличию FC, на больших (по сравнению с радиусом экранирования) расстояниях фриделевские осцилляции:  $U(r) \propto r^{-3} \cos 2k_F r$  [31].

Само по себе наличие отрицательного собственного значения ядра уравнения (9), однако, еще не является достаточным условием возникновения связанного состояния пары, т. е. появления нетривиального решения уравнения самосогласования. Необходимо, чтобы это собственное значение  $\lambda$  было достаточно малым по абсолютной величине, как это следует из условия (17). Следует отметить, что собственное значение интегрального оператора определяется [29] как множитель перед интегралом, поэтому энергия возникающего в потенциале  $U(r)$  связанного состояния равна примерно  $|\lambda|^{-1}$ . Здесь также следует отметить, что малость амплитуды фриделевских осцилляций, по-видимому, исключает возможность возникновения связанных состояний в трехмерной ферми-системе, тогда как в квазидвумерной системе можно ожидать, в том числе благодаря особенностям  $2D$ -экранирования [32], что уже в достаточно мелкой потенциальной яме возникнет хотя бы один локальный уровень. Поэтому сверхпроводящий порядок при отталкивании, скорее всего, присущ именно квазидвумерным системам.

При большом суммарном импульсе пары кинематически разрешенная область  $\Xi$  импульсного пространства, соответствующая импульсам относительного движения, сравнительно мала. Поэтому малым импульсам относительного движения соответствуют большие относительные расстояния между частицами в паре, приходящиеся как раз на область фриделевских осцилляций. В связи с этим отметим, что при спаривании с  $K = 0$ , когда импульсы относительного движения совпадают с импульсами частиц и приблизительно равны  $k_F$ , существенной для взаимодействия между частицами областью реального пространства является область  $r \lesssim k_F^{-1}$ , в которой экранированный кулоновский потенциал определенно имеет положительный знак. Отметим также, что относительная малость области  $\Xi$  позволяет заменить истинное ядро интегрального уравнения (9) вырожденным ядром (15), с помощью которого, при выполнении условия (17), удастся получить нетривиальное решение для SC-параметра порядка в явном виде (24).

Важнейшим условием существования решения (24) при спаривании с большим суммарным импульсом является зеркальный нестинг, благодаря которому возникает PFC, т. е. линия, на которой участки FC совпадают с участками некоторой изолинии кинетической энергии относительного движения пары. Именно благодаря зеркальному нестингу SC-неустойчивость при необходимом дополнительном условии (17) может возникать при

сколь угодно малой величине отталкивательного взаимодействия  $u_0 > 0$ . В квазидвумерных системах, таких как ВТСП-купраты, условие зеркального нестинга (по крайней мере, приближенно) естественным образом может выполняться при некоторых определенных суммарных импульсах пары  $\mathbf{K}$ . Отклонение от зеркального нестинга в конечном итоге приводит к подавлению SC-спаривания [18]. Следует отметить, что выход за рамки приближения точечного потенциала, т. е. учет экранированного кулоновского взаимодействия, имеет следствием существенное ослабление такого подавления [33].

Как следует из (24), SC-параметр порядка меняет знак на некоторой линии (дугах окружности радиуса  $k_0$ ), пересекающей PFC, при этом амплитуда параметра порядка существенно зависит от степени анизотропии PFC (при совпадении PFC с окружностью  $k = k_0$  нетривиальное решение (24) отсутствует). Сильная анизотропия электронного (дырочного) закона дисперсии в окрестности уровня Ферми присуща ВТСП-купратам, как это, например, следует из ARPES-экспериментов; так, компоненты фермиевской скорости могут различаться более чем на порядок [34].

Зависимость (24) SC-параметра порядка от импульса относительного движения соответствует некоторому импульсу пары  $\mathbf{K}$ , который определяется условием зеркального нестинга. Симметрия параметра порядка, соответствующая бестоковому состоянию сверхпроводника, определяется коэффициентами в линейной комбинации кристаллографически эквивалентных пар  $i$ , следовательно, зависит от взаимодействия, смешивающего такие пары. Тривиальному неприводимому представлению  $2D$ -группы симметрии кристалла ( $A_{1g}$ ) соответствует расширенная  $s$ -волновая симметрия параметра порядка, тогда как другому одномерному неприводимому представлению ( $B_{1g}$ ) отвечает  $d$ -волновая симметрия [19].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования России (грант № Е02-3.4-147), Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект Б0049), РФФИ (грант № 02-02-17133) и Федеральной целевой научно-технической программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники» (государственный контракт № 40.072.1.1.1173).

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
2. В. Л. Гинзбург, *Проблема высокотемпературной сверхпроводимости*, под ред. В. Л. Гинзбурга и Д. А. Киржница, Наука, Москва (1977), гл. 1.
3. S. Chakravarty, R. B. Laughlin, D. K. Morr, and C. Nayak, Phys. Rev. B **63**, 094503 (2001).
4. J. Orenstein and A. J. Millis, Science **288**, 468 (2000).
5. Z.-X. Shen, W. E. Spicer, D. M. King, D. S. Dessau, and B. O. Wells, Science, **267**, 343 (1995).
6. E. W. Carlson, V. J. Emery, S. A. Kivelson, and D. Orgad, E-print archives, cond-mat/0206217.
7. D. A. Wollman, D. J. V. Harlingen, W. C. Lee, D. M. Ginsberg, and A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **71**, 2134 (1993).
8. C. C. Tsuei, J. R. Kirtley, C. C. Chi, L. S. Yu-Jahnes, A. Gupta, T. Shaw, J. Z. Sun, and M. B. Ketchen, Phys. Rev. Lett. **73**, 593 (1994).
9. C. Renner et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 149 (1998).
10. Y. de Wilde et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 153 (1998).
11. J. E. Hirsch, Phys. Rev. B **59**, 11962 (1999).
12. J. E. Hirsch, Physica C **341–348**, 213 (2000).
13. J. E. Hirsch and F. Marsiglio, Phys. Rev. B **39**, 11515 (1989); F. Marsiglio and J. E. Hirsch, Phys. Rev. B **40**, 6435 (1989).
14. M. R. Norman, M. Randeria, B. Jankó, and J. C. Campuzano, Phys. Rev. B **61**, 14742 (2000).
15. В. И. Белявский, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ **118**, 941 (2000).
16. V. I. Belyavsky and Yu. V. Kopaev, Phys. Lett. A **287**, 152 (2001).
17. В. И. Белявский, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ **121**, 175 (2002).
18. В. И. Белявский, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, Письма в ЖЭТФ **76**, 51 (2002).
19. V. I. Belyavsky and Yu. V. Kopaev, Phys. Rev. B **67**, 024513 (2003).
20. P. Fulde and R. A. Ferrel, Phys. Rev. **135**, A550 (1964).
21. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **47**, 1136 (1964).
22. R. Combescot, Phys. Rev. B **57**, 8632 (1998).
23. R. Hlubina and T. M. Rice, Phys. Rev. B **51**, 9253 (1995).
24. J. Schmalian, D. Pines, and B. Stojković, Phys. Rev. B **60**, 667 (1999).
25. В. Л. Гуревич, А. И. Ларкин, Ю. А. Фирсов, ФТТ **4**, 185 (1964).
26. M. L. Cohen, *Superconductivity in Low-Carrier-Density Systems: Degenerate Semiconductors*, in *Superconductivity* (in two volumes, ed. by R. D. Parks), Marcel Dekker, Inc., New York (1969). [Перевод в кн.: М. Коэн, Г. Глэдстоун, М. Йенсен, Дж. Шриффер, *Сверхпроводимость полупроводников и переходных металлов*, Мир, Москва (1972).]
27. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
28. М. Л. Краснов, *Интегральные уравнения*, Наука, Москва (1975).
29. С. Г. Михлин, *Лекции по интегральным уравнениям*, Физматгиз, Москва (1959).
30. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1967).
31. Н. Марч, Н. Янг, С. Сампатхар, *Проблема многих тел в квантовой механике*, Мир, Москва (1969).
32. А. Я. Шик, ФТП **29**, 1345 (1995).
33. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, ФТТ **17**, 1613 (1975).
34. M. Chiao, R. W. Hill, C. Lupien, L. Taillefer, P. Lamper, R. Gagnon, and P. Fournier, Phys. Rev. B **62**, 3554 (2000).