

ДИСКРЕТНАЯ ГРАВИТАЦИЯ, ПРОБЛЕМА УДВОЕНИЯ ФЕРМИОННЫХ СОСТОЯНИЙ И КВАНТОВЫЕ АНОМАЛИИ

С. Н. Вергелес*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 19 июня 2003 г.

Изучается проблема удвоения фермионных состояний в рамках теории дискретной гравитации. Приводятся примеры аморфных решеток (симплициальных комплексов размерности 2, 3 и 4), на которых явление удвоения фермионных состояний отсутствует. Обсуждаются возможные следствия этого факта в отношении отсутствия квантовых аномалий в дивергенции аксиальных токов. На основании отсутствия аксиальных аномалий и конечности числа физических степеней свободы в модели дискретной квантовой гравитации, предложенной в [1], и континуальной теории гравитации, построенной при помощи метода динамического квантования [2], делается следующий вывод: дискретная квантовая гравитация [1] в континуальном пределе переходит в теорию гравитации, построенную согласно схеме метода динамического квантования [2].

PACS: 04.60.Nc

1. ВВЕДЕНИЕ

В недавней работе [1] был предложен новый вариант квантовой теории гравитации на решетке. Кроме переменных, описывающих гравитационные степени свободы, эта теория включает также фермионные степени свободы, причем фермионное действие является локальным и γ^5 -инвариантным. Кроме того, при наивном переходе к континуальному пределу решеточное действие переходит в действие Гильберта плюс действие безмассового дираковского поля, которое минимально связано с гравитационным полем. Поскольку это действие будет здесь использоваться, опишем его детально.

Пусть \mathfrak{K} — четырехмерный симплициальный комплекс, допускающий геометрическую реализацию. Определение и необходимые свойства симплициальных комплексов можно найти в [1]. Детальная теория симплициальных комплексов содержится, например, в [3, 4]. Далее вместо словосочетания «симплициальный комплекс» мы пишем просто «комплекс», а понятия в следующих парах: 0-симплекс и вершина, 1-симплекс и ребро, 2-симплекс и треугольник, 3-симплекс и тетраэдр, считаются синонимами.

Особый интерес здесь представляют конечные комплексы с топологией 4-диска. Такие комплексы имеют границу $\partial \mathfrak{K}$, причем $\partial \mathfrak{K}$ — трехмерный комплекс, имеющий топологию сферы S^3 . Обозначим через α_q , $q = 0, 1, 2, 3, 4$, число q -симплексов комплекса \mathfrak{K} . Индексами i, j, k, l нумеруем вершины комплекса: a_i, a_j и т. д. Две вершины будем называть соседними, если эти две вершины являются граничными вершинами одного и того же ребра.

Пусть γ^a , $a, b, c, \dots = 1, 2, 3, 4$, — четырехмерные матрицы Дирака. Сигнатура считается евклидовой. Поэтому все матрицы Дирака — эрмитовы. Также эрмитова матрица

$$\gamma^5 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4, \quad \text{tr } \gamma^5 \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d = 4\epsilon^{abcd}, \quad (1)$$

разделяет «правую» компоненту φ и «левую» компоненту χ дираковского спинора ψ . В каждой вершине a_i комплекса \mathfrak{K} определены дираковские спиноры ψ_i и $\bar{\psi}_i$, на которые действуют матрицы Дирака слева и справа, соответственно. Напомним, что в случае евклидовой сигнатуры поля $\bar{\psi}_i$ и ψ_i считаются независимыми переменными, причем при эрмитовом сопряжении они переходят друг в друга. Поставим в соответствие каждому ориентированному ребру $a_i a_j$ элемент группы $\text{Spin}(4)$:

*E-mail: vergeles@itp.ac.ru

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ji}^{-1} = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{ij}^{ab}\sigma^{ab}\right), \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]. \quad (2)$$

Элемент голономии гравитационного поля Ω_{ij} осуществляет параллельный перенос спинора ψ_j из вершины a_j ребра $a_i a_j$ в соседнюю вершину a_i . Обозначим через V линейное пространство с базисом γ^a . Пусть каждому ориентированному ребру $a_i a_j$ поставлен в соответствие элемент $\hat{e}_{ij} \equiv e_{ij}^a \gamma^a \in V$, причем

$$\hat{e}_{ij} = -\Omega_{ij} \hat{e}_{ji} \Omega_{ij}^{-1}. \quad (3)$$

Индексом A будем нумеровать 4-симплексы. Обозначения $\bar{\psi}_{Ai}, \psi_{Ai}, \hat{e}_{Aij}, \Omega_{Aij}$ отмечают тот факт, что ребро $a_i a_j$ принадлежит 4-симплексу с индексом A .

По предположению, комплекс \mathfrak{K} имеет топологию диска. Такой комплекс допускает введение ориентации. Зададим ориентацию комплекса путем определения ориентации каждого 4-симплекса. При этом если два 4-симплекса имеют общий тетраэдр, то две ориентации тетраэдра, задаваемые ориентациями этих двух 4-симплексов, противоположны. Очевидно, что в нашем случае имеются всего две ориентации комплекса.

Пусть $a_{Ai}, a_{Aj}, a_{Ak}, a_{Al}, a_{Am}$ — все пять вершин 4-симплекса с индексом A и $\varepsilon_{Aijklm} = \pm 1$ в зависимости от того, задает ли порядок вершин $a_{Ai} a_{Aj} a_{Ak} a_{Al} a_{Am}$ положительную или отрицательную ориентацию этого 4-симплекса. Кроме того, $\varepsilon_{Aijklm} = 0$, если хотя бы два индекса совпадают. Теперь мы можем выписать евклидово действие рассматриваемой модели:

$$I = \frac{1}{5 \cdot 24} \sum_A \sum_{i,j,k,l,m} \varepsilon_{Aijklm} \text{tr} \gamma^5 \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{l_P^2} \Omega_{Ami} \Omega_{Aij} \Omega_{Ajm} \hat{e}_{Amk} \hat{e}_{Aml} + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \hat{\Theta}_{Ami} \hat{e}_{Amj} \hat{e}_{Amk} \hat{e}_{Aml} \right\}, \quad (4)$$

$$\hat{\Theta}_{Aij} = \frac{i}{2} \gamma^a (\bar{\psi}_{Ai} \gamma^a \Omega_{Aij} \psi_{Aj} - \bar{\psi}_{Aj} \Omega_{Aji} \gamma^a \psi_{Ai}) \equiv \\ \equiv \Theta_{Aij}^a \gamma^a.$$

Объем 4-комплекса равен

$$V_A = \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{5!} \times \\ \times \sum_A \sum_{i,j,k,l,m} \varepsilon_{Aijklm} \varepsilon^{abcd} e_{Ami}^a e_{Amj}^b e_{Amk}^c e_{Aml}^d.$$

Здесь множитель $1/4!$ необходим, так как объем четырехмерного параллелепипеда с образующими $e_{Ami}^a, e_{Amj}^b, e_{Amk}^c, e_{Aml}^d$ в $4!$ раз больше объема

4-симплекса с этими же образующими, а множитель $1/5!$ обусловлен тем, что все пять вершин каждого симплекса учитываются независимо.

Динамическими переменными являются величины $\Omega_{ij}, \hat{e}_{ij}$, которые описывают гравитационные степени свободы, и поля $\bar{\psi}_i, \psi_i$, являющиеся материальными фермионными полями (иные материальные поля здесь нас не интересуют).

Действие (4) представляет интерес для изучения на предмет фермионного удвоения (или вильсоновского удвоения), поскольку его фермионная часть обладает следующими свойствами.

1) Действие (4) локально.

2) В наивном континуальном пределе действие (4) переходит в гравитационное действие в форме Палатини плюс действие для дираковских полей, минимально связанных с гравитационным полем.

3) Фермионная часть действия (4) является фазово-инвариантной, а также γ^5 -инвариантной, т. е. инвариантной относительно следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \text{а) } \psi &\rightarrow \exp(i\alpha)\psi, & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \exp(-i\alpha), \\ \text{б) } \psi &\rightarrow \exp(i\beta\gamma^5)\psi, & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \exp(i\beta\gamma^5), \end{aligned}$$

где α, β — вещественные непрерывные глобальные параметры.

Хорошо известно [5–8], что на гиперкубической решетке для любого фермионного действия, обладающего свойствами 1)–3), имеет место явление вильсоновского удвоения. Кроме того, известно [9], что на периодических решетках, на которых фермионное действие имеет вид

$$I = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \bar{\psi}_{\mathbf{x}} \hat{H}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi_{\mathbf{y}} \quad (5)$$

(\mathbf{x}, \mathbf{y} — радиус-векторы узлов решетки) и обладает перечисленными тремя свойствами, вильсоновское удвоение также имеет место. Однако ответа на вопрос: на всякой ли решетке фермионное действие со свойствами 1)–3) приводит к вильсоновскому удвоению? — до сих пор не было. В настоящей работе приводятся примеры решеток (симплициальных комплексов), на которых для действия (4) отсутствует вильсоновское удвоение. Отсутствие вильсоновского удвоения для γ^5 -инвариантного действия равносильно возможности введения на решетке одного единственного вейлевского поля. Например, для введения «правого» вейлевского поля в действие (4) следует сделать замены

$$\psi \rightarrow (1/2)(1 + \gamma^5)\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}(1/2)(1 - \gamma^5).$$

Согласно Хартлу и Хокингу [10], основная проблема квантовой гравитации заключается в вычис-

лении фундаментального функционального интеграла/статистической суммы, причем область определения полей — это D -мерный диск, а волновая функция рожденной Вселенной зависит от полей, определенных на границе диска (сфере S^{D-1}). В нашем случае вместо континуального интеграла имеем конечнократный интеграл (поскольку комплекс \mathfrak{K} конечен) по всем фундаментальным полям с весом $\exp I$. Представляется естественным, что фундаментальная статистическая сумма Вселенной должна также включать суммирование по самим решеткам. Тем самым числа симплексов и способ их объединения в комплекс, а значит, числа физических степеней свободы и их связи, не являются фиксированными и определяются статистически, исходя из принципа насыщения статистической суммы. Таким же образом должна фиксироваться размерность самого комплекса.

Для решения интересующей нас задачи вильсоновского удвоения следует предположить, что Вселенная раздулась настолько, что флуктуациями гравитационного поля можно пренебречь и изучить собственные моды дискретного оператора Дирака в (4). Чтобы решить эту задачу, ситуацию следует идеализировать в указанном направлении. Поэтому далее мы полагаем

$$\Omega_{ij} = 1, \quad (e_{ij}^a + e_{jk}^a + \dots + e_{li}^a) = 0. \quad (6)$$

Здесь сумма в круглых скобках берется по любому замкнутому пути, состоящему из 1-симплексов. Уравнения (6) означают, что кривизна и кручение равны нулю. Таким образом, геометрическая реализация комплекса \mathfrak{K} находится в D -мерной евклидовой плоскости, причем e_{ij}^a суть компоненты вектора в некоем ортогональном базисе в этой плоскости, начало и конец которого находятся соответственно в вершинах a_i и a_j . Заметим, что при выполнении (6) имеем

$$\Theta_{ij}^a = -\Theta_{ji}^a. \quad (7)$$

Продемонстрируем проблему вильсоновского удвоения на простейшем примере дираковской теории в двумерном пространстве Минковского. Обозначим через φ и χ верхнюю и нижнюю компоненты комплексного дираковского поля ψ , и пусть в континуальном случае фермионный гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \int dx \times \left[\varphi^\dagger \left(-i \frac{\partial}{\partial x} - e A_x \right) \varphi + \chi^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial x} + e A_x \right) \chi \right]. \quad (8)$$

Здесь A_x — x -компонента калибровочного поля (для простоты — абелевого). В свободном случае уравнения для собственных мод и их решения имеют вид

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial x} \varphi_p &= \epsilon_p^\varphi \varphi_p, \\ \varphi_p &= e^{ipx}, \quad -\infty < p < +\infty, \quad \epsilon_p^\varphi = p, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial x} \chi_p &= \epsilon_p^\chi \chi_p, \\ \chi_p &= e^{ipx}, \quad -\infty < p < +\infty, \quad \epsilon_p^\chi = -p. \end{aligned} \quad (9b)$$

По определению пространственная компонента векторного тока имеет вид

$$J_x \equiv -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A_x} = e (\varphi^\dagger \varphi - \chi^\dagger \chi). \quad (10)$$

Теперь рассмотрим простейшее обобщение гамильтониана (8) на решетку и ограничимся верхней компонентой φ . В нашем случае решетка одномерная. Для простоты будем считать, что решетка состоит из N вершин на окружности, которые занумерованы последовательно, причем их номера определены по модулю N . В каждой вершине решетки с номером n определена комплексная величина φ_n , а на каждом 1-симплексе $a_n a_{n+1}$ — фазовый фактор $\exp(ieA_n)$. Вещественный гамильтониан, переходящий в непрерывном пределе в гамильтониан (8), можно записать как

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^N \varphi_n^\dagger (\exp(-ieA_n) \varphi_{n+1} - \exp(ieA_{n-1}) \varphi_{n-1}), \quad (11)$$

а аналог пространственной компоненты векторного тока (10) имеет вид

$$\begin{aligned} J_n \equiv -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A_n} &= \frac{e}{2} \left[\varphi_n^\dagger \exp(-ieA_n) \varphi_{n+1} + \varphi_{n+1}^\dagger \exp(ieA_n) \varphi_n \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

В свободном случае ($A_n = 0$) имеем уравнение для собственных мод гамильтониана (12) и его решение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) &= \epsilon \varphi_n, \\ \varphi_n^{(k)} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right), \quad \epsilon^{(k)} = \sin \frac{2\pi k}{N}, \end{aligned} \quad (13)$$

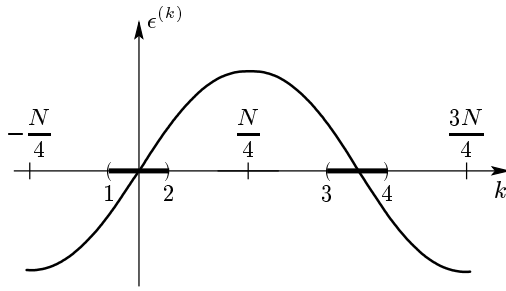


Рис. 1.

$$k = -\frac{N}{4}, -\frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4} - 1. \quad (14)$$

Для простоты будем считать, что число N кратно числу 4. Целое число k нумерует моды, и при перечислении всех независимых мод это число непрерывно пробегает N значений. На рис. 1 приведен график зависимости $\epsilon^{(k)}$ от числа k при больших N . Введем квазинепрерывный параметр $p = 2\pi k/N$ и рассмотрим область $|p| \ll 1$. Область значений k , соответствующих этой области p , на рис. 1 заключена между круглыми скобками 1 и 2. В этой области, которую назовем тривиальной, приблизительно имеем

$$\epsilon_p = p, \quad |p| \ll 1. \quad (15)$$

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ в тривиальной области спектр поля φ на решетке совпадает со спектром (8) и решеточный вклад в ток (12) совпадает с вкладом в ток (10) от верхней компоненты дираковского поля. Нулевую и мягкие моды из тривиальной области спектрального параметра назовем тривиальными.

Теперь сделаем подстановку

$$k = \frac{N}{2} + \frac{N}{2\pi}p, \quad |p| \ll 1. \quad (16)$$

Область спектрального параметра k в случае (16) заключена на рис. 1 между круглыми скобками с номерами 3 и 4. Эту область спектрального параметра и соответствующие моды назовем нетривиальными. Поскольку нетривиальная область (так же, как и тривиальная) относительно мала, зависимость спектра от спектрального параметра можно линеаризовать:

$$\epsilon_p = -p, \quad |p| \ll 1. \quad (17)$$

Согласно (14) и (16), для нетривиальных мод имеем

$$\varphi_{n+1}^{(p)} = -\varphi_n^{(p)} e^{ip} = (-1)^{n+1} \varphi_0 e^{ip(n+1)}, \quad |p| \ll 1. \quad (18)$$

Отсюда видно, что конфигурации «мод»

$$\chi_n^{(p)} = (-1)^n \varphi_n^{(p)}, \quad \chi_{n+1}^{(p)} = \chi_n^{(p)} e^{ip}, \quad |p| \ll 1, \quad (19)$$

имеют непрерывный предел. Если вклад в векторный ток (12) от нетривиальных мод выразить через «моды» $\chi^{(p)}$, то мы получим формулу (10). Вместе с формулой для спектра (17) сказанное означает, что совокупность нетривиальных мод можно трактовать в непрерывном пределе как нижнюю компоненту дираковского поля χ и для описания всей системы пользоваться гамильтонианом (7).

Обратим внимание также на то, что в данном случае нетривиальная мода состоит из двух ветвей, каждая из которых по отдельности имеет непрерывный предел. Например, в случае четных n вершины a_n и соответствующие им значения φ_n нетривиальных мод отметим штрихами, а в нечетном случае — двумя штрихами. Совокупность величин $\{\varphi'_n\}$ и $\{\varphi''_n\}$ составляет две ветви нетривиальной моды. Из приведенных формул очевидно, что обе ветви имеют непрерывный предел, причем уравнение (13) для нулевой моды не смешивает эти две ветви.

Абстрагируясь от рассмотренного примера, заметим, что нетривиальные моды, не расщепленные на свои ветви, каждая из которых имеет непрерывный предел, едва ли могут рассматриваться в непрерывном пределе как физические моды.

На рассмотренном примере видно, что явление вильсоновского удвоения заключается в том, что если на решетках явно вводится лишь одно левое (правое) вейлевское поле, то в непрерывном пределе неизбежно имеются лишь дираковские поля.

В этой работе показывается, что «по-го» теорема, доказанная для действий вида (5) [9], вообще говоря, неверна на аморфных решетках. Это утверждение обосновывается путем приведения примеров аморфных решеток в двух, трех и четырех измерениях для действия (4) или его аналогов, на которых нет вильсоновского удвоения. В последнем разделе работы обсуждаются возможные следствия из этого результата для проблемы аксиальной аномалии. Делается вывод, что вариант дискретной квантовой гравитации, предложенный в [1], в непрерывном пределе переходит в квантовую теорию гравитации, построенную при помощи метода динамического квантования [2].

2. ДВУМЕРНЫЕ РЕШЕТКИ

Начнем изучение проблемы вильсоновского удвоения с наиболее простого случая, когда \mathfrak{K} — двумерный симплицальный комплекс. Будем предполагать, что геометрическая реализация комплекса \mathfrak{K} является двумерной поверхностью с топологией

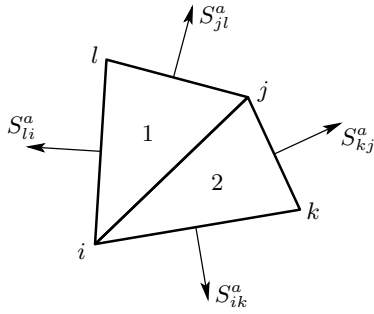


Рис. 2.

диска, причем $\partial \mathfrak{K}$ — одномерный симплициальный комплекс, имеющий топологию окружности. Для определенности будем считать, что двумерные матрицы Дирака γ^a , $a = 1, 2$, равны $\gamma^1 = \sigma^1$, $\gamma^2 = \sigma^2$, где σ^α , $\alpha = 1, 2, 3$, — матрицы Паули. Согласно определению, $\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2$. В каждой вершине a_i комплекса \mathfrak{K} определены дираковские спиноры ψ_i и $\bar{\psi}_i$, являющиеся двумерными матрицами-столбцами и матрицами-строками, соответственно. Поставим в соответствие каждому ориентированному ребру $a_i a_j$ элемент группы (абелевой в двумерном случае) $\text{Spin}(2)$, обозначаемый $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}^{-1}$. В двумерном случае индексом A нумеруются треугольники комплекса \mathfrak{K} . Сложные индексы (Ai) , (Aij) и т. д. отмечают тот факт, что вершина a_{Ai} , ребро $a_{Ai} a_{Aj}$ и т. д. принадлежат треугольнику с индексом A . Рассматриваемые комплексы допускают введение ориентации. Зададим ориентацию комплекса путем определения ориентации каждого треугольника. При этом, если два треугольника имеют общее ребро, то две ориентации ребра, задаваемые ориентациями этих двух треугольников, противоположны. По определению, $\varepsilon_{Aijk} = \pm 1$ в зависимости от того, задает ли порядок вершин $a_{Ai} a_{Aj} a_{Ak}$ положительную или отрицательную ориентацию соответствующего треугольника.

Теперь мы можем выписать фермионную часть действия (ср. с (4)):

$$I_\psi = \frac{1}{6} \sum_A \sum_{i,j,k} \varepsilon_{Aijk} \varepsilon_{ab} \Theta_{Aij}^a e_{Aik}^b. \quad (20)$$

Двумерное действие (20) обладает всеми тремя свойствами, перечисленными после формулы для четырехмерного действия (4). Согласно тем же самым соображениям, что и во Введении, в двумерном случае также имеют место равенства (6) и (7).

Выпишем уравнение для собственных мод дискретного оператора Дирака. Зафиксируем две соседние вершины a_i и a_j и выделим вклад в действие

(20), пропорциональный Θ_{ij}^a . На рис. 2 изображена часть комплекса, содержащая 1-симплекс $a_i a_j$, индексы i, j, k, l нумеруют вершины, индекс A , нумерующий треугольники, принимает здесь два значения (1 и 2). Везде $s_{ij}^a = \varepsilon_{ab} e_{ij}^b$, т. е. вектор s_{ij}^a получается при помощи поворота вектора e_{ij}^a на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. Искомый вклад в действие равен

$$\Delta I_{\psi_{ij}} = \frac{1}{3} \Theta_{ij}^a S_{ij}^a, \quad S_{ij}^a = s_{kj}^a + s_{jl}^a. \quad (21)$$

Вектор S_{ij}^a можно назвать «зонтиком» вершины a_i со стороны соседней вершины a_j . По двум заданным соседним вершинам a_i и a_j зонтик S_{ij}^a определяется однозначно, причем из рис. 2 и соотношений (6) видно, что $S_{ij}^a = -S_{ji}^a$. Выделим из комплекса подкомплекс \mathbf{v}_i , состоящий из всех 2-симплексов, содержащих вершину a_i , и назовем этот подкомплекс окрестностью вершины a_i . Занумеруем вершины на границе $\partial \mathbf{v}_i$ таким образом, что при непрерывном обходе границы $\partial \mathbf{v}_i$ против часовой стрелки вершина a_{j+1} следует за вершиной a_j и будем считать, что индекс j определен по $(\text{mod } n)$, где n — число вершин на $\partial \mathbf{v}_i$. Тот факт, что индекс j нумерует вершины на $\partial \mathbf{v}_i$, отмечаем обозначением $j(i)$. Используя формулу (21), легко выделить из действия (20) вклад, пропорциональный спинору $\bar{\psi}_i$:

$$\Delta I_{\bar{\psi}_i} = \frac{1}{3} \sum_{j(i)} \Theta_{ij}^a S_{ij}^a. \quad (22)$$

При помощи (6), (20) и (22) получаем уравнение для собственных мод дискретного оператора Дирака во внутренних вершинах a_i :

$$\frac{\delta \Delta I_{\bar{\psi}_i}}{\delta \bar{\psi}_i} = \frac{i}{6} \sum_{j(i)} \hat{S}_{ij} \psi_j = \varepsilon \left(\frac{1}{3} v_i \right) \psi_i. \quad (23)$$

Здесь v_i — площадь окрестности \mathbf{v}_i . Вследствие второго равенства в (6) имеем тождество:

$$\sum_{j(i)} \hat{S}_{ij} \equiv 0. \quad (24)$$

Действительно, каждый вектор $s_{j(i),j(i)+1}^a$ содержится в двух и только двух зонтиках в последней сумме. Из (24) следует, что уравнение (23) имеет разностный характер, т. е. его левая часть зависит лишь от разностей $(\psi_{j(i)} - \psi_{k(i)})$.

Система уравнений для собственных мод записывается изящнее в комплексных обозначениях. Пусть x_j^a — декартовы координаты вершины a_j , $z_j = x_j^1 + i x_j^2$ — ее комплексная координата. Верхнюю и нижнюю компоненты дираковского спинора

ра ψ обозначим соответственно, через φ и χ . Тогда уравнение (23) принимает вид

$$-\frac{1}{2} \sum_{j(i)} (\bar{z}_{j+1} - \bar{z}_{j-1}) \chi_j = \epsilon v_i \varphi_i, \quad (23'а)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j(i)} (z_{j+1} - z_{j-1}) \varphi_j = \epsilon v_i \chi_i, \quad (23'б)$$

причем для нулевой моды ($\epsilon = 0$) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j(i)} (z_{j+1} - z_{j-1}) \varphi_j = 0 &\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \sum_{j(i)} z_j (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее используется обозначение для разностных переменных $\psi_{i,j} \equiv \psi_i - \psi_j$.

Нас интересуют все нулевые моды дискретного оператора Дирака с нулевыми граничными условиями для разностных переменных $\varphi_{k,k'}$. Одно такое решение является очевидным: $\varphi_i = \text{const}$. Назовем это решение тривиальной нулевой модой.

Чтобы несколько прояснить ситуацию с нулевыми модами, рассмотрим конкретный пример.

Предположим, что ∂v_i имеет четное число вершин. В этом случае вершина a_i называется четной. Тогда множество индексов $j(i)$ можно разбить на две равные по численности группы. Индексы из одной группы будем отмечать одним, а из другой — двумя штрихами, причем при непрерывном движении вдоль ∂v_i вершины со штрихованными и дважды штрихованными индексами чередуются. В рассматриваемом случае уравнение (25) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{j'(i)} z_{j'} (\varphi_{j'+1} - \varphi_{j'-1}) \right] + \\ + \left[\sum_{j''(i)} z_{j''} (\varphi_{j''+1} - \varphi_{j''-1}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Предположим теперь, что все внутренние вершины комплекса имеют четное число соседних вершин. Кроме того, пусть все множество внутренних вершин разбивается на конечное число подмножеств (в нашем случае — три: $\{a_{i'}\}$, $\{a_{i''}\}$, $\{a_{i'''}\}$), таких что в систему уравнений для нулевой моды (25) входят лишь разности $(\psi_{j'_1} - \psi_{j'_2})$, $(\psi_{j''_1} - \psi_{j''_2})$, $(\psi_{j'''_1} - \psi_{j'''_2})$. Важно, что при этом координаты вершин находятся в общем положении. Поля $\psi_{j'}$, $\psi_{j''}$, $\psi_{j'''}$ будем называть ветвями нулевой и близких к ней мягких мод.

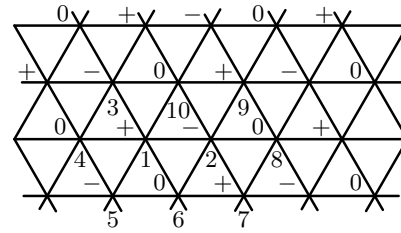


Рис. 3.

Тогда заведомо имеет место явление вильсоновского удвоения (влиянием границы при $\alpha_0 \rightarrow \infty$ можно пренебречь). Именно такой пример изображен на рис. 3, где вершины из трех таких подмножеств вершин отмечены индексами 0, \pm . Нетривиальная нулевая мода может быть взята, например, в виде

$$\varphi^0 = c \neq 0, \quad \varphi^\pm = [\exp(\pm 2\pi i/3)] c.$$

Здесь φ^0 и φ^\pm — значения поля φ в вершинах, помеченных на рис. 3 соответственно индексами 0 и \pm . Указанная нетривиальная мода ортогональна тривиальной (в естественной на правильной решетке мере $\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i$) и потому независима. В этом примере мы имеем три ветви нетривиальной нулевой моды¹⁾.

Зададимся вопросом: существует ли такая решетка, на которой отсутствуют нетривиальные нулевые моды? Для ответа на этот вопрос необходимо изучить некоторые свойства системы уравнений (25), что требует дополнительных построений.

Чтобы имело место вильсоновское удвоение, нулевому набору значений переменных $\psi_{k,k-2}$ на границе $\partial \mathfrak{R}$ должны соответствовать разные решения системы уравнений (25). Иными словами, при нулевых значениях на $\partial \mathfrak{R}$ переменных $\psi_{k,k-2}$ должны существовать ненулевые решения системы уравнений (25) для некоторых переменных $\varphi_{i,j}$. Далее мы доказываем, что на так называемых нечетных комплексах при нулевых значениях на $\partial \mathfrak{R}$ переменных $\psi_{k,k'}$ все разностные внутренние переменные $\psi_{j(i),j(i)-2}$ обращаются в нуль вследствие системы уравнений (25).

Равенство нулю внутренних переменных $\psi_{j(i),j(i)-2}$ не всегда означает, что вильсонов-

¹⁾ В связи с рассматриваемой задачей укажем на обзор [11], в котором на правильных треугольных решетках изучается разностный оператор Лапласа, факторизующийся на разностные операторы первого порядка. Последние сравнивают значения переменных в соседних вершинах и этим качественно отличаются от оператора в формулах (23) и (25).

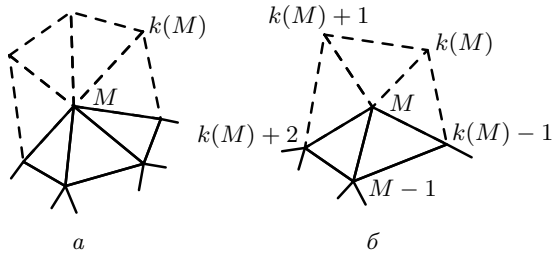


Рис. 4.

ское удвоение отсутствует. Действительно, в случае решетки, изображенной на рис. 3, мы имеем

$$\psi_{j'_1} = \psi_{j'_2} = \dots, \quad \psi_{j''_1} = \psi_{j''_2} = \dots,$$

$$\psi_{j'''_1} = \psi_{j'''_2} = \dots,$$

но

$$\psi_{j'} \neq \psi_{j''} \neq \psi_{j'''}$$

Теперь рассмотрим симплицальный комплекс, по своим свойствам в определенном смысле противоположный комплексу, изображенному на рис. 3. Это — комплекс, у которого граница каждой окрестности ∂v_i имеет нечетное число вершин. Назовем эти комплексы нечетными.

Опишем индуктивную процедуру построения нечетных комплексов. На первом этапе можно взять любой комплекс, состоящий из нечетного числа треугольников с одной общей вершиной, которая является единственной внутренней вершиной. Предположим, что уже построен нечетный комплекс с $(M - 1)$ внутренними вершинами. Возьмем любую вершину на его границе, которую обозначим a_M , и сделаем ее внутренней, добавляя к комплексу новые элементы.

На рис. 4 сплошными линиями изображена старая часть комплекса с $(M - 1)$ внутренними вершинами, а пунктирными — та часть нового комплекса, которая добавляется к старому. На рис. 4а (4б) сначала граничная вершина a_M принадлежала границам четного (нечетного) числа 1-симплексов. Поэтому при дополнительном построении в случае рис. 4а (4б) добавляется нечетное (четное) число новых вершин и необходимое число 1-симплексов. Если в случае рис. 4б внешний граничный угол в вершине a_M острый, то достройка комплекса может состоять в добавлении единственного 1-симплекса с граничными вершинами $a_{k(M)-1}$ и $a_{k(M)+2}$; в результате число граничных вершин сокращается на одну.

Далее в настоящей работе мы рассматриваем лишь комплексы, которые индуктивно строятся со-

гласно изложенной схеме. При этом свойство нечетности не является обязательным.

Будем называть правильной внутренней переменной разностную переменную $\varphi_{k,i}$, если $a_k \in \partial \mathfrak{K}$, $a_i \notin \partial \mathfrak{K}$. Набор правильных внутренних переменных $\{\varphi_{k_i,i}\}_M$, $i = 1, \dots, M$ (где M — число внутренних вершин), является независимым правильным набором внутренних переменных, если все внутренние вершины a_i попарно различны. Прилагательное «правильный» далее будет опускаться, поскольку это не будет вести к недоразумению. В качестве остальных $(L - 1)$ независимых переменных возьмем независимые разностные переменные $\{\varphi_{k_\alpha,k'_\alpha}\}$, $a_{k_\alpha}, a_{k'_\alpha} \in \partial \mathfrak{K}$. Здесь L — число вершин на $\partial \mathfrak{K}$.

Рассмотрим систему M уравнений (25) для комплекса с M внутренними и L граничными вершинами для $M + L - 1$ независимых переменных $\{\varphi_{k_i,i}\}_M$ и $\{\varphi_{k_\alpha,k'_\alpha}\}$:

$$\sum_{j=1}^M X_{i,j} \varphi_{k_j,j} + \sum_{\alpha=1}^{L-1} Y_{i,\alpha} \varphi_{k_\alpha,k'_\alpha} = 0, \quad (27)$$

$$i = 1, \dots, M.$$

Здесь коэффициенты $X_{i,j}$ и $Y_{i,\alpha}$ линейно выражаются через переменные z_i .

Утверждение 1. $M \times M$ матрица $\|X_{i,j}\|$ невырождена, если M — четное число.

Доказательство. Рассмотрим комплекс с $M = 2$. Например, пусть это будет подкомплекс комплекса, изображенного на рис. 5, состоящий из треугольников с номерами от 1 до 8.

В качестве внутренних переменных возьмем разности $\{\varphi_{10,1}, \varphi_{7,2}\}$, а граничных — разности $\{\varphi_{8,3}, \varphi_{9,7}, \varphi_{10,8}, \varphi_{11,9}, \varphi_{8,7}\}$. Тогда в системе двух уравнений (27) в вершинах a_1 и a_2 матрица (мы пользуемся обозначением $z_{i,j} = z_i - z_j$) имеет вид

$$\|X_{i,j}\| = \begin{pmatrix} 0 & -z_{9,3} \\ z_{9,3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det X_{i,j} = z_{9,3}^2 \neq 0.$$

Теперь рассмотрим комплекс с $M = 4$, являющийся подкомплексом комплекса на рис. 5, состоящий из треугольников с номерами от 1 до 13. Внутренние и граничные разностные переменные соответственно выберем следующими: $\{\varphi_{10,1}, \varphi_{7,2}, \varphi_{8,3}, \varphi_{7,4}\}$ и $\{\varphi_{8,6}, \varphi_{9,7}, \varphi_{10,8}, \varphi_{11,9}, \varphi_{10,5}, \varphi_{11,6}\}$. В этом случае в системе четырех уравнений (27) в вершинах a_1, a_2, a_3, a_4 матрица имеет вид

$$\|X_{i,j}\| = \begin{pmatrix} 0 & -z_{9,3} & z_{7,2} & 0 \\ z_{9,3} & 0 & -z_{11,1} & 0 \\ -z_{7,2} & z_{11,1} & 0 & -z_{11,7} \\ 0 & 0 & z_{11,7} & 0 \end{pmatrix},$$

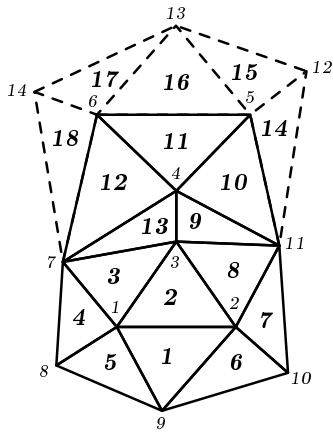


Рис. 5.

$$\det X_{i,j} = z_{9,3}^2 z_{11,7}^2 \neq 0.$$

Предположим, что утверждение доказано для четного числа $M-2$, и установим его справедливость для комплексов с M внутренними вершинами.

Рассмотрим такой случай достройки комплекса, какой изображен на рис. 5: вершины a_5 и a_6 последовательно делаются внутренними за счет добавления к комплексу треугольников с номерами 14, 15, 16 и затем 17, 18. Можно считать, что вершины a_5 и a_6 отождествлены с вершинами a_{M-1} и a_M , соответственно. Пусть в новой системе M уравнений (27), номера уравнений соответствуют номерам внутренних вершин. Старые граничные переменные вида $\varphi_{k_1, M-1}$ и $\varphi_{k_2, M}$, ставшие в достроенном комплексе внутренними, выразим через новые внутренние переменные $\varphi_{k(M-1), M-1}$, $\varphi_{k(M), M}$ и новые граничные переменные. Таким образом, при переходе от комплекса с $M-2$ внутренними вершинами к комплексу с M внутренними вершинами в новой системе уравнений (27) в одном лишь $(M-2)$ -м уравнении появляются ненулевые коэффициенты $X_{M-2, M-1}$ и $X_{M-2, M}$. Важно, что при этом остальные коэффициенты $X_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, M-2$, не изменяются. С другой стороны, в $(M-1)$ -м и M -м уравнениях (см. рис. 5) имеем

$$X_{M-1, j} = 0, \quad X_{M, j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M-3.$$

Рассмотрим линейную комбинацию последних двух строк матрицы $X_{i,j}$:

$$Y_j = c_{M-1} X_{M-1, j} + c_M X_{M, j}, \quad c_{M-1}^2 + c_M^2 > 0.$$

Так как вершины a_{M-1} и a_M — соседние, имеем $Y_{M-1}^2 + Y_M^2 > 0$ (что устанавливается непосредственно). Предположим, что имеет место равенство

$$Y_j = \sum_{i=1}^{M-2} c_i X_{i,j}, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (28)$$

где c_i — некие числа. Имеются две возможности.

1) $Y_j = 0, 1 \leq j \leq M-2$. Тогда, вследствие индуктивного предположения и сохранения матрицы $X_{i,j}, 1 \leq i, j \leq M-2$, при переходе $(M-2) \rightarrow M$ для удовлетворения равенства (28) при $1 \leq j \leq M-2$ необходимо $c_1 = \dots = c_{M-2} = 0$. Но тогда равенство (28) не удовлетворяется при $j = M-1, M$.

2) $Y_{M-2} \neq 0$. Из рис. 5 видно, что тогда $c_{M-3} \neq 0$. Из последнего неравенства в свою очередь следует, что $c_{M-4} \neq 0$. Это означает противоречивость равенства (28). Действительно, $Y_j = 0$ при $j = 1, \dots, M-4$, а соответствующие члены справа в (28) могут быть равны нулю, лишь если $c_1 = \dots = c_{M-4} = 0$.

Таким образом, равенство (28) не может быть удовлетворено, что означает справедливость Утверждения в случае, изображенном на рис. 5.

Утверждение 1 доказывается аналогично во всех остальных случаях. При этом важно лишь, чтобы в процессе индуктивного доказательства вершины a_{M-1} и a_M были соседними. \square

В случае комплексов с нечетным числом внутренних вершин утверждение неверно в используемых здесь переменных. Однако несущественная модификация переменных позволяет сформулировать и доказать аналогичное утверждение. Действительно, комплекс с нечетным числом внутренних вершин получается из комплекса с четным числом внутренних вершин путем его достройки так, как показано на рис. 4. Пусть комплекс с четным числом внутренних вершин имеет $M-1$ внутренних вершин a_1, \dots, a_{M-1} , а достроенный комплекс — M внутренних вершин a_1, \dots, a_M . Рассмотрим совокупность M переменных, состоящую из $M-1$ внутренних переменных $\{\varphi_{k,i}\}, i = 1, \dots, M-1$, и одной граничной переменной $\varphi_{k(M), k(M)-1}$. Совокупность остальных независимых переменных возьмем состоящей из всех граничных переменных недостроенного комплекса с $M-1$ внутренними вершинами, а также недостающие граничные переменные достроенного комплекса с M внутренними вершинами. В этих переменных система M уравнений (25) для достроенного комплекса имеет вид

$$\sum_{j=1}^{M-1} X_{i,j} \varphi_{k_j, j} + \dots = 0, \quad i = 1, \dots, M-1,$$

$$\sum_{j=1}^{M-1} X'_{M,j} \varphi_{k_j, j} + X'_{j+1} \varphi_{k(M), k(M)-1} + \dots = 0,$$

$$X'_{j+1} \neq 0.$$

Здесь многоточием обозначены вклады от всех прочих разностных переменных. В этой системе уравнений детерминант минора при переменных $\{\varphi_{k,i}\}$, $i = 1, \dots, M - 1$ и $\varphi_{k(M),k(M)-1}$ равен $(x'_{j+1} \det X_{i,j}) \neq 0$, поскольку, согласно Утверждению 1, $\det X_{i,j} \neq 0$.

На этом этапе следует сформулировать более четкий критерий наличия вильсоновского удвоения. Предположим, что в системе уравнений (27) можно выбрать M независимых внутренних переменных и необходимое число независимых граничных переменных таким образом, что суммарное число независимых переменных меньше числа $M + L - 1$. Поэтому обращение в нуль тех граничных переменных, которые содержатся в системе уравнений (27), не означает обращение в нуль (вследствие системы (27)) всех разностных переменных $\varphi_{i,j}$ для внутренних вершин a_i и a_j . В этом случае имеет место вильсоновское удвоение. Этот критерий вильсоновского удвоения можно применять также к части комплекса. Например, если взять часть комплекса, изображенного на рис. 3, ограниченную двумя внутренними и восемью граничными вершинами (на рис. 3 вершины этой части комплекса занумерованы индексами от 1 до 10), то в системе двух уравнений (27)

$$z_{10,6}\varphi_{7,1} = -z_{10,8}\varphi_{9,7} + z_{9,1}\varphi_{10,6} - z_{9,7}\varphi_{8,6},$$

$$z_{10,6}\varphi_{3,2} = z_{6,4}\varphi_{5,3} - z_{5,3}\varphi_{6,4} + z_{3,2}\varphi_{10,6}$$

содержится всего семь независимых разностных переменных: две внутренних $\varphi_{7,1}$ и $\varphi_{3,2}$ и пять граничных $\varphi_{5,3}$, $\varphi_{9,7}$, $\varphi_{6,4}$, $\varphi_{10,6}$ и $\varphi_{8,6}$. Всех же независимых разностных переменных на этом подкомплексе имеется девять. Вследствие выписанной системы уравнений обращение в нуль указанных пяти граничных переменных влечет за собой обращение в нуль внутренних переменных $\varphi_{1,7}$ и $\varphi_{2,3}$, но не разностной переменной $\varphi_{1,2}$, что, согласно нашему критерию, означает наличие вильсоновского удвоения. Для сколь угодно большого подкомплекса комплекса на рис. 3 результат оказывается таким же.

Легко понять, что в случае нечетной решетки в системе уравнений (27) необходимо присутствуют все $M + L - 1$ независимых разностных переменных. Это непосредственно следует из тождества

$$\varphi_{j(i)+1,j(i)} \equiv \sum_{0 \leq k \leq (n-1)/2} \varphi_{j(i)+2k+2,j(i)+2k}, \quad (29)$$

где n — (нечетное) число вершин на границе ∂v_i . Равенство (29) показывает, что любые разностные

переменные выражаются через разностные переменные, содержащиеся в системе уравнений (25). Поэтому обращение в нуль всех граничных переменных в системе уравнений (27) влечет обращение в нуль всех переменных $\varphi_{i,j}$.

Полученный результат можно переформулировать следующим образом. Будем рассматривать систему уравнений (25) для конечных подкомплексов нечетного комплекса с M внутренними вершинами. Пусть вершина a_i и хотя бы одна из вершин $a_{j(i)}$ и $a_{j(i)-2}$ — внутренние. На нечетном комплексе имеется M независимых переменных вида $\varphi_{j(i),j(i)-2}$, содержащихся в системе уравнений (25), через которые выражаются все разностные переменные вида $\varphi_{i,j}$, причем минор при этих переменных отличен от нуля. Действительно, на нечетном комплексе переход от независимой системы правильных внутренних переменных к независимой системе переменных вида $\varphi_{j(i),j(i)-2}$ сводится к линейному невырожденному преобразованию переменных²⁾. Следовательно, при $M \rightarrow \infty$ миноры при любых независимых наборах переменных $\{\varphi_{j(i),j(i)-2}\}$, через которые выражаются все разностные переменные вида $\varphi_{i,j}$ в конечной области комплекса, отличны от нуля. Поэтому имеем

Утверждение 2. На нечетных комплексах отсутствует вильсоновское удвоение.

3. МНОГОМЕРНЫЕ РЕШЕТКИ

Теперь покажем, что среди комплексов размерности $d > 2$ существуют такие комплексы, которые в определенном смысле являются аналогами двумерных нечетных комплексов.

Рассмотрим случай, когда \mathfrak{K} — трехмерный симплицальный комплекс, вложенный в трехмерное евклидово пространство. В этом случае индексом A нумеруются тетраэдры. Будем считать, что γ -матрицы четырехмерные. Все прочие обозначения такие же, как в предыдущих разделах. Ориентация комплекса определяется (или определяет) ориентацией каждого тетраэдра, причем если два тетраэдра имеют общий треугольник, то две ориентации треугольника, задаваемые ориентациями этих двух тетраэдров, противоположны. Аналогично двумерному случаю $\varepsilon_{Aijkl} = \pm 1$ в зависимости от того, задает ли порядок вершин $a_{A_i}a_{A_j}a_{A_k}a_{A_l}$ положительную или отрицательную ориентацию соответствующего тетраэдра.

²⁾ Такое преобразование переменных невозможно для комплекса, изображенного на рис. 3.

Фермионная часть действия (ср. с (4) и (20)) записывается как

$$I_\psi = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sum_A \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_{Alijk} \varepsilon^{abc} \Theta_{Ali}^a e_{Alj}^b e_{Alk}^c. \quad (30)$$

Предполагается, что порядок $a_{Al} a_{Ai} a_{Aj} a_{Ak}$ задает положительную ориентацию. Множитель $1/4$ в (30) учитывает тот факт, что в сумме (30) каждый тетраэдр учитывается четыре раза, а множитель $1/6$ в (30) необходим, так как объем параллелепипеда с образующими $e_{Ali}, a_{Alj}, a_{Alk}$ имеет объем в шесть раз больше чем объем тетраэдра $a_{Al} a_{Ai} a_{Aj} a_{Ak}$.

Обозначим через $\mathbf{v}_i^{(3)}$ трехмерный подкомплекс, состоящий из всех 3-симплексов комплекса, содержащих внутреннюю вершину a_i . Вершины на $\partial \mathbf{v}_i^{(3)}$ нумеруем индексом $j(i)$. Пусть

$$\mathbf{v}_{j(i)}^{(2)} \in \partial \mathbf{v}_i^{(3)}$$

обозначает двумерный подкомплекс, состоящий из всех 2-симплексов подкомплекса $\partial \mathbf{v}_i^{(3)}$, содержащих вершину $a_{j(i)}$. Будем говорить, что обход границы $\partial \mathbf{v}_{j(i)}^{(2)}$ идет в положительном направлении, если «наблюдателю», находящемуся в вершине $a_{j(i)}$ и смотрящему на вершину a_i , обход представляется идущим против часовой стрелки. Вершины на границе $\partial \mathbf{v}_{j(i)}^{(2)}$ занумеруем индексом $j'(i, j)$, причем значение этого индекса возрастает на единицу при переходе от вершины к соседней вершине при положительном движении вдоль $\partial \mathbf{v}_{j(i)}^{(2)}$. Будем считать, что индекс $j'(i, j)$ определен по $(\text{mod } n)$, где n — число вершин на $\partial \mathbf{v}_{j(i)}^{(2)}$. Обозначим, далее, через $s_{j(i), j'(i, j), j'(i, j)+1}^a$ вектор, равный по величине площади треугольника $a_{j(i)} a_{j'(i, j)} a_{j'(i, j)+1}$ и направленный перпендикулярно этому треугольнику во внешнем направлении относительно подкомплекса $\mathbf{v}_i^{(3)}$:

$$s_{j(i), j'(i, j), j'(i, j)+1}^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} e_{j(i), j'(i, j)}^b e_{j(i), j'(i, j)+1}^c. \quad (31)$$

Зонтиком вершины a_i со стороны вершины $j(i)$ является вектор

$$S_{ij}^a = \sum_{j'(i, j)=1}^n s_{j(i), j'(i, j), j'(i, j)+1}^a. \quad (32)$$

Зонтик (32) может быть представлен также как сумма

$$S_{ij}^a = (2!)^{-2} \sum_{A(i, j)} \sum_{k, l} \varepsilon^{abc} \varepsilon_{A(i, j)ijk} e_{A(i, j)ik}^b e_{A(i, j)il}^c, \quad (33)$$

где индекс $A(i, j)$ нумерует все тетраэдры, содержащие ребро $a_i a_j$.

Нетрудно увидеть, что вклад в действие (30), пропорциональный $\bar{\psi}_i \gamma^a \psi_j$, равен

$$\Delta I_{\bar{\psi}_i \psi_j} = \frac{i}{12} \bar{\psi}_i \gamma^a \psi_j S_{i, j}^a. \quad (34)$$

Поскольку объем комплекса представляется в виде (ср. с четырехмерным случаем)

$$V = \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{4!} \sum_A \sum_{i, j, k, l} \varepsilon_{Alijk} \varepsilon^{abc} e_{li}^a e_{lj}^b e_{lk}^c,$$

уравнение для собственных мод оператора Дирака (аналог уравнения (23)) имеет вид

$$\frac{i}{3} \sum_{j(i)} \hat{S}_{ij} \psi_j = \epsilon v_i \psi_i, \quad (35)$$

где v_i — объем окрестности $\mathbf{v}_i^{(3)}$.

Укажем также используемую далее формулу, которую можно получить при помощи (33):

$$\sum_{j(i)} S_{ij}^a e_{ij}^b = 3 v_i \delta^{ab}. \quad (36)$$

Действительно, при помощи (33) находим

$$\sum_{j(i)} S_{ij}^a e_{ij}^b = \frac{1}{4} \varepsilon^{abc} \sum_{j, k, l} \varepsilon_{Aijkl} e_{Aij}^b e_{Aik}^c e_{Ail}^d. \quad (36')$$

Последняя сумма равна $6 v_i \varepsilon^{bcd}$.

Заметим, что если бы в (36) суммирование шло не по всем вершинам $\{j(i)\}$, а по некоторому подмножеству вершин $\{j'(i)\}$, то эта сумма не была бы пропорциональной $v_i \delta^{ab}$. Это видно из выражения для суммы в правой части (36'), в которой вместо суммирования по всем $j(i)$ происходило бы суммирование по подмножеству $j'(i)$. Но сумма $\sum_{j'} \sum_{k, l} \varepsilon_{Aij'kl} e_{ij'}^b e_{ik}^c e_{il}^d$ не пропорциональна величине ε^{bcd} , она имеет более сложную структуру и существенно зависит от положения вершин.

Очевидно, каждый вектор $s_{j(i), j'(i, j), j'(i, j)+1}^a$ (31) входит в состав трех зонтиков вершины a_i со стороны вершин $a_{j(i)}$, $a_{j'(i, j)}$ и $a_{j'(i, j)+1}$: $S_{i, j}^a$, $S_{i, j'}^a$, $S_{i, j'+1}^a$. Поэтому имеет место тождество, аналогичное тождеству (24):

$$\sum_{j(i)} S_{i, j(i)}^a \equiv 0, \quad (37)$$

причем в сумме (37) каждый вектор (31) встречается три и только три раза.

Так же, как и в двумерном случае, для существования вильсоновского удвоения необходимо,

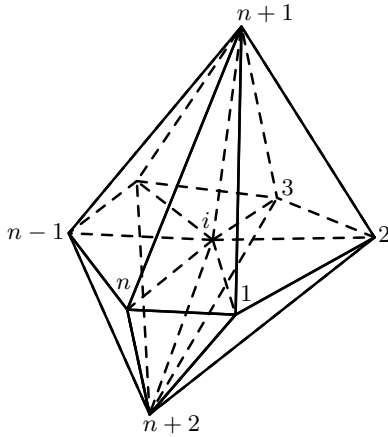


Рис. 6.

чтобы совокупность вершин $\{a_{j(i)}\}$ на $\partial v_i^{(3)}$ могла быть разбита на два непересекающихся подмножества $\{a_{j'(i)}\}$ и $\{a_{j''(i)}\}$ таких, что

$$\sum_{j'(i)} S_{i,j'(i)}^a \equiv 0, \quad \sum_{j''(i)} S_{i,j''(i)}^a \equiv 0. \quad (38)$$

Мы видели, что в случае двумерных комплексов аналогичное разбиение имеет место для множества соседних вершин каждой четной вершины. На рис. 6 изображена часть трехмерного комплекса, состоящая из окрестности $v_i^{(3)}$ вершины a_i . На рис. 6 видно, что множество вершин на $\partial v_i^{(3)}$ разбивается на два подмножества (a_1, \dots, a_n) и (a_{n+1}, a_{n+2}) , причем

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j}^a \equiv 0, \quad \sum_{j=n+1}^{n+2} S_{i,j}^a \equiv 0. \quad (39)$$

Если же n — четное число, то первое тождество в (39) разбивается еще на два:

$$\sum_{j=1}^{n/2} S_{i,2j-1}^a \equiv 0, \quad \sum_{j=1}^{n/2} S_{i,2j}^a \equiv 0. \quad (40)$$

Очевидно, каждый вектор (31) на $\partial v_i^{(3)}$ содержится в точности два раза в первой сумме в (39), один раз во второй сумме в (39) и по одному разу в каждой из сумм в (40).

Если тождество (37) разлагается на два (как в (39)) или три (как в (40) в случае четного n) независимых тождества, то будем говорить, что множество зонтов вершины a_i разложимо на полные подмножества. Полное подмножество зонтов бывает либо однократным, либо двукратным. По определению полного однократного (двукратного) подмножества

зонтов каждый вектор $s_{j,j',j'+1}^a$ содержится в одном (двух) и только одном (двух) зонте (зонтах) этого подмножества. Согласно данному определению в примере, изображенном на рис. 6, полные подмножества зонтов $\{S_{i,n+1}^a, S_{i,n+2}^a\}$ и $\{S_{i,j}^a, j = 1, \dots, n\}$ являются, соответственно, однократным и двукратным. Заметим, что если множество зонтов некой вершины разлагается на два полных подмножества, то одно из них однократное, а другое — двукратное, что вытекает из тождества (37).

Приведем критерий разложимости множества зонтов произвольной вершины a_i . Для этого удобно представлять себе каждую вершину на $\partial v_i^{(3)}$ маленьким шариком либо красного, либо белого цвета.

Утверждение 3. Множество зонтов вершины a_i разложимо тогда и только тогда, когда все вершины на $\partial v_i^{(3)}$ можно раскрасить в красный и белый цвета таким образом, что каждый 2-симплекс на $\partial v_i^{(3)}$ имеет одну красную и две белые вершины.

Доказательство. 1) Предположим, что множество зонтов вершины a_i разложимо, и рассмотрим полное однократное подмножество зонтов $\{S_{i,j'}^a, j' = 1, \dots, \alpha\}$. Раскрасим вершины $a_{j'}$, $j' = 1, \dots, \alpha$, в красный цвет, а остальные вершины $a_{j''}$ на $\partial v_i^{(3)}$ — в белый цвет. Тогда каждый 2-симплекс на $\partial v_i^{(3)}$ имеет одну красную и две белые вершины.

2) Если указанная в утверждении раскраска вершин на $\partial v_i^{(3)}$ существует, то возьмем множество зонтов $\{S_{i,j'}^a, j' = 1, \dots, \alpha\}$, где $a_{j'}$, $j' = 1, \dots, \alpha$, — множество красных вершин на $\partial v_i^{(3)}$. Очевидно, что это множество зонтов является полным однократным подмножеством зонтов. \square

Замечание. Поскольку имеется естественное взаимно однозначное соответствие между зонтами $S_{i,j(i)}^a$ и окрестностями $v_{j(i)}^{(2)}$, а также между векторами (31) и 2-симплексами из $\partial v_i^{(3)}$, то далее можно использовать вместо понятий «зонт» и «вектор (31)» соответственно понятия «окрестность» и «2-симплекс».

Полезно ввести следующую терминологию. Если на $\partial v_i^{(3)}$ имеется подмножество окрестностей $\{v_{j'}^{(2)}, j' = 1, \dots, s\}$, то 2-симплекс из $\partial v_i^{(3)}$, не содержащийся ни в одной из окрестностей этого подмножества окрестностей, будем называть белым, содержащийся в одной из этих окрестностей — желтым, содержащийся в двух окрестностях — зеленым, а в трех — синим. Таким образом, раскраска 2-симплексов имеет относительный характер и однозначно определяется заданным подмножеством окрест-

ностей.

Опишем индуктивный процесс построения подмножества окрестностей $\{v_{j'}^{(2)}\}$, минимально покрывающего границу $\partial v_i^{(3)}$. По определению, это означает, что все 2-симплексы из $\partial v_i^{(3)}$ окрашены в один и тот же цвет (желтый, зеленый или синий) относительно этого подмножества окрестностей. Процесс построения начинается с выбора окрестности $v_{j_1}^{(2)} \in \partial v_i^{(3)}$, где $a_{j_1} \in \partial v_i^{(3)}$ — некая вершина. Если уже построено подмножество окрестностей $\{v_{j'}^{(2)}, j' = 1, \dots, s\}$ (где s меньше или равно числу вершин на $\partial v_i^{(3)}$), то может быть реализована такая возможность, когда все 2-симплексы из $\partial v_i^{(3)}$ раскрашены в один цвет относительно этого подмножества (желтый, зеленый или синий). В противном случае процесс построения подмножества окрестностей продолжается, причем на каждом шаге выполняются два условия: а) вновь присоединенная окрестность $v_{s+1}^{(2)} \in \partial v_i^{(3)}$ граничит хотя бы с одной из окрестностей уже построенного подмножества окрестностей и б) число цветов, в которые раскрашены все 2-симплексы из $\partial v_i^{(3)}$ относительно подмножества окрестностей $\{v_{j'}^{(2)}, j' = 1, \dots, s\}$, минимально возможное (например, число цветов может быть равно двум: белый или желтый). Описанный процесс построения подмножества окрестностей из $\partial v_i^{(3)}$ заканчивается, когда все 2-симплексы из $\partial v_i^{(3)}$ оказываются окрашенными в один цвет (желтый, зеленый или синий) и возникающее в результате этого построения подмножество окрестностей $\{v_{j'}^{(2)}\}$ назовем минимально покрывающим.

Имеются следующие очевидные леммы.

Лемма 1. Если все вершины на $\partial v_i^{(3)}$ могут быть раскрашены в красный и белый цвета так, как указано в Утверждении 3, и описанный процесс построения подмножества окрестностей начинается с окрестности любой красной вершины, то он заканчивается раскраской всех 2-симплексов из $\partial v_i^{(3)}$ в желтый цвет.

Лемма 2. Если в условиях Леммы 1 описанный процесс построения подмножества окрестностей начинается с окрестности какой-либо белой вершины из $\partial v_i^{(3)}$, то он заканчивается раскраской всех 2-симплексов из $\partial v_i^{(3)}$ либо в желтый цвет, либо в зеленый.

Действительно, индуктивное рассмотрение показывает, что граница $\partial v_{j'}^{(2)}$ любой окрестности из подмножества окрестностей $\{v_{j'}^{(2)}, j' = 1, \dots, s\}$ содержит красную вершину. Поэтому добавляемая окрестность $v_{s+1}^{(2)}$ может быть лишь окрестностью бе-

лой вершины. \square

Из этих двух лемм следует еще одна лемма.

Лемма 3. Если описанная процедура построения подмножества окрестностей, независимо от первого и последующих шагов, заканчивается лишь тогда, когда все 2-симплексы из $\partial v_i^{(3)}$ окрашены в синий цвет, то вершины на $\partial v_i^{(3)}$ не могут быть раскрашены в красный и белый цвета таким образом, как указано в условии Утверждения 3. \square

В примере, изображенном на рис. 6, существует красно-белая раскраска вершин: вершины a_1, \dots, a_n — белые, а вершины a_{n+1}, a_{n+2} — красные. Если же n — четное число, то имеются еще две красно-белых раскраски вершин: вершины a_1, a_3, \dots, a_{n-1} — красные, а остальные — белые, либо — наоборот.

Пусть \mathfrak{K} — трехмерный симплициальный комплекс, реализованный в трехмерном евклидовом пространстве, и совокупность тетраэдров комплекса \mathfrak{K} заполняет компактную область в евклидовом пространстве с топологией трехмерного шара. Пусть окрестность $v_i^{(3)}$ — граничная, т.е. границы $\partial \mathfrak{K}$ и $\partial v_i^{(3)}$ имеют хотя бы один общий 2-симплекс, который обозначим $a_{j_1(i)} a_{j_2(i)} a_{j_3(i)}$. Предположим, что на границе $\partial v_i^{(3)}$ существует описанная красно-белая раскраска вершин. Будем считать, что вершины $a_{j_1(i)}$ и $a_{j_2(i)}$ — белые, а вершина $a_{j_3(i)}$ — красная. Построим комплекс \mathfrak{K} , добавляя еще одну граничную вершину $a_{k(i)}$ и три граничных ребра $a_{j_1(i)} a_{k(i)}$, $a_{j_2(i)} a_{k(i)}$, $a_{j_3(i)} a_{k(i)}$. В построенном комплексе вместо тетраэдра $a_i a_{j_1(i)} a_{j_2(i)} a_{j_3(i)}$ содержится три тетраэдра $a_i a_{j_1(i)} a_{j_2(i)} a_{k(i)}$, $a_i a_{j_2(i)} a_{j_3(i)} a_{k(i)}$, $a_i a_{j_3(i)} a_{j_1(i)} a_{k(i)}$. Легко установить, что на построенном комплексе на границе $\partial v_i^{(3)}$ не существует красно-белой раскраски вершин (штрихом снабжаем объекты на построенном комплексе).

Действительно, начнем описанный процесс индуктивного построения подмножества окрестностей $\{v_{j'}^{(2)}\}$ с вершины $a_{j_3(i)}$. Очевидно, что после n шагов (n — число красных вершин на $\partial v_i^{(3)}$) 2-симплекс $a_{j_1(i)} a_{j_2(i)} a_{k(i)}$ на $\partial v_i^{(3)}$ останется белым, а все остальные 2-симплексы станут желтыми. Следующий, $(n + 1)$ -й шаг должен заключаться в присоединении к построенному подмножеству окрестностей одной из трех окрестностей $v_{j_1}^{(2)}$, $v_{j_2}^{(2)}$ или $v_k^{(2)}$. В любом случае в результате все 2-симплексы на $\partial v_i^{(3)}$ будут раскрашены либо в желтый (как 2-симплекс $a_{j_1(i)} a_{j_2(i)} a_{k(i)}$), либо в зеленый цвет. Для определенности будем считать, что присоединяется

окрестность $v_{j_1}^{(2)}$. В результате все треугольники из $v_{j_1}^{(2)}$, кроме треугольника $a_{j_1(i)}a_{j_2(i)}a_{k(i)}$, становятся зелеными. Поэтому индуктивная процедура должна быть продолжена, так что после некоего шага треугольник $a_{j_1(i)}a_{j_2(i)}a_{k(i)}$ окрашивается в зеленый цвет. Но это возможно лишь в результате присоединения окрестности $v_{j_2}^{(2)}$ или окрестности $v_k^{(2)}$. В любом случае при этом в окрестности $\partial v_i^{(3)}$ появятся синие треугольники. Например, если присоединяется окрестность $v_k^{(2)}$, то треугольник $a_{j_1}a_k a_{j_3}$ становится синим. Отсюда видно, что индуктивный процесс построения подмножества окрестностей $\{v_{j'}^{(2)}\}$ на $\partial v_i^{(3)}$ заканчивается раскраской всех 2-симплексов на $\partial v_i^{(3)}$ в синий цвет. Поэтому из Леммы 3 следует, что на $\partial v_i^{(3)}$ не существует красно-белой раскраски вершин.

Теперь опишем индуктивную процедуру построения трехмерного комплекса с произвольным числом вершин, все внутренние вершины которого обладают тем свойством, что для каждой из них множество зонтов не разложимо на полные подмножества. Этот процесс начинается с комплекса с одной внутренней вершиной a_1 . Если на $\partial v_1^{(3)}$ не существует красно-белой раскраски вершин, то процесс построения продолжается путем добавления еще одной внутренней вершины. Если на $\partial v_1^{(3)}$ существует красно-белая раскраска вершин, то окрестность $v_1^{(3)}$ перестраивается так, как было описано.

Предположим, что уже построен трехмерный комплекс \mathfrak{K}_{M-1} в трехмерном пространстве с $M - 1$ внутренними вершинами и требуемыми свойствами. Построим его до комплекса с M внутренними вершинами и требуемыми свойствами. Выберем произвольную вершину на границе комплекса и обозначим ее a_M . Пусть a_{k_1}, \dots, a_{k_s} — совокупность граничных вершин комплекса, ближайших к вершине a_M , так что 1-симплексы $a_{k_1}a_{k_2}, a_{k_2}a_{k_3}, \dots, a_{k_{s-1}}a_{k_s}, a_{k_s}a_{k_1}$ принадлежат границе комплекса и образуют замкнутую ломаную линию l . Построим в евклидовом пространстве двумерный симплицальный комплекс S_M с границей l , такой что все его внутренние точки не принадлежат комплексу \mathfrak{K}_{M-1} . Обозначим через $a_{k'_1}, \dots, a_{k'_r}$ совокупность внутренних вершин комплекса S_M . Построим комплекс \mathfrak{K}_M до комплекса \mathfrak{K}_{M-1} все симплексы комплекса S_M , а также все 1-симплексы $a_M a_{k'_1}, \dots, a_M a_{k'_r}$, все 2-симплексы, ограниченные старыми и новыми 1-симплексами, и все 3-симплексы, ограниченные старыми и новыми 2-симплексами. Таким образом, вершина a_M становится внутренней вершиной

комплекса \mathfrak{K}_M . Согласно изложенному выше, комплекс S_M может быть выбран так, что множество зонтов вершины a_M не разложимо на полные подмножества.

В четырехмерном случае аналогами формул (30), (33), (35) и (36) являются соответственно формулы

$$I_\psi = \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 24} \times \sum_A \sum_{i,j,k,l,m} \varepsilon_{Aijklm} \varepsilon^{abcd} \Theta_{Aij}^a e_{Aik}^b e_{Ail}^c e_{Aim}^d, \quad (41)$$

$$S_{ij}^a = (3!)^{-2} \sum_{A(i,j)} \sum_{k,l,m} \varepsilon^{acdf} \times \varepsilon_{A(i,j)ijklm} e_{A(i,j)ik}^c e_{A(i,j)il}^d e_{A(i,j)im}^f, \quad (42)$$

$$\frac{i}{4} \sum_{j(i)} \hat{S}_{ij} \psi_j = \varepsilon v_i \psi_i, \quad (43)$$

$$\sum_{j(i)} S_{ij}^a e_{ij}^b = 4 v_i \delta^{ab}. \quad (44)$$

Обозначения в (41)–(44) соответствуют обозначениям, введенным в случае размерностей 2 и 3. В частности, v_i — 4-объем окрестности внутренней вершины a_i . Если $\{j'(i)\}$ — некое подмножество индексов множества $\{j(i)\}$, то в отношении частичной суммы $\sum_{j'(i)} S_{ij'}^a e_{ij'}^b$ остается справедливое замечание после формулы (36'). В четырехмерном случае также имеет место тождество (37), а также существует индуктивная процедура построения таких 4-комплексов, у которых в каждой внутренней вершине тождество (37) не может быть разбито на два независимых тождества (как в (38)). Доказательство сделанных утверждений мы здесь не приводим, поскольку они получаются путем тривиальных обобщений таких же утверждений, доказанных в случаях размерности 2 и 3.

4. ОТСУТСТВИЕ ВИЛЬСОНОВСКОГО УДВОЕНИЯ

Под наличием вильсоновского фермионного удвоения на некой решетке мы понимаем такую ситуацию, когда при $\epsilon \rightarrow 0$ уравнения (35) или (43) имеют качественно различающиеся решения. Для их различия введем нижний индекс в скобках: $\psi_{(1)\epsilon}, \psi_{(2)\epsilon}, \dots$ (остальные индексы моды указываются по мере необходимости). Имеют место условия ортогональности:

$$\sum_i v_i \bar{\psi}_{(\alpha_1)\epsilon_1 i} \psi_{(\alpha_2)\epsilon_2 i} = 0, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2. \quad (45)$$

Нетрудно увидеть, что среди инфракрасных или низкоэнергетических мод ($\epsilon \rightarrow 0$) всегда существуют моды, имеющие континуальный предел. Эти моды обозначим $\psi_{(1)}$ или просто ψ и будем называть тривиальными. Действительно, предположим, что значения поля ψ_i на соседних вершинах почти совпадают. Тогда для соседних вершин a_i и a_j имеем

$$\psi_j = \psi_i + e_{ij}^a \partial_a \psi_i + \dots, \quad (46)$$

где многоточие означает вклад от высших производных поля ψ_i . Мы считаем, что x_i^a — декартовы координаты вершины a_i и $e_{ij}^a = x_j^a - x_i^a$. Подставляя (46) в (35) или (43) и пользуясь формулами (36) или (44), перепишем уравнения (35) и (43) в континуальном виде:

$$i\gamma^a \partial_a \psi(x) + \varkappa^{ab}(x) \partial_a \partial_b \psi(x) + \dots = \epsilon \psi(x). \quad (47)$$

Чрезвычайно важно, что в левой части уравнения (47) слагаемое с наименьшей степенью производной имеет универсальный характер, не зависящий от детальной структуры симплицеального комплекса. Это слагаемое совпадает с континуальным дираковским полем, на которое действует континуальный оператор Дирака. Все остальные слагаемые в левой части (47), во-первых, содержат высшие производные и, во-вторых, содержат неуниверсальные коэффициенты, которые зависят явно от структуры решетки. В частности, $\varkappa^{ab}(x)$ в (47) — это матричные функции 4×4 (или 2×2 в двумерном пространстве), причем они существенно изменяются при изменении аргумента x на $\Delta x \sim a$, где a — масштаб решетки. Так как переменные $\{x_i^a\}$ являются динамическими переменными в квантовой теории гравитации, сформулированной во Введении, по которым происходит интегрирование, функции $\varkappa^{ab}(x)$ следует считать случайными величинами. Это означает, что, например, матрицу плотности для распространения дираковских частиц необходимо усреднить по полю $\varkappa^{ab}(x)$. При этом коррелятор $\langle \varkappa^{ab}(x) \varkappa^{cd}(x') \rangle$ ведет себя аналогично коррелятору (А.2) (см. Приложение).

В Приложении показано на примере нерелятивистской частицы, что если гамильтониан является суммой свободного гамильтониана и возмущения, пропорционального более высокой степени импульса и содержащего случайный фактор, то в длинноволновом пределе усредненная матрица плотности совпадает с матрицей плотности свободной частицы. Этот же вывод имеет место и в релятивистском случае. Отсюда следует утверждение, что в рассматриваемой теории гравитации в длинноволновом пре-

деле существуют тривиальные гладкие фермионные моды.

Естественно предположить, что нетривиальные фермионные моды $\psi_{(\alpha)i}$ в длинноволновом пределе распадаются на гладкие ветви $\psi'_{(\alpha)}(x)$, $\psi''_{(\alpha)}(x), \dots$. Именно такие нетривиальные фермионные моды изучались в связи с проблемой вильсоновского удвоения. Каждая из ветвей получается в континуальном пределе из значений поля $\psi_{i'}$, $\psi_{i''}, \dots$ на подмножествах вершин $\{a_{i'}\}$, $\{a_{i''}\}, \dots$, соответственно. Распадение нетривиальных мод в длинноволновом пределе на гладкие ветви отличает их от тривиальных фермионных мод.

Покажем, что на «нечетных» решетках (под «нечетными» мы понимаем такие решетки, на которых тождества (37) не распадаются на отдельные тождества типа (38)) нетривиальные фермионные моды отсутствуют.

Рассмотрим нетривиальную моду $\psi_{(\alpha)}$ в пределе $\epsilon \rightarrow 0$. Пусть множество вершин $a_{j(i)}$ распадается на подмножества вершин $a_{j'(i)}$, $a_{j''(i)}, \dots$, на которых определены значения ветвей моды $\psi'_{j'(i)}$, $\psi''_{j''(i)}, \dots$. Согласно сделанному предположению, для ветвей нетривиальной моды имеют место разложения

$$\psi_{j\xi(i)}^\xi = \psi^\xi(x_i) + e_{ij\xi}^a \partial_a \psi^\xi(x_i) + \dots, \quad (48)$$

$\xi = ', ', \dots$

Естественно считать, что

$$|\psi^{\xi_1}(x) - \psi^{\xi_2}(x)| \sim 1, \quad \xi_1 \neq \xi_2. \quad (49)$$

Так как в длинноволновом пределе

$$\partial_a \psi^\xi \rightarrow 0, \quad \xi = ', ', \dots, \quad (50)$$

в компактных областях комплекса, включающих большое число вершин, величины $\psi^\xi(x_i)$ можно считать постоянными. Рассмотрим одну из таких областей и обозначим ее \mathfrak{A} . Согласно сказанному, можно считать, что

$$\psi'(x_i)|_{\mathfrak{A}} = c'_{\mathfrak{A}}, \quad \psi''(x_i)|_{\mathfrak{A}} = c''_{\mathfrak{A}}, \dots, \quad (51)$$

где $c'_{\mathfrak{A}}$, $c''_{\mathfrak{A}}, \dots$ — некие числовые константы. В длинноволновом пределе в разложении (48) можно пренебречь в главном приближении (по отношению масштаба решетки к длине волны) всеми слагаемыми, кроме первого. В этом же приближении следует пренебречь правыми частями уравнений (35) и (43). Таким образом, уравнения (35) и (43) сводятся к следующей системе:

$$\sum_{j'(i)} \hat{S}_{ij'} c'_{\mathfrak{A}} + \sum_{j''(i)} \hat{S}_{ij''} c''_{\mathfrak{A}} + \dots, \quad a_i \in \mathfrak{A}. \quad (52)$$

Поскольку на комплексе имеются лишь тождества (37), то, если $c'_{\mathfrak{A}} \neq c''_{\mathfrak{A}} \neq \dots$, система равенств (52) накладывает столько ограничений на независимые динамические переменные e^a_{ij} , сколько имеется вершин во всех областях \mathfrak{A} минус число различных констант $c'_{\mathfrak{A}}, c''_{\mathfrak{A}}, \dots$. (Заметим, что последнее число имеет порядок единицы, в то время как число вершин в подкомплексе \mathfrak{A} может быть сколь угодно большим.) Поэтому возможность (49) неприемлема. Если же допустить, что $c'_{\mathfrak{A}} = c''_{\mathfrak{A}} = \dots$, то в длинноволновом пределе уравнение (43) принимает вид

$$\frac{i}{4} \gamma^a \left[\sum_{j'(i)} S^a_{ij'} e^b_{ij'} \partial_b \psi'(x_i) + \sum_{j''(i)} S^a_{ij''} e^b_{ij''} \partial_b \psi''(x_i) + \dots \right] = \epsilon v_i \psi(x_i). \quad (53)$$

Так как величины $\sum_{j'(i)} S^a_{ij'} e^b_{ij'}$, $\sum_{j''(i)} S^a_{ij''} e^b_{ij''}$, \dots имеют сложную структуру, существенно зависящую от микроскопических деталей аморфной решетки (см. замечание после формулы (36)), уравнение (53) качественно отличаются от уравнения для тривиальных мод (47) в длинноволновом пределе: в случае нетривиальных мод уже в главном приближении дифференциальный оператор Дирака не имеет континуального предела, он существенно зависит от микроскопических деталей решетки. Очевидно, что в этом случае существование гладких ветвей нетривиальных мод невозможно. Поэтому остается единственная возможность $\partial_a \psi' = \partial \psi'' = \dots$. Однако это означает, что в рассматриваемой теории гравитации существуют лишь тривиальные длинноволновые моды.

Теперь встанем на ту позицию, что в теории гравитации с действием (4) при вычислении статистической суммы

$$Z = \sum e^{-I} \quad (54)$$

суммировать следует также и по типам симплицеальных комплексов. В этом случае средние числа «четных» и «нечетных» вершин комплексов окажутся соизмеримыми. Очевидно, приведенные выше аргументы в пользу отсутствия вильсоновского фермионного удвоения сохраняют свою силу в такой теории.

5. БЕЗНОМАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИИ

Введем в теорию векторное калибровочное поле: каждому ребру $a_i a_j$ поставим в соответствие вещественную величину

$$A_{ij} = -A_{ji}, \quad (55)$$

которая входит в фермионную часть действия следующим образом (ср. с (4)):

$$\Theta^a_{Aij} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}_{Ai} \gamma^a \Omega_{Aij} e^{-ie\mathcal{A}_{Aij} \psi_{Aj}} - \bar{\psi}_{Aj} \Omega_{Aji} \gamma^a e^{-ie\mathcal{A}_{Aji} \psi_{Ai}}). \quad (56)$$

В результате действие оказывается инвариантным относительно локальных калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \psi_i &\rightarrow e^{ie\alpha_i} \psi_i, & \bar{\psi}_i &\rightarrow e^{-ie\alpha_i} \bar{\psi}_i, \\ A_{ij} &\rightarrow A_{ij} + \alpha_j - \alpha_i. \end{aligned} \quad (57)$$

В (57) $\{\alpha_i\}$ — произвольные вещественные числа.

Введем вейлевские поля

$$\psi_{\pm} = \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) \psi, \quad \bar{\psi}_{\pm} = \bar{\psi} \left(\frac{1 \mp \gamma^5}{2} \right). \quad (58)$$

Фермионная часть действия (4), (56) очевидным образом распадается на сумму действий «правого» и «левого» вейлевских полей:

$$I_{\psi} = I_{\psi+} + I_{\psi-}, \quad (59)$$

причем действие $I_{\psi+}$ (или $I_{\psi-}$) получается из фермионной части действия (4), (56) путем вставки проектора $(1 + \gamma^5)/2$ (или $(1 - \gamma^5)/2$) непосредственно левее поля ψ .

Определим фермионную меру как

$$D\bar{\psi} D\psi = \prod_i d\bar{\psi}_i d\psi_i, \quad (60)$$

где $d\psi_i$ — произведение дифференциалов всех компонент спинора ψ_i , а $d\bar{\psi}_i$ — произведение дифференциалов всех компонент сопряженного спинора $\bar{\psi}_i$. Очевидно, что

$$d\psi_i = d\psi_{i+} d\psi_{i-}, \quad d\bar{\psi}_i = d\bar{\psi}_{i+} d\bar{\psi}_{i-}, \quad (61)$$

где $d\psi_{i+} (d\psi_{i-})$ — произведение дифференциалов всех независимых компонент спинора $\psi_{i+} (\psi_{i-})$ и аналогично в отношении $d\bar{\psi}_{i+} (d\bar{\psi}_{i-})$. Вследствие (61) функциональная мера (60) факторизуется:

$$D\bar{\psi} D\psi = (D\bar{\psi}_+ D\psi_+) (D\bar{\psi}_- D\psi_-),$$

$$\begin{aligned} D\bar{\psi}_+ D\psi_+ &= \prod_i d\bar{\psi}_{i+} d\psi_{i+}, \\ D\bar{\psi}_- D\psi_- &= \prod_i d\bar{\psi}_{i-} d\psi_{i-}. \end{aligned} \quad (62)$$

Меры $(D\bar{\psi}_+ D\psi_+)$ и $(D\bar{\psi}_- D\psi_-)$, а также действия I_{ψ_+} и I_{ψ_-} по отдельности инвариантны относительно калибровочных преобразований (57).

Введем обозначения

$$Z_{\pm}\{\Omega, \mathcal{A}\} \equiv \int D\bar{\psi}_{\pm} D\psi_{\pm} \exp(-I_{\psi_{\pm}}). \quad (63)$$

Здесь берутся либо верхние, либо нижние знаки. Полную либо киральные статистические суммы как функции произвольного электромагнитного поля можно представить в виде

$$Z\{\mathcal{A}\} = \sum_{\{\Omega\}} e^{-I_{\Omega}} Z_{+}\{\Omega, \mathcal{A}\} Z_{-}\{\Omega, \mathcal{A}\}, \quad (64)$$

$$Z_{\pm}\{\mathcal{A}\} = \sum_{\{\Omega\}} e^{-I_{\Omega}} Z_{\pm}\{\Omega, \mathcal{A}\}, \quad (65)$$

где I_{Ω} — часть действия (4), не зависящая от фермионных полей.

Согласно выводам предыдущего раздела, киральные теории (65) имеют непрерывный низкоэнергетический предел. Так как вильсоновское удвоение отсутствует, в непрерывном пределе эти теории содержат по одному правому или левому вейлевскому полю.

Покажем, что функционалы $Z_{\pm}\{\mathcal{A}\}$ калибровочно инвариантны:

$$Z_{\pm}\{\mathcal{A} + \partial_{\mu}\alpha\} = Z_{\pm}\{\mathcal{A}\}. \quad (66)$$

Равенство (66) без труда и точно доказывается на решетке, причем еще до суммирования по гравитационным степеням свободы для функционалов (63). Действительно, при замене переменных (57) ни действия, ни меры в (63) не изменяются, и потому равенства (66) имеют место как на решетке, так и в непрерывном пределе.

Теперь сделаем в интегралах (63) замену лишь фермионных переменных вида (57) с бесконечно малым параметром

$$\alpha_i = \varepsilon \delta_{ij}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (67)$$

Электромагнитное поле при этом не изменяется. Теперь учтем, что при замене переменных интегрирования интегралы не изменяются, а также не изменяются меры в этих интегралах. При этой замене переменных изменяются лишь действия в интегралах, причем в первом порядке по ε эти изменения в непрерывном пределе равны

$$\varepsilon(x_j) \partial_{\mu} J_{\pm}^{\mu}(x_j), \quad J_{\pm}^{\mu}(x) = \frac{1-\gamma^5}{2} \bar{\psi} \gamma^{\mu} (1 \pm \gamma^5) \psi(x). \quad (68)$$

Поэтому из равенства интегралов (63) до и после указанной замены переменных мы получаем следующие законы сохранения:

$$\partial_{\mu} J_{\pm}^{\mu}\{\mathcal{A}\}(x) \equiv \langle \partial_{\mu} J_{\pm}^{\mu}(x) \rangle_{F, \Omega} = 0. \quad (69)$$

В (69) усреднение проводится лишь по фермионным и гравитационным степеням свободы.

С другой стороны, вариация функционалов (65) относительно калибровочного векторного поля \mathcal{A} имеет вид

$$\delta \ln Z_{\pm} = e \int dx \delta A_{\mu}(x) J_{\pm}^{\mu}\{\mathcal{A}\}(x). \quad (70)$$

Если $\delta A_{\mu} = \partial_{\mu} \delta \alpha$, то, вследствие (69) и (70), мы еще раз приходим к равенствам (66).

Таким образом, в рассматриваемой здесь дискретной квантовой теории гравитации отсутствуют и вильсоновское удвоение фермионов, и (фактически как следствие) аномальные расходимости киральных токов. Очевидно, аномальная расходимость аксиального тока также отсутствует.

6. НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРЕДЕЛ

В работе [1] были приведены аргументы в пользу того, что в решеточной гравитационной статистической сумме инфракрасные расходимости, возникающие при интегрировании по полю тетрад e_{ij}^a , ведут к вырождению дискретной квантовой теории гравитации в непрерывную квантовую теорию гравитации. Получающаяся таким образом непрерывная квантовая теория гравитации должна допускать, в частности, возможность безаномального включения одного кирального фермионного поля. В связи с этим возникает вопрос о явном описании такой континуальной теории.

В этом разделе мы приводим аргументы в пользу того, что предложенная автором в ряде работ [2, 12, 13] континуальная теория гравитации, построенная при помощи метода динамического квантования, является интересующим нас непрерывным пределом дискретной квантовой теории гравитации.

Идеология метода динамического квантования подробно изложена в [2, 12], а точно решаемый пример (двумерная квантовая гравитация), демонстрирующий этот метод — в [13]. Поэтому здесь мы приведем лишь некоторые необходимые существенные свойства общековариантной теории, проквантованной при помощи метода динамического квантования.

При динамическом квантовании теория строится в пространстве с псевдоевклидовой сигнатурой метрики и предполагается, что общеквариантная теория регуляризована в ультрафиолетовой области таким образом, что выполнены следующие аксиомы.

Аксиома 1. Все физические состояния теории получаются из основного состояния $|0\rangle$ при помощи операторов A_N^\dagger с $|N| < N_0$:

$$\begin{aligned} |N_1, \dots, N_s\rangle &= A_{N_1}^\dagger \dots A_{N_s}^\dagger |0\rangle, \\ A_N |0\rangle &= 0, \quad [A_{N_1}, A_{N_2}^\dagger] = \delta_{N_1 N_2}. \end{aligned} \quad (71)$$

Состояния (71) образуют ортогональный базис пространства F' физических состояний теории.

Здесь N — точка некоего счетного множества с нормой, так что условие $|N| < N_0$ выделяет конечное подмножество этого множества. При $N_0 \rightarrow \infty$ число элементов этого подмножества стремится к бесконечности как некая положительная степень числа N_0 . Везде выписываются лишь ненулевые коммутаторы или антикоммутаторы.

Аксиома 2. Фундаментальные динамические переменные (поля) $\Phi(x)$ переводят состояние (71) в суперпозицию состояний такого же вида, которая содержит все состояния, у которых одно из чисел заполнения отличается по модулю на единицу, а остальные совпадают с числами заполнения состояния (71).

Для интересующего нас дираковского поля Аксиома 2 означает, что имеет место следующее разложение:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{|N| < N_0} \left(a_N \psi_N^{(+)}(x) + b_N^\dagger \psi_N^{(-)}(x) \right) + \dots, \\ \{a_{N_1}, a_{N_2}^\dagger\} &= \{b_{N_1}, b_{N_2}^\dagger\} = \delta_{N_1 N_2}. \end{aligned} \quad (72)$$

Здесь вместо обобщенных операторов уничтожения и рождения $\{A_N, A_N^\dagger\}$ используются фермиевские операторы уничтожения и рождения $\{a_N, b_N, a_N^\dagger, b_N^\dagger\}$. Набор мод $\{\psi_N^{(+)}(x), \psi_N^{(-)}(x)\}$ образует полный набор, по которому в любой момент времени t можно разложить любое спинорное поле $\psi(t, \mathbf{x})$. Через \mathbf{x} обозначается совокупность пространственных координат. Набор мод $\{\psi_N^{(+)}(x)\}$ является положительночастотным, а набор мод $\{\psi_N^{(-)}(x)\}$ — отрицательночастотным. Это разделение мод происходит в некий момент времени $t = t_0$, причем положительно- и отрицательночастотные моды являются таковыми по отношению к безмассовому одночастичному гамильтониану Дирака в этот же момент времени. В любой момент времени набор мод $\{\psi_N^{(+)}(x), \psi_N^{(-)}(x)\}$ определяется

путем решения безмассового уравнения Дирака. Многоточие в (72) означает нелинейный вклад относительно операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$, среди которых есть как фермиевские, так и бозевские.

Аксиома 3. Уравнения движения и связей для физических полей с точностью до расстановки операторов совпадают по форме с соответствующими классическими уравнениями и связями.

Аксиома 3 означает, что операторы $\{A_N, A_N^\dagger\}$ коммутируют по крайней мере в слабом смысле со всеми связями первого рода или гамильтонианом теории. Действительно, лишь в этом случае в процессе регуляризации, т. е. обращения в нуль пар операторов (A_N, A_N^\dagger) с $|N| > N_0$, регуляризованные уравнения движения и связи не изменяются (по модулю имеющих в теории связей) и регуляризованные связи первого рода остаются связями первого рода.

Предположим, что гравитационные поля (тетрада, связность) содержат классические части, которые остаются при формальном вычеркивании всех операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$. В отношении гравитационных полей это предположение является необходимым. В рассматриваемой задаче электромагнитное поле удобно считать произвольным, но не разлагающимся по операторам рождения и уничтожения. Квантовые флуктуации электромагнитного поля можно затем учесть, спаривая электромагнитные поля согласно теореме Вика и заменяя парные корреляторы соответствующим пропагатором. Однако такого рода вычисления здесь не представляют интереса.

Следует учесть, что разложение полей и уравнений по нелинейностям относительно операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$ фактически является разложением по константам связи теории. Поэтому точное безмассовое уравнение Дирака

$$i e_a^\mu \gamma^a D_\mu \psi = 0 \quad (73)$$

при помощи (72) в наинизшем приближении приводит к уравнению

$$\begin{aligned} i e_a^{(0)\mu} \gamma^a D_\mu^{(0)} \times \\ \times \left[\sum_{|N| < N_0} \left(a_N \psi_N^{(+)}(x) + b_N^\dagger \psi_N^{(-)}(x) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

В (73) и (74) $e_a^\mu(x)$ — тетрада, D_μ — ковариантная производная, включающая электромагнитное поле. Верхним индексом (0) снабжаем поля и операторы, получающиеся формальным вычеркиванием всех операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$.

Из уравнения (74) следует, что

$$e_a^{(0)\mu} \partial_\mu \left(\bar{\psi}^{(1)} \gamma^a \psi^{(1)} \right) = 0, \quad (75)$$

$$e_a^{(0)\mu} \partial_\mu \left(\bar{\psi}^{(1)} \gamma^a \gamma^5 \psi^{(1)} \right) = 0, \quad (76)$$

где

$$\psi^{(1)}(x) = \sum_{|N| < N_0} \left(a_N \psi_N^{(+)}(x) + b_N^\dagger \psi_N^{(-)}(x) \right). \quad (77)$$

Чрезвычайно важно, что фермионное поле (77) регуляризовано. Именно поэтому из уравнения (74) следуют равенства (75) и (76). Действительно, билинейные формы, построенные из дираковских (или вейлевских) полей, не требуют регуляризации и к ним могут применяться дифференциальные операторы непосредственно, без предварительной регуляризации.

Равенства (75), (76) получены в однопетлевом приближении. Как известно, учет высших петель не дает вклада в аномальные расходимости векторного, аксиально-векторного и киральных токов. Здесь это означает, что разложение по степеням операторов $\{A_N, A_N^\dagger\}$ не изменяет результаты (75), (76).

Очевидно, что аналогичным образом получается сохранение кирального фермионного тока в киральной теории.

Необходимо констатировать, что метод динамического квантования принципиально отличается от квантования Фейнмана. Это видно уже из полученного результата (75), (76). Это же видно также и из того, что в методе динамического квантования вакуумы при $t \rightarrow -\infty$ и при $t \rightarrow +\infty$, вообще говоря, качественно различаются. Действительно, операторные уравнения в теории гравитации при динамическом методе квантования в наинизшем приближении совпадают с уравнениями Эйнштейна, а квантовые поправки учитываются на фоне классических решений. Но уже на классическом уровне в теории гравитации эволюционные уравнения ведут из одной особенности в другую, причем эти особенности могут быть качественно различными. Напротив, при квантовании Фейнмана принимается гипотеза, что основное состояние эволюционирует за бесконечное время в состояние, которое отличается от исходного лишь фазовым множителем. Из этой гипотезы вытекает правило обхода полюсов в пропагаторах, используемых в диаграммной технике Фейнмана, а тем самым — возможность поворота Вика в евклидово пространство. Поэтому континуальная квантовая теория поля, сформулированная в евклидовом пространстве, автоматически является проквантованной по Фейнману. В методе динамического

квантования поворот Вика в евклидово пространство невозможен. Это видно уже из эволюционного уравнения (74), которое имеет смысл лишь при псевдоевклидовой сигнатуре.

Таким образом, мы пришли к следующему выводу.

Непрерывная теория гравитации, полученная при помощи метода динамического квантования, является непрерывным пределом дискретной квантовой теории гравитации, сформулированной в [1]. Основания для такого утверждения следующие:

1) В обеих теориях содержится конечное число физических степеней свободы.

2) В обеих теориях имеется возможность введения одного единственного кирального вейлевского поля, причем соответствующий киральный ток сохраняется.

Я благодарю А. Иоселевича, М. Скворцова и И. Колоколова за разъяснение мне некоторых положений, касающихся проблемы локализации квантовых частиц при наличии случайных факторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Научных школ (грант № 2044.2003.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим в трехмерном пространстве одночастичный гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{p}^2 \varkappa(\mathbf{x}) \mathbf{p}^2 \quad (A.1)$$

со случайной функцией $\varkappa(\mathbf{x})$. Предположим, что матрица плотности для системы (A.1) должна быть усреднена по функции $\varkappa(\mathbf{x})$ согласно правилу

$$\langle \varkappa(\mathbf{x}) \rangle = 0,$$

$$\langle \varkappa(\mathbf{x}) \varkappa(\mathbf{x}') \rangle = \frac{a^7}{m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (A.2)$$

а средние от высших степеней $\varkappa(\mathbf{x})$ вычисляются согласно теореме Вика. Мы утверждаем, что в пределе $p^2 \rightarrow 0$ матрица плотности системы (A.1) стремится к матрице плотности свободной частицы с гамильтонианом $\mathcal{H}_0 = \mathbf{p}^2/2m$ и, таким образом, в рассматриваемом случае явление локализации отсутствует.

Действительно, пусть

$$\begin{aligned} K_0(\mathbf{k}', \mathbf{k}, t) &= \\ &= \exp\left(-i \frac{\mathbf{k}^2}{2m} t\right) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \theta(t) \quad (A.3) \end{aligned}$$

— амплитуда перехода в импульсном пространстве для свободной частицы с гамильтонианом \mathcal{H}_0 . Точная амплитуда перехода удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathcal{H}'_0 - iV' \right) K(\mathbf{k}', \mathbf{k}, t) &= \\ &= \delta(t) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \quad (\text{A.4}) \\ V &= -\mathbf{p}^2 \varkappa \mathbf{p}^2. \end{aligned}$$

Разложим K относительно оператора V :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}', t | K | \mathbf{k}, 0 \rangle &= \\ &= \langle \mathbf{k}', t | \{ K_0 + K_0(iV) K_0 + \dots \} | \mathbf{k}, 0 \rangle = \\ &= K_0(\mathbf{k}', \mathbf{k}, t) + \mathbf{k}'^2 \mathbf{k}^2 Q\{\mathbf{k}', \mathbf{k}, \varkappa, t\}, \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

причем при $\mathbf{k}'^2 \mathbf{k}^2 \rightarrow 0$ оператор Q в (A.5) имеет конечный предел. Матрица плотности выражается через амплитуду перехода следующим образом:

$$\rho(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t) = K(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_1, t) K^*(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_2, t). \quad (\text{A.6})$$

Матрица плотности (A.6) должна быть усреднена согласно правилам (A.2). Учитывая (A.5), получаем

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t) \rangle &= \exp\left(-i \frac{\mathbf{k}'_1{}^2 - \mathbf{k}'_2{}^2}{2m} t\right) \times \\ &\times (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{k}'_2 - \mathbf{k}_2) + \\ &+ (\mathbf{k}'_1{}^2)(\mathbf{k}'_2{}^2) R(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t). \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

В (A.7) оператор $R(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t)$ регулярен в пределе $\mathbf{k}'_1{}^2 \rightarrow 0$, $\mathbf{k}'_2{}^2 \rightarrow 0$. Отсюда следует утверждение, сделанное в начале Приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **120**, 1069 (2001).
2. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **118**, 996 (2000).
3. Л. С. Понтрягин, *Основы комбинаторной топологии*, Наука, Москва (1976).
4. П. Дж. Хилтон, С. Уайли, *Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию*, Мир, Москва (1966).
5. К. G. Wilson, *Erice Lectures Notes* (1975).
6. J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **11**, 393 (1975).
7. L. Susskind, *Phys. Rev. D* **16**, 3031 (1977).
8. M. Luscher, *E-print archives hep-th/0102028*.
9. Н. В. Nielsen and M. Ninomiya, *Nucl. Phys. B* **185**, 20 (1981); *Nucl. Phys. B* **193**, 173 (1981).
10. J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev D* **28**, 2960 (1983).
11. С. П. Новиков, И. А. Дынный, *УМН* **52**, 175 (1997).
12. С. Н. Вергелес, *ТМФ* **112**, 132 (1997).
13. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **117**, 5 (2000).