ЖЭТФ, 2003, том 124, вып. 6 (12), стр. 1222–1231

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ТРИПЛЕТНЫХ ФАЗ ПРОТОН-ПРОТОННОГО РАССЕЯНИЯ В ОБЛАСТЬ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

В. В. Пупышев *

Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 2 июня 2003 г.

Показано, что для корректной экстраполяции триплетных фаз pp-рассеяния в область энергий ниже нескольких МэВ необходимо наряду с кулоновским и ядерным взаимодействиями учитывать взаимодействия магнитного момента протона с кулоновским полем и магнитным моментом другого протона. Предложен простой способ такой экстраполяции.

PACS: 03.65.Nk, 13.75.Gs, 13.40.Ks

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящается семидесятилетнему юбилею профессора В. Б. Беляева и является продолжением выполненных его учениками исследований [1–8] низкоэнергетических разложений для систем нескольких квантовых частиц.

Знание энергетической зависимости характеристик рассеяния (фаз δ, амплитуд f, сечений $d\sigma$, анализирующей способности A_y и др.) в пределе низких энергий столкновения ($E \to 0$) позволяет решить две важные задачи: прикладную задачу экстраполяции этих характеристик в область низких энергий, недоступных для прямого экспериментального исследования, и обратную задачу, цель которой — восстановить взаимодействия по известным экспериментальным данным. Поэтому одной из основных проблем теории рассеяния является исследование низкоэнергетического поведения характеристик рассеяния и вывод их явных низкоэнергетических разложений.

Как известно [9, 10], в пределе низких энергий существенное влияние на энергетическую зависимость фаз рассеяния двух элементарных или составных ядерных частиц оказывают дальнодействующие степенные слагаемые $V^d \sim r^{-d}$, $d \geq 3$, полного эффективного взаимодействия

$$V^{eff}(r) = V^s(r) + V^d(r),$$

где r — расстояние между центрами масс частиц, а V^s — эффективное быстроубывающее ($V^s = o(V^d)$, $r \to \infty$) взаимодействие, порожденное ядерными силами. В системе (N, N) двух нуклонов к таким слагаемым электромагнитного происхождения относятся поляризационное взаимодействие протонов [11, 12]:

$$V^d(r) = V^p(r) = \alpha_e\, r^{-4}, \qquad \alpha_e = (1.07 \pm 0.11)10^{-3}\ \text{фм}^3, \quad d = 4, \tag{1}$$

взаимодействие магнитных моментов нуклонов [13]:

$$V^d(r) = V^{mt}(r) = b_t\, r^{-3}\, S_{12}, \quad d = 3\,, \tag{2}$$

и взаимодействие магнитного момента нейтрона n или протона p с кулоновским полем другого протона [13]:

$$V^d(r) = V^{m\ell s}(r) = b_{\ell s}\, r^{-3}(\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}), \quad d = 3. \tag{3}$$

В определениях (1)–(3) использованы стандартные обозначения теории NN-взаимодействий [14]: α_e — электрическая поляризуемость протона, $\boldsymbol{\ell}$ и $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ – полные угловой момент и спин двухнуклонной системы, $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ — спины нуклонов, S_{12} — известный тензорный оператор, $b_{\ell s}$ и b_t —

*E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

разные для систем (n,n), (n,p) и (p,p) константы.

Исчерпывающий анализ роли поляризационного потенциала (1) в pp-рассеянии и реакции $dd \to e+\nu_e$ дан в обзорных работах [1, 2]. Один из выводов этого анализа гласит: вклад поляризационного взаимодействия (1) в упругое pp-рассеяние и сечение реакции $dd \to e+\nu_e$ пренебрежимо мал, потому что кулоновское взаимодействие V^c протонов является отталкивающим, а константа α_p поляризационного потенциала невелика.

В системе (n,n) взаимодействия (1) и (3) отсутствуют, но полное взаимодействие $V = V^s + V^{mt}$ содержит дальнодействующее тензорное слагаемое (2). Его роль в триплетном nn-рассеянии $(s = 1)$ впервые упомянута в работе [3], а затем исследовалась в [4,5]. В этих работах был впервые теоретически предсказан нейтрон-нейтронный аналог эффекта Рамзауэра [15, 16], а также было показано, что этот аналог является следствием интерференции nn-рассеяния взаимодействиями V^s и V^{mt} и должен проявляться как глубокий минимум в полном сечении триплетного рассеяния нейтронов при энергии $E \approx 20$ кэВ в системе их центра масс. Как пояснялось в работе [3], это явление представляется интересным для экспериментальных исследований сечений nn-рассеяния и реакции $\pi^- d \to \gamma nn$. Интересным представляется и экспериментальное подтверждение еще одной особенности триплетного nn-рассеяния, а именно, линейного по импульсу рассеяния убывания ^3P_j-фаз, обусловленного, согласно фазовому анализу [5], взаимодействием V^{mt}.

Необходимость учета суммарного магнитного взаимодействия $V^m \equiv V^{m\ell s} + V^{mt}$ для корректной теоретической интерполяции экспериментальных данных np- и pp-рассеяния отмечалась неоднократно. Хотя различные подходы к решению этой проблемы и анализ ее современного состояния подробно обсуждались в обзорных работах [6] и [17], стоит еще раз упомянуть наиболее интересные выводы работ [6] и [18–20].

В работе [6] было впервые показано, что при теоретически учитываемом взаимодействии $V^{m\ell s}$ функция $d\sigma\, A_{y,np}$ должна убывать при $E \to 0$ как $O(E^{1/2})$, а без учета взаимодействия — гораздо быстрее, а именно, как $O(E^{3/2})$. В работе [18] включением этого же взаимодействия в теоретический анализ np-рассеяния удалось объяснить пикообразное поведение анализирующей способности $A_{y,np}(\theta)$ при энергиях $E_{lab} = 25$–210 МэВ и углах $\theta < 5^\circ$.

Анализирующая способность $A_{y,pp}$ оказалась главным объектом многочисленных исследований (см. [17]) роли взаимодействия $V^{m\ell s}$ в упругом pp-рассеянии. Общим для всех известных способов учета этого взаимодействия является использование борновского приближения. Например, в работе [19] добавочная к кулоновскоядерной амплитуде f^{cs} амплитуда f^m, порожденная взаимодействием $V^{m\ell s}$, вычислялась в борновском приближении для плоской волны ($f^m \approx f^m_B$) и было показано, что такой способ учета взаимодействия $V^{m\ell s}$ при энергии $E_{lab} > 150$ МэВ несущественно улучшает согласие теоретического описания анализирующей способности $A_{y,pp}$ с экспериментальными данными. В работе [20] для вычисления f^m использовалось искаженное кулоновским взаимодействием борновское приближение для плоской волны ($f^m \approx f^m_{BC}$) и было установлено, что модули амплитуд f^m_B и f^m_{BC} примерно равны, но фазы существенно различаются, и поэтому функция $A_{y,pp}(\theta)$ имеет пикообразное поведение в области небольших углов θ.

Как отмечалось в работе [17], при энергии $E_{lab} = 9.75$ МэВ учет взаимодействия $V^{m\ell s}$ улучшает согласие теоретически вычисленных значений функции $A_{y,pp}(\theta)$ с ее экспериментально измеренными в области небольших углов $\theta < 30^\circ$, а при $E_{lab} = 5.5$ МэВ — уже в более широкой области, $\theta < 90^\circ$. Следовательно, можно предположить, что при дальнейшем уменьшении энергии вклад взаимодействия $V^{m\ell s}$ в наблюдаемую характеристику $A_{y,pp}(\theta)$ будет возрастать и при больших углах. Так как $A_{y,pp}$ выражается известным образом [17, 21] через фазы pp-рассеяния, первый этап исследования этого вклада в пределе низких энергий состоит в анализе особенностей низкоэнергетического поведения фаз pp-рассеяния, обусловленных взаимодействиями $V^{m\ell s}$ и V^{mt} и их суммой V^m. Не менее интересным представляется исследование особенностей поведения этих фаз, порожденных взаимным воздействием ядерного и магнитного взаимодействий V^s и V^m. Несмотря на то что роль взаимодействия V^m в pp-рассеянии изучается уже давно, вопрос о теоретическом существовании упомянутых выше особенностей до сих пор является открытым. Желание автора ответить на этот вопрос стимулировало настоящую работу, излагаемую ниже по следующему плану. В разд. 2 формулируется использованная модель pp-рассеяния, а в разд. 3 описываются способы точного и приближенного вычисления фаз pp-рассеяния. Результаты выполненного численного анализа этих фаз представляются в разд. 4 и суммируются в Заключении.

2. МОДЕЛЬ ПРОТОН-ПРОТОННОГО РАССЕЯНИЯ

Пусть система (p,p) описывается нерелятивистским уравнением Шредингера [9]. В системе центра масс протонов запишем его в виде

$$\left[\triangle_r + k^2 - V^{ca}(\mathbf{r})\right]\,\Psi(\mathbf{r};\mathbf{k}) = 0, \quad k^2 = \frac{m_p}{\hbar^2}E,$$

где Ψ — волновая функция протонов, $\mathbf{k}$ и E — их относительный импульс и энергия, $\mathbf{r}$ — вектор, направленный от одного протона к другому, m_p — масса протона.

Считаем, что полное взаимодействие $V^{ca} = V^c + V^a$ — суперпозиция, в которой взаимодействие V^a убывает с ростом r быстрее центрального кулоновского потенциала

$$V^c(r) = \frac{m_p}{\hbar^2}\,\frac{e^2}{r} = \frac{1}{Rr}, \quad R \equiv \frac{\hbar^2}{m_p e^2}, \tag{4}$$

где e — заряд электрона, а R — боровский радиус pp-системы. Теоретически возможны три случая: $a = s, m, ms$. В первом случае $a = s$ и $V^a = V^s$ — короткодействующее ядерное взаимодействие, во втором случае $a = m$ и $V^a = V^m$ — магнитное взаимодействие, наконец, в третьем и наиболее реалистическом случае $a = ms$ и $V^a = V^{ms} = V^m + V^s$ — суперпозиция магнитного и ядерного взаимодействий.

Следуя работе [13], полагаем, что V^m — суперпозиция $V^m = V^{mt} + V^{m\ell s}$, компоненты которой определены формулами

$$\begin{gathered} V^{mt} \equiv \frac{b_t S_{12}}{r^3}, \quad b_t \equiv -\frac{m_p}{\hbar^2}\,\mu_p^2\,\mu_0^2 = -\mu_p^2\,\frac{m_e}{m_p}\,r_e, \\ S_{12} \equiv \frac{3(\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{r})(\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{r}) - r^2(\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2)}{4r^2}, \end{gathered} \tag{5}$$

а также

$$\begin{gathered} V^{m\ell s} = \frac{b_{\ell s}\,(\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{s})}{r^3}, \\ b_{\ell s} \equiv -\frac{m_p}{\hbar^2} 8\mu_0^2\left(\mu_p - \frac{1}{4}\right) = -2\left(\mu_p - \frac{1}{4}\right)\frac{m_e}{m_p} r_e. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь m_e — масса электрона, μ_p — магнитный момент протона в ядерных магнетонах μ_0, а r_e — классический радиус электрона,

$$\mu_0 \equiv \frac{e\hbar}{2m_p c}, \quad r_e \equiv \frac{e^2}{m_e c^2}.$$

При вычислениях будем использовать в качестве ядерного взаимодействия V^s взаимодействие Рида с мягким кором [22] и известные константы [23]

$$m_p = 938.2796\,\text{МэВ}, \quad \mu_p = 2.7927,$$

$$\hbar^2/m_p = 41.4969\,\text{МэВ}\cdot\text{фм}^{-2},$$

$$m_e = 0.5110034\,\text{МэВ}, \quad r_e = 2.817938\,\text{фм},$$

$$\text{Ry} = 13.605804\,\text{эВ},$$

при которых согласно формулам (4)–(6)

$$R = 28.8064\ldots\,\text{фм}, \quad b_{\ell s} = -0.005371\ldots\,\text{фм},$$

$$b_t = -0.001534\ldots\,\text{фм}.$$

Из физических соображений ясно, что оба магнитных взаимодействия на расстояниях, меньших по порядку величины, чем размер нуклона (≈ 1 фм), должны описываться иными несингулярными при $r \to 0$ формулами. Так как такие формулы в настоящее время неизвестны, то при $r \le 1.0$ фм можно положить $V^{mt} \equiv 0$ и $V^{m\ell s} \equiv 0$. Есть и еще одна причина не учитывать оба эти взаимодействия в области расстояний $r \le r^s$, где r^s — радиус действия ядерного взаимодействия. Поясним ее, а также покажем, что выбор взаимодействия Рида с мягким кором не ограничивает общности нашего исследования.

Как известно из квантовой механики [9] и из метода фазовых функций [10], при больших энергиях столкновения картина рассеяния двух частиц зависит в основном от строения их взаимодействия в области малых расстояний, а основные особенности рассеяния при низких энергиях определяются поведением взаимодействия в области больших расстояний, т. е. поведением «хвоста» взаимодействия. Все современные фазовоэквивалентные NN-взаимодействия имеют одинаковый и довольно быстро убывающий юкавский хвост: $V^s \sim \exp(-m_\pi r)/r$, где $m_\pi = 134.9630$ МэВ — масса π-мезона. Этот хвост определяет поведение параметров кулоновскоядерного pp-рассеяния при низких энергиях, и поэтому эти параметры слабо зависят от выбора ядерного взаимодействия. Еще одна физическая причина такой слабой зависимости — суммарная экранировка ядерного взаимодействия в области малых расстояний отталкивающими кулоновским и центробежным потенциалами, $1/Rr$ и $\ell(\ell+1)/r^2$. Поэтому для анализа триплетных фаз pp-рассеяния можно без потери общности ограничиться их расчетом при каком-то одном из известных фазовоэквивалентных ядерных взаимодействий. В качестве такого взаимодействия в настоящей работе используется взаимодействие Рида с мягким кором. Это взаимодействие хорошо описывает известные экспериментальные данные в области $E > 10$ МэВ и, поэтому, содержит информацию как о ядерном взаимодействии, так и о магнитном взаимодействии, эффективно учитываемом в области конечных расстояний. С физической точки зрения, верхняя граница r^s этой внутренней области есть радиус действия [1] потенциала V^s при $E > 10$ МэВ. Для этого радиуса действия обычно [14] используется оценка $r^s \approx 4$ фм. Чтобы избежать двойного учета магнитного взаимодействия в области $r \le r^s$, далее считаем, что $V^{m\ell s} \equiv 0$ и $V^{mt} \equiv 0$ при $r \le 4$ фм.

3. МЕТОД

Взаимодействие Рида, как и другие реалистические ядерные взаимодействия [14], содержит наряду с короткодействующими центральными слагаемыми, не зависящими от $\boldsymbol{\ell}$, $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$, короткодействующие спин-орбитальное и тензорное взаимодействия:

$$V^{s\ell s} = V^{s\ell s}(\mathbf{r})\,(\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{s}), \quad V^{st} = V^{st}(\mathbf{r})\,S_{12}. \qquad (7)$$

Первое из них сохраняет угловой момент ℓ, спин s, полный момент $\mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{s}$ и полный изоспин $T = 1$ системы (p,p), второе сохраняет s и j, но, вообще говоря, не сохраняет $\ell = j, j \pm 1$. Поэтому в общем случае триплетное pp-состояние $|sj\rangle$ с определенными полным моментом j и спином $s = 1$ является суперпозицией базисных pp-состояний $|s\ell j\rangle$ с $\ell = j \pm 1$:

$$|sj\rangle = a\,|s, j-1, j\rangle + b\,|s, j+1, j\rangle, \quad a^2 + b^2 = 1. \qquad (8)$$

В рассматриваемом нами случае, $s = 1$ и $T = 1$, смешивание не происходит в состоянии ^3P_j с $j = 0, 1$ и в состояниях с $j = \ell > 1$. Состояния $|s\ell j\rangle$ с определенным ℓ называем чистыми, а все остальные состояния $|sj\rangle$ — смешанными. Например, состояние $^3P_2$–$^3F_2$ является смешанным и представляется суперпозицией (8) двух базисных состояний с $\ell = 1$ и $\ell = 3$.

Магнитные взаимодействия (5) и (6) содержат те же операторы $\boldsymbol{\ell}\cdot\mathbf{s}$ и S_{12}, что и ядерные взаимодействия (7), но убывают при $r \to \infty$ гораздо медленнее. Поэтому учет магнитных взаимодействий не изменяет упомянутую классификацию состояний системы (p,p), но должен изменить энергетическую зависимость параметров рассеяния фаз $\delta^{c,a}_{\ell,j}$ и параметров смешивания ε^a_j, введенных Стаппом и др. [21]. По определению, $\delta^{c,a}_{\ell,j}(k)$ — разность между фазой $\delta^{ca}_{\ell,j}(k)$ рассеяния суперпозицией $V^c + V^a$ и кулоновской фазой $\delta^c_\ell(k)$. В случае $a = s$ фазу $\delta^{c,s}_{\ell,j}(k)$ обычно называют кулон-ядерной или кулоновско-ядерной [9]. Поэтому представляется логичным в случае $a = m$ называть фазу $\delta^{c,m}_{\ell,j}(k)$ кулоновско-магнитной, а в случае $a = ms$ — кулоновскомагнитноядерной. Физический смысл фазы $\delta^{c,a}_{\ell,j}(k)$ точнее передает более длинное название — фаза рассеяния, порождаемая взаимодействием V^a в кулоновском поле V^c.

Для качественного и численного исследований энергетической зависимости функций $\delta^{c,a}_{\ell,j}(k)$, $\varepsilon^{c,a}_j(k)$ и вкладов в эти функции от параметров взаимодействия V^a, учитываемого всюду или же только в выбранной области расстояний, наиболее удобным из всех известных подходов представляется физически прозрачный метод фазовых функций [10]. В этом методе фазы $\delta^{c,a}_{\ell,j}(k)$, $\ell = j, j \pm 1$, и параметр смешивания $\varepsilon^{c,a}_j(k)$, порожденные взаимодействием V^a в кулоновском поле V^c, определяются выражениями

$$\delta^{c,a}_{\ell,j}(k) \equiv \lim_{r\to\infty} \delta^{c,s}_{\ell,j}(r;k), \quad \varepsilon^{c,a}_j(k) \equiv \lim_{r\to\infty} \varepsilon^{c,a}_j(r;k)$$

как пределы соответствующих фазовых функций $\delta^{c,s}_{\ell,j}(r;k)$ и $\varepsilon^{c,a}_j(r;k)$, равных нулю при $r = 0$, а при любом $r = b$ являющихся фазой и параметром смешивания, порожденными тем же, но обрезанным в точке $r = b$ взаимодействием $V^a(r)$. Фазовые функции подчиняются довольно простым с вычислительной точки зрения уравнениям [10]:

$$\begin{aligned}
&\partial_r \delta^{c,a}_{\ell,j} = -k^{-1}\sec(2\varepsilon^{c,a}_j)\Big\{V^a_{\ell,\ell}\big(P^2_\ell \cos^4 \varepsilon^{c,a}_j - \\
&- Q^2_\ell \sin^4 \varepsilon^{c,a}_j\big) - V^a_{n,n}\sin^2(2\varepsilon^{c,a}_j)\frac{P^2_n - Q^2_n}{4} - \\
&- V^a_{\ell,n}\sin(2\varepsilon^{c,a}_j)\Big[P_\ell Q_n \cos^2 \varepsilon^{c,a}_j - P_n Q_\ell \sin^2 \varepsilon^{c,a}_j\Big]\Big\}, \\
&\partial_r \varepsilon^{c,a}_j = -k^{-1}\Big\{V^a_{\ell,n}\big(P_\ell P_n \cos^2 \varepsilon^{c,a}_j + \\
&+ Q_\ell Q_n \sin^2 \varepsilon^{c,a}_j\big) - \frac{1}{2}\sin(2\varepsilon^{c,a}_j) \sum_{n=j\pm1} V^a_{n,n} P_n Q_n\Big\}.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Здесь $\ell, n = j \pm 1$ и $\ell \ne n$ — для смешанных состояний, $\ell = n = j$, $\varepsilon^{c,a}_j \equiv 0$ — для чистых,

$$P_\ell \equiv F_\ell \cos \delta^{c,a}_{\ell,j} + G_\ell \sin \delta^{c,a}_{\ell,j} \,,$$

$$Q_\ell \equiv F_\ell \sin \delta^{c,a}_{\ell,j} - G_\ell \cos \delta^{c,a}_{\ell,j} \,,$$

$F_\ell(\rho,\eta)$ и $G_\ell(\rho,\eta)$ — кулоновские функции [24] безразмерного аргумента $\rho \equiv kr$ и параметра Зоммерфельда $\eta \equiv 1/kR$, $V^a_{\ell,n}$ — матричные элементы взаимодействия V^a в базисе векторных сферических функций. Например, для взаимодействия (5)

$$\begin{aligned}
&V^{mt}_{\ell,\ell}(r) = 2b_t r^{-3}\left\{\delta_{\ell,j} - \frac{\ell\delta_{\ell,j-1} + (\ell+1)\delta_{\ell,j+1}}{2j+1}\right\}, \\
&V^{mt}_{\ell,n}(r) = b_t\, r^{-3}\,\frac{\sqrt{6j(j+1)}}{2j+1}, \quad \ell \ne n,
\end{aligned} \qquad (10)$$

а для взаимодействия (6) $V_{\ell,n} \equiv 0$ при $\ell \neq n$ и

$$V^{m\ell s}_{\ell,\ell}(r) = b_{\ell s} r^{-3} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1) \right], \quad j = \ell, \ell \pm s, \; s = 1. \tag{11}$$

Предлагаемый способ исследования влияния магнитных взаимодействий на энергетическую зависимость фаз $\delta^{c,a}_{\ell,j}$, $a = m, ms$, предельно прост и заключается в общедоступном сравнении графиков фаз, вычисленных при разных энергиях в трех теоретически возможных случаях $a = s, m, ms$.

Перед обсуждением численных результатов попытаемся предсказать основные особенности поведения фаз $\delta^{c,a}_{\ell,j}$. С этой целью рассмотрим первую итерацию уравнений (9), которая реализуется подстановкой $\delta^{c,a}_{\ell,j} \equiv 0$, $\varepsilon^{c,a}_{j} \equiv 0$ в правые части этих уравнений и для ожидаемых приближений $\tilde{\delta}^{c,ms}_{\ell,j}$ фаз $\delta^{c,ms}_{\ell,j}$ дает представление в виде суммы борновских фаз $\tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}$ и $\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}$:

$$\delta^{c,ms}_{\ell,j}(k) \approx \tilde{\delta}^{c,ms}_{\ell,j}(k) \equiv \tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}(k) + \tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}(k), \quad \tilde{\delta}^{c,a}_{\ell,j}(k) \equiv -k^{-1} \int\limits_{b}^{\infty} dr\, V^{a}_{\ell,\ell}(r)\, F^2_\ell(\rho,\eta)\,, \tag{12}$$

где $a = s$ или $a = m$, $b = 0$, а для вычисления интегралов удобно сначала перейти к безразмерным переменным $x \equiv r/R$ и $q \equiv kR$. Как известно [25], при любом ℓ и $E \to 0$ борновская кулоновскоядерная фаза убывает очень быстро:

$$\tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}(k) \sim (kR)^{2\ell+1} \exp(-\pi\eta)\,, \tag{13}$$

а борновская кулоновскомагнитная фаза — гораздо медленнее:

$$\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}(k) = -V^{m}_{\ell,\ell}(r)\, r^3 \frac{2\ell+1-2\eta\chi_\ell(\eta)}{2\ell(\ell+1)(2\ell+1)}(1+o(1)), \quad \chi_\ell(\eta) \equiv \frac{\pi}{2} - \operatorname{Im}\psi(\ell+1+i\eta)\,, \quad \psi \equiv \frac{\Gamma'}{\Gamma}. \tag{14}$$

Действительно,

$$\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}(k) = -\frac{k^3}{3R^2} V^{m}_{\ell,\ell}(r)\, r^3 (1+o(1)), \tag{15}$$

если $\eta \ll \ell$, что справедливо при

$$E \ll \frac{1}{2\ell^2} \frac{m_e}{m_p} \,\mathrm{Ry} \approx 12.5\, \ell^{-2}\, \text{кэВ}.$$

Приближение, более точное чем (14), можно получить из теории возмущений [8].

Из-за радикально разного убывания борновских фаз (13)–(15) при достаточно низких энергиях имеем

$$|\tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}(k)| \ll |\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}(k)|, \quad \tilde{\delta}^{c,ms}_{\ell,j}(k) \approx \tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}(k),$$

$$E < E^{lower}_{\ell,j}.$$

Поэтому при таких энергиях можно пренебречь ядерным взаимодействием, но следует учитывать магнитное взаимодействие. В области достаточно больших энергий, где $|V^m| \ll E$, должны выполняться обратные соотношения:

$$|\tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}(k)| \gg |\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}(k)|, \quad \tilde{\delta}^{c,ms}_{\ell,j}(k) \approx \tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}(k),$$

$$E > E^{upper}_{\ell,j},$$

поэтому можно пренебречь магнитным взаимодействием, но учитывать ядерное. В промежуточной области $E^{lower}_{\ell,j} < E < E^{upper}_{\ell,j}$ модули фаз $\tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}$ и $\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}$ сравнимы по порядку величины, происходит интерференция рассеяния ядерным и магнитным взаимодействиями, и для ее описания необходимо учитывать оба эти взаимодействия. Если в этой области фазы $\tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}$ и $\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}$ имеют разные знаки, то при некоторой энергии их сумма $\tilde{\delta}^{c,ms}_{\ell,j}$ обращается в нуль.

Итак, если предположить, что приближения точных фаз $\delta^{c,ms}_{\ell,j}$ фазами $\tilde{\delta}^{c,ms}_{\ell,j}$, определенными формулами (12), приемлемо, то следует ожидать две особенности поведения фаз $\delta^{c,ms}_{\ell,j}$: медленное убывание ($\delta^{c,ms}_{\ell,j} \sim \delta^{c,m}_{\ell,j} \sim k^3$) в пределе $E \to 0$ при всех ℓ и j и смену знака при некоторой ненулевой энергии, но только в том случае, когда фазы $\tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}$ и $\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}$ имеют разные знаки.

Следующая особенность порождается зависимостью матричных элементов (10) и (11) магнитных взаимодействий (5) и (6) только от величины j и поэтому должна проявиться в любых приближенных и точных расчетах фаз. Матричные элементы $V^{m\ell s}_{\ell,n}$ с $\ell \neq n$ возрастают с увеличением j, а элементы $V^{m\ell s}_{\ell,\ell}$ и все элементы $V^{mt}_{\ell,n}$ остаются ограниченными. Поэтому следует ожидать, что с ростом j вклад взаимодействия V^{mt} в фазы $\delta^{c,a}_{\ell,\ell\pm1}$, $a = ms$, будет убывать как $1/j$, а вклады от этих взаимодействий в фазы $\delta^{c,a}_{\ell,\ell}$, $a = m, ms$, останутся одинаковыми по порядку величины.

Метод фазовых функций позволяет качественно обосновать физически более правдоподобное, чем представление (12), приближение

$$\delta^{c,ms}_{\ell,j}(k) \approx \delta^{c,s}_{\ell,j}(k) + \tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}(k). \tag{16}$$

С этой целью положим $a = ms$. Интегрируя уравнения (9) на отрезке $r \leq r^s$, где $V^{ms} = V^s$, получаем значения кулоновскоядерных фаз $\delta^{c,s}_{\ell,j}(k) \approx \approx \delta^{c,s}_{\ell,j}(r^s; k)$ как значения соответствующих фазовых функций в точке r^s. Эти значения используем в качестве граничных для исследования уравнений (9) в области $r \geq r^s$, где $V^{ms} \approx V^m$. Первая итерация таких уравнений дает представление в виде суммы (16), а последующие итерации порождают дополнительные слагаемые, причем каждое n-е слагаемое ($n = 2, 3, \dots$) убывает при $E \to 0$ быстрее предыдущего, а именно, как $(\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}(k))^n$. Поэтому при низких энергиях исследуемое представление (16) является приближением, содержащим в качестве слагаемого точную кулоновскоядерную фазу. Остается найти ее асимптотику при $E \to 0$.

Начнем со вспомогательных формул. Сначала из функции Кулона G_ℓ выделим целую функцию Θ_ℓ параметра q^2. Для этого перепишем формулу Ламберта ((3.25) из [26]) в виде

$$G_\ell(\rho,\eta) = \tilde{G}_\ell(\rho,\eta) + h^c(q)\, F_\ell(\rho,\eta), \quad \tilde{G}_\ell(\rho,\eta) \equiv \frac{\Theta_\ell(x,q)}{C_\ell(q)}, \tag{17}$$

где $C_\ell(q)$ и $h^c(q)$ выражаются через известные функции [24] $C_\ell(\eta)$ и $h(\eta)$:

$$C_\ell(q) \equiv \Gamma(2\ell+2)\, q^\ell\, C_\ell(\eta) = (2q)^\ell \exp\left(-\frac{\pi\eta}{2}\right) |\Gamma(\ell+1+i\eta)|,$$

$$h^c(q) \equiv \frac{h(\eta)}{qC_0^2(q)}, \quad h(\eta) \equiv \operatorname{Re}\psi(i\eta) - \ln\eta.$$

Теперь модифицируем известные разложения Бесселя–Клиффорда (см. формулы (14.4.1)–(14.4.4) в [24]), содержащие полиномы $b_n(\eta)$ параметра k^2 и модифицированные функции Бесселя $I_n(z)$ и $K_n(z)$ переменной $z \equiv 2x^{1/2}$. Объединив в этих разложениях слагаемые с одинаковыми степенями параметра k^2, получаем требуемое представление:

$$F_\ell(\rho,\eta) = qC_\ell(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\, f_{\ell n}(x), \quad \tilde{G}_\ell(\rho,\eta) = C_\ell^{-1}(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\, g_{\ell n}(x). \tag{18}$$

Здесь

$$\left\{ \begin{array}{c} 2\, f_{\ell n}(x) \\ (2l+1)\, g_{\ell n}(x) \end{array} \right\} \equiv 2^{-2n} \sum_{m=2n}^{3n} a_{nm}\, z^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} I_{2\ell+m+1}(z) \\ (-1)^{-m} K_{2\ell+m+1}(z) \end{array} \right\},$$

а энергонезависимые коэффициенты a_{nm} подчинены рекуррентным цепочкам ($m = 2n, \dots, 3n$ для каждого $n = 1, 2, \dots$) уравнений

$$2m\, a_{nm} + 2(2\ell+m)\, a_{n-1,m-2} + a_{n-1,m-3} = 0,$$

причем $a_{00} \equiv 1$ и $a_{nm} \equiv 0$, если $n > 0$ и $m < 2n$ или $m > 3n$.

Далее в уравнениях (9) перейдем сначала к тангенсам фазовых функций. Затем тангенсы заменим искомыми рядами:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\delta^{c,s}_{\ell,j}(r;k) &= -qC_\ell^2(q) \times \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\, A_{\ell,j,n}(x;h^c), \\ \operatorname{tg}\varepsilon^{c,s}_{j}(r;k) &= -qC_{j-1}(q)C_{j+1}(q) \times \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}\, B_{j,n}(x;h^c), \\ A_{\ell,j,0}(x;h^c) &= A_{\ell,j}(x)\left[1+h^c qC_\ell^2 A_{\ell,j}(x)\right]^{-1}, \\ B_{j,0}(x;h^c) &= B_j(x)\left[1+h^c qC_{j-1}(q)C_{j+1}(q) \times B_j(x)\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{19}$$

а функции Кулона представим, используя формулы (17) и (18), в виде рядов, в которых аргумент x отделен от параметра q. Наконец, положив $q \to 0$, получим энергонезависимые уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_x A_{\ell,j} &= R^2 \Big\{ V^s_{\ell,\ell}\,[f_\ell - A_{\ell,j}g_\ell]^2 + V^s_{n,n}B_j^2 g_n^2 - 2B_j V^s_{\ell,n}\,[f_\ell - A_{\ell,j}g_\ell]\, g_n \Big\}, \\ \partial_x B_j &= R^2 V^s_{\ell,n}\big[(f_\ell - A_{\ell,j}g_\ell)(f_n - A_{n,j}g_n) + B_j^2 g_\ell g_n\big] - R^2 B_j \sum_{n=j\pm1} V^s_{n,n}\,(f_n - A_{n,j}g_n)\, g_n, \end{aligned} \tag{20}$$

где, как и в исходных уравнениях (9), $\ell, n = j \pm 1$ и $\ell \neq n$ для смешанных состояний и $\ell = n = j$, $B_j \equiv 0$ для чистых. В силу (19) искомые решения полученных уравнений (20) равны нулю при $x = 0$, а благодаря экспоненциальному убыванию ядерного взаимодействия всюду ограничены. Поэтому в (19) можно перейти к пределу $r \to \infty$ и получить искомые асимптотики:

$$\delta^{c,s}_{\ell,j}(k) \approx -\operatorname{arctg}\frac{q\,C_\ell^2(q)\,A^{c,s}_{\ell,j}}{1 + h^c(q)\,q\,C_\ell^2(q)\,A^{c,s}_{\ell,j}}, \quad A^{c,s}_{\ell,j} \equiv \lim_{x\to\infty} A_{\ell,j}(x). \tag{21}$$

Так как их старшие члены отличаются от асимптотик соответствующих борновских фаз (13) лишь числовыми множителями, из доказанного приближения (16) следуют те же особенности поведения фаз $\delta^{c,ms}_{\ell,j}$, что и из предполагаемого борновского приближения (12).

Формулу (16) предлагается использовать для экстраполяции фаз $\delta^{c,ms}_{\ell,j}$ в область низких энергий.

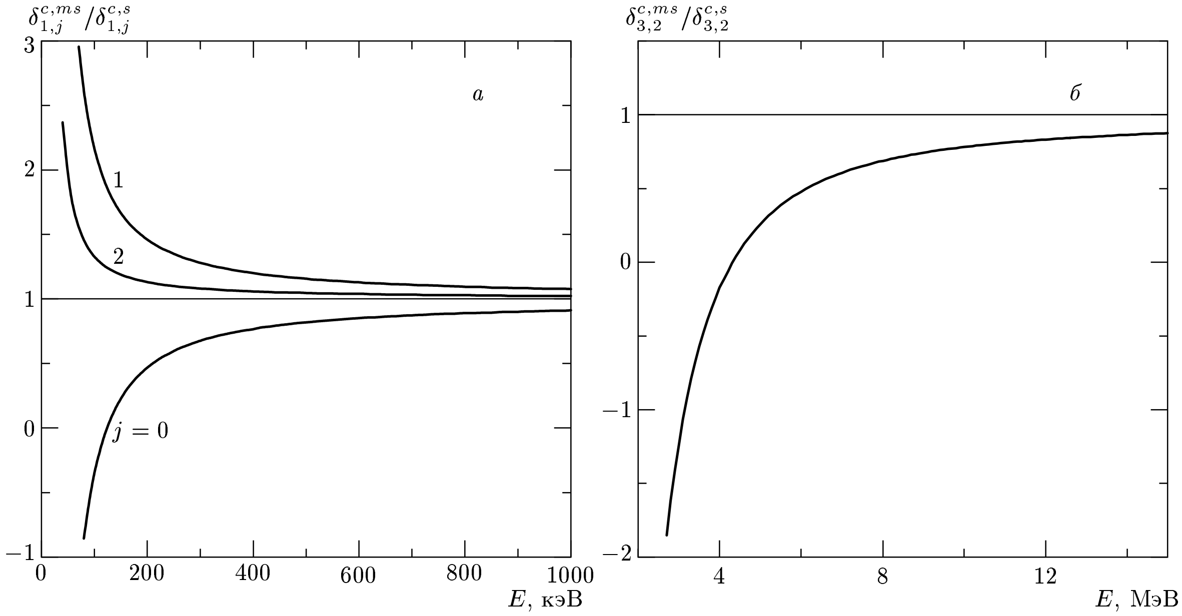

Рис. 1. Отношения фаз $\delta^{c,ms}_{\ell,j}/\delta^{c,s}_{\ell,j}$: a — $\ell=1$, $j=0,1,2$; $б$ — $\ell=3$, $j=2$

Эта формула достаточно проста: ее второе слагаемое $\tilde{\delta}^{c,m}_{\ell,j}$ выражается через известные функции с помощью равенства (14), а первое слагаемое $\delta^{c,s}_{\ell,j}$ можно аппроксимировать асимптотикой (21) с коэффициентом $A^{c,s}_{\ell,j}$, который несложно вычислить как предел при $x\to\infty$ функции $A_{\ell,j}(x)$, подчиненной уравнениям (20). Теперь, чтобы убедиться в том, что предлагаемая экстраполяционная формула достаточно точна, обсудим результаты численного анализа фаз.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Обсуждаемые в настоящем разделе результаты получены численным интегрированием дифференциальных уравнений, выведенных из уравнений (9) с помощью замены размерных переменных r и k на безразмерные $x\equiv r/R$ и $q\equiv kR$. В качестве фаз использовались воспроизводящие их с пятизначной точностью значения соответствующих фазовых функций при достаточно большом $x=10^2$ в случае $a=s$ и $x=10^6$ в случаях $a=m$ и $a=ms$. За коэффициенты $A^{c,s}_{\ell,j}$ асимптотик (21) принимались значения решений $A^{c,s}_{\ell,j}(x)$ уравнений (20) в точке $x=10^2$, что обеспечивало ту же пятизначную точность.

Вычисленные таким образом точные фазы сравнивались с приближенными фазами, найденными по соответствующим исследуемому случаю $a=m,s$ и $a=ms$ формулам (14), (21) или (16). Было установлено, что при энергиях ниже 15 МэВ относительная точность всех этих приближений для $j=0,1,2$ не хуже, чем 0.001.

Вычисленные значения коэффициентов $A^{c,s}_{\ell,j}$ приведем в виде произведений

$$A^{c,s}_{1,0}\approx -26.743\,d_1,\quad A^{c,s}_{1,1}\approx 15.116\,d_1,$$

$$A^{c,s}_{1,2}\approx -8.739\,d_1,\quad A^{c,s}_{3,2}\approx -39205\,d_3$$

с сомножителями $d_1\equiv(3!)^{-2}R^{-3}$ и $d_3=(7!)^{-2}R^{-7}$.

Отметим, что замена фаз $\delta^{c,s}_{\ell,j}$ соответствующими борновскими интегралами (12) неприемлема, поскольку значение отношения $|\delta^{c,s}_{\ell,j}/\tilde{\delta}^{c,s}_{\ell,j}|$ колеблется от 0.2 до 1.5 при изменении энергии на интервале $(0,15)$ МэВ. Поэтому представление (12) не является аппроксимацией, хотя и описывает все качественные особенности поведения фаз $\delta^{c,ms}_{\ell,j}$.

Представленные на рис. 1 и 2 графики получены численным интегрированием уравнений (9) и в масштабе этих рисунков не отличаются от графиков, построенных по приближенным формулам (14), (16) или (21).

На рис. 1 изображены графики отношений

$$\frac{\delta^{c,ms}_{\ell,j}(k)}{\delta^{c,s}_{\ell,j}(k)},\quad \ell=1,\quad j=0,1,2;\quad \ell=3,\quad j=2.$$

На рис. 1a видно, что при $\ell=1$ такие отношения заметно отличаются от единицы в области довольно низких энергий ($E<E^{upper}_{1,j}\approx 1$ МэВ). Следовательно, в этой области для корректного описания

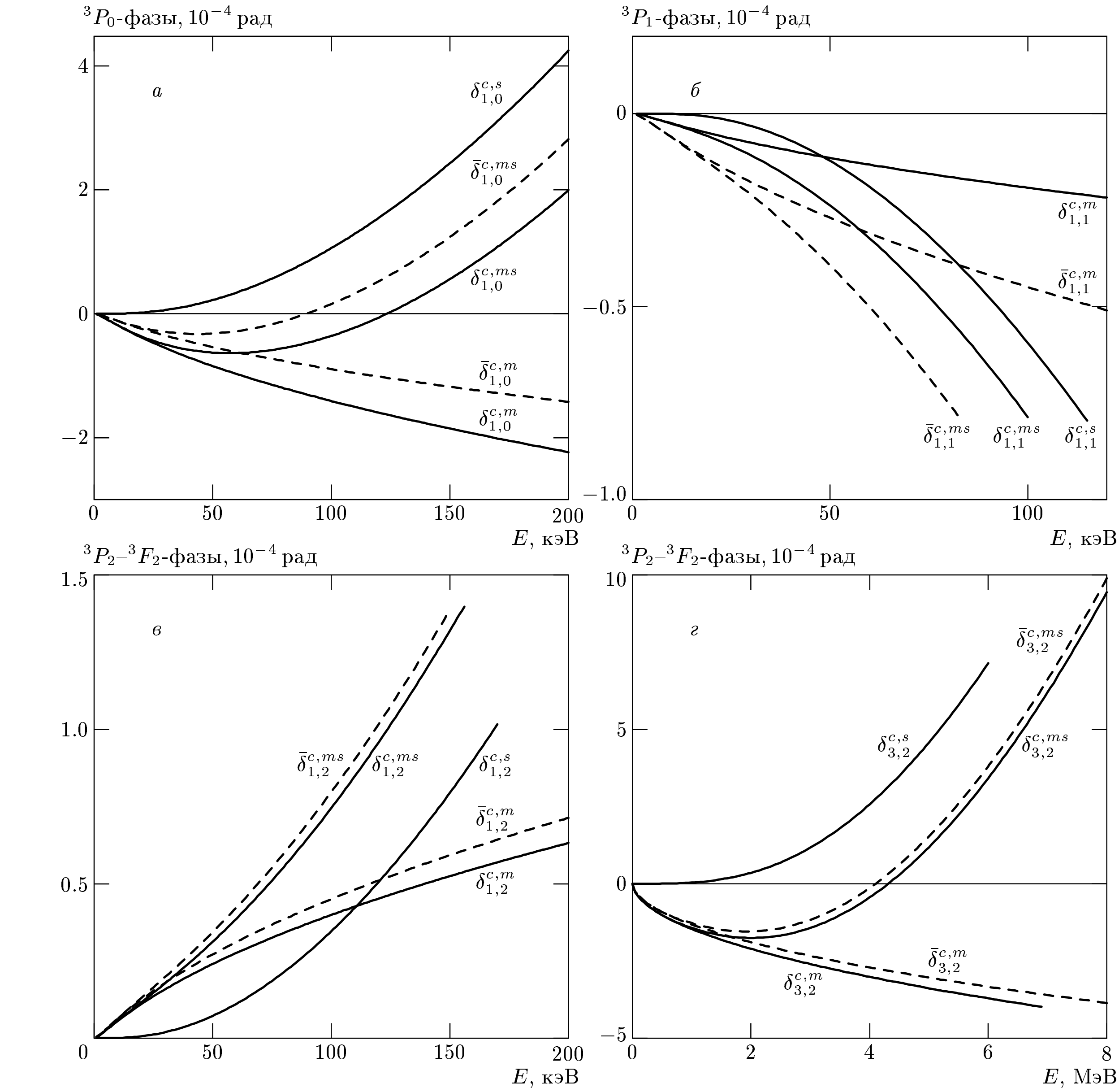

Рис. 2. Сплошные кривые — фазы $\delta^{c,a}_{\ell,j}$, $a = s, m, ms$; штриховые — фазы $\bar\delta^{c,a}_{\ell,j}$, $a = m, ms$

^3P_j-фаз с $j = 0, 1$ и $^3P_2$–$^3F_2$-фазы с $\ell = 1$ необходимо учитывать магнитное взаимодействие V^m, а в области больших энергий ($E > E^{upper}_{1,j}$) им можно пренебречь по сравнению с ядерным взаимодействием V^s. Согласно рис. 1*б* для корректного описания фазы $\delta^{c,ms}_{\ell,2}$, $\ell = 3$, следует учитывать магнитное взаимодействие V^m в области энергий от нуля до значения $E = E^{upper}_{3,2} \approx 15$ МэВ на порядок большего, чем в предыдущем случае $\ell = 1$.

На рис. 2 сплошными кривыми изображены графики фаз $\delta^{c,a}_{\ell,j}$, $a = s, m, ms$, а штриховыми кривыми нанесены графики фаз $\bar\delta^{c,a}_{\ell,j}$, $a = m, ms$, вычисленные в присутствии ($b_t = 0$) взаимодействия (5), но в отсутствие взаимодействия (6). Из рис. 2*а*–*в* видно, что

$$\delta^{c,ms}_{1,j}(k) \approx \delta^{c,m}_{1,j}(k) \gg \delta^{c,s}_{1,j}(k), \quad j = 0, 1, 2,$$

$$E < E^{lower}_{1,j} \approx 20\,\text{кэВ}.$$

Значит, в области достаточно низких энергий ($E < 20$ кэВ) вклады ядерного взаимодействия V^s в фазы $\delta^{c,ms}_{1,j}$, $j = 0, 1, 2$, пренебрежимо малы. Согласно рис. 2*г*, вклад от V^s в фазу $\delta^{c,ms}_{3,2}$

остается пренебрежимо малым вплоть до энергии $E = E^{lower}_{3,2} \approx 2$ МэВ.

Далее, фазы $\delta^{c,s}_{1,0}$ и $\delta^{c,m}_{1,0}$, изображенные на рис. 2*а*, имеют разные знаки, и в результате интерференции рассеяния на ядерном и сумме двух магнитных взаимодействий (5) и (6) фаза $\delta^{c,ms}_{1,0}$ меняет знак при $E \approx 120$ кэВ. Согласно рис. 2*а*, при $E < 200$ кэВ фазы $\bar{\delta}^{c,a}_{1,0}$, $a = m, ms$ заметно отличаются от соответствующих фаз $\delta^{c,a}_{1,0}$. Значит, оба магнитных взаимодействия (5) и (6) оказывают сравнимое по порядку величины влияние на формирование кулоновскомагнитноядерной $^3P_0$-фазы $\delta^{c,ms}_{1,0}$, и поэтому ни одним из этих взаимодействий нельзя пренебречь по сравнению с другим. Согласно рис. 2*б*, аналогичный вывод справедлив и для $^3P_1$-фазы $\delta^{c,ms}_{1,j}$ но, как следует из рис. 2*в*,*г*, при расчете $^3P_2$–$^3F_2$-фаз $\delta^{c,ms}_{\ell,2}$ с $\ell = 2 \pm 1$, тензорное магнитное взаимодействие (5) можно не учитывать. Наконец, как показано на рис. 2*г*, фаза $\delta^{c,ms}_{3,2}$ имеет нуль при $E \approx 4$ МэВ.

Завершим настоящий раздел следующими выводами: формула (16) позволяет с относительной точностью 0.001 экстраполировать фазы $\delta^{c,ms}_{\ell,j}$ с $j = 0, 1, 2$ в область энергий $E < 15$ МэВ, все особенности энергетической зависимости фаз, предсказанные в разд. 3 аналитически, подтверждены вычислениями.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем основные выводы выполненного анализа триплетных фаз *pp*-рассеяния. Взаимодействия магнитного момента протона с кулоновским полем и магнитным моментом другого протона оказывают существенное влияние на поведение триплетных фаз при энергиях ниже нескольких мегаэлектронвольт. Благодаря этим взаимодействиям в пределе нулевой энергии столкновения все триплетные фазы должны быть пропорциональными кубу импульса столкновения, а $^3P_0$-фаза и $^3P_2$–$^3F_2$-фаза с $\ell = 3$ должны менять знак при энергии $E \approx 120$ кэВ и, соответственно, при $E \approx 4$ МэВ. Все указанные особенности энергетической зависимости фаз с хорошей точностью описываются простой и модельно независимой относительно выбора какого-либо ядерного взаимодействия из всех фазовоэквивалентных взаимодействий экстраполяционной формулой (16). Ее слагаемые, кулоновскомагнитную и кулоновскоядерную фазы, нетрудно найти с хорошей при $E < 15$ МэВ точностью по формулам (14) и (21). Для вычисления с высокой точностью коэффициентов $A^{c,s}_{\ell,j}$ и $B^{c,s}_{j}$ старших слагаемых низкоэнергетических представлений кулоновскоядерных фаз и параметров смешивания предлагается использовать выведенные энергонезависимые уравнения (20). Полный анализ этих уравнений представляется важным для расширения теории возмущений [8] и метода фазовых функций [10] на случай суперпозиции кулоновского взаимодействия и короткодействующих центрального, спин-орбитального и тензорных взаимодействий.

В заключение стоит еще раз отметить, что так как в настоящее время непосредственное экспериментальное исследование триплетного NN-рассеяния в области энергий ниже нескольких МэВ технически невозможно, теоретическое изучение роли электромагнитных добавок к ядерному NN-взаимодействию в этой области остается интересным и актуальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. V. Pupyshev and O. P. Solovtsova, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 2713 (1992).
2. В. В. Пупышев, О. П. Соловцова, ЭЧАЯ **27**, 859 (1996).
3. V. V. Pupyshev, O. P. Solovtsova, in *Cont. to the Int. Conf. Mesons and Nuclei at Intermediate Energies*, ed. by M. Kh. Khankhasaev and Zh. B. Kurmanov, JINR, Dubna (1994), p. 84.
4. V. V. Pupyshev and O. P. Solovtsova, Phys. Lett. B **354**, 1 (1995).
5. В. В. Пупышев, О. П. Соловцова, ЯФ **59**, 1807 (1996).
6. В. В. Пупышев, ЭЧАЯ **28**, 1457 (1997).
7. V. V. Pupyshev and S. A. Rakityansky, Z. Phys. A **348**, 227 (1994).
8. V. V. Pupyshev, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 3305 (1995).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1974).
10. В. В. Бабиков, *Метод фазовых функций в квантовой механике*, Наука, Москва (1976).
11. В. И. Гольданский, О. А. Карпухин, А. В. Куценко, В. В. Павловская, ЖЭТФ **38**, 1695 (1960).
12. В. А. Петрунькин, ЭЧАЯ **12**, 692 (1981).
13. W. A. Barker and F.N. Glover, Phys. Rev. **99**, 317 (1955).

14. Дж. Е. Браун, А. Д. Джексон, *Нуклон-нуклонные взаимодействия*, Атомиздат, Москва (1979).

15. C. Ramzauer and R. Kollath, Ann. Phys. **3**, 54 (1929).

16. J. Z. Holtsmark, Phys. Bd. **66**, 49 (1930).

17. V. G. J. Stoks and J. J. de Swart, Phys. Rev. C **42**, 1235 (1990).

18. W. S. Hogan and R. G. Seyler, Phys. Rev. C **1**, 17 (1970).

19. G. Breit and H. M. Ruppel, Phys. Rev. **127**, 2123 (1962).

20. L. D. Knutson and D. Chiang, Phys. Rev. C **18**, 1958 (1978).

21. H. P. Stapp, T. J. Ypsilantis, and M. Metropolis, Phys. Rev. **105**, 302 (1957).

22. Jr. R. V. Reid, Ann. Phys. **50**, 411 (1968).

23. M. Aguilar-Benitez, R. L. Grawford, R. Frosch et al., Phys. Lett. B **111**, 1 (1982).

24. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).

25. R. O. Berger and L. Spruch, Phys. Rev. **138**, B1106 (1965).

26. E. Lambert, Helv. Phys. Acta **42**, 667 (1969).