ЖЭТФ, 2003, том 124, вып. 6 (12), стр. 1264–1270

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ДЖЕЙНСА–КАММИНГСА И КВАНТОВАЯ ВЕРСИЯ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

А. Я. Казаков [*]

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 28 апреля 2003 г.

Обсуждается динамика набора двухуровневых атомов, взаимодействующих одновременно с классическими и квантованной модами, причем с классическими полями взаимодействует как атом, так и резонатор. Обсуждается возможность реализации на основе такой физической системы квантового компьютера для решения задачи об упаковке рюкзака.

PACS: 03.67.Lx, 42.50.Fx

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние 20 лет активно исследуются возможности квантовых компьютеров и квантовых алгоритмов для решения сложных вычислительных задач (см., например, [1–3]). В большинстве теоретических работ эти проблемы рассматриваются в терминах идеализированных преобразований наборов кубитов, не затрагивая вопросы физической реализации того или иного вычислительного алгоритма. В данной работе мы обсудим конкретную физическую систему, которая в силу своих внутренних свойств может рассматриваться как реализация идеи Фейнмана о создании аналоговых квантовых компьютеров [4]. Следуя предложению Фейнмана, можно обсуждать физические системы, сама эволюция которых в определенном смысле сопровождается решением некоторых математических задач, причем надлежащее измерение физических характеристик приводит к получению результатов «вычислений». Здесь в качестве такой физической системы мы предполагаем рассмотреть модифицированную двухфотонную систему Джейнса–Каммингса (doubly driven two-photon Jaynes–Cummings system) и ее связь с NP-полной задачей об упаковке рюкзака [5].

В серии предыдущих работ [6–11] мы обсуждали двух- (трех-) уровневые атомы, взаимодействующие одновременно с классическими и квантованными модами излучения. Для описания таких систем обычно используются модели Джейнса–Каммингса [12], соответствующим образом модифицированные. В этих работах описаны неклассические свойства генерируемого в квантованной моде излучения, а также кооперативные эффекты, возникающие при взаимодействии N идентичных атомов с полями. В частности, была обнаружена возможность экспоненциального сверхизлучения в случае двухфотонного взаимодействия квантованного поля с атомами. Как следует из результатов работы [10], этот эффект является следствием «экспоненциального ресурса» — экспоненциального роста размерности пространства состояний при увеличении N. Хорошо известно, что именно использование этого ресурса лежит в основе квантовых вычислений.

В данной работе мы обсудим физическую систему, несколько более сложную, чем в работе [10]. А именно, как и в работе [10], мы будем полагать, что атом (или набор из N атомов) одновременно взаимодействует с классическим квазирезонансным полем, а также (в двухфотонном резонансе) с квантованным полем. Кроме того, мы будем считать, что резонатор, в котором возбуждается квантованное поле, взаимодействует еще с одним классическим полем. Мы покажем, что на основе такой физической системы можно «решать» задачу об упаковке рюкзака.

Обсудим вкратце план работы. В следующем разделе мы рассмотрим физическую модель, соответствующую взаимодействию системы «резонатор +

[*] E-mail: a_kazak@mail.ru

атом» с классическими и квантованным полями. При этом мы получим аналитическое описание динамики модели, в том числе вычислим населенность квантованной моды. В разд. 3 на основе этих результатов мы рассмотрим ситуацию с N атомами. Далее, в разд. 4 мы покажем, что можно использовать эту физическую систему для реализации квантовых вычислений при решении задачи о рюкзаке.

2. ОДИНОЧНЫЙ АТОМ

2.1. Описание физической модели

Итак, мы обсуждаем двухуровневый атом, взаимодействующий одновременно с классическим полем (квазирезонансным с атомным переходом) и квантованным полем резонатора (в двухфотонном резонансе). При этом мы полагаем, что резонатор (идеальный) взаимодействует еще с одной классической модой. В работах [10, 11] обсуждалась ситуация, когда только атом взаимодействовал с классическим внешним полем. Исходный гамильтониан для нашей физической системы (doubly driven two-photon Jaynes–Cummings system) в рамках приближения вращающейся волны записывается в виде

$$\mathbf{H} = \omega \mathbf{a}^+\mathbf{a} + \mathrm{diag}\left\{E_2, E_1\right\} + \zeta\left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2\mathbf{J}_- + \mathbf{a}^2\mathbf{J}_+\right] + \\ + \mu\left[\exp\left(i\Omega t\right)\mathbf{J}_- + \exp\left(-i\Omega t\right)\mathbf{J}_+\right] + \\ + iA\left[\mathbf{a}^+\exp\left(-i\omega_c t\right) - \mathbf{a}\exp\left(i\omega_c t\right)\right]. \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{J}_- = \mathbf{J}_+^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

E_k, $k = 1, 2$ — энергии атомных состояний, ζ — константа связи двухфотонного атомного перехода с полем резонатора, μ и Ω — приведенная амплитуда и частота классического поля, взаимодействующего с атомом, A и ω_c — приведенная амплитуда и частота классического поля, взаимодействующего с резонатором, $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}^+$) — операторы уничтожения (рождения) для квантованной моды. Без потери общности можно считать, что $E_2 = -E_1 = \kappa$. Приведенный выше гамильтониан действует в пространстве $M = F \otimes C^2$, где фоковское пространство F соответствует полю резонатора, C^2 соответствует двухуровневому атому. Он отличается от гамильтониана, используемого в работах [9–11], слагаемым, описывающим взаимодействие квантованной моды с когерентной внешней накачкой [13].

Нас интересует решение уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = \mathbf{H}\Psi(t)$$

для волновой функции системы $\Psi(t)$, принимающей значения в пространстве M. Пусть $\mathbf{J}_0 = \mathrm{diag}(1, -1)$. Стандартная подстановка,

$$\Psi(t) = \exp\left[-it\omega\left(\mathbf{a}^+\mathbf{a} + \mathbf{J}_0\right)\right]\Phi(t), \quad (2)$$

исключает оптическую частоту, после чего мы получаем

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = \widetilde{\mathbf{H}}\Phi(t), \quad (3)$$

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \zeta\left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2\mathbf{J}_- + \mathbf{a}^2\mathbf{J}_+\right] + \\ + \begin{pmatrix} \kappa-\omega & \mu\exp\left(2i\nu t\right) \\ \mu\exp\left(-2i\nu t\right) & \omega-\kappa \end{pmatrix} + \\ + iA\left[\mathbf{a}^+\exp\left(i\delta t\right) - \mathbf{a}\exp\left(-i\delta t\right)\right],$$

где $\nu = \omega - \Omega/2$, $\delta = \omega - \omega_c$.

Нам потребуется решение классической задачи, соответствующей взаимодействию атома с классическим полем:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Xi(t) = \begin{pmatrix} \kappa-\omega & \mu\exp\left(2i\nu t\right) \\ \mu\exp\left(-2i\nu t\right) & \omega-\kappa \end{pmatrix}\Xi(t),$$

$$\Xi(0) = I,$$

где I — единичная матрица. Нетрудно построить это решение в явном виде:

$$\Xi(t) = \exp\left(i\nu t\mathbf{J}_0\right)U\exp\left(-\frac{iRt\mathbf{J}_0}{2}\right)U^{-1},$$

$$U = \begin{pmatrix} \mu & \Delta - R \\ R - \Delta & \mu \end{pmatrix},$$

$$R = \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}, \Delta = \kappa - \frac{\Omega}{2}.$$

2.2. Процедура усреднения и усредненный гамильтониан

Как и в работах [9–11], мы полагаем, что справедливы следующие основные предположения:

$$R_q \ll R_{cl} \ll \Omega, \quad (4)$$

где Ω — оптическая частота, R_{cl} — параметр Раби внешнего классического поля, R_q — эффективный параметр Раби квантованного поля. В рамках этих предположений динамика квантовой системы распадается на «быструю», связанную с взаимодействием с классическими полями, и «медленную», соответствующую взаимодействию «одетых полем атомов» с квантованной модой.

Чтобы расцепить «медленную» и «быструю» части динамики нашей физической системы, используем в уравнении (3) подстановку

$$\Phi(t) = \Xi(t)\varphi(t). \tag{5}$$

Для волновой функции $\varphi(t)$ получаем

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Lambda_1(t)\varphi(t), \tag{6}$$

где

$$\Lambda_1(t) = \zeta\,[\Xi(t)]^{-1}\left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2\mathbf{J}_- + \mathbf{a}^2\mathbf{J}_+\right]\Xi(t) + \\ + iA\left[\mathbf{a}^+\exp(i\delta t) - \mathbf{a}\exp(-i\delta t)\right].$$

Здесь и далее мы полагаем, что параметры A, ζ принимают значения одного порядка величины.

Чтобы построить описание динамики в старшем порядке малости по малому параметру $(A, R_q)/R$, нам следует усреднить уравнение (6). Мы полагаем, что выполнено условие $|A|, |\nu|, |\delta| \ll R$. Именно этот случай мы будем обсуждать в дальнейшем. Другие возможности отделения «медленной» динамики от «быстрой» для систем Джейнса–Каммингса, взаимодействующих с классическим полем, в рамках исследования иных физических задач обсуждались в работах [14–19].

Динамика «медленной» части определяется усредненным гамильтонианом:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \mathbf{H}_{av}\varphi(t),$$

$$\mathbf{H}_{av} = \langle\langle[\Xi(t)]^{-1}\left\{\zeta\left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2\mathbf{J}_- + \mathbf{a}^2\mathbf{J}_+\right]\right\}\Xi(t)\rangle\rangle + \\ + iA\left[\mathbf{a}^+\exp(i\delta t) - \mathbf{a}\exp(-i\delta t)\right],$$

здесь $\langle\langle\ldots\rangle\rangle$ означает, что «быстрые» гармоники опущены. В рамках наших предположений (см. детали в [9, 11]) получаем

$$\mathbf{H}_{av} = \left[\rho\left(\left(\mathbf{a}^+\right)^2\exp(2i\nu t) + \mathbf{a}^2\exp(-2i\nu t)\right)\right]\times \\ \times U\mathbf{J}_0U^{-1} + iA\left[\mathbf{a}^+\exp(i\delta t) - \mathbf{a}\exp(-i\delta t)\right], \tag{7}$$

$$\rho = \frac{\zeta\mu}{2\sqrt{\mu^2+\Delta^2}}.$$

Важным обстоятельством является тот факт, что первое слагаемое в (7) представляет собой произведение матрицы $U\mathbf{J}_0U^{-1}$ и фоковского оператора, второе — чисто фоковский оператор. Векторы

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{D}}\begin{pmatrix}\mu\\ R-\Delta\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{D}}\begin{pmatrix}\Delta-R\\ \mu\end{pmatrix},$$

где $D = \mu^2 + (R-\Delta)^2$ — нормированные собственные векторы матрицы $U\mathbf{J}_0U^{-1}$, ортогональные друг другу, и $\vartheta_k = (-1)^{k+1}$, $k = 1, 2$ — соответствующие собственные числа. Если мы перейдем к разложению в этом базисе в пространстве C^2, гамильтониан (7) распадается на пару одномерных фоковских операторов, которые различаются только знаком. Следовательно, мы можем ограничиться обсуждением начальной задачи для уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \mathbf{H}_{av}^{(1)}\varphi(t), \tag{8}$$

$$\mathbf{H}_{av}^{(1)} = \rho\left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2\exp(2i\nu t) + \mathbf{a}^2\exp(-2i\nu t)\right] + \\ + iA\left[\mathbf{a}^+\exp(i\delta t) - \mathbf{a}\exp(-i\delta t)\right].$$

2.3. Решение начальной задачи

Запишем уравнение Шредингера (8) в представлении Баргманна–Фока. Соответствующая волновая функция представляется аналитической функцией $\eta(z,t)$, $\mathbf{a}^+ \to z$, $\mathbf{a} \to \partial/\partial z$, так что уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$i\eta_t = \rho\left[\exp(2i\nu t)\,z^2\eta + \exp(-2i\nu t)\,\eta_{zz}\right] + \\ + iA\left[z\exp(i\delta t)\,\eta - \exp(-i\delta t)\,\eta_z\right]. \tag{9}$$

Решение начальной задачи для такого уравнения можно записать в явном виде [10, 11]. Мы ограничимся здесь, избегая громоздких деталей, частным случаем, предполагая, что начальное состояние является вакуумным, $\eta(0) = 1$. В этом случае решение уравнения (9) имеет вид

$$\eta(z,t) = \exp\left[\lambda(t) + \xi(t)z + \gamma(t)z^2\right],$$

где

$$\gamma(t) = -\rho\exp(2i\nu t)\,\frac{\chi(t)}{\sigma(t)},$$

$$\sigma(t) = \left(\nu + \sqrt{\nu^2-4\rho^2}\right)\exp\left(it\sqrt{\nu^2-4\rho^2}\right) - \\ - \left(\nu - \sqrt{\nu^2-4\rho^2}\right)\exp\left(-it\sqrt{\nu^2-4\rho^2}\right),$$

$$\chi(t) = \exp\left(it\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right) - \exp\left(-it\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right),$$

$$\xi(t) = \frac{2\exp(i\nu t)\,p(t)}{\sigma(t)},$$

$$p(t) = iA\left\{\frac{\rho\exp\left[i\left(\nu - \delta - \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)t\right]}{\nu - \delta - \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}} + \right.$$
$$+ \frac{\left(\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)\exp\left[i\left(\delta - \nu - \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)t\right]}{2(\delta - \nu - \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2})} -$$
$$- \frac{\rho\exp\left[i\left(\nu - \delta + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)t\right]}{\nu - \delta + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}} -$$
$$- \frac{\left(\nu + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)\exp\left[i\left(\delta - \nu + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)t\right]}{2(\delta - \nu + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2})} -$$
$$\left. - \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\,\frac{(2\nu + \rho) - \delta}{(\nu - \delta)^2 - (\nu^2 - 4\rho^2)}\right\},$$

громоздкое выражение для $\lambda(t)$ мы опускаем. Эти соотношения дают возможность вычислить любую квантово-статистическую характеристику квантованного поля. Нам понадобится описание динамики населенности квантованного поля,

$$n(t) = \frac{4\rho^2\sin^2\left(t\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)}{\nu^2 - 4\rho^2} +$$
$$+ \frac{(1 + 4|\gamma|^2)|\xi|^2 + 4|\gamma|^2\,\mathrm{Re}\left(\xi^2\gamma^{-1}\right)}{\left(1 - 4|\gamma|^2\right)^2}. \quad (10)$$

Отметим здесь следующие обстоятельства. При $A = 0$ (т. е. когда отсутствует классическое поле, взаимодействующее с резонатором) данный результат совпадает с полученным в работе [9]. При $|\nu| < 2|\rho|$ населенность квантованной моды растет экспоненциально. Этот факт приводит (при наличии N атомов) к экспоненциальному сверхизлучению. Будем считать, что выполняется обратное неравенство, $|\nu| > 2|\rho|$. (Напомним, что $\nu = \omega - \Omega/2$, а частота Ω классической моды — легко контролируемый параметр.) В общем случае населенность квантованной моды, описанная соотношением (10), — довольно сложная функция, но общий характер ее поведения описать нетрудно, это ограниченная осциллирующая во времени функция. Однако при выполнении условия

$$\delta = \nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}$$

динамика $n(t)$ имеет качественно другой характер, эта функция квадратично возрастает со временем. Если, например, $\delta = \nu + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}$, то

$$\xi(t) = A\frac{(2\rho + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} - \nu)\exp(i\nu t)}{\sigma(t)}t + \epsilon(t),$$

$$\epsilon(t) = -i\frac{2A\exp(i\nu t)}{\sigma(t)} \times$$
$$\times\left\{\frac{1}{4\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}}\left[2\rho\exp\left(-2it\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right) + \right.\right.$$
$$\left. + \left(\nu + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)\exp\left(2it\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)\right] -$$
$$\left. - \frac{\nu + 2\rho + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}}{4\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}}\right\},$$

причем $\epsilon(t)$ — ограниченная, осциллирующая во времени функция. Соответственно, оставляя только слагаемые с наиболее быстро растущей амплитудой, получаем

$$n(t) \simeq t^2\frac{A^2\left(2\rho + \sqrt{\nu^2 - 4\rho^2} - \nu\right)^2}{4\left(\nu^2 - 4\rho^2\right)^2} \times$$
$$\times\left[\nu^2 - 4\rho^2\cos\left(2t\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 4\rho\nu\sin^2\left(t\sqrt{\nu^2 - 4\rho^2}\right)\right]. \quad (11)$$

Напомним, что параметр $\delta = \omega - \omega_c$, причем ω_c — частота классической моды, взаимодействующей с резонатором. Этот параметр также легко контролируется в эксперименте. Соотношение (11) играет ключевую роль в дальнейшем.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НАБОРА АТОМОВ С КЛАССИЧЕСКИМИ И КВАНТОВАННЫМ ПОЛЯМИ

Обсудим теперь ситуацию, когда набор из N идентичных двухуровневых атомов взаимодействует с классическими полями и квантованным полем резонатора, который, в свою очередь, взаимодействует с классической модой. Мы предполагаем, что с каждым атомом взаимодействует свое классическое поле, параметры которого мы можем фиксировать. Нас интересует динамика населенности квантованной моды. Волновая функция физической системы принимает свои значения в пространстве $M_N = F \otimes \left(C^2\right)^N$, где фоковское пространство F

описывает, как и ранее, состояния квантованной моды и N копий C^2 описывают состояния атомов. Положим $\mathbf{J}_0^{(m)}, \mathbf{J}_\pm^{(m)}$, $U^{(m)}$ и $\Xi^{(m)}(t)$ операторами, действующими на m-ю векторную компоненту волновой функции как $\mathbf{J}_0, \mathbf{J}_\pm, U$ и $\Xi(t)$, соответственно, и не влияющими на другие компоненты. Динамика такой системы определяется гамильтонианом, который представляет собой естественную модификацию гамильтониана (1) и в рамках приближения вращающейся волны записывается как

$$\mathbf{H}_N = \omega \mathbf{a}^+\mathbf{a} + \sum_{m=1}^{N} \left\{ \kappa \mathbf{J}_0^{(m)} + \zeta \left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2 \mathbf{J}_-^{(m)} + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+^{(m)} \right] \right\} + \sum_{m=1}^{N} \left[\mu_m \left(\exp(i\Omega t)\, \mathbf{J}_-^{(m)} + \exp(-i\Omega t)\, \mathbf{J}_+^{(m)} \right) \right] + iA\left[\mathbf{a}^+ \exp(-i\omega_c t) - \mathbf{a}\exp(i\omega_c t)\right].$$

Здесь μ_m, Ω — приведенная амплитуда и частота классической компоненты, взаимодействующей с m-м атомом. Нас интересует решение начальной задачи для соответствующего уравнения Шредингера.

Отделяя оптическую частоту с помощью аналога соотношения (2),

$$\Psi(t) = \exp\left[-it\omega\left(\mathbf{a}^+\mathbf{a} + \sum_{m=1}^{N} \mathbf{J}_0^{(m)}\right)\right]\Phi(t),$$

получаем

$$i\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \tilde{\mathbf{H}}_N \Phi(t),$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_N = \sum_{m=1}^{N} \left\{ (\kappa - \omega)\, \mathbf{J}_0^{(m)} + \zeta \left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2 \mathbf{J}_-^{(m)} + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+^{(m)} \right] + \mu_m \exp(-2i\nu t)\, \mathbf{J}_-^{(m)} + \mu_m \exp(2i\nu t)\, \mathbf{J}_+^{(m)} \right\} + iA\left[\mathbf{a}^+ \exp(-i\delta t) - \mathbf{a}\exp(i\delta t)\right].$$

Здесь величины δ, ν имеют тот же смысл, что и ранее.

Матричная функция

$$\Xi_N(t) = \prod_{m=1}^{N} \Xi^{(m)}(t)$$

является решением уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Xi_N(t) = \sum_{m=1}^{N} \left\{ (\kappa - \omega)\, \mathbf{J}_0^{(m)} + \mu_m \exp(-2i\nu t)\, \mathbf{J}_-^{(m)} + \mu_m \exp(2i\nu t)\, \mathbf{J}_+^{(m)} \right\} \Xi_N(t),$$

причем в начальный момент времени она совпадает с единичной матрицей. Подставляя $\Phi(t) = \Xi_N(t)\varphi(t)$, получаем аналог уравнения (6):

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Lambda_N(t)\varphi(t),$$

$$\Lambda_N(t) = \left[\Xi_N(t)\right]^{-1} \times \sum_{m=1}^{N} \zeta \left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2 \mathbf{J}_-^{(m)} + \mathbf{a}^2 \mathbf{J}_+^{(m)} \right] \Xi_N(t) + iA\left[\mathbf{a}^+ \exp(-i\delta t) - \mathbf{a}\exp(i\delta t)\right].$$

Как и ранее, мы усредним это уравнение, отбрасывая «быстрые» осцилляции в предположении, что $|\nu|, |\zeta|, |A| \ll R$. После этого получаем уравнение

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \mathbf{H}_{N,av}\varphi(t),$$

$$\mathbf{H}_{N,av} = \langle\langle \Lambda_N(t) \rangle\rangle = \left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2 \exp(2i\nu t) + \mathbf{a}^2 \exp(-2i\nu t) \right] \times \sum_{m=1}^{N} \rho_m U^{(m)} \mathbf{J}_0^{(m)} \left(U^{(m)}\right)^{-1} + iA\left[\mathbf{a}^+ \exp(-i\delta t) - \mathbf{a}\exp(i\delta t)\right], \quad (12)$$

где ρ_m имеет смысл ρ для m-го атома. Подчеркнем здесь два обстоятельства. Во-первых, параметры ρ_m связаны с приведенными амплитудами μ_m и могут быть заданы экспериментаторами (в определенных пределах, разумеется). Во-вторых, как и ранее, усредненный гамильтониан представляется в виде суммы двух операторов, один из которых чисто фоковский, а второй — произведение чисто фоковского и матричного.

Нетрудно построить собственные векторы матричного оператора, они представимы в виде $|\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \mathbf{e}_{k_N}\rangle$, $k_m = 1, 2$, $m = 1, 2, \ldots, N$. Раскладывая волновую функцию по этому базису, приходим к выражению

$$\varphi(t) = \sum_{\sigma} \eta_\sigma(t) |\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \mathbf{e}_{k_N}\rangle,$$

где функции $\eta_\sigma(t)$ принимают значения в фоковском пространстве, σ обозначает набор из N чисел $k_1, k_2, \ldots, k_N$, каждое из которых равно либо 1, либо 2, сумма берется по всем таким наборам σ. Напомним, что собственные значения каждой отдельной матричной компоненты в (12) равны

$\vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = -1$. С учетом этого для каждой отдельной функции $\eta_\sigma(t)$ имеем

$$i\frac{\partial}{\partial t}\eta_\sigma(t) =$$
$$= S_\sigma\left[\left(\mathbf{a}^+\right)^2\exp\left(2i\nu t\right) + \mathbf{a}^2\exp\left(-2i\nu t\right)\right]\eta_\sigma(t) +$$
$$+ iA\left[\mathbf{a}^+\exp\left(-i\delta t\right) - \mathbf{a}\exp\left(i\delta t\right)\right], \quad (13)$$

где

$$S_\sigma = \sum_{m=1}^{N}\vartheta_{k_m}\rho_m, \quad (14)$$

причем сумма включает те числа k_m, которые образуют набор σ. Решение начальной задачи для уравнения (13) совпадает (после замены $\rho \to S_\sigma$) с решением начальной задачи для уравнения (8).

Будем считать, как и ранее, что в начальный момент времени квантованное поле находится в вакуумном состоянии. Учитывая наши результаты, мы находим населенность квантованной моды:

$$n(t) = \sum_{(\sigma)}|c_\sigma|^2 n_\sigma(t),$$

где c_σ — проекция начального состояния набора атомов на собственный вектор, соответствующий набору σ, и суммирование проходит по всем наборам σ. Если известны значения параметров μ_m для всех m, то специальным приготовлением исходных состояний атомов можно реализовать случай $|c_\sigma| = 2^{-N/2}$ для всех наборов. Отметим, что последняя сумма содержит 2^N слагаемых.

4. ЗАДАЧА ОБ УПАКОВКЕ РЮКЗАКА

Рассмотрим здесь симметричную постановку задачи об упаковке рюкзака, которая эквивалентна стандартной постановке [5]. Пусть заданы N чисел $b_1, b_2, \ldots, b_N$. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ — набор из чисел ± 1, будем обозначать его σ. Вычислим для всех возможных наборов σ соответствующие суммы

$$T_\sigma = \sum_{m=1}^{N}\varepsilon_m b_m. \quad (15)$$

Пусть теперь задано число B, причем $B = T_{\sigma_B}$ для некоторого (единственного) набора σ_B. Задача об упаковке сводится к определению σ_B, т. е. значений всех $\varepsilon_m, m = 1, 2, \ldots, N$, из этого набора. Решение этой задачи методом перебора потребует рассмотрения 2^{N-1} (ввиду симметрии) вариантов, для чего необходимо время, пропорциональное 2^N.

Обсудим теперь связь изложенных выше результатов с задачей об упаковке рюкзака. Исходным фактом здесь является формальное совпадение выражений S_σ и T_σ, соотношений (14) и (15). Для простоты и определенности будем считать, что начальные состояния атомов приготовлены так, что $|c_\sigma| = 2^{-N/2}$ для всех наборов. Как следует из наших результатов, с помощью выбора амплитуд классических компонент μ_m можно менять величины ρ_m в определенных пределах. С помощью надлежащего масштабирования можно для заданного набора чисел b_m подобрать μ_m таким образом, что отношения чисел ρ_m будут соответствовать отношениям чисел b_m. Тогда с учетом масштабирования значения S_σ будут соответствовать значениям T_σ (если отождествить значения ϑ_k и значения $\varepsilon_k, k = 1, 2$). Далее будем считать, что значение ν выбрано так, что $\nu^2 > 4S_\sigma^2$ для всех наборов σ, и выберем δ таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\delta = \nu + \sqrt{\nu^2 - 4S_{\sigma_B}^2}$$

для набора σ_B. Тогда в сумме

$$n(t) = 2^{-N}\sum_{(\sigma)}n_\sigma(t)$$

ровно два слагаемых будут иметь квадратичный рост, остальные будут осциллирующими во времени ограниченными функциями. Одно из этих растущих слагаемых соответствует σ_B, второе — набору с обращенными знаками слагаемых. По истечении времени порядка $2^{N/2}$ этот факт — наличие квадратично возрастающих слагаемых — можно будет зафиксировать, измеряя тем или иным способом населенность квантованной моды.

Обсудим теперь, как можно определить набор σ_B — значения всех ε_m в том случае, когда только один набор σ_B образует заданную сумму. Отметим, что величина S_{σ_B} зависит от μ_m монотонно, и знак этой монотонности связан с величиной ε_m. Будем для определенности считать, что $S_{\sigma_B} > 0$. Увеличим (увеличив μ_m) значение ρ_m для фиксированного m и изменим значение δ на соответствующую величину в предположении, что $\varepsilon_m = 1$. Если при этом будет наблюдаться квадратичный рост населенности $n(t)$, то, действительно, $\varepsilon_m = 1$, в ином случае $\varepsilon_m = -1$. Перебрав все атомы (для этого надо провести N экспериментов), мы определим набор σ_B. Таким образом, для определения набора σ_B потребуется время пропорциональное $N2^{N/2}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы обсудили взаимодействие N атомов с классическими полями (разными для разных атомов) и квантованной модой, которая, в свою очередь, взаимодействует еще с одной классической модой. Было показано, что такую физическую систему можно рассматривать как модель аналогового квантового компьютера, соответствующую задаче об упаковке рюкзака. Как следует из наших рассмотрений, эта возможность возникает из-за использования экспоненциального ресурса — размерность фазового пространства нашей физической системы равна 2^N. При этом время поиска решения задачи об упаковке рюкзака пропорционально $N2^{N/2}$.

Разумеется, описанная физическая система является сильно идеализированной, данная работа имела целью обсудить саму параллель между задачей об упаковке рюкзака и (более-менее) реальной квантовой физической системой в духе предложения Фейнмана [4]. Здесь мы не ставили себе задачу рассмотреть факторы, препятствующие реальному воплощению подобного «квантового компьютера».

ЛИТЕРАТУРА

1. P. W. Shor, SIAM J. Comput. **26**, 1484 (1997).

2. A. Steane, E-print archives, quant-ph/9708022.

3. J. Preskill, E-print archives, quant-ph/9712048.

4. R. P. Feynman, J. Theor. Phys. **21**, 467 (1982).

5. Н. Коблиц, *Курс теории чисел и криптографии*, ТВП, Москва (2001).

6. A. Ya. Kazakov, Quant. Semiclass. Opt. **10**, 753 (1998).

7. Р. А. Исмаилов, А. Я. Казаков, ЖЭТФ **116**, 858 (1999).

8. Р. А. Исмаилов, А. Я. Казаков, ЖЭТФ **118**, 798 (2000).

9. A. Ya. Kazakov, J. Opt. B **3**, 97 (2001).

10. Р. А. Исмаилов, А. Я. Казаков, ЖЭТФ **120**, 1172 (2001).

11. A. Ya. Kazakov, Int. J. Theor. Phys., Groups Theory and Nonl. Opt. **8**, 75 (2002).

12. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).

13. J. P. Clemens and P. R. Rice, Phys. Rev. A **61**, 063810 (2000).

14. C. K. Law and J. H. Eberly, Phys. Rev. A **43**, 6337 (1991).

15. P. Alsing, D.-S. Guo, and H. J. Carmichael, Phys. Rev. A **45**, 5135 (1992).

16. I. V. Jyotsna and G. S. Agarwal, Opt. Comm. **99**, 344 (1993).

17. Y.-T. Chough and H. J. Carmichael, Phys. Rev. A **54**, 1709 (1996).

18. F.-L. Li and S.-Y. Gao, Phys. Rev. A **62**, 043809 (2000).

19. A. Joshi, Phys. Rev. A **62**, 043812 (2000).