

ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЕЙ В НАКЛОННЫХ ТРУБАХ

Н. А. Иногамов^a, А. М. Опарин^{*b}

^a *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

^b *Институт автоматизации проектирования Российской академии наук
123056, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 11 июня 2002 г.

Анализируется сильно нелинейное движение жидкости, ограниченной свободной поверхностью, в вертикальных, наклонных и горизонтальных трубах. Задача о пузырях в вертикальных трубах тесно связана с задачей о неустойчивости Рэлея–Тейлора. Наклонные трубы интенсивно исследуются в связи с проблемами транспортировки газо- и нефтеводных потоков. Построена новая теория движения крупных пузырей в трубах. В отличие от предыдущих подходов, опиравшихся на полуэмпирику или подгоночные расчеты, использованы аналитические методы, относящиеся к теории потенциала и теории функций комплексного переменного. Проведено тщательное сравнение решений в двумерной (2D) и трехмерной (3D) геометриях. Показано, что не всегда повышение размерности пространства сопровождается увеличением скорости движения пузыря. Впервые для исследования течений со свободной границей в наклонных трубах применено прямое численное моделирование, что позволяет с новых позиций подойти к задаче о неустойчивости Рэлея–Тейлора (пузыри с клином и конусом в вершине).

PACS: 47.10.+g, 47.20.-k

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о движении двухфазного потока в трубах часто возникает в приложениях физической гидродинамики. Распространенным является пробковый режим течения, при котором по трубе движутся крупные пузыри, разделенные «пробками» жидкости с малым газосодержанием [1]. Такие течения очень сложны. Удовлетворительной механистической модели пробкового течения пока не создано. Для оценки скорости «дрейфа» легкой фазы относительно двухфазного потока используют значения скорости, полученные путем решения задачи об архимедовом всплывании длинных пузырей. Это один из первых шагов к пониманию физики пробковых режимов. Соответствующим проблемам посвящена обширная литература [1–15].

В данной работе теоретически и численно исследуется подъем удлиненных пузырей в неподвижной жидкости. Мы ограничиваемся случаем больших чисел Рейнольдса (маловязкая жидкость) и

Вебера (трубы, широкие по отношению к капиллярному масштабу). Вертикальный подъем пузырей интенсивно изучается в теории неустойчивости Рэлея–Тейлора (РТН) в связи с приложениями в астрофизике и физике высоких плотностей энергии (см. обзоры [16–18]). Такие пузыри формируются на нелинейной стадии развития РТН.

Сравнивая работы, посвященные двухфазному течению в трубах, и работы, в которых рассматривается РТН, с сожалением можно отметить существование некоторого «барьера» между исследователями, работающими в области гидравлики и в области РТН, хотя изучаемые ими явления аналогичны (сдвиговая турбулентность, гравитационные волны и критерий Ричардсона, бароклиническая генерация завихренности и т. п.).

В настоящей работе для получения аналитического приближенного решения задачи о пузыре в плоской (2D) наклонной трубе использованы функции комплексного переменного и метод годографа скорости. Найдена простая аналитическая зависимость скорости U движения пузыря вдоль трубы с диаметром D от α – угла между осью трубы и го-

*E-mail: a.oparin@icad.org.ru

ризонтом. Ранее использовались либо эмпирические корреляции, полученные из эксперимента [3, 6–9], либо модель с пузырем в виде эллипса [2], либо эмпирическая формула [3]

$$U(\alpha) = U_h \cos \alpha + U_v \sin \alpha,$$

где U_h и U_v — скорости движения пузыря в горизонтальной и вертикальной трубах. В случае круглой цилиндрической трубы имеем $U_h = 0.54\sqrt{gD}$ [19], $U_v = 0.35\sqrt{gD}$ [16, 20–22].

У пузыря в форме эллипса свободная граница в вершине пузыря образует прямой угол со стенкой. Между тем, из полученных результатов следует, что граница и стенка в малой окрестности вершины образуют клин с другим углом раствора. В $2D$ -геометрии угол θ_c между стенкой и границей, охватывающей жидкость, составляет 120° . В $3D$ -случае в наклонной цилиндрической трубе в вершине пузыря касательная плоскость к стенке и средняя вертикальная плоскость образуют прямой угол. Таким образом, локально в малой окрестности вершины трехмерный случай похож на двумерный. Однако в $3D$ -геометрии угол θ_c немного больше 120° . Средняя вертикальная плоскость проходит через ось трубы и вектор ускорения свободного падения \mathbf{g} . В работе [2] проекция поверхности пузыря на среднюю вертикальную плоскость образует эллипс. Соответственно, образующие поверхности пузыря перпендикулярны этой плоскости.

Нами разработана модель, учитывающая реальную форму границы (не эллипс, а клин). Рассчитанная по этой модели форма границы сравнивается с той, которая получается при прямом численном моделировании течения.

Интересной особенностью скорости пузыря $U(\alpha)$ является ее возрастание при отклонении трубы от вертикали, хотя на первый взгляд кажется, что эта скорость должна уменьшаться. Поскольку рассматривается «падение» жидкости, ограниченной свободной поверхностью, внутри трубы, «темп» этого «падения», казалось бы, должен уменьшаться вместе с уменьшением составляющей вектора \mathbf{g} вдоль трубы. Такое необычное поведение зависимости скорости от угла отмечено всеми исследователями, обращавшимися к данной проблеме [2, 3, 6–9].

Разработанная нами модель позволяет дать простую количественную интерпретацию этого явления (возрастания скорости пузыря при отклонении трубы от вертикали). Оказывается, скорость подъема пузыря вдоль стенки зависит от величины проекции вектора \mathbf{g} на направление границы пузыря в окрест-

ности вершины. В свою очередь граница, как было сказано, образует угол $\theta_c > 90^\circ$ со стенкой.

Отсюда следует, во-первых, что зависимость $U(\alpha)$ имеет максимум. Существование максимума отмечено во многих экспериментальных работах [2, 3, 6–9]. Во-вторых, можно получить количественную оценку угла α_{max} , соответствующего максимуму скорости. Отметим, что ранее высказывались качественные соображения [7] о том, что уменьшение гравитационного потенциала вдоль искривленной границы влияет на скорость пузырей.

В работе получены также новые результаты, представляющие интерес для теории РТН. Клиновидный $2D$ -пузырь с углом $\theta_c = 120^\circ$ существует во всем диапазоне углов наклона α . Значит, соответствующее решение сохранится и в пределе $\alpha \rightarrow 90^\circ$ (вертикальный случай). Тогда задача о РТН в $2D$ -геометрии имеет два стационарных решения: одно — с затупленным пузырем, другое — с клиновидным.

Скорость и форма затупленного пузыря ($\theta_c = 90^\circ$) хорошо известны [16–18]:

$$U_{90} = (0.33 - 0.34)\sqrt{gD},$$

а радиус кривизны в вершине

$$R = (0.80 \pm 0.06)D,$$

где D — ширина полосы, в которую помещена симметричная половина пузыря. Удачной является простая оценка

$$\bar{U}_{90} = U_{90}/\sqrt{gD} = (3\pi)^{-1/2}$$

(см. [22], а также [16–18, 23–25]). В настоящей работе впервые теоретически получены согласующиеся с численным экспериментом оценки скорости и формы клиновидного пузыря:

$$\bar{U}_{120} = (2\pi)^{-1/2} \approx 0.40$$

методом годографа,

$$\bar{U}_{120} = 0.42$$

методом силового баланса, а также прямым численным моделированием

$$\bar{U}_{120} = 0.42 \pm 0.02.$$

Предыдущая оценка [26] $\bar{U}_{120} = 0.51$ на 23% превышает значение, полученное нами в численном эксперименте. Различие между точечными решениями

U_{120}/U_{90} по нашим данным составляет 22 %. Сравнение форм пузырей описано ниже.

В теории РТН принципиальным является вопрос, на какой из двух стационарных режимов выходит течение при инициации от гладких начальных данных (какой стационарный режим «захватывает» траектории). В работах [17, 18, 25] высказывается гипотеза о захвате траекторий задачи Коши стационарным режимом 120° . Эта гипотеза основана на результатах как численного моделирования [25], так и аналитических расчетов. А именно, изучается поведение динамической системы, аппроксимирующей развитие неустойчивости от малых возмущений гидростатического равновесия [17, 18, 25, 27] (метод асимптотических коллокаций — МАК). Эта система позволяет проследить развитие неустойчивости до степеней нелинейности, существенно превышающих те, которые достигнуты путем интегрирования нестационарных интегральных уравнений методом быстрого преобразования Фурье [28, 29] и при слабонелинейных разложениях [30–32].

Важно то, что эта же система описывает эволюцию течения возле стационарного режима 90° [23]. Для этого начальная точка должна быть выбрана около этого стационарного режима. Перейти к стационарному режиму 90° от околгидростатических начальных данных с помощью МАК не удастся, поскольку движение вдоль этой траектории обрывается (траектория «упирается» в сингулярность). Как сказано, аппроксимация МАК «работает» возле стационарного режима 90° . Видимо, дело не в том, что метод становится непригодным при больших амплитудах (как при слабонелинейных разложениях или в интегральных уравнениях). Возможно, из этого следует, что аппроксимируемая система стремится к стационарному режиму 120° (в этом состоит упомянутое аналитическое указание). Однако выйти на стационарный режим 120° с помощью МАК невозможно, так как в аппроксимацию МАК «заложено» устройство точки торможения в вершине пузыря (разложение потенциала начинается с квадратичного члена).

Случай со стационарным режимом с углом 90° является весьма интересным. Имеется однопараметрическое ($1d$) семейство фиктивных или формальных стационарных решений и решение в виде точки ($0d$) в этом семействе [17, 18, 23]. Когда мы говорим о стационарном режиме с углом 90° , мы подразумеваем эту $0d$ -точку. Фиктивность стационарных $1d$ -решений (кроме $0d$ -точки) заключается в том, что к ним нельзя подойти в процессе эволюции во времени [17, 18, 23] (даже стартуя из сколь-

угодно малой окрестности любого из стационарных $1d$ -решений).

Представленные в данной работе результаты прямого численного моделирования показывают, что развитие РТН от бесконечнодифференцируемых околгидростатических начальных возмущений может закончиться стационарным режимом с углом 120° .

Рассмотрим неустойчивость Рэлея–Тейлора в случае $3D$ -геометрии. Аналогично $2D$ -случаю, при РТН пузыри поднимаются вертикально, $\alpha = 90^\circ$ (мы пока не рассматриваем $3D$ -течение в наклонной трубе). Имеется $1d$ -семейство стационарных пузырей со скругленной вершиной ($\theta_c = 90^\circ$) и выделенная точка $0d$ в этом семействе.

В данной работе впервые найден $3D$ -аналог клиновидного пузыря. Показано, что он имеет коническую вершину. Вычислены угол раствора конуса $\pi - \theta_c$ ($\theta_c = 114.799^\circ \approx 115^\circ$) и скорость всплывания. Различие между осесимметричными стационарными режимами U_{115}/U_{90} меньше, чем в $2D$ -случае. Оно составляет 10 %, $U_{115} \approx 0.54\sqrt{gR}$ (из силового баланса), $U_{90} \approx (0.48-0.50)\sqrt{gR}$ [1–8, 16, 20, 21], где R — радиус круглой цилиндрической трубы.

Однако в трехмерном случае, в отличие от двумерного, кроме задачи о круглой трубе с идеальными стенками, можно рассматривать задачи о трубах с гексагональным, квадратным и треугольным поперечными сечениями. Этими сечениями можно «замостить» плоскость и образовать решетку. Скорости и формы затупленных пузырей ($\theta_c = 90^\circ$), образующих решетки, вычислены в [23]. Стационарные пузыри с конической вершиной возможны не только в круглых трубах. Они могут существовать в трубах произвольного сечения. При оценке скорости подъема решетки из конических пузырей в первом приближении можно пренебречь зависимостью ширины зазора U_{115}/U_{90} от типа решетки, а скорости U_{90} взять из [23].

Работа построена следующим образом. В разд. 2 представлена геометрия задачи. В разд. 3 и 4 описан метод годографа для затупленных и клиновидных пузырей. При этом в разд. 4 получена простая аналитическая формула для угловой зависимости $U(\alpha)$ скорости клиновидных пузырей в наклонных трубах. В разд. 5 и 6 импульс клиновидного пузыря рассчитан для течений в $2D$ - и $3D$ -геометриях. В разд. 7 и 8 рассмотрен трехмерный случай, когда свободная поверхность движущейся в гравитационном поле жидкости имеет коническую особенность. Разделы 9–11 посвящены сравнению теории с вычислительным и натурным экспериментами.

2. КОНФИГУРАЦИЯ С КЛИНОМ

Геометрия задачи представлена на рис. 1. В плоскую трубу $fecd$ (рис. 1а) вставлена перегородка ab . Отсек $abcd$ заполнен несжимаемой идеальной тяжелой жидкостью. Направление силы тяжести (вертикаль) показано стрелкой g . При $t = 0$ перегородка убирается. Контактная граница G (рис. 1б, в) начинает разделять жидкость и газ пренебрежимой плотности. В результате проваливания тяжелой жидкости образуется «язык» или струя. Течение жидкости должно удовлетворять определенным условиям на бесконечности ($x \rightarrow +\infty$). Труба $abcd$ длинная. Дальний конец трубы закрыт стенкой cd (пробка), возле которой жидкость покоится. Жидкость не может свободно падать, скользя вдоль стенок ec и fd , поскольку газ своим давлением прижимает ее к пробке. Это называется опорожнением закрытой трубы. Рассмотрим эволюцию границы G . Жидкость проникает в газ в форме струи B . В свою очередь газ внедряется в жидкость в виде «пузыря» с вершиной в точке A (рис. 1б, в). Формируется двухфазное течение газ–жидкость. Скорости фаз в лабораторной системе координат (в ней стенки покоятся) показаны стрелками (рис. 1б). Завихренность (скачок тангенциальной к G скорости) сосредоточена на границе G . Вне G течение жидкости и газа потенциально.

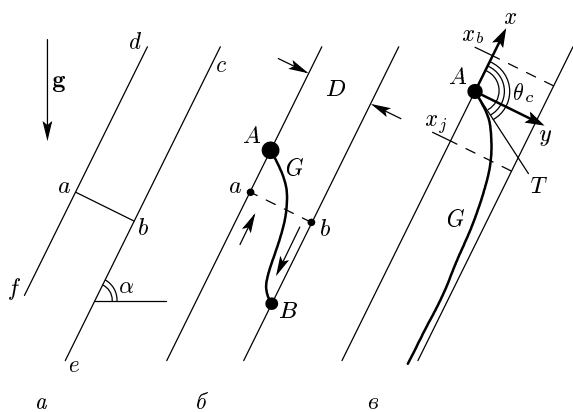


Рис. 1. Процесс опорожнения трубы. *a* — Начальная конфигурация ($t = 0$); тяжелая жидкость удерживается в поле силы тяжести (g — ускорение свободного падения) стенками трубы bc, ad и перегородкой ab . *б* — Переходная стадия $t \sim \sqrt{D/g}$, D — ширина трубы. *в* — Установившаяся стадия, $t \gg \sqrt{D/g}$. В плоском случае касательная AT к границе G в вершине A образует угол $\theta_c = 120^\circ$ со стенкой

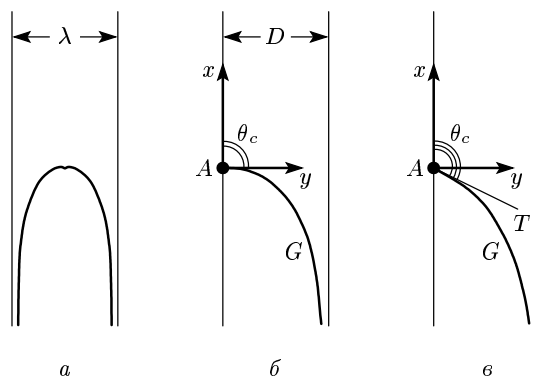


Рис. 2. Особое положение вертикального случая $\alpha = 90^\circ$. В отличие от случая $\alpha \neq 0$ здесь имеют два стационарных решения с округлым (*a, б*) и клиновидным (*в*) пузырями. При $\alpha \neq 0$ существует только клиновидный пузырь (рис. 1в)

Асимптотически ($t \rightarrow \infty$) течение возле вершины A переходит в стационарный режим. В этом режиме в системе координат, связанной с точкой A , форма границы G перестает изменяться. Ограничимся важным случаем «идеальных» стенок, маловязкой жидкости (число Рейнольдса велико) и широких труб, когда число Вебера велико (слабое поверхностное натяжение). В $2D$ -случае установившаяся свободная поверхность G пересекает ось x , образуя с ней тупой угол $\theta_c = 120^\circ$ (рис. 1в). Угол пересечения θ_c не зависит от угла наклона трубы α (рис. 1а). При этом угол между направлением по вертикали вниз и касательной AT (рис. 1в) составляет $\alpha - 30^\circ$.

Подъем пузырей с округлой вершиной $\theta_c = 90^\circ$ (рис. 2а, б) в вертикальных трубах ($\alpha = 90^\circ$) изучался во многих работах (см. обзоры [16–18]). В неограниченной жидкости в результате НРТ при «монокроматической» инициации (в начальных данных одна гармоника) образуется периодическая цепочка пузырей. Один период λ этой цепочки показан на рис. 2а, а его симметричная половина — на рис. 2б. Пузыри с клином $\theta_c = 120^\circ$ (рис. 1в) существуют при любом угле наклона α . По непрерывности отсюда следует, что такое решение имеется и в случае вертикальных труб (рис. 2в).

Таким образом, при $\alpha = 90^\circ$ есть два решения стационарной краевой задачи — $\theta_c = 90^\circ$ (рис. 2б) и $\theta_c = 120^\circ$ (рис. 2в). Очевидно, при $\alpha = 90^\circ$ из симметричной половинки решения рис. 2в строится периодическая цепочка клиновидных пузырей в неограниченной жидкости (решение задачи о НРТ с $\theta_c = 120^\circ$). Примыкание границы G под прямым углом к прямолинейной стенке трубы возможно только

ко в вертикальном случае. Поэтому при наклонах $0 \leq \alpha < 90^\circ$ существуют только пузыри с вершиной в виде клина $\theta_c = 120^\circ$.

3. МЕТОД ГОДОГРАФА ПРИ $\theta_c = 90^\circ$

Удобно пояснить суть приемов, использованных при количественном описании клина, на известном примере округлых пузырей. Обычно этот пример анализируется в физических координатах [16–18, 20–25]. В этих переменных потенциал стационарного течения на рис. 2б имеет вид

$$f = \varphi + i\psi = -U \left(\sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-nz}}{n} + z \right), \quad (3.1)$$

$$\sum_{n=1}^N a_n = 1, \quad z = x + iy.$$

Скорость течения определяется действительной частью потенциала

$$\mathbf{v} = (u, v) = \nabla \varphi$$

с граничным условием

$$\mathbf{v}|_{x \rightarrow +\infty} = (-U, 0), \quad U > 0.$$

Потенциал (3.1) записан в системе координат, связанной с вершиной $z = 0$, при этом положено $D = \pi$. Граница G совпадает с нулевой линией тока $\psi = 0$, поскольку амплитуды a_n — действительные числа.

Физическая плоскость z и плоскость годографа

$$\zeta = \frac{df}{dz} = u - iv$$

показаны на рис. 3, где u и v — компоненты скорости, соответственно, по осям x и y (рис. 3а). Важно, что вершина $z = 0$ (рис. 2б) является точкой торможения $\mathbf{v} = 0$, $\zeta = 0$. Область $U0G\infty U$, занятая жидкостью на рис. 3а, при конформном преобразовании $\zeta(z)$ переходит в область $0G\infty(-U)0$ на плоскости ζ (рис. 3б). Эти области ограничены прямолинейными отрезками и границей раздела G жидкость–газ. При этом точки U , 0 и ∞ плоскости z соответствуют точкам $(-U)$, 0 и ∞ плоскости ζ . Касательные к кривой G в точке 0 образуют прямой угол с осями x и u , соответственно, на плоскостях z и ζ .

Известно, что уже в первом приближении ($N = 1$) разложение (3.1) хорошо аппроксимирует искомое стационарное решение [17, 18]. Полученная при $N = 1$ скорость U в пределах экспериментальной погрешности (проценты) соответствует

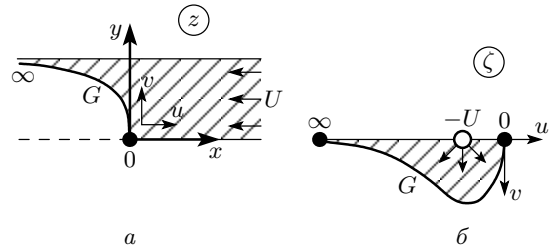


Рис. 3. Годограф ζ округлых пузырей

опытным данным. Впервые аппроксимация $N = 1$ была использована в работе [21] для случая цилиндрической трубы (см. также [16–18, 20, 22–25]). Разложение выражения (3.1) в ряд Фурье удовлетворяет боковым граничным условиям (периодичность) и условиям на бесконечности (при $x \rightarrow +\infty$). Скорость U определяется краевыми условиями на границе G . Требуется, чтобы выполнялись кинематическое условие: граница G была линией тока $\psi|_G = \text{const}$ (калибровка $\text{const} = 0$) и динамическое условие: давление на границе $p|_G$ не зависело от координат (изобара) (нормируем $p|_G = 0$). Разлагая выражение (3.1) в точке $z = 0$ по степеням z , находим [16–18, 20–25]

$$U = \frac{\sqrt{gD}}{\sqrt{3\pi}}. \quad (3.2)$$

Выведем формулу (3.2) с помощью метода годографа, поскольку наша цель заключается в переходе от случая $\theta_c = 90^\circ$ к случаю $\theta_c = 120^\circ$ (см. следующий раздел). Запишем аппроксимацию комплексного потенциала f в плоскости годографа:

$$f = U \ln(\zeta + U) - \zeta \approx -\frac{\zeta^2}{2U} + \frac{\zeta^3}{3U^2}. \quad (3.3)$$

Первый член в (3.3) представляет собой источник с интенсивностью $2\pi U$ в точке $(-U, 0)$ (см. рис. 3б). Он соответствует потоку U на рис. 3а и члену $(-Uz)$ в формуле (3.1). Член $(-Uz)$ доминирует на бесконечности на плоскости z , а источник в (3.3) доминирует вблизи точки $(-U, 0)$ на плоскости ζ . Возле точки торможения становятся существенными дополнительные члены. В формуле (3.1) это член, содержащий экспоненту, а в формуле (3.3) — член $(-\zeta)$. Коэффициенты при них выбраны так, чтобы точка торможения находилась в начале координат. Поэтому разложение (3.3) по степеням ζ начинается с квадратичного слагаемого.

Определим U в приближении (3.3) с двумя первыми слагаемыми разложения по ζ . Для этого про-

дифференцируем выражение (3.3). Подставив результат в формулу $\zeta = df/dz$, получим

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{1}{U} + \frac{\zeta}{U^2}.$$

Интегрируя это выражение, находим

$$z(\zeta) = -\frac{\zeta}{U} + \frac{\zeta^2}{2U^2}.$$

Определим кривую $\zeta(z)$ по кривой $z(\zeta)$ (обратная функция) с условием $\zeta(0) = 0$. Имеем

$$\zeta = \frac{df}{dz} = -Uz + \frac{Uz^2}{2}.$$

Отсюда следуют формулы для функции тока $\psi(x, y)$ и квадрата скорости $v^2(x, y) = \zeta\zeta^*$. Используя их и краевые условия на границе G , снова приходим к формуле (3.2).

4. МЕТОД ГОДОГРАФА ПРИ $\theta_c = 120^\circ$

С помощью метода годографа удается получить приближенную аналитическую формулу для скорости пузырей с клином (рис. 2в). Плоскости z и ζ в случае, показанном на рис. 2в, отличаются от случаев, показанных на рис. 2б и рис. 3 только углом θ_c между касательной к кривой G в центре координат и осями x или u (90° и 120° , соответственно). Поэтому для пояснений мы используем рис. 3, считая, что граница G в вершине пузыря образует нужный угол. Запишем

$$f = U \ln \left(1 + \frac{\zeta}{U} \right) - \zeta + \frac{\zeta^2}{2U} \approx \frac{\zeta^3}{3U^2}. \quad (4.1)$$

В выражении (4.1) член, содержащий логарифм, представляет собой источник в точке $(-U, 0)$. Дополнительные члены подобраны специальным образом из следующих соображений. Прежде всего точка торможения (стагнации) должна быть в центре $\zeta = 0$. Кроме того, необходимо, чтобы разложение начиналось с кубического члена (компенсация квадратичного члена). Это вызвано тем, что нулевая линия тока $\psi(\text{Re } \zeta, \text{Im } \zeta) = 0$ должна выходить из центра $\zeta = 0$ под углом (-120°) к оси $\text{Re } \zeta$.

Вычислим скорость U в выражении (4.1). Возьмем первый неисчезающий член разложения логарифма. С помощью формулы $\zeta = df/dz$ получим

$$dz = \frac{\zeta}{U^2} d\zeta.$$

Следовательно,

$$z = \frac{\zeta^2}{2U^2}$$

или

$$\zeta = \frac{df}{dz} = -\sqrt{2} U \sqrt{z}$$

(знак минус появляется из анализа отображения $\zeta \rightarrow z$, см. рис. 3). Интегрируя последнее уравнение, находим комплексный потенциал в физических переменных вблизи вершины:

$$f = -\frac{2\sqrt{2}U}{3} z^{3/2}.$$

Выделяя мнимую часть $\psi(x, y) = \text{Im } f = 0$, выписываем уравнение нулевой линии тока

$$y|_{\psi=0} = -\sqrt{3}x$$

возле точки $z = 0$ (кинематическое условие). Квадрат модуля скорости равен

$$\zeta\zeta^* = 2U^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

На нулевой линии тока он имеет вид

$$(\zeta\zeta^*)|_{\psi=0} = 2U^2 \sqrt{x^2 + [y(x)|_{\psi=0}]^2} = 4U^2(-x). \quad (4.2)$$

Формулы (4.1), (4.2) справедливы в общем случае. Они остаются неизменными при любом угле наклона α (рис. 1). Выпишем динамическое краевое условие. Угол α входит в выражение для скорости U через это условие. Из интеграла Бернулли получаем

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\zeta\zeta^*}{2} = g(y \cos \alpha - x \sin \alpha). \quad (4.3)$$

В выражении (4.3) точка с координатами (x, y) лежит на границе G . Подставим в (4.3) вместо y функцию

$$y(x)|_{\psi=0} \approx -\sqrt{3}x.$$

Скомбинируем формулы (4.2) и (4.3). После элементарных преобразований получаем

$$U(\alpha) = \sqrt{\frac{\cos(\pi/6 - \alpha)}{\pi}} \sqrt{gD}. \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) является искомым приближенным аналитическим выражением, описывающим подъем клинообразных пузырей в наклонных трубах при произвольном угле α . При $\alpha = 90^\circ$ получаем

$$U/\sqrt{gD} = 1/\sqrt{2\pi}$$

(ср. с (3.2)). Видно, что клинообразный пузырь всплывает быстрее округлого в $\sqrt{3/2} \approx 1.225$ раза (на 23%).

Зависимость $U(\alpha)$ (4.4) имеет плавный максимум при $\alpha = 30^\circ$ (отклонение на 60° от вертикали):

$$\frac{U(30^\circ)}{U(90^\circ)} = \sqrt{2}, \quad \frac{U(30^\circ)}{U(0^\circ)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}}} \approx 1.075.$$

Проекция скорости движения пузыря вдоль трубы на вертикальное направление дается выражением

$$U_{vert}(\alpha) = U(\alpha) \sin \alpha \propto \sin \alpha \sqrt{\cos(\pi/6 - \alpha)}.$$

Максимальное значение скорости $U_{vert}(\alpha)$ достигается при отклонении на 21.6° от вертикали:

$$\frac{(U_{vert})_{max}}{U_{vert}(90^\circ)} \approx 1.16.$$

Таким образом, согласно проведенным аналитическим исследованиям, максимумы скоростей $U(\alpha)$ и $U_{vert}(\alpha)$ достигаются не при вертикальной ориентации трубы, причем максимум функции $U(\alpha)$ располагается далеко от вертикали. То, что максимум функции $U(\alpha)$ находится не на вертикали, хорошо известно экспериментаторам [2, 3, 6–9]. В работе [7] предложено качественное объяснение происхождения этого максимума. Проведенный выше анализ выявляет соответствующие причины. Рассмотрим смещение жидкой частицы на определенное расстояние вдоль линии тока ψ_0 , выходящей из точки торможения, в окрестности точки торможения. Гравитационная энергия

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = -g \sin \alpha x + g \cos \alpha y$$

убывает быстрее всего, когда линия тока ψ_0 (а не сама труба) направлена по вертикали. Расположение координат (x, y) (вдоль и поперек трубы) относительно горизонтального и вертикального направлений показано на рис. 1. В малой окрестности вершины имеем $y = -\sqrt{3}x$ на кривой ψ_0 . Отсюда

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \propto \cos(\pi/6 - \alpha).$$

Поэтому максимум скорости достигается не при вертикальной ориентации трубы.

Значение $\alpha_{max} = 30^\circ$ получается в первом приближении, когда в разложении потенциала f (4.1) учитывается только первый член. При этом максимум продольной скорости пузыря U достигается, когда касательная AT к свободной границе в вершине направлена вдоль вектора \mathbf{g} . В старших порядках разложений, по-видимому, максимум U будет достигаться тогда, когда некоторая секущая свободной поверхности, близкая к касательной AT , будет направлена вдоль вектора \mathbf{g} . Поэтому угол α_{max} должен быть несколько больше 30° .

5. ИМПУЛЬС ПУЗЫРЯ (2D-СЛУЧАЙ)

Альтернативный подход к изложенному выше методу годографа основан на законах сохранения. Законы сохранения массы, импульса и энергии позволяют приближенно определить зависимость $U(\alpha)$. Важным преимуществом по отношению к методу годографа является то, что такой анализ допускает обобщение на трехмерный случай. Можно также показать, что в горизонтальном случае ($\alpha = 0$) из этого подхода следуют точные значения для скорости $U(0)$ и объемной доли жидкой фазы в 2D- и 3D-геометриях. Соответствующие вычисления при $\alpha = 0$ проделаны в работе [19].

Начнем с решения в 2D-случае. Рассмотрим жидкость между прямыми $x = x_j$ и $x = x_b$ (рис. 1б). Система координат (x, y) связана с вершиной пузыря (рис. 1–3). Свободная поверхность образует угол 120° со стенкой. Можно показать, что сохранение энергии эквивалентно интегралу Бернулли. Важнейшим оказывается условие неизменности импульса жидкости при стационарном течении. Оно приводит к уравнению

$$-\bar{U}^2 \left(1 - \frac{1}{1-N_j} \right) + \frac{C_\alpha}{2} (1-N_j)^2 - P_b - \frac{C_\alpha}{2} - S_\alpha X_b - S_\alpha \int_{-L_j}^0 [1 - N(X)] dX = 0. \quad (5.1)$$

Здесь и далее используются безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{U}{\sqrt{gD}}, \quad N(X) = \frac{\eta(x)}{D}, \quad N_j = \frac{\eta_j}{D}, \\ \eta_j &= \eta(x_j), \quad x_j = -l_j, \quad P_b = \frac{p_b}{\rho g D}, \\ C_\alpha &= \cos \alpha, \quad S_\alpha = \sin \alpha, \quad X = \frac{x}{D}, \\ X_j &= \frac{x_j}{D} = -L_j, \quad X_b = \frac{x_b}{D}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В формулах (5.2) p_b — давление в верхней точке сечения x_b (это точка $x = x_b, y = 0$), кривая $y = \eta(x)$ задает свободную границу, D — ширина трубы.

В уравнении (5.1) первый член связан с конвективным переносом импульса через сечения x_b и x_j . Точку x_b располагаем далеко от пузыря. Поток в ней плоскопараллельный. В сечении x_j течение только приближено может считаться плоскопараллельным. Второй член в (5.1) представляет собой импульс сил давления, создаваемый в сечении x_j . Он положителен. Следующие два члена определяют импульс сил

давления в сечении x_b . Последние два члена представляют собой импульс гравитационной силы (ускорение в толще). Первый из них соответствует импульсу прямоугольника, ограниченного сечениями $x = 0$ и $x = x_b$. Член с интегралом соответствует импульсу, создаваемому продольной (вдоль трубы) составляющей веса в области между сечениями $x = x_j$, $x = 0$ и границей G (рис. 1б). Вклада от границы G в силу давления нет, поскольку $p|_G = 0$. Левая часть уравнения (5.1) определяет изменение полного импульса в единицу времени. Поскольку течение стационарно, это изменение равно нулю.

Запишем интеграл Бернулли для точек ($x = x_j$, $y = \eta_j$), ($x = 0$, $y = 0$) и ($x = x_b$, $y = 0$), располагающихся на одной линии тока. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}^2}{2} + \Pi_b + S_\alpha X_b &= 0, \\ \frac{\bar{U}^2}{2(1 - N_j)^2} &= S_\alpha L_j + C_\alpha N_j. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В уравнение (5.1) входит неизвестная форма $\eta(x)$ границы G (через значение N_j и интеграл). Аппроксимируем ее следующим образом:

$$N(X) = \operatorname{tg} \theta_c X - X^2/2r, \quad \theta_c = 120^\circ. \quad (5.4)$$

Аппроксимация учитывает форму границы возле вершины пузыря. В нее включен один дополнительный член (квадратичный) разложения по X . Этой аппроксимацией данная модель отличается от модели с эллипсом, разработанной в полезной работе [2]. В случае эллипса имеем $\theta_c = 90^\circ$. При малом поверхностном натяжении в $2D$ -геометрии угол θ_c близок к 120° . Пузыри с клиновидной вершиной ($3D$ -течение, наклонная цилиндрическая труба) наблюдаются в экспериментах [6]. Крупные газовые пузыри в пробковом течении в широких трубах также имеют вершину такого типа.

Подставляя (5.4) в уравнения (5.1)–(5.3), приходим к системе из трех уравнений для неизвестных r , \bar{U} и Π_b . Перед тем как вкратце описать решение, сделаем замечание относительно возможности уточнения разрабатываемой аппроксимации (старшие разложения). Успех метода асимптотических коллокаций [17, 18] обусловлен тем, что с его помощью удастся изучить следующие за первым порядком разложения. Метод работает для затупленных $2D$ - и $3D$ -пузырей. Он применяется в стационарном и нестационарном случаях. Решение в трубе разлагается в ряд по гармоникам Фурье. Это позволяет учесть затухание неоднородностей скорости вдали от пузыря (при $x \rightarrow +\infty$, см. рис. 2). К сожалению,

аналогичное разложение по гармоникам не удастся построить в случае клиновидного пузыря из-за особенности в вершине. Метод силового баланса, возможно, позволит обойти эту трудность. В нем вместо условия затухания при $x \rightarrow +\infty$ используется закон сохранения импульса. При этом функции $\eta(x)$ и $\varphi(x, y)$ разлагаются в тейлоровские ряды в нуле (вершина пузыря). Уравнения для дополнительных (в первом порядке имеется только один коэффициент r в (5.4)) тейлоровских коэффициентов следуют из кинематического и динамического краевых условий.

Ограничимся первым порядком. При этом степенное разложение потенциала скорости в нуле нам не потребуется. Рассмотрим систему (5.1), (5.3). Исключим неизвестные Π_b и \bar{U} с помощью интегралов (5.3). Приходим к уравнению

$$\begin{aligned} (1 - N_j^2)(S_\alpha L_j + C_\alpha N_j) - \\ - \frac{C_\alpha}{2} N_j (2 - N_j) - S_\alpha \int = 0, \quad (5.5) \\ N_j = -\operatorname{tg} \theta_c L_j - \frac{L_j^2}{2r}, \quad \int = L_j + \operatorname{tg} \theta_c \frac{L_j^2}{2} + \frac{L_j^3}{6r}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что (5.5) — это кубическое уравнение для неизвестной r с параметрами α и L_j . Параметр α — главный, а L_j — вспомогательный. Сечение $x = -l_j = -L_j D$ (см. (5.2)) нельзя располагать близко к вершине (выходящий поток плохо аппроксимируется плоскопараллельным потоком). Нельзя это сечение и слишком удалять от вершины (вдали становятся существенными следующие члены разложения по X в (5.4)). Расчеты показывают, что вариация значений L_j в пределах $L_j = 0.5 - 0.8$ (больше половины диаметра, но меньше целого диаметра) мало сказывается на ответе. Нужный корень r легко находится численно. По нему по второй из формул (5.3) определяется искомая скорость \bar{U} . Результаты решения (графики $U(\alpha)$) приведены ниже, поскольку целесообразно описать их вместе с результатами численного эксперимента.

При горизонтальной ориентации (наклон $\alpha = 0$) вектор \mathbf{g} направлен вдоль оси y (перпендикулярно стенкам трубы). Импульс сил гравитации в толще жидкости становится равным нулю, интеграл в уравнении (5.5) выпадает. Уравнение (5.5) перестает зависеть от формы границы $\eta(x)$ (в него входит только финальный уровень N_j) и становится точным. В отличие от случаев с $\alpha > 0$ (см. рис. 1), стационарная струя при $\alpha = 0$ вдали от вершины выходит на режим движения с постоянной скоростью. Ее ширина стремится к постоянной $L_j D$. В случае $\alpha > 0$

имеется составляющая вектора \mathbf{g} вдоль трубы. Поэтому жидкость в струе движется с ускорением, а ширина струи уменьшается. В плоскости годографа ζ (рис. 3б) уходящая струя при $\alpha = 0$ соответствует стоку, находящемуся в точке $(-U/(1 - N_j), 0)$. При $\alpha > 0$ сток находится на бесконечности. Решая уравнение (5.5) при $\alpha = 0$, находим точные значения [19] (см. также [33]):

$$N_j = \frac{1}{2}, \quad U(0) = \frac{\sqrt{gD}}{2}. \quad (5.6)$$

Приближенное значение

$$\bar{U}(0) = 3^{1/4}(2\pi)^{-1/2}$$

(см. (4.4)) на 5% превышает точное (5.6), а приближенное значение, полученное в [34] ($\bar{U} = 0.43$), оказывается на 16% меньше. Результат нашего прямого численного моделирования $\bar{U} = 0.49 \pm 0.01$ очень хорошо согласуется со значением (5.6). Это весомый довод в пользу качества численного моделирования.

6. ИМПУЛЬС ПУЗЫРЯ (3D-СЛУЧАЙ)

Приведем решение задачи в случае 3D-геометрии. Рассмотрим круглую цилиндрическую трубу, имеющую исключительное значение для практики. Мы будем использовать декартовы координаты (x, y, z) , в которых оси x и y располагаются так, как это показано на рис. 1в, т.е. они лежат в средней вертикальной плоскости, проходящей через ось трубы и вектор \mathbf{g} . При этом ось z оказывается горизонтальной. Выпишем интегралы Бернулли. Возьмем их в тех же точках, как в 2D-случае. Теперь эти точки принадлежат симметричной линии тока, идущей по верху трубы и через наивысшую точку свободной поверхности (вершину пузыря). Введем перпендикулярные оси трубы сечения $x = -l_j$ и x_b , как на рис. 1в. Интегралы Бернулли с учетом закона сохранения массы приобретают вид

$$\bar{U}^2/2 = -P_b - S_\alpha X_b, \quad (6.1)$$

$$\bar{U}^2 = 2\Gamma_j^2(S_\alpha L_j + C_\alpha N_j). \quad (6.2)$$

Используем прежние обозначения (5.2) (D – диаметр трубы). Формула (6.1) совпадает с первой из формул (5.3).

Смысл формул в случае 3D-геометрии аналогичен смыслу формул для 2D-случая, хотя сами формулы получаются более громоздкими. Это вызвано

стереометрией задачи. В выражении (6.2) Γ_j – объемная доля жидкой фазы в сечении $(-l_j)$. Будем считать, что образующие свободной поверхности параллельны оси z (т.е. горизонтальны). Тогда свободная поверхность задается функцией η , зависящей от одной координаты x , $\eta = \eta(x)$. Это неплохое приближение, пока угол наклона α не слишком близок к вертикальному значению. В этом приближении при $x < 0$ в сечении $x = x_{cut}$ жидкость занимает часть круга с $y > \eta(x_{cut})$. Это часть круга, отсеченная хордой

$$y = \eta(x_{cut}) = N_{cut}D.$$

В сечении $x = -l_j$ отношение площади этой части круга к площади всего круга составляет

$$\Gamma_j = 1 - \frac{\gamma_j}{\pi} + \frac{1 - 2N_j}{\pi} \sin \gamma_j, \quad \cos \gamma_j = 1 - 2N_j. \quad (6.3)$$

Разумеется, формула (6.3) справедлива в любом сечении x . Нужно только убрать индекс « j ». Под углом 2γ видна хорда границы G с оси трубы: $\gamma = 0$ в сечениях $x \geq 0$ (жидкость заполняет все сечение трубы), $\gamma = \pi$ в пределе $x \rightarrow -\infty$, если $\alpha > 0$ (в этом пределе все сечение заполняет газ), наконец, $\gamma \rightarrow \gamma_j$ в пределе $x \rightarrow -\infty$, если $\alpha = 0$. В фиксированном сечении конфигурация определяется любым одним из трех связанных геометрических параметров N , γ или Γ . Функция $Y = N(X)$ задает свободную поверхность в безразмерных переменных (5.2):

$$N_j = N(X_j) = N(-L_j), \quad L_j = l_j/D.$$

В (6.3) величина N может быть меньше или больше 1/2. Соответственно, угол γ принадлежит интервалу $0 < \gamma < \pi/2$ или интервалу $\pi/2 < \gamma < \pi$.

Составим баланс сил. Уравнивая силы давления и веса с приращением импульса, получаем

$$-\bar{U}^2 + \frac{\bar{U}^2}{\Gamma_j} + \frac{C_\alpha}{\pi} \phi_j - P_b - \frac{C_\alpha}{2} - S_\alpha X_b - S_\alpha \int_{-L_j}^0 \Gamma(X) dX = 0, \quad (6.4)$$

$$\phi_j = \frac{\pi}{4}(1 - 2N_j) + \sqrt{N_j - N_j^2} \frac{3 - 4N_j + 4N_j^2}{3} + \frac{1 - 2N_j}{2} \arcsin(1 - 2N_j).$$

Слагаемые в уравнении (6.4) аналогичны слагаемым в уравнении (5.1). Это конвекция импульса (при условии сохранения потока вещества), импульс давления на сечения x_j , x_b и весовой импульс, набирающийся в двух объемах. Эти объемы располагаются

между сечениями $x = 0$, $x = x_b$ и между сечениями $x = x_j$, $x = 0$. Давление на свободную поверхность G равно нулю ($p|_G = 0$).

Сила давления в сечении x_b равна

$$f_b = 2R \int_0^{2R} (p_b + \rho g C_\alpha) \sqrt{1 - (1 - y/R)^2} dy = \pi R^2 (p_b + \rho g C_\alpha D/2),$$

где $R = D/2$ — радиус трубы. Аналогично в сечении x_j имеем

$$f_j = 2\rho g C_\alpha R \int_{\eta_j}^{2R} (y - \eta_j) \sin \gamma_j dy = 2\rho g C_\alpha R^3 \phi_j,$$

где $D \sin \gamma_j$ — длина прямолинейной хорды, разделяющей жидкость и газ в сечении x_j (она принадлежит границе η), выражение для ϕ_j приведено выше.

Исключим неизвестные Π_b и \bar{U} из уравнения баланса (6.4) с помощью интегралов (6.1), (6.2). В результате получим

$$\Gamma_j(2 - \Gamma_j)(S_\alpha L_j + C_\alpha N_j) + \frac{C_\alpha}{\pi} \phi_j - \frac{C_\alpha}{2} - S_\alpha \int_{-L_j}^0 \Gamma(X) dX = 0. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) аналогично уравнению (5.5).

Чтобы решить уравнение (6.5), требуется задать границу $y = \eta(x)$. Зададим ее формулой (5.4). Оставим в (5.4) угол θ_c в качестве параметра. В случае $2D$ -геометрии этот угол равен 120° . В работе [2] в качестве границы $3D$ -течения использован «плоский» (в плоскости xy) эллипс (тогда $\theta_c = 90^\circ$). В уравнение (6.5) входят следующие величины:

$$\Gamma_j = \Gamma(N_j), \quad N_j = N(-L_j),$$

$$N(X), \quad \Gamma(X) = \Gamma[N(X)].$$

При этом $N(X)$ определяется выражением (5.4). Как можно заметить, уравнение (6.5) является уравнением для неизвестной r с параметрами α , θ_c и L_j . Интеграл в (6.5) приходится находить численно. В этом заключается отличие уравнения (6.5) от (5.5). К функции $U(\alpha)$, получающейся в результате решения, мы вернемся ниже.

В случае $\alpha = 0$ уравнение (6.5), представляющее сводку законов сохранения, становится точным. Интеграл, содержащий функцию $N(X)$, обращается в

нуль. Ответ не зависит от формы границы. Уравнение (6.5) в случае $\alpha = 0$ выведено и решено в работе [19]. Соответствующие значения равны

$$N_j = 0.43719, \quad \bar{U} = 0.54213, \quad \Gamma_j = 0.57977. \quad (6.6)$$

Жидкость идет заметно выше средней линии трубы (ср. с $2D$ -случаем (5.6)). Скорость \bar{U} на 8 % больше. Эксперимент в широких по отношению к капиллярному масштабу цилиндрических трубах дает очень близкое к (6.6) значение $\bar{U} = 0.54$ [6]. Это свидетельствует о том, что поверхностное натяжение в этом эксперименте не существенно.

7. КОНУС

Образование клина с углом 120° является достаточно устойчивым феноменом. Он вызван двумя причинами. Во-первых, в двухфазном потоке имеется контактная граница G , разделяющая фазы. Из-за столкновения фаз (встречное движение) появляется точка торможения на границе, в которой поверхностная завихренность обращается в нуль. Во-вторых, поле силы тяжести однородно (однородность ускорения \mathbf{g}), поэтому гравитационный потенциал $\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ (на единицу массы) линеен по координатам (см. (4.3)). Соответственно, квадрат скорости относительно точки торможения тоже линеен по координатам.

В терминах функций комплексного переменного имеем

$$f \propto \zeta^n$$

возле точки торможения. Отсюда

$$\zeta \propto \zeta^{n-1} d\zeta/dz, \quad dz \propto d\zeta^{n-1}, \\ \zeta \propto z^{1/(n-1)}, \quad f \propto z^{n/(n-1)}.$$

Из-за однородности силы тяжести выполняется соотношение

$$\zeta \zeta^* \propto |z|.$$

Поэтому должно быть $n = 3$. Мнимая часть комплексного потенциала имеет вид

$$\psi \propto \sin\left(\frac{n\theta}{n-1}\right),$$

где θ — полярный угол в системе координат, связанной с точкой торможения. Так мы приходим к трехлучевой конфигурации нулевых линий тока и углу 120° .

Отметим в этой связи еще и другие интересные конфигурации трехлучевого типа.

1) Схождение «стенок» (уплощенных струй, разделяющих пузыри) в виде трехгранного угла возникает в случайных решетках плотноупакованных пузырей [23]. В [23] дано простое объяснение причин, по которым такая особенность является типичной (столкновение «ветров» от двух источников, к которым добавляется третий источник).

2) Схождение трех «трещин» — основная особенность фронта пламени [35].

3) Важный пример можно найти в космологии (крупномасштабная структура Вселенной): из-за неоднородности начального поля скоростей образуются каустики, «блины» и поверхности, в которых концентрируется вещество [36, 37] (динамика адгезии или слипания). Соударение поверхностей приводит к формированию конфигураций в виде трехгранного угла с жгутообразным уплотнением вдоль линии пересечения поверхностей (ср. с [35] и [23]).

Целесообразно вкратце повторить комплексные формулы разд. 4, выписанные для случая пузыря с клиновидной вершиной в виде функций действительной переменной. Это нам пригодится в случае 3D-геометрии. Вместо комплексного потенциала f используем потенциал скорости φ . Он подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{(r\varphi_r)_r}{r} + \frac{\varphi_{\theta\theta}}{r^2} = 0,$$

где r, θ — полярные координаты в точке торможения, угол θ отсчитывается от оси x (см. рис. 3а). Вблизи центра координат имеем

$$\varphi = r^{3/2}\Phi(\theta)$$

(однородность гравитации). Угловая функция удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{\theta\theta} + (3/2)^2\Phi = 0.$$

Отсюда

$$\Phi = a \cos(3\theta/2) + b \sin(3\theta/2).$$

Угловая составляющая скорости равна

$$v^{(\theta)} = \sqrt{r}\Phi_{\theta}.$$

Согласно краевому условию на оси x , имеем

$$v^{(\theta)}(0) = 0,$$

поэтому $b = 0$. Следовательно, выполняется соотношение

$$\varphi \propto \cos(3\theta/2). \tag{7.1}$$

Отсюда мы видим, что $v^{(\theta)} = 0$ на луче $\theta_c = 120^\circ$.

Обратимся к 3D-случаю. Рассмотрим вертикальную трубу. Покажем, что имеется 3D-аналог клина. Гармоническое уравнение в сферических координатах имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{(r^2\varphi_r)_r}{r^2} + \frac{(S\varphi_{\theta})_{\theta}}{r^2S} = 0,$$

где $S \equiv \sin \theta$ (без азимутальной зависимости). Рассмотрим окрестность точки торможения. В силу однородности поля силы тяжести имеем

$$v \propto \sqrt{r}, \quad \varphi = r^{\nu}\Phi(\theta), \quad \nu = 3/2.$$

Уравнение для угловой части Φ имеет вид

$$\frac{(S\Phi_{\theta})_{\theta}}{S} + \nu(\nu + 1)\Phi = 0.$$

Это уравнение Лежандра степени ν . Его решение, регулярное на оси $\theta = 0$, дается функцией Лежандра $P_{3/2}(\cos\theta)$ степени $3/2$ (ср. с (7.1)). Функция $P_{3/2}$ регулярна в области $0 \leq \theta < \pi$ [38]. Полярная ось $\theta = 0$ направлена в сторону тяжелой жидкости. Она совпадает с осью x на рис. 3а. Рассмотрим решение, осесимметричное вблизи вершины пузыря.

Функцию $P_{3/2}(C)$ удобно представить тейлоровским разложением на полярной оси $\theta = 0$, $C \equiv \cos \theta$. Оси $\theta = 0$ соответствует точка $C = 1$. Разложение имеет вид

$$P_{3/2}(C) = F\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; 1; \frac{1-C}{2}\right), \tag{7.2}$$

$$F(a, b; 1; \xi) = 1 + \frac{ab}{(1!)^2}\xi + \frac{a(a+1)b(b+1)}{(2!)^2}\xi^2 + \dots,$$

где F — гипергеометрическая функция [38]. Разложение (7.2) сходится в круге $|1-C| < 2$. Вблизи оси $\theta = \pi$ ($C = -1$), идущей внутри пузыря, разложение (7.2) имеет логарифмическую особенность:

$$P_{3/2}(C) \rightarrow -(\pi)^{-1} \ln(1+C), \tag{7.3}$$

вызванную линией источников (см. ниже).

Полярная компонента скорости равна

$$v^{(\theta)} = \sqrt{r}\Phi_{\theta} = -\sqrt{r} \frac{dP_{3/2}(C)}{dC} \sin \theta. \tag{7.4}$$

Как и должно быть по симметрии, она обращается в нуль на полярной оси $\theta = 0$. Кроме того, компонента $v^{(\theta)}$ (7.4) обращается в нуль на поверхности конуса θ_c . Образующие конуса составляют угол θ_c с полярной осью. Величина $C_c = \cos \theta_c$ является корнем уравнения

$$\frac{dP_{3/2}(C)}{dC} = 0.$$

Решая его численно, находим

$$\theta_c \approx 114.799^\circ \approx 114.8^\circ. \quad (7.5)$$

Чтобы найти ответ (7.5) с точностью до третьего-четвертого десятичного знака, необходимы примерно 20 членов степенного ряда (7.2).

8. СКОРОСТЬ ПУЗЫРЯ С КОНИЧЕСКОЙ ВЕРШИНОЙ

На рис. 4 показаны конфигурации, имеющие стационарные клиновидную или коническую особенности. К ним относятся предельная гравитационная волна Стокса (рис. 4а) и пузыри с клиновидной или конической вершинами (рис. 4б). Гравитационная волна имеет период λ . Ее гребни образуют цепочку. Имеется обобщение на «солитонный» случай (единственный 120-градусный гребень на всей горизонтальной оси). Клиновидный или конический пузыри находятся в трубе диаметром λ (рис. 4б). Их вершины располагаются на оси трубы.

В случае волны над гребнем располагается разрез комплексного потенциала (рис. 4а). Он является линией завихренности, на которой испытывает ска-

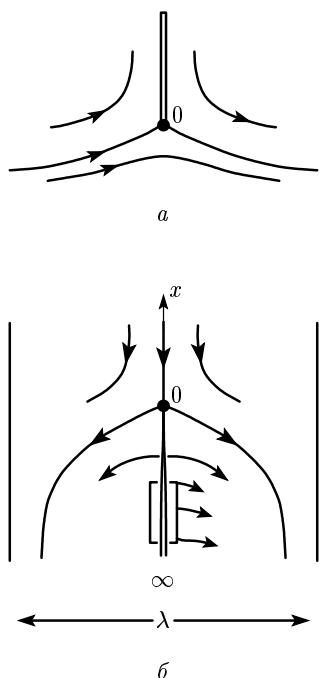


Рис. 4. Особенности в виде клина и конуса на свободной поверхности тяжелой жидкости: а — волна на воде (2D), б — всплывающий 2D- или 3D-пузырь

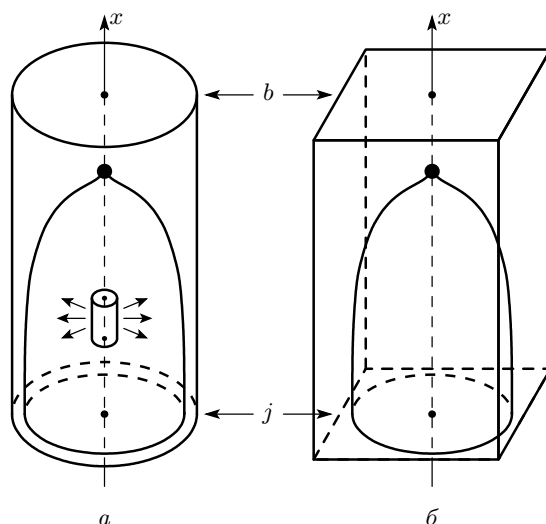


Рис. 5. Конические пузыри в вертикальных трубах разного поперечного сечения

чок тангенциальная составляющая скорости. В случае клина внутри пузыря тоже находится разрез. Он представляет собой линию источников 0∞ (рис. 4б). Поток жидкости от этой линии «распирает» пузырь и «противодействует» потоку, идущему от верхней бесконечности. Вершина разреза находится на свободной поверхности. Аналогичная линия помещается внутри конического пузыря (рис. 5).

Аналитическое продолжение потенциала скорости внутрь пузыря в случае конуса имеет логарифмическую особенность (7.3) на линии источников. Она вызвана уменьшением боковой площади малого цилиндра $2\pi(\delta r)\delta x$ вокруг отрезка δx оси x (рис. 5а). Цилиндр имеет радиус δr и высоту δx . Для единообразия с наклонным случаем (рис. 1–3) вертикальная ось на рис. 4, 5 обозначена буквой « x », а не « z ». Из-за сокращения боковой площади (рис. 4а, б) скорость расходится, $v^{(\theta)} \propto 1/\delta r$ (сохранение потока от линейного источника δx) или $v^{(\theta)} \propto 1/\delta\theta$, где $\delta\theta = \theta - \pi$ (ср. с (7.3)). В случае 2D-геометрии длина боковой части периметра малого прямоугольника $\delta y \times \delta x$ (рис. 4б) постоянна. Сингулярности нет. Соответственно потенциал (7.1) не имеет особенности на оси $\theta = \pi$ (разрез).

Обратимся к расчету скорости подъема конических пузырей (рис. 5). Применим метод силового баланса (см. разд. 5, 6). Ограничимся случаем круглой трубы (рис. 5а). Тогда течение везде имеет азимутальную симметрию. Цилиндрические координаты z и r (цилиндрический радиус) обозначим буквами x и y . Запишем уравнение импульса

$$W^2 - \frac{W^2}{1 - N_j^2} + \Pi_b + X_b + \int_{-L_j}^0 [1 - [N(X)]^2] dX = 0. \quad (8.1)$$

Оно аналогично уравнениям (5.1) и (6.4). Жидкость в струе j течет через кольцевую область (рис. 5а). В уравнение (8.1) входит площадь этого кольца. Как и в разд. 5, 6, b и j — сечения, соответственно, над и под вершиной пузыря (рис. 5). Здесь величины приведены к безразмерному виду путем деления на радиус трубы $R = D/2$ (например, $W = U/\sqrt{gR}$, $L_j = l_j/R$). В этом заключается их отличие от величин, входящих в формулы (5.2).

Действуя аналогично разд. 5, 6 (исключая неизвестные W , Π_b с помощью интеграла Бернулли), приходим к уравнению

$$L_j(1 - N_j^4) - \int_{-L_j}^0 (1 - N^2) dX = 0. \quad (8.2)$$

Аппроксимируем границу пузыря $N(X)$ формулой (5.4). За угол θ_c возьмем значение (7.5). При такой аппроксимации интеграл в (8.2) легко вычисляется. Получаем уравнение четвертого порядка для неизвестной r , определяемой выражением (5.4). Решая его численно, находим r , а затем и скорость всплытия $U = W\sqrt{gR}$.

В результате расчетов для конического пузыря в круглой трубе радиуса R (рис. 5а) получаем $r \approx 0.32R$, откуда

$$U \approx 0.54\sqrt{gR} = 0.38\sqrt{gD}, \quad (8.3)$$

а для плоского пузыря с клином в полосе $\lambda = 2R$ (рис. 4б) $r \approx 0.43R$, откуда

$$U \approx 0.42\sqrt{gR} = 0.297\sqrt{g\lambda}. \quad (8.4)$$

Для сравнения с полученными результатами (8.3), (8.4) приведем известные значения [16–18] скоростей в случае округлых пузырей¹⁾. В круглой трубе с радиусом R для пузыря, вершина которого движется по оси (осесимметричное течение), имеем

$$U \approx 0.35\sqrt{gD} = 0.495\sqrt{gR}$$

(см. [20–22]). Округлый пузырь в полосе, симметричный относительно средней линии полосы шириной $\lambda = 2R$ (рис. 2а), всплывает со скоростью

$$U \approx 0.24\sqrt{g\lambda} = 0.34\sqrt{gR}.$$

¹⁾ С касанием границы в вершине вписывается круг (2D) или сфера (3D).

Таким образом, сингулярный (конус в вершине) 3D-пузырь быстрее сингулярного (клин в вершине) 2D-пузыря на 29% ($0.54/0.42 = 1.286$), тогда как регулярный (сфера в вершине) 3D-пузырь быстрее округлого 2D-пузыря (круг в вершине) на 46% ($0.35/0.24 = 1.46$). При этом сингулярный 3D-пузырь быстрее округлого 3D-пузыря лишь на 9% ($0.54/0.495 = 1.09$). Для 2D-случая это отношение существенно больше и равно 23.5%, $0.42/0.34 = 1.235$.

Трехмерная труба может иметь самые разнообразные поперечные сечения (рис. 5). Например, в [6] рассмотрены даже неодносвязные случаи (кольца). Для анализа РТН интерес представляют трубы, которыми можно, пристыковав их друг к другу, заполнить все пространство. С такими трубами связаны пространственно-периодические решения [23]. На рис. 5б изображен случай трубы с прямоугольным сечением, порождающей прямоугольные решетки пузырей.

Для задачи об РТН важны квадратная и гексагональная (в форме пчелиных сот) структуры (в [23] объясняется, почему это так). Им соответствуют элементарные ячейки (трубы) с сечениями в виде квадрата и гексагона. В случае прямоугольника конус в вершине не круглый (течение вблизи вершины не осесимметрично). В случае правильных решеток в малой окрестности вершины течение симметрично по азимуту. Тогда в вершину вписывается круглый конус с углом, определяемым выражением (7.5). Выберем размеры квадрата (k_4) и гексагона (k_6) так, чтобы на линейной стадии их инкременты РТН были одинаковыми и равными $\sqrt{gk_{4,6}}$. Сравнение длин сторон и площадей дано в работе [23]. При таком выборе скорость подъема стационарных пузырей со скругленной вершиной равна

$$U_{4,6}^{90} = (1.00 \pm 0.02)\sqrt{g/k_{4,6}}$$

для квадратных и гексагональных решений [23]. Затупленный 3D-пузырь в квадратной трубе $\lambda \times \lambda$, идущий по средней линии трубы, имеет скорость существенно большую (на 68%, $1/0.595 = 1.68$), чем затупленный 2D-пузырь в полосе λ , движущийся по средней линии (рис. 2а).

Метод силового баланса (разд. 5, 6 и 8) допускает обобщение на случай трубы с квадратным и гексагональным сечениями. Соответствующие вычисления громоздки и здесь не рассматриваются. Для приближенной оценки скорости всплытия $U_{4,6}^{114.8}$ конических пузырей в таких трубах можно принять, что

отношение $U_{4,6}^{114.8}/U_{4,6}^{90}$ примерно такое же, как для круглой трубы.

9. СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ

Сопоставим полученные теоретические результаты с прямым численным моделированием. Авторам неизвестно, применялось ли ранее численное моделирование для изучения пробковых режимов и длинных пузырей в наклонных трубах. Между тем в рамках вычислительных экспериментов получено много полезных сведений о РТН. С другой стороны, задача о РТН (по сути дела, движение пузырей в условной вертикальной трубе) и задача движения пузырей в наклонной трубе имеют много общего. Поэтому применение численных методов представляется весьма перспективным.

Моделирование проводилось методом, описанным в работах [39–41]. Использовался газодинамический код при очень малом числе Маха $Ma \sim 10^{-2}$. Расчеты велись в вытянутом прямоугольнике с размерами $\Delta y \times \Delta x$, покрытом квадратной сеткой $N_y \times N_x$, где N_y — число узлов на ширине трубы D ($N_y \sim 10^2$). Чтобы исключить влияние концов, отношение $\Delta x/\Delta y$ выбиралось большим ($\Delta x/\Delta y \sim 10$). В начальный момент «газ» (вещество с плотностью ρ_l) занимает 70% длины всей трубы.

Расчет проводился сквозным образом (без выделения контактной границы) [39–41]. Отношение плотностей веществ равно $\mu = \rho_l/\rho_h = 1/20$. В начальный момент $t = 0$ жидкость имела прямолинейную границу ab , $x = \eta(y, t = 0) \equiv 0$ (рис. 1а). Разность плотностей достигалась за счет разности температур. В начальном состоянии плотность — кусочно-постоянная функция в областях, разделенных границей ab (рис. 1а). Поскольку давление велико, а число Маха мало, градиент температуры, вызванный весовой стратификацией, оказывается малым ($T/|\nabla T| \gg D$). Течение с хорошей точностью соответствует течению кусочно-неоднородной (два значения плотности ρ_l и ρ_h) несжимаемой жидкости в гравитационном поле.

Исходное поле скоростей задавалось потенциалом

$$\varphi(x, y, t = 0) = -u_0 \cos y e^{-x},$$

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad u_0 = 0.2 - 0.5,$$

и полагалось

$$D = \pi, \quad g = 1.$$

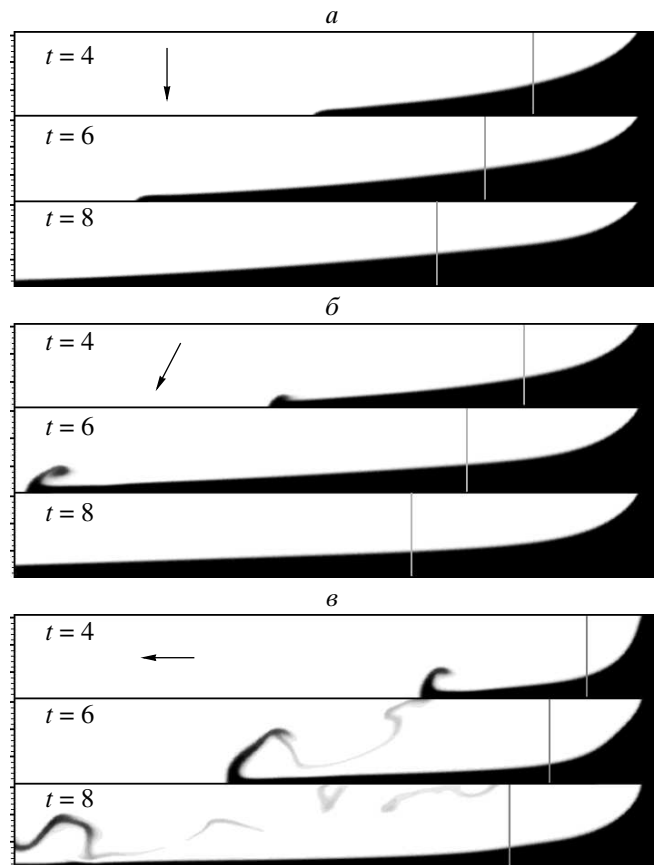


Рис. 6. Процесс перехода к стационарному пузырю в трубе с наклоном $\alpha = 0$ (горизонтальный случай) (а), 30° (б) и 90° (в). Стрелка указывает направление вектора g , а черточки — начальное положение границы раздела. В расчете положено $D = \pi$, $g = 1$

Прослеживалась эволюция течения от начальной (рис. 1а) до установившейся стадии (рис. 1в). Важным является переходный этап (рис. 1б), «соединяющий» начальную и конечную стадии. Было выполнено большое количество расчетов при разных значениях определяющих параметров N_y (плотность сетки), $\Delta x/\Delta y$ (вытянутость трубы), Ma (степень несжимаемости) и α (наклон). Несколько примеров процесса установления асимптотического режима показано на рис. 6. Вычислительный эксперимент подтверждает наличие клина 120° на свободной поверхности.

В горизонтальном случае установившаяся струя имеет ширину

$$h_j = D - \eta_j = D/2$$

(см. (5.6)). Установление струи происходит медленно, а пузыря — быстро. В установившемся состоя-

нии скорость стационарной струи равна $U_j = \sqrt{gD}$ (см. (5.6)) в системе координат, связанной с вершиной. Концевая точка j_{end} струи всегда пребывает в нестационарном состоянии. Из-за дополнительного выделения гравитационной энергии она движется со скоростью U_{end} большей, чем U_j . На участке между вершиной и концом j_{end} скорость приблизительно линейно²⁾ по координате x возрастает от U_j до U_{end} , а ширина приблизительно линейно убывает (течение с однородной деформацией) от $1/2$ до нуля (см. рис. 6). Нестационарность не локализована возле «носика» j_{end} , а растянута на всю струю, поэтому установление струи происходит медленно. «Носик» должен уйти очень далеко, чтобы наклон свободной границы $|\eta_x|$ в области струи стал мал.

Наоборот, переход пузыря в стационарный режим происходит довольно быстро. Медленная релаксация струи к стационарному состоянию не влияет на релаксацию пузыря, поскольку струя движется со «сверхзвуковой» скоростью (см. также [19]): $U_j > c_s$, где $c_s = \sqrt{gh_j} = \sqrt{gD/2}$ — «скорость звука» в приближении «мелкой воды», $h_j = D - \eta_j$ — ширина струи. Вне переходной зоны решение для струи можно получить в приближении мелкой воды. Переходная зона толщиной в несколько калибров D прилегает к вершине. Вне этой зоны углы наклона границы $|\eta_x|$ малы. Поэтому применима длинноволновая аппроксимация (мелкая вода). Течение мелкой воды эквивалентно одномерному (x, t) газодинамическому течению. В этом смысле струя j (рис. 6а) аналогична струе реактивного двигателя. Она описывается центрированной волной разрежения с показателем адиабаты $\gamma = 2$. Уравнения мелкой воды могут быть модифицированы на случай $\alpha \neq 0$.

На рис. 7а показано сравнение формы свободной границы η , следующей из численного решения, со стационарным приближенным аналитическим решением [19] при $\alpha = 0$, полученным методом приближенного конформного преобразования. Как видно из рисунка, в области пузыря имеется очень хорошее согласие между аналитическими и численными результатами, что свидетельствует о высокой точности последних.

Сравнение численных и аналитических границ η вблизи вершины пузыря при произвольном угле наклона α приведено на рис. 7б, в. Аналитический расчет выполнен методом, описанным в разд. 5. Как видно из рисунков, в окрестности вершины аналити-

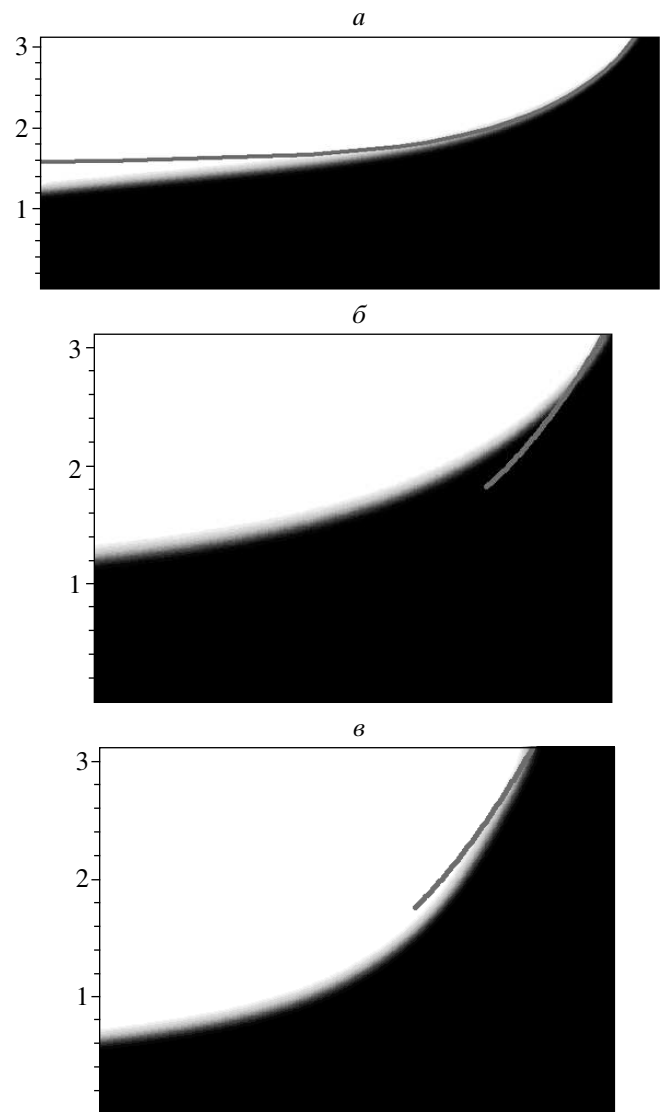


Рис. 7. Сопоставление стационарных форм пузырей при численном (в моменты $t = 8$ (а, б) и 5 (в)) и аналитическом расчетах ($\alpha = 0$ (а), 30° (б), 90° (в))

ческие и численные результаты согласуются удовлетворительно.

10. СКОРОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Мы описали переход пузыря в наклонной трубе к стационарному состоянию (рис. 1, б), а также провели сравнение теоретических результатов и данных моделирования по форме границы η (рис. 7). Рассмотрим теперь пространственную и временную зависимости скорости. Наибольший интерес представляют асимптотические ($t \rightarrow \infty$) значения. На рис. 8

²⁾ Если $\alpha \neq 0$, то скорость в струе растёт пропорционально $\sqrt{-x}$.

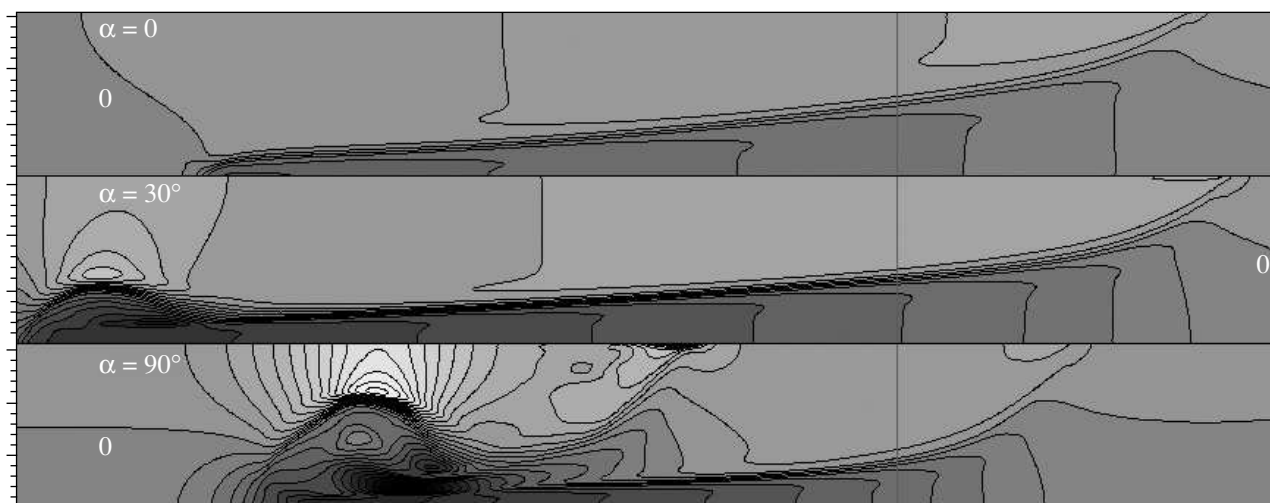


Рис. 8. Карта изолиний продольной скорости u в момент $t = 6$. Цифрой 0 выделена изолиния $u = 0$. Черный цвет — движение относительно стенок налево, в сторону струи, $u < 0$. Белый цвет — движение направо, в сторону пузыря, $u > 0$

представлена карта продольной скорости $u(x, y, t)$ в момент времени $t = 6$ в лабораторной системе координат, связанной со стенками. Изолинии продольной скорости u (с шагом 0.5) показаны на рис. 8. Нулевая изолиния помечена цифрой 0. Самый светлый цвет соответствует $u = +7$, самый темный — $u = -7$ (как и ранее, мы положили $D = \pi$, $g = 1$).

На рис. 6 и 8 хорошо видно, как с ростом наклона α усиливается вихревая система на конце струи. Видимо, это связано с уменьшением прижимающей составляющей ускорения $g_{\perp} = g \cos \alpha$. Вихри имеют вид половинки грибообразной структуры. Плотность газа ρ_l в 20 раз меньше плотности жидкости ρ_h . Тем не менее из-за инерции газа (аэродинамическое сопротивление [17, 18]) возникают «грибы». Это вызвано разгоном струй до высоких скоростей (рис. 8). При горизонтальном положении трубы гриба не видно (рис. 6а).

При крутых наклонах ($\alpha \sim 90^\circ$) прижимающее ускорение g_{\perp} мало. Концевой вихрь отходит от нижней стенки ($y = D$), по которой опускается струя, и прижимается к верхней стенке ($y = 0$) (ср. рис. 6 б, в и рис. 8 при $\alpha = 30^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$). При этом прижимающийся вихрь образует вихревую пару (диполь) со своим изображением на верхней стенке. Из-за знака циркуляции (на рис. 6, 8 по часовой стрелке) диполь движется против движения породившей этот вихрь струи (ср. с коллимационным эффектом при рэлей–тейлоровской турбулентности [41]). Скорость противодвижения настолько велика, что диполь начинает приближаться к вершине пузыря (кинограм-

ма на рис. 6в). Отметим, что промежуточные между $\alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$ углы имеют превышение (по сравнению с вертикальным случаем расположения трубы) не только по скорости пузыря $U(\alpha)$, но и по длине струи, см. рис. 8.

На рис. 9а показан профиль скорости $u(x, y = 0, t = 6)$ по оси x , вдоль которой всплывает пузырь. Ось x образует верхняя стенка трубы, см. рис. 1. По ней движется вершина пузыря. Около вихрей в случае $\alpha = 90^\circ$ скорости очень велики. Как было отмечено выше, это вызвано образованием быстрых вихревых диполей возле стенки.

Нас интересует динамика пузыря. Пока вихри далеко от вершины пузыря, применим анализ из разд. 3–6. Рассмотрим окрестность вершины (рис. 9б). На рис. 9б показаны те части профилей с рис. 9а ($t = 6$), которые находятся возле вершины. Положения границы раздела, найденные по средней плотности (изолиния $\rho_{av} = (1/2)(\rho_l + \rho_h)$) и по асимптотической скорости клиновидных пузырей $U(\alpha)$, помечены вертикальной и горизонтальной черточками, соответственно. Они определялись следующим образом. По профилю $\rho(x)$ (значения y и t фиксированы) ищется точка x_{ρ} , в которой выполняется равенство $\rho(x_{\rho}) = \rho_{av}$, и на графике $u(x)$ в точке $x = x_{\rho}$ строится вертикальная прямая до пересечения с кривой $u(x)$ (вертикальная черточка). На графике $u(x)$ строится также горизонтальная прямая на уровне $u = U(\alpha)$ для данного значения α . Она доводится до пересечения с кривой $u(x)$ в точке $x = x_u$ (горизонтальная черточка).

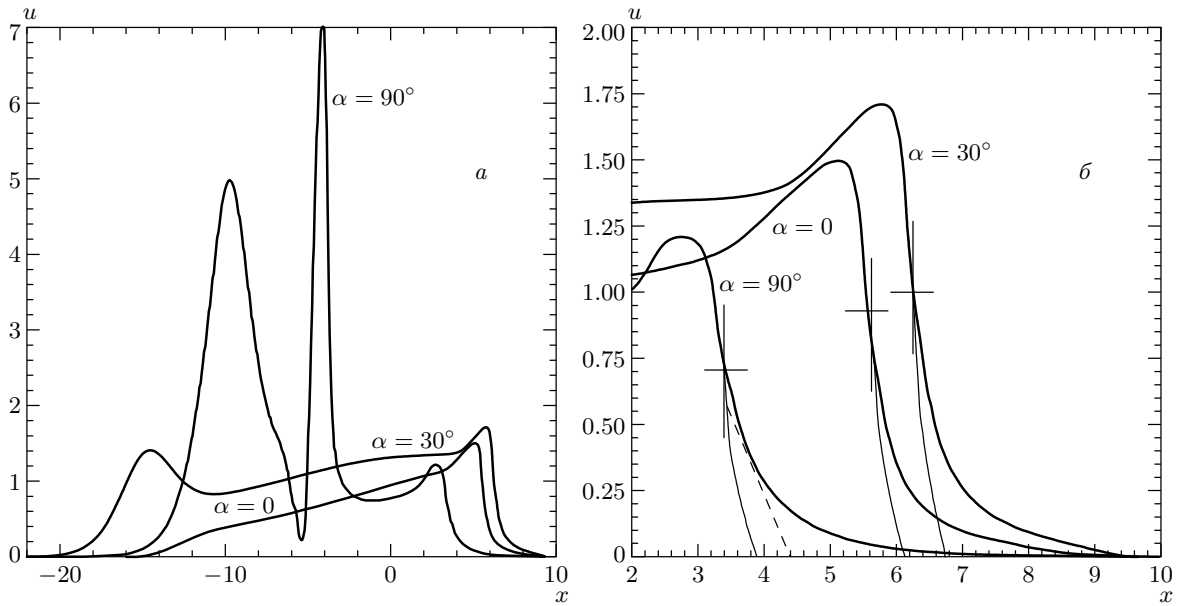


Рис. 9. Распределения скорости в лабораторной системе координат по верхней стенке внутри пузыря и за его вершиной (а), а также возле вершины (б), $t = 6$. «Всплески» скорости при $\alpha = 90^\circ$ вызваны вихревыми диполями

Координаты x_ρ и x_u очень близки. Это свидетельствует о том, что граница пузыря x_ρ , определяемая по скачку ρ , движется с необходимой скоростью. Значит, во-первых, теория довольно точна (значение $U(\alpha)$ теоретическое) и, во-вторых, пузырь в этот момент времени ($t = 6$) находится в состоянии, близком к стационарному.

На рис. 9б показаны теоретические зависимости $u(x)$ при разных α , определяющие распределения продольной скорости около клиновидной вершины. Это распределение имеет вид

$$u(x, y = 0, t = \infty) = -\sqrt{2\pi}\bar{U}(\alpha)\sqrt{gx}. \quad (10.1)$$

Выражение (10.1) представляет собой асимптотическую зависимость (стационарный режим, $t = \infty$), записанную в системе координат вершины пузыря (связанная система координат). Зависимость (10.1) можно получить с помощью метода годографа (разд. 4). Скорость $\bar{U}(\alpha)$ в (10.1) дается формулой (4.4). Асимптотические зависимости построены на рис. 9б тонкими сплошными линиями. Они начинаются на кривой $u(x)$ в точках с координатами x_ρ и продолжают вправо от этих точек. С помощью зависимости (10.1) можно оценить градиенты скорости в окрестности вершины пузыря.

Для сравнения на рис. 9б для случая $\alpha = 90^\circ$ (движение по вертикали) приведена зависимость

$$u(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{g}{D}}x, \quad (10.2)$$

относящаяся к случаю затупленного $2D$ -пузыря ($\theta_c = 90^\circ$). Его скорость равна

$$U_{90} = (0.33-0.34)\sqrt{gD}.$$

Здесь речь идет о «половинке» пузыря в полосе D (рис. 2б). Формула (10.2) следует из разложения (3.1). Кривая, соответствующая выражению (10.2) (штриховая линия на рис. 9б), выходит из точки (x_ρ, U_{90}) на плоскости xu . Эта точка лежит на вертикальной черточке. Чем тупее пузырь и, соответственно, шире его головная часть, тем медленнее уменьшается скорость в лабораторной системе координат при удалении от вершины (ср. зависимости (10.1) и (10.2)).

Из-за движения газа в пузыре скорость внутри пузыря не равна трансляционной скорости пузыря. Поэтому скорость продолжает возрастать и левее горизонтальных черточек на рис. 9б (подток газа к вершине). Если бы газ покоился относительно пузыря, то функция $u(x)$ левее точек x_u стремилась бы к постоянному значению $U(\alpha)$. При этом получалась бы «полочка» на зависимости $u(x)$ на уровне горизонтальной черточки.

Глубже других в жидкость в трубе внедряется пузырь при $\alpha = 30^\circ$ (рис. 9а, б). Это соответствует скоростям $U(30^\circ) > U(0) > U(90^\circ)$. Он же имеет са-

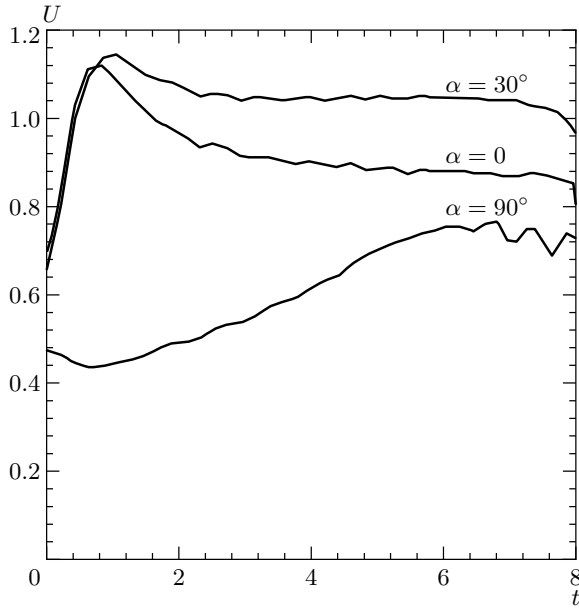


Рис. 10. Зависимости скорости вершины пузыря от времени в лабораторной системе координат

ую большую скорость на профиле скоростей $u(x)$ в районе вершины.

При удалении от вершины на заметные расстояния скорость начинает экспоненциально убывать. Это связано с эллиптичностью уравнений движения несжимаемой жидкости. Зависимости (10.1) и (10.2) справедливы вблизи вершины. Имеем

$$u \rightarrow a_1 \exp(-\pi x/D).$$

В обоих случаях (клиновидный и затупленный пузыри) при удалении от вершины доминирует наиболее крупномасштабная из гармоник Фурье с амплитудой a_1 , которая затухает медленнее других гармоник. В случае $\theta_c = 90^\circ$ имеем $a_1 \approx U_{90}$ [17, 18].

Рассмотрим теперь временную зависимость скорости. На рис. 10 показано, как происходит установление асимптотической скорости пузыря в переходном процессе от исходного состояния к асимптотическому режиму. Зависимости получены путем численного моделирования при $g = 1, D = \pi$. При больших временах зависимости стремятся к интересующим нас предельным значениям $U(\alpha; t \rightarrow \infty)$. Продолжительность перестройки на асимптотический режим зависит от начальной скорости u_0 и угла наклона α . При фиксированном наклоне α по кривым, представленным на рис. 10, можно найти асимптотические скорости $U(\alpha)$. Вместе с ними определяется дисперсия $\delta U(\alpha)$ (среднеквадратичное отклонение),

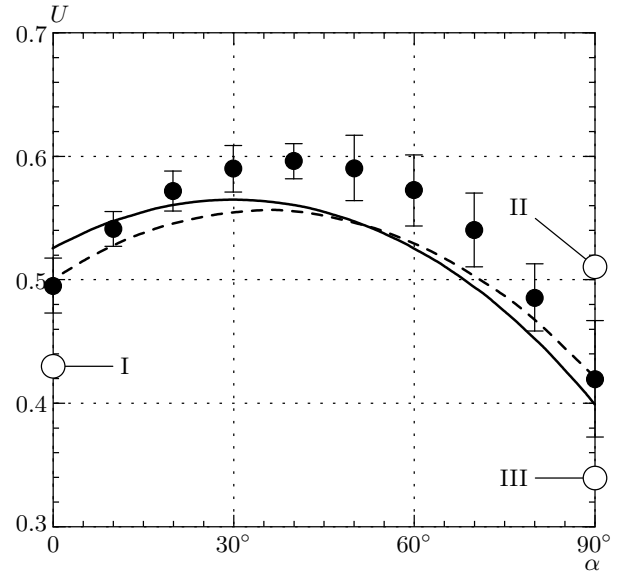


Рис. 11. Влияние наклона α на предельную или асимптотическую скорость 120-градусного пузыря: темные точки с погрешностями — численное моделирование, сплошная кривая — формула (4.4), штриховая кривая — расчет методом силового баланса (разд. 5), светлые точки на осях — различные теоретические модели (см. текст)

связанная с погрешностями численного нахождения скорости.

Зависимость продольной скорости пузыря от наклона $U(\alpha)$ представлена на рис. 11. Функция (4.4) (метод годографа, разд. 4) изображена сплошной кривой. Штриховой кривой представлены данные, полученные из условия постоянства импульса (разд. 5). Черные точки с погрешностями — результаты численного эксперимента. Наибольшей является погрешность в случае $\alpha = 90^\circ$ (вертикальное положение). Светлые точки I и II, находящиеся на осях $\alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$, получены, соответственно, с помощью моделей [34] и [26]. Точкой III помечена скорость «половинки» затупленного пузыря в полосе D (рис. 2б). Клиновидные пузыри прилегают к одной из сторон полосы и поэтому похожи на эту «половинку» (ср. рис. 2б, в и рис. 1в с рис. 2а).

Зависимости $U(\alpha)$, полученные двумя теоретическими методами и в численном эксперименте, расположены близко друг к другу. Разница значений с учетом погрешности моделирования не превышает 4%. При $\alpha = 90^\circ$ для клиновидного пузыря по данным теории и моделирования получается значение

$$U(90) = (0.41 - 0.42)\sqrt{gD}.$$

Значение, полученное в работе [26] (точка II), на 23 % превышает эту величину. Значение, полученное в работе [34] (точка I), на 16 % ниже точного значения (см. разд. 5).

Функции $U(\alpha)$ имеют максимум при $\alpha_{max} = 30^\circ$ (метод годографа) и при $\alpha_{max} \approx 40^\circ$ (метод силового баланса и моделирование).

11. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Сравним теоретические результаты, полученные для случая трехмерного течения (разд. 6), с данными эксперимента [6]. На рис. 12 показаны границы η . Кривая 1 получена с помощью эксперимента [6] с круглой трубой, а кривая 2 — путем вычислений, описанных в разд. 6, для угла $\theta_c = 125^\circ$. Вблизи вершины функции η удовлетворительно согласуются. Это означает, что удовлетворительное согласие должно иметься по скорости подъема. При малых поверхностных натяжениях эксперимент (рис. 12) убедительно свидетельствует против модели с профилем η в форме эллипса (в этом случае было бы $\theta_c = 90^\circ$).

Итоговые данные для 3D-течения и сравнение трехмерных и двумерных данных приведены на рис. 13. Черными точками с погрешностями показаны результаты эксперимента из работы [6]. Кривая с пометкой 2D DNS взята с рис. 11 для оценки влияния топологии течения (2D/3D) на скорость. Результаты расчетов методом силового баланса (разд. 6) при углах клина $\theta_c = 125^\circ, 115^\circ, 110^\circ$ показаны штриховыми кривыми. Все они выходят из точного значения, определяемого выражением (6.6) при $\alpha = 0$. Две светлые точки I и II на оси $\alpha = 90^\circ$ соответствуют скоростям осесимметричных конического и затупленного пузыря. Экспериментальное

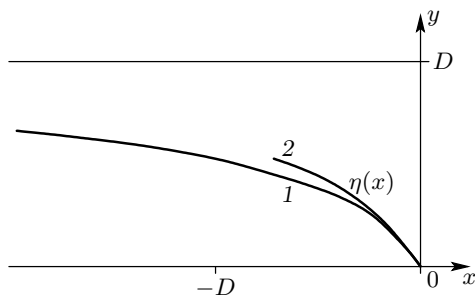


Рис. 12. Клиновидный 3D-пузырь в круглой трубе; кривая 1 — эксперимент [6], кривая 2 — расчет из разд. 6. Наклон $\alpha = 45^\circ$

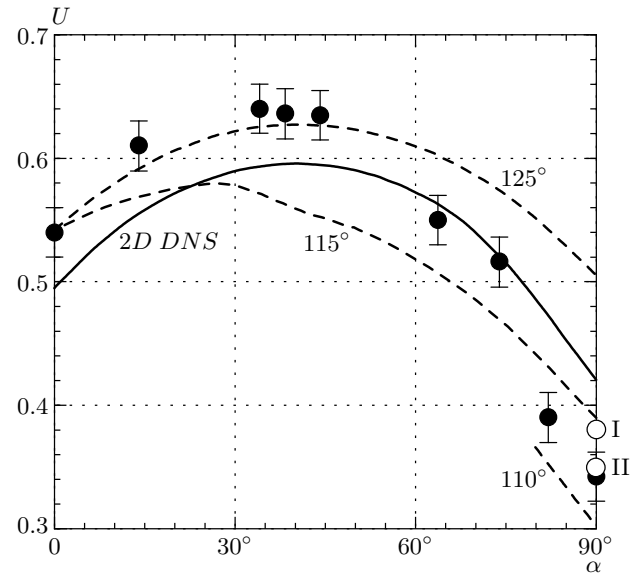


Рис. 13. 3D-течение в круглой наклонной трубе. Все зависимости (кроме кривой 2D DNS) относятся к 3D-случаю: темные точки с погрешностями — эксперимент [6], штриховые линии — расчеты методом силового баланса (разд. 6). Светлые точки при $\alpha = 90^\circ$ — различные теоретические модели (см. текст)

значение [6] при $\alpha = 90^\circ$ (черный кружок) приблизительно совпадает со скоростью затупленного пузыря (светлая точка II).

Расчеты, выполненные на основании законов сохранения (разд. 6), чувствительны к форме вершины (ср. штриховые линии на рис. 13). Скорость более острых пузырей больше, при этом существенны даже небольшие вариации угла θ_c .

Оценим ситуацию в целом. Имеются две особенности экспериментальной зависимости (черные точки на рис. 13). Одна из них — существование максимума при наклонах, отличных от вертикального. Теоретическая модель хорошо улавливает максимум. Другой особенностью является значительное уменьшение скорости $U(\alpha)$ при приближении наклона трубы к вертикали ($\alpha \rightarrow 90^\circ$). Эта скорость становится сравнима со скоростью симметричных пузырей, идущих вдоль оси. В 2D-геометрии такого быть не может, поскольку скорость пузыря, идущего по стенке, всегда больше (в $\sqrt{2}$ раз) скорости симметричного пузыря, идущего вдоль средней линии (из-за очевидного изменения поперечного размера). Важно, что уменьшение скорости начинается при углах, еще не равных вертикальному. Таким образом, возникает вопрос о пределе $U(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 90^\circ$

и сравнении этого предела со значением скорости U симметричных пузырей. При вертикальном положении трубы вершина пузыря, идущего вдоль стенки, может отойти от нее и переместиться на ось трубы.

Скорость $3D$ -пузырей в круглой трубе диаметра D становится даже меньше скорости $2D$ -пузырей в полосе, равной ширине D ! Видимо, это указывает на уменьшение угла θ_c . Пузырь становится более тупым при приближении наклона трубы к вертикали.

Итак, скорость асимметричных $3D$ -пузырей, поднимающихся по верхней стенке ($\alpha < 90^\circ$), примерно сравнивается со скоростью осесимметричных пузырей, поднимающихся по оси. В расчетах [2] (модели с эллипсом) получалось, что при малом поверхностном натяжении скорости асимметричного и симметричного $3D$ -пузырей примерно одинаковы.

Обобщим сравнительный анализ влияния $3D$ - и $2D$ -топологии на динамику пузыря. Наивное представление заключается в следующем. Считается, что при равных размерах в $3D$ -геометрии высвобождение гравитационной энергии идет быстрее (открываются «дополнительные каналы» движения), т. е. и пузырь всплывает быстрее, причем это убыстрение по сравнению с $2D$ -случаем значительное. Такое представление основывается на сравнении пузырей в квадратной (размера $\lambda \times \lambda$) и плоской (размера λ) трубах (отношение скоростей приблизительно равно $1/0.6 = 1.7$). Отношение скоростей в круглой и плоской трубах равных диаметров равно $0.35/0.24 = 1.5$.

Однако проведенный анализ показывает, что положение гораздо сложнее в случае наклонной трубы. В наклонных $3D$ -и $2D$ -трубах отношение скоростей немного превышает единицу (≈ 1.1) в районе максимума (средние наклоны). В горизонтальном случае это отношение точно равно $0.54/0.5 = 1.08$. Более того, оно становится даже заметно меньше единицы при наклонах трубы, близких к вертикальному.

12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена классическая задача о динамике жидкости, ограниченной свободной поверхностью, в поле гравитации. Эта тема имеет большое значение как для теории неустойчивости Рэлея–Тейлора, так и для важных технологических приложений, связанных с двухфазной гидродинамикой. Была сделана попытка преодолеть некий разделительный барьер между РТН и гидравликой. Это необходимо для объединения обширных материалов, накопленных в этих областях знаний.

В работе получены следующие новые результаты.

- 1) Определен угол и найдена скорость конических пузырей.
- 2) Вычислена скорость поднимающихся вертикально клиновидных пузырей (два теоретических метода и вычислительный эксперимент). Благодаря методу, использующему импульс пузыря, удалось преодолеть трудность, связанную с отсутствием простых формул разложения по гармоникам типа (3.1) в изучаемых здесь случаях периодических течений с особенностью на свободной границе. Данный метод позволил найти скорость конических пузырей.
- 3) Вычислена угловая зависимость $U(\alpha)$ во всем диапазоне наклонов.
- 4) Проведен вычислительный эксперимент для двухфазного течения в наклонных трубах. Это открывает широкие возможности анализа технологических проблем.

Авторы признательны С. И. Анисимову и О. М. Белоцерковскому за внимание к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 02–02–17499, 03–01–00700). Численное моделирование поддерживалось Комплексной программой Президиума РАН «Математическое моделирование, интеллектуальные системы и управление нелинейными механическими системами». А. М. О. также приятно выразить свою благодарность Фонду содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. B. Wallis, *One-Dimensional Two-Phase Flow*, McGraw-Hill, New York (1969).
2. I. N. Alves, O. Shoham, and Y. Taitel, *Chem. Eng. Sci.* **48**, 3063 (1993).
3. K. H. Bendiksen, *Int. J. Multiphase Flow* **10**, 467 (1984).
4. K. H. Bendiksen, *Int. J. Multiphase Flow* **11**, 797 (1985).
5. R. I. Nigmatulin, in: *Dynamics of Multiphase Systems*, Proc. Int. Conf. Multiphase Systems, ICMS 2000, ed. by M. Ilgamov, I. Akhatov, and S. Urmancheev, Ufa (2000), p. 1.
6. E. E. Zukoski, *J. Fluid Mech.* **25**, 821 (1966).
7. R. H. Bonnecaze, W. Eriskine, Jr., and E. J. Greskovich, *Amer. Inst. Chem. Eng. J.* **17**, 1109 (1971).

8. C. C. Maneri and N. Zuber, *Int. J. Multiphase Flow* **1**, 623 (1974).
9. A. R. Hasan and C. S. Kabir, *SPE Prod. & Facilities* **14**, 56 (1999).
10. Г. Э. Одишария, А. А. Точигин, *Прикладная гидродинамика газо-жидкостных смесей*, Всероссийский НИИ природных газов и газовых технологий, Ивановский гос. энергетический ун-в. (1998).
11. P. Vigneaux, P. Chenais, and J. P. Hulin, *Amer. Inst. Chem. Eng. J.* **34**, 781 (1988).
12. Р. И. Нигматулин, *Динамика многофазных сред*, Наука, Москва (1987).
13. L. Mattar and G. A. Gregory, *J. Can. Petr. Technol.* **13**, 69 (1974).
14. M. K. Nicholson, K. Aziz, and G. A. Gregory, *Canad. J. Chem. Eng.* **56**, 653 (1978).
15. D. M. Maron, N. Yacoub, and N. Brauner, *Lett. Heat Mass Transfer* **9**, 333 (1982).
16. H.-J. Kull, *Phys. Rep.* **206**, 197 (1991).
17. Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, Э. Е. Сон, *Гидродинамика перемешивания*, Изд-во МФТИ, Москва (1999).
18. N. A. Inogamov, *Astrophys. Space Phys. Rev.* **10**, 1 (1999).
19. T. B. Benjamin, *J. Fluid Mech.* **31**, 209 (1968).
20. D. T. Dumitrescu, *Z. Angew. Math. Mech.* **23**, 139 (1943).
21. R. M. Davies and G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. London A* **200**, 375 (1950).
22. D. Layzer, *Astrophys. J.* **122**, 1 (1955).
23. Н. А. Иногамов, А. М. Опарин, *ЖЭТФ* **116**, 908 (1999).
24. J. Hecht, U. Alon, and D. Shvarts, *Phys. Fluids* **6**, 4019 (1994).
25. Н. А. Иногамов, А. Ю. Демьянов, *Прикл. Мех. Тех. Физ.* **37**, 93 (1996).
26. J.-M. Vanden-Broeck, *Phys. Fluids A* **5**, 2454 (1993).
27. N. A. Inogamov, M. Tricottet, A. M. Oparin, and S. Bouquet, submitted to *Phys. Lett. A* (2003); E-print archives physics/0104084.
28. А. И. Дьяченко, *ДАН* **376**, 27 (2001).
29. V. E. Zakharov and A. I. Dyachenko, *Physica D* **98**, 652 (1996).
30. A. L. Velikovich and G. Dimonte, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3112 (1996).
31. Q. Zhang and S.-I. Sohn, *Z. Angew. Math. Phys.* **50**, 1 (1999).
32. M. Berning and A. M. Rubenchik, *Phys. Fluids* **10**, 1564 (1998).
33. C.-S. Yih, *Stratified Flows*, Acad. Press, New York (1980).
34. V. V. Bychkov, *Phys. Rev. E* **55**, 6898 (1997).
35. E. A. Kuznetsov and S. S. Minaev, *Phys. Lett. A* **221**, 187 (1996).
36. S. F. Shandarin and Ya. B. Zeldovich, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 185 (1989).
37. L. Kofman, D. Pogosyan, and S. Shandarin, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **242**, 200 (1990).
38. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра*, Наука, Москва (1973); Н. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New York, etc. (1953).
39. О. М. Белоцерковский, *Численное моделирование в механике сплошных сред*, Физматлит, Москва (1994).
40. О. М. Белоцерковский, А. М. Опарин, *Численный эксперимент в турбулентности*, Наука, Москва (2000).
41. Н. А. Иногамов, А. М. Опарин, А. Ю. Демьянов, Л. Н. Дембицкий, В. А. Хохлов, *ЖЭТФ* **119**, 822 (2001).