

# СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ МЮОННОГО ВОДОРОДА

*А. П. Мартыненко<sup>a\*</sup>, Р. Н. Фаустов<sup>b\*\*</sup>*

<sup>a</sup> Самарский государственный университет  
443011, Самара, Россия

<sup>b</sup> Научный Совет «Кибернетика» Российской академии наук  
117333, Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 августа 2003 г.

Вычислены поправки порядка  $\alpha^5$ ,  $\alpha^6$  в сверхтонкой структуре основного состояния атома мюонного водорода. Учитывались эффекты структуры ядра в однопетлевых и двухпетлевых фейнмановских амплитудах с помощью электромагнитных формфакторов протона и модификация сверхтонкой части брейтовского потенциала за счет электронной поляризации вакуума. Полное численное значение сверхтонкого расщепления  $1S$ -состояния составляет 182.725 мэВ и может рассматриваться как надежная оценка при проведении соответствующего эксперимента с точностью 30 ppm.

PACS: 31.30.Jv, 12.20.Ds, 32.10.Dk

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Прецизионное исследование спектров энергии простейших атомных систем (таких как мюоний, позитроний, атом водорода, мюонный водород и др.) имеет важное значение для проверки Стандартной модели, теории связанных состояний с высокой степенью точности. Двухчастичные связанные состояния представляют собой важный инструмент для уточнения значений фундаментальных физических констант (постоянная тонкой структуры, отношение масс мюона и электрона, постоянная Ридберга, зарядовый радиус протона и др.), используемых для создания эталонов единиц [1]. Можно утверждать, что необходимым дополнением к использованию больших ускорителей для проникновения в глубь частиц и поиску новых взаимодействий является наблюдение тонких эффектов в низкоэнергетической физике, включая связанные состояния в квантовой электродинамике (КЭД). Из них можно получить такие подробности поведения взаимодействия на малых расстояниях, которые удастся обнаружить лишь при очень больших энергиях [2].

Мюонный водород ( $\mu p$ ) наряду с электронным во-

дородом представляет собой простейшую атомную систему, в спектре энергии которой существенную роль играют эффекты сильного взаимодействия. Они связаны прежде всего с двумя формфакторами протона (электрическим  $G_E$  и магнитным  $G_M$ ), описывающими распределение заряда и магнитного момента. В случае лэмбовского сдвига основной вклад в спектр энергии порядка  $(Z\alpha)^4$  определяется дифференциальной характеристикой этих распределений — зарядовым радиусом протона  $r_p$ . Поэтому сравнение экспериментального результата и теоретического значения для лэмбовского сдвига, полученного с учетом поправок высокого порядка по  $\alpha$ , дает способ более точного определения величины  $r_p$ . Так, измерение лэмбовского сдвига  $2P-2S$  в  $\mu p$  с точностью 30 ppm позволит получить на порядок более точное значение зарядового радиуса протона по сравнению с другими методами [3]. При вычислении поправок на структуру ядра в сверхтонком расщеплении уровней энергии (см. работы [4–11]) необходимо знать вид самих электромагнитных формфакторов протона. Последние экспериментальные измерения  $G_E$  и  $G_M$  были проведены в Майнце 20 лет назад [12].

Другой важный вклад сильного взаимодействия в спектр энергии атома водорода связан с поляризу-

\*E-mail: mart@info.ssu.samara.ru

\*\*E-mail: faustov@theory.sinp.msu.ru

емостью протона [13–16]. Он возникает уже в однопетлевых амплитудах взаимодействия мюона (электрона) и протона, когда в результате виртуального комптоновского рассеяния на протоне в промежуточном состоянии могут рождаться, например, различные барионные резонансы. Точный расчет этого эффекта может быть выполнен с помощью экспериментальных данных и теоретических построений поляризационных структурных функций нуклона. Эффекты структуры и поляризуемости протона вносят основную теоретическую неопределенность в выражения для различных уровней энергии, и прежде всего в сверхтонкое расщепление основного состояния атома водорода, которое имеет следующий вид:

$$\Delta E_{theor}^{HFS} = E^F (1 + \delta^{QED} + \delta^{str} + \delta^{pol} + \delta^{HVP}),$$

$$E^F = \frac{8}{3} \alpha^4 \frac{\mu_P m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^3}, \quad (1)$$

где  $\mu_P$  — магнитный момент протона в ядерных магнетонах,  $m_1$  — масса мюона (электрона),  $m_2$  — масса протона,  $\delta^{QED}$  обозначает квантовоэлектродинамический вклад,  $\delta^{HVP}$  — вклад адронной поляризации вакуума (АПВ), а поправки  $\delta^{str}$  и  $\delta^{pol}$  — вклад сильных взаимодействий, связанных со структурой ядра и его поляризуемостью. Выражение (1) справедливо как для мюонного, так и для электронного водорода, но конкретный вид поправок существенно различается в этих двух случаях. Сверхтонкое расщепление основного состояния атома электронного водорода было измерено много лет назад с высокой точностью [17]:

$$\Delta \nu_{exp}^{HFS}(ep) = 1420405.7517667(9) \text{ кГц}. \quad (2)$$

Имеющееся в настоящее время расхождение между теорией и экспериментом (без учета эффекта поляризуемости протона), которое можно выразить в виде отношения [18]

$$\frac{\Delta E_{theor}^{HFS}(ep) - \Delta E_{exp}^{HFS}(ep)}{E^F(ep)} = -4.5(1.1) \cdot 10^{-6}, \quad (3)$$

содержит одну из основных погрешностей, обусловленную неточностью определения формфакторов протона. Главная часть однопетлевой поправки на структуру протона определяется следующим выражением (поправка Земаха) [4]:

$$\Delta E_Z = E^F \frac{2\mu\alpha}{\pi^2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(\mathbf{p}^2 + W^2)^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{G_E(-\mathbf{p}^2)G_M(-\mathbf{p}^2)}{\mu_P} - 1 \right] =$$

$$= E^F (-2\mu\alpha) R_p, \quad W = \alpha\mu, \quad (4)$$

$$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2),$$

— приведенная масса двух частиц,  $R_p$  — радиус Земаха. В координатном представлении поправка Земаха (4) определяется сверткой плотности распределения магнитного момента протона  $\rho_M(r)$  и плотности распределения электрического заряда  $\rho_E(r)$ . Радиус Земаха, который представляет собой интегральную характеристику эффектов структуры протона в сверхтонком расщеплении уровней энергии, может рассматриваться как новый параметр протона, совпадающий с точностью до членов  $O(\alpha)$  в электронном и мюонном водороде. Численное значение вклада Земаха для мюонного водорода равно

$$\Delta E_Z = -1.362 \pm 0.068 \text{ мэВ}, \quad (5)$$

где 5 % оценка погрешности связана с неточностями измерения формфакторов протона [12]. Поэтому постановка эксперимента по измерению сверхтонкого расщепления основного уровня мюонного водорода с такой же точностью 30 ppm, как и при измерении лэмбовского сдвига, наряду с электронным водородом позволила бы получить новую информацию о возможной величине вкладов  $\delta^{str}$  и  $\delta^{pol}$  [19].

Проведение такого эксперимента вызывает необходимость теоретического расчета поправок различного порядка с аналогичной точностью. Несмотря на то что расчеты сверхтонкой структуры (СТС) атома водорода проводятся уже много лет и достигли точности  $10^{-8}$  для квантовоэлектродинамических вкладов  $\delta^{QED}$  [20, 18], эти результаты нельзя непосредственно применить к мюонному водороду, проводя лишь замену массы электрона на массу мюона. Главным образом это связано с уже обсуждавшимися поправками на структуру ядра. Действительно, в случае мюонного водорода основная область промежуточных импульсов петлевых интегралов имеет порядок массы мюона. Следовательно, теоретический расчет таких амплитуд с хорошей точностью может быть основан только на их прямом интегрировании с учетом экспериментальных данных по электромагнитным формфакторам протона.

Исследование различных вкладов в уровни энергии мюонных атомов было выполнено много лет назад в [21]. Поэтому в настоящее время необходим новый более полный анализ всех возможных поправок в сверхтонкой структуре  $\mu p$  с учетом точности 30 ppm. В работе [22] изучены основные поправки порядка  $\alpha^5$  в сверхтонкой структуре  $2S$ -состояния  $\mu p$ , которые имеют важное значение для определения из эксперимента величины лэмбовского сдвига  $2P-2S$ . В данной работе мы вычисляем различные

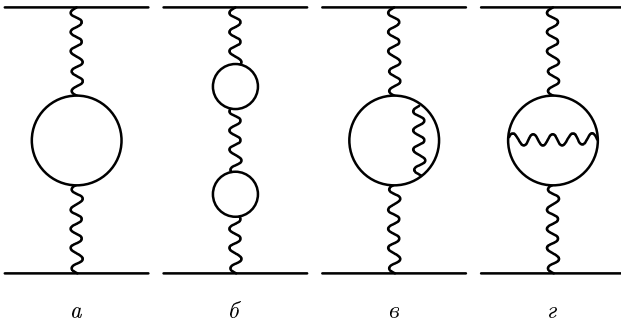


Рис. 1. Эффекты однопетлевой и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

вклады порядка  $\alpha^5$ ,  $\alpha^6$  в СТС мюонного водорода, которые определяются эффектами электромагнитного и сильного взаимодействий. Цель работы состояла в определении численного значения сверхтонкого расщепления основного состояния мюонного водорода с указанной точностью, которое могло бы послужить надежным ориентиром при постановке соответствующего эксперимента. Некоторые проблемы постановки эксперимента по измерению СТС атома  $\mu p$  обсуждались в работе [23].

## 2. ЭФФЕКТЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА В ОДНОФОТОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Наши вычисления различных уровней энергии водородоподобных атомов выполняются в рамках квазипотенциального подхода, в котором связанное состояние двух частиц описывается уравнением Шредингеровского типа [24]:

$$[G^f]^{-1} \psi_M \equiv \left( \frac{b^2}{2\mu_R} - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R} \right) \psi_M(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) \psi_M(\mathbf{q}), \quad (6)$$

где

$$b^2 = E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2,$$

$\mu_R = E_1 E_2 / M$  — релятивистская приведенная масса,  $M = E_1 + E_2$  — масса связанного состояния,  $E_{1,2}$  — энергии свободных частиц в системе центра масс. Квазипотенциал уравнения (6) строится в квантовой электродинамике по теории возмущений с помощью спроектированной на положительном частотном состоянии двухчастичной амплитуды рассеяния  $T$  вне массовой поверхности при нулевых относительных энергиях частиц:

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \dots, \quad (7)$$

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + \dots,$$

$$V^{(1)} = T^{(1)},$$

$$V^{(2)} = T^{(2)} - T^{(1)} \times G^f \times T^{(1)}, \dots \quad (8)$$

В качестве исходного приближения квазипотенциала  $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M)$  для связанной системы мы выбираем обычный кулоновский потенциал:

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) = V^C(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \Delta V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M).$$

Увеличение массы лептона при переходе от электронного водорода к мюонному водороду приводит к уменьшению радиуса борховской орбиты  $\mu p$ . В результате комптоновская длина волны электрона и радиус борховской орбиты оказываются одного порядка [1]:

$$\frac{\hbar^2}{\mu e^2} : \frac{\hbar}{m_e c} = 0.737384$$

( $m_e$  — масса электрона,  $\mu$  — приведенная масса в атоме  $\mu p$ ). Это приводит к существенному возрастанию роли эффектов поляризации вакуума в спектре энергии атома  $\mu p$  [25]. В однофотонном взаимодействии поправки поляризации вакуума показаны на рис. 1.

Чтобы получить вклад диаграммы *a* рис. 1 (электронная поляризация вакуума) в оператор взаимодействия частиц, необходимо выполнить следующую замену фотонного пропагатора [25]:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dv \frac{v^2 (1 - v^2/3)}{k^2 (1 - v^2) - 4m_e^2}. \quad (9)$$

Если

$$-k^2 = \mathbf{k}^2 \sim \mu_e^2 (Z\alpha)^2 \sim m_e^2 (Z\alpha)^2$$

(электронный водород,  $\mu_e$  — приведенная масса двух частиц в атоме водорода), то, пренебрегая первым слагаемым знаменателя в правой части (6), получим

$$-\frac{\alpha}{15\pi m_e^2}.$$

Но если

$$\mathbf{k}^2 \sim \mu^2 (Z\alpha)^2 \sim m_1^2 (Z\alpha)^2$$

(мюонный водород,  $m_1$  — масса мюона), то  $\mu\alpha$  и  $m_e$  оказываются одного порядка и делать разложение по  $\alpha$  в знаменателе (9) нельзя. В этом случае (мюонный водород) необходимо построить сверхтонкую часть потенциала в  $1\gamma$ -приближении, используя точное выражение (9). Говоря в дальнейшем о порядке

вклада  $\alpha^5$ ,  $\alpha^6$ , мы учитываем, что появление массы электрона  $m_e \sim \mu\alpha$  в знаменателе амплитуды приводит эффективно к уменьшению порядка вклада по  $\alpha$  на одну единицу. Известно, что квазипотенциал сверхтонкого взаимодействия мюона и протона в однофотонном приближении имеет вид [26]

$$V_{1\gamma}^{HFS}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi Z\alpha}{m_1 m_2} \frac{1+\kappa}{4} \frac{1}{k^2} \times [(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{k}^2 - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k})], \quad (10)$$

а в случае  $S$ -состояний сводится к следующему выражению:

$$V_{1\gamma}^{HFS}(\mathbf{k}) = \frac{8\pi Z\alpha}{3m_1 m_2} \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2}{4} (1+\kappa), \quad (11)$$

$\kappa = 1.792847337(29)$  — аномальный магнитный момент протона. Усредняя потенциал (11) по кулоновским волновым функциям, получим основной вклад порядка  $(Z\alpha)^4$  в сверхтонкое расщепление  $1S$ -состояния атома  $\mu p$  — энергию Ферми:

$$E^F = \frac{8}{3} (Z\alpha)^4 \frac{\mu^3}{m_1 m_2} (1+\kappa) = 182.443 \text{ мЭВ}. \quad (12)$$

Модификация кулоновского потенциала

$$V^C(\mathbf{k}) = -Ze^2/k^2$$

за счет поляризации вакуума (ПВ) определяется с учетом (9) следующим выражением [22]:

$$V_{VP}^C(\mathbf{k}) = -4\pi Z\alpha \frac{\alpha}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{3\xi^4} \frac{(2\xi^2 + 1)}{k^2 + 4m_e^2 \xi^2} d\xi. \quad (13)$$

Выполняя преобразование Фурье выражения (13), получим соответствующий оператор в координатном представлении:

$$V_{VP}^C(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} (2\xi^2 + 1)}{\xi^4} \times \left( -\frac{Z\alpha}{r} \exp(-2m_e \xi r) \right). \quad (14)$$

Аналогичным образом можно получить вклад электронной поляризации вакуума в сверхтонкую часть  $1\gamma$ -потенциала для  $S$ -состояний в импульсном и координатном представлениях соответственно:

$$V_{1\gamma, VP}^{HFS}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi Z\alpha}{m_1 m_2} \frac{(1+\kappa)}{4} \frac{2}{3} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \mathbf{k}^2 \frac{\alpha}{\pi} \times \int_1^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} (2\xi^2 + 1)}{3\xi^4 (k^2 + 4m_e^2 \xi^2)} d\xi, \quad (15)$$

$$V_{1\gamma, VP}^{HFS}(r) = \frac{8Z\alpha(1+\kappa)}{3m_1 m_2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{4} \frac{\alpha}{\pi} \times \int_1^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} (2\xi^2 + 1)}{3\xi^4} d\xi \times \left[ \pi\delta(r) - \frac{m_e^2 \xi^2}{r} \exp(-2m_e \xi r) \right]. \quad (16)$$

Последнее выражение позволяет получить поправку электронной поляризации вакуума порядка  $\alpha^5$  в СТС атома  $\mu p$ . Имея ввиду, что волновая функция  $1S$ -состояния  $\mu p$  имеет вид

$$\psi_{100}(r) = \frac{W^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Wr}, \quad W = \mu Z\alpha, \quad (17)$$

представим эту поправку в виде

$$\Delta E_{1\gamma, VP}^{HFS} = \frac{8\mu^3 (Z\alpha)^4 (1+\kappa)}{3m_1 m_2} \frac{\alpha}{\pi} \frac{m_e^3}{3W^3} \times \int_{m_e/W}^\infty \frac{\sqrt{(W^2/m_e^2)\xi^2 - 1}}{\xi^4} \left( 2\frac{W^2}{m_e^2} \xi^2 + 1 \right) d\xi \times \left[ 1 - \int_0^\infty \exp\left(-\frac{rm_e(\xi+1)}{W\xi}\right) r dr \right] = 0.398 \text{ мЭВ}. \quad (18)$$

Вклад мюонной поляризации вакуума (МПВ) может быть получен с помощью выражения (16), в котором необходимо заменить  $m_e \rightarrow m_1$ . Эта поправка имеет порядок  $\alpha^6$  по причине, указанной после формулы (9). Ее численное значение равно

$$\Delta E_{1\gamma, MVP}^{HFS} = 0.004 \text{ мЭВ}. \quad (19)$$

Вклады такого же порядка  $\alpha^6$  дают диаграммы двухпетлевой электронной поляризации вакуума, показанные на рис. 1б, в, г. Потенциал взаимодействия частиц, отвечающий амплитуде с двумя последовательными электронными петлями, может быть получен с помощью двукратной замены (9) в фотонном пропагаторе. В координатном представлении он имеет вид

$$\begin{aligned}
 V_{1\gamma, VP-VP}^{HFS}(r) &= \frac{8\pi Z\alpha(1+\kappa)}{3m_1m_2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \times \\
 &\times \int_1^\infty \frac{\sqrt{\xi^2-1}(2\xi^2+1)}{3\xi^4} d\xi \times \\
 &\times \int_1^\infty \frac{\sqrt{\eta^2-1}(2\eta^2+1)}{3\eta^4} d\eta \times \\
 &\times \left[ \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{\pi r(\eta^2-\xi^2)} \times \right. \\
 &\left. \times (\eta^4 \exp(-2m_e\eta r) - \xi^4 \exp(-2m_e\xi r)) \right] \quad (20)
 \end{aligned}$$

и дает в спектре энергии следующий результат:

$$\Delta E_{1\gamma, VP-VP}^{HFS} = 0.001 \text{ мЭВ}. \quad (21)$$

Для вычисления вкладов диаграмм *в*, *г* на рис. 1, которые определяются поляризационным оператором второго порядка, необходимо использовать следующую подстановку в фотонном пропагаторе [27]:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k^2} &\rightarrow \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v)}{4m_e^2 + k^2(1-v^2)} dv = \\
 &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{2}{3} \int_0^1 dv \frac{v}{4m_e^2 + k^2(1-v^2)} \times \\
 &\times \left\{ (3-v^2)(1+v^2) \left[ \text{Li}_2\left(-\frac{1-v}{1+v}\right) + 2 \text{Li}_2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \ln \frac{1+v}{2} - \ln \frac{1+v}{1-v} \ln v \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{11}{16}(3-v^2)(1+v^2) + \frac{v^2}{4} \right] \ln \frac{1+v}{1-v} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{3}{2}v(3-v^2) \ln \frac{1-v^2}{4} - 2v(3-v^2) \ln v \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8}v(5-3v^2) \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

В данном случае при определении численного значения вклада удобно воспользоваться координатным представлением и привести потенциал взаимодействия частиц к виду

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{1\gamma, 2-loop}^{HFS} VP(r) &= \\
 &= \frac{8\pi Z\alpha(1+\kappa)}{3m_1m_2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v)dv}{(1-v^2)} \times \\
 &\times \left[ \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2}{\pi r(1-v^2)} \exp\left(-\frac{2m_e r}{\sqrt{1-v^2}}\right) \right]. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Оператор (22) дает следующий вклад в СТС атома  $\mu p$ :

$$\Delta E_{1\gamma, 2-loop}^{HFS} VP = 0.002 \text{ мЭВ}. \quad (24)$$

Отметим здесь, что поскольку мы получаем вклады в спектр энергии численно, соответствующие результаты представлены с точностью 0.001 мЭВ.

### 3. ВТОРОЙ ПОРЯДОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Поправки второго порядка теории возмущений в спектре энергии определяются редуцированной кулоновской функцией Грина (РКФГ) [28], частичное разложение которой имеет вид

$$\tilde{G}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \tilde{g}_{nl}(r, r') Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}'). \quad (25)$$

Радиальная функция  $\tilde{g}_{nl}(r, r')$  была получена в [28] в виде штурмовского разложения по полиномам Лагерра. Приведем ее выражение для 1S-состояния:

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}_{10}(r, r') &= -4\mu^2 Z\alpha \left( \sum_{m=2}^\infty \frac{L_{m-1}^1(x) L_{m-1}^1(x')}{m(m-1)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x'}{2} \right) \exp\left(-\frac{x+x'}{2}\right), \quad (26)
 \end{aligned}$$

где  $x = 2\mu Z\alpha r$ ,  $L_n^m$  — обычные полиномы Лагерра, определяемые формулой

$$L_n^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x} x^{n+m}). \quad (27)$$

Ряд слагаемых квазипотенциала содержит  $\delta(\mathbf{r})$ , поэтому необходимо знать  $\tilde{G}_1(\mathbf{r}, 0)$ . Выражение для РКФГ в этом случае было получено в [29] с помощью представления Хостлера для кулоновской функции Грина в результате вычитания полюсного члена в виде

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{1S}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{Z\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{2e^{-x/2}}{x} \times \\
 &\times [2x(\ln x + C) + x^2 - 5x - 2], \quad (28)
 \end{aligned}$$

где  $C = 0.5772 \dots$  — постоянная Эйлера. Основной вклад порядка  $\alpha^5$  во втором порядке теории возмущений определяется выражением

$$\Delta E_{1\text{SOPT}}^{HFS} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\langle \psi_1^c | V_{VP}^C | \psi_n^c \rangle \langle \psi_n^c | \Delta V_{1\gamma}^{HFS} | \psi_1^c \rangle}{E_1^c - E_n^c}, \quad (29)$$

в котором  $\Delta V_{1\gamma}^{HFS} \sim \delta(\mathbf{r})$ . Используя соотношения (14), (28), мы можем представить (29) в виде

$$\Delta E_{1\text{SOPT}}^{HFS} = -E^F \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^{\infty} d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \times \\ \times \int_0^{\infty} dx \exp\left(-x \left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)\right) \times \\ \times [2x(\ln x + C) + x^2 - 5x - 2] = 0.795 \text{ мэВ}. \quad (30)$$

Вклад порядка  $\alpha^6$  во втором порядке теории возмущений, который определяется поляризацией вакуума, можно получить, выполнив в (29) замену

$$\Delta V_{1\gamma}^{HFS} \rightarrow \Delta V_{1\gamma\text{VP}}^{HFS}.$$

Используя явные выражения для волновой функции  $\psi_1^c(\mathbf{r})$ , РКФГ (25) и (28), мы получили эту поправку в виде

$$\Delta E_{2\text{SOPT}}^{HFS} = -E^F \alpha^2 \frac{m_e^2}{W^2} \frac{8}{9\pi^2} \times \\ \times \int_1^{\infty} d\xi \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} \times \\ \times \int_1^{\infty} d\eta \left(1 + \frac{1}{2\eta^2}\right) \frac{\sqrt{\eta^2 - 1}}{\eta^2} H\left(\xi, \eta, \frac{m_e}{W}\right), \quad (31)$$

$$H\left(\xi, \eta, \frac{m_e}{W}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)^2 \left(1 + \frac{m_e \eta}{W}\right)^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{\frac{W}{m_e \xi} + \frac{W}{m_e \eta} + \frac{W^2}{m_e^2 \xi \eta}} - \ln \frac{\left(\frac{W}{m_e \xi} + \frac{W}{m_e \eta} + \frac{W^2}{m_e^2 \xi \eta}\right)}{\left(1 + \frac{W}{m_e \xi}\right) \left(1 + \frac{W}{m_e \eta}\right)} \right] + \\ + \eta^2 \left[ \frac{5}{2 \left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)^2 \left(1 + \frac{m_e \eta}{W}\right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)^2 \left(1 + \frac{m_e \eta}{W}\right)^3} - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)^3 \left(1 + \frac{m_e \eta}{W}\right)^2} \right] + \\ + \frac{W^2}{m_e^2} \left[ \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)^2} \left(1 - \ln \left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)\right) - \right. \\ \left. - \frac{5}{2 \left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)^3} - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e \xi}{W}\right)} \right]. \quad (32)$$

Численное значение этого вклада равно

$$\Delta E_{2\text{SOPT}}^{HFS} = 0.002 \text{ мэВ}. \quad (33)$$

Второй порядок теории возмущений дает также другие релятивистские поправки порядка  $(Z\alpha)^6$ , включая эффекты отдачи, которые были изучены в [30, 31, 32]. Их численные значения представлены в таблице.

#### 4. ЭФФЕКТЫ СТРУКТУРЫ ПРОТОНА И ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА

Поправки на структуру протона дают в случае мюонного водорода больший относительный вклад в спектр энергии по сравнению с электронным водородом, так как отношение масс электрона и мюона  $m_e/m_1 = 4.83633210(15) \times 10^{-3}$  [1]. В СТС атома  $\mu\text{p}$  эти поправки определяются однопетлевыми диаграммами, показанными на рис. 2.

Для построения квазипотенциала, соответствующего этим двум диаграммам, запишем протонный тензор в виде

$$M_{\mu\nu}^{(p)} = \bar{u}(q_2) \left[ \gamma_\mu F_1 + \frac{i}{2m_2} \sigma_{\mu\omega} k^\omega F_2 \right] \times \\ \times \frac{\hat{p}_2 - \hat{k} + m_2}{(p_2 - k)^2 - m_2^2 + i0} \left[ \gamma_\nu F_1 - \frac{i}{2m_2} \sigma_{\nu\lambda} k^\lambda F_2 \right] u(p_2), \quad (34)$$

где  $p_2, q_2$  — 4-импульсы протона в начальном и конечном состояниях. Проецируя последовательно мюон и протон на состояния  $^1S_0$  и  $^3S_1$  с помощью проекционных операторов

Поправки порядка  $\alpha^5, \alpha^6$  в СТС основного состояния атома мюонного водорода

Вклад в СТС атома $\mu p$	Численное значение вклада в мэВ	Ссылка на результат
Энергия Ферми $E^F$	182.443	[18], (12)
Поправка с АММ мюона $a_\mu E^F$ порядка $\alpha^5, \alpha^6$	0.213	[18]
Релятивистская поправка $\frac{3}{2}(Z\alpha)^2 E^F$ порядка $\alpha^6$	0.015	[43]
Релятивистские и радиационные поправки на отдачу с учетом $\kappa$ ядра порядка $\alpha^6$	0.014	[30]
Вклад однопетлевой электронной поляризации вакуума $1\gamma$ -взаимодействия порядка $\alpha^5$	0.398	(18)
Вклад однопетлевой мюонной поляризации вакуума $1\gamma$ -взаимодействия порядка $\alpha^6$	0.004	(19)
Поправки второго порядка теории возмущений, определяемые ПВ, порядка $\alpha^5, \alpha^6$	0.797	(30)+(33)
Поправка на структуру ядра порядка $\alpha^5$	-1.215	[22], (40)
Поправка на структуру ядра порядка $\alpha^6$	-0.014	[8]
Вклад электронной поляризации вакуума + поправки на структуру ядра порядка $\alpha^6$	-0.021	(43)
Вклад двухпетлевой электронной поляризации вакуума $1\gamma$ -взаимодействия порядка $\alpha^6$	0.003	(21)+(24)
Поправка собственной энергии мюона + поправки на структуру ядра порядка $\alpha^6$	0.008	(50)
Вершинные поправки + поправки на структуру ядра порядка $\alpha^6$	-0.014	(61)
Поправка диаграммы «медуза» + поправки на структуру ядра порядка $\alpha^6$	0.004	(66)
Поправка АПВ порядка $\alpha^6$	0.004	(45)
Поправка на поляризуемость протона порядка $\alpha^5$	0.084	[16]
Вклад слабого взаимодействия	0.002	[18]
Суммарный вклад	$182.725 \pm 0.062$	

$$\hat{\pi}({}^1S_0) = [u(p_2)\bar{v}(p_1)]_{S=0} = \frac{(1 + \gamma^0)}{2\sqrt{2}}\gamma_5, \quad (35)$$

$$\hat{\pi}({}^3S_1) = [u(p_2)\bar{v}(p_1)]_{S=1} = \frac{(1 + \gamma^0)}{2\sqrt{2}}\hat{\epsilon}$$

( $\epsilon^\mu$  — вектор поляризации состояния со спином  $S = 1$ ) и пренебрегая импульсами относительного движения частиц в начальном и конечном состояниях, получим следующий вклад в СТС:

$$\begin{aligned} \Delta E_{str}^{HFS} = E^F \frac{Z\alpha m_1 m_2}{8\pi n^3(1 + \kappa)} \delta_{l0} \times \\ \times \int \frac{id^4k}{\pi^2(k^2)^2} \left[ \frac{16k^6 k_0^2}{m_2^2} F_2^2 + \frac{32k^8}{m_2^2} F_2^2 - 64k^2 k_0^4 F_2^2 + \right. \\ \left. + 16k^4 k_0^2 F_1^2 + 128k^4 k_0^2 F_1 F_2 + 64k^4 k_0^2 F_2^2 + 32k^6 F_1^2 + \right. \\ \left. + 64k^6 F_1 F_2 \right] \frac{1}{(k^4 - 4m_1^2 k_0^2)(k^4 - 4m_2^2 k_0^2)}. \quad (36) \end{aligned}$$

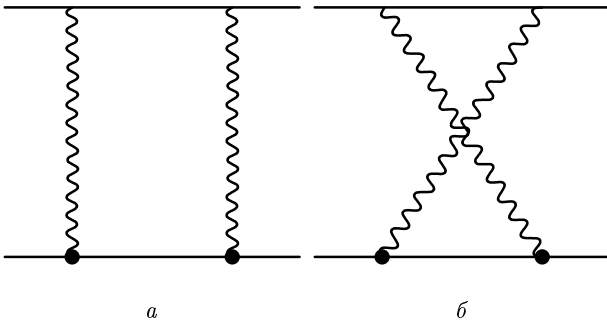


Рис. 2. Поправки на структуру протона порядка  $(Z\alpha)^5$ . Жирной точкой на диаграмме обозначен вершинный оператор протона

Перейдем в (36) к интегрированию по четырехмерному евклидову пространству:

$$\int d^4k = 4\pi \int k^3 dk \int \sin^2 \phi d\phi, \quad k_0 = k \cos \phi. \quad (37)$$

После аналитического интегрирования по углу  $\phi$  мы можем представить (36) в виде одномерного интеграла по петлевому импульсу  $k$ :

$$\Delta E_{str}^{HFS} = -E^F \frac{Z\alpha}{8\pi n^3(1+\kappa)} \delta_{l0} \int_0^\infty \frac{dk}{k} V(k),$$

$$V(k) = \frac{2F_2^2 k^2}{m_1 m_2} + \frac{\mu}{(m_1 - m_2)k(k + \sqrt{4m_1^2 + k^2})} \times$$

$$\times \left[ -128F_1^2 m_1^2 - 128F_1 F_2 m_1^2 + 16F_1^2 k^2 + \right.$$

$$\left. + 64F_1 F_2 k^2 + 16F_2^2 k^2 + \frac{32F_2^2 m_1^2 k^2}{m_2^2} + \frac{4F_2^2 k^4}{m_1^2} - \frac{4F_2^2 k^4}{m_2^2} \right] +$$

$$+ \frac{\mu}{(m_1 - m_2)k(k + \sqrt{4m_2^2 + k^2})} [128F_1^2 m_2^2 +$$

$$+ 128F_1 F_2 m_2^2 - 16F_1^2 k^2 - 64F_1 F_2 k^2 - 48F_2^2 k^2]. \quad (38)$$

Для устранения инфракрасной расходимости (38) необходимо учесть вклад итерационного члена квазипотенциала (8) в СТС атома  $\mu p$ :

$$\Delta E_{iter, str}^{HFS} = -\langle V_{1\gamma} \times G^f \times V_{1\gamma} \rangle_{str}^{HFS} =$$

$$= -\frac{64}{3} \frac{\mu^4 (Z\alpha)^5 (1+\kappa)}{m_1 m_2 \pi n^3} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2}, \quad (39)$$

где угловые скобки означают усреднение оператора взаимодействия по кулоновской волновой функции основного состояния, а индекс «HFS» указывает на выделение сверхтонкой части в итерационном слагаемом квазипотенциала (8). Суммарный

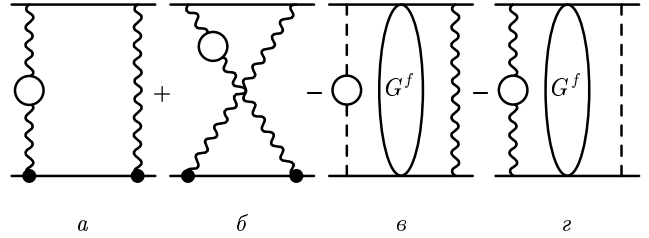


Рис. 3. Поправки структуры протона и поляризации вакуума порядка  $\alpha(Z\alpha)^5$ . Штриховой линией на диаграмме обозначен кулоновский фотон

вклад (38), (39) совпадает с результатом [22]. При интегрировании (38), (39) использовалась параметризация для электромагнитных формфакторов протона, полученная на основе анализа упругого лептон-нуклонного рассеяния [12]. Численное значение поправки на структуру протона порядка  $(Z\alpha)^5$  равно

$$\Delta E_{str}^{HFS} + \Delta E_{iter, str}^{HFS} = -1.215 \text{ мЭВ}. \quad (40)$$

Эффекты структуры протона необходимо учитывать и в амплитудах более высокого порядка по  $\alpha$ , показанных на рис. 3.

Вклад диаграмм *a*, *б* на рис. 3 в потенциал может быть получен так же, как для амплитуд рис. 2. При этом в пропагаторе одного из обменных фотонов необходимо провести замену (9). Соответствующая поправка в сверхтонком расщеплении уровня энергии примет вид

$$\Delta E_{str, VP}^{HFS} = -E^F \frac{Z\alpha}{8\pi(1+\kappa)n^3} 2\frac{\alpha}{\pi} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{v^2(1-v^2/3) dv}{k^2(1-v^2) + 4m_e^2} \int_0^\infty dk V_{VP}(k), \quad (41)$$

где потенциал  $V_{VP}(k)$  отличается от  $V(k)$  в выражении (38) лишь дополнительным множителем  $k^2$ . Несмотря на то что интеграл в (41) является конечным, амплитудные члены квазипотенциала рис. 3*a*, *б* необходимо дополнить двумя итерационными слагаемыми, показанными на рис. 3*в*, *г*. Первое слагаемое  $\langle V^c \times G^f \times \Delta V_{VP}^{HFS} \rangle$ , имеющее порядок  $\alpha(Z\alpha)^4$ , необходимо вычесть, так как  $2\gamma$ -амплитуды *a*, *б* на рис. 3 воспроизводят вклад низшего порядка. Второе слагаемое  $\langle V_{VP}^c \times G^f \times V_{1\gamma}^{HFS} \rangle$ , которое также имеет порядок  $\alpha(Z\alpha)^4$ , аналогично по своей структуре выражению (29) второго порядка теории возмущений. Вклады указанных итерационных слагаемых в СТС атома  $\mu p$  совпадают:



$$\begin{aligned} \Delta E_{iter, VP+str}^{HFS} &= -2\langle V^c \times G^f \times \Delta V_{VP}^{HFS} \rangle^{HFS} = \\ &= -2\langle V_{VP}^c \times G^f \times \Delta V_{1\gamma}^{HFS} \rangle^{HFS} = \\ &= -E^F \frac{4(Z\alpha)\mu\alpha}{m_e\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^1 \frac{v^2(1-v^2/3)dv}{k^2(1-v^2)+1}, \quad (42) \end{aligned}$$

где мы дополнительно привели импульс интегрирования  $k$  к безразмерному виду с помощью массы электрона  $m_e$ . Тогда численное значение эффектов структуры протона и поляризации вакуума  $2\gamma$ -обменных амплитуд в СТС атома  $\mu p$  равно

$$\Delta E_{VP, str}^{HFS} + 2\Delta E_{iter, VP+str}^{HFS} = -0.021 \text{ мэВ}. \quad (43)$$

Вклад адронной поляризации вакуума в СТС основного состояния  $\mu p$  исследовался в [33]. Здесь мы можем представить его в другой форме, используя выражения (38), (41):

$$\begin{aligned} \Delta E_{HVP}^{HFS} &= -E^F \frac{\alpha(Z\alpha)}{4\pi^2(1+\kappa)} \times \\ &\times \int_{4m_\pi^2}^\infty \frac{\rho(s)ds}{k^2+s} \int_0^\infty dk V_{VP}(k). \quad (44) \end{aligned}$$

Разбивая всю область интегрирования по  $s$  на интервалы, в которых сечение  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны,

$$\rho(s) = \sigma^h(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})/3s\sigma_{\mu\mu},$$

известно из эксперимента [34], мы можем выполнить интегрирование в (44). Численно вклад (44) совпадает с результатом [33]:

$$\Delta E_{HVP}^{HFS} = 0.004 \text{ мэВ}. \quad (45)$$

### 5. ЭФФЕКТЫ СТРУКТУРЫ ПРОТОНА, СОБСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И ВЕРШИННЫЕ ПОПРАВКИ ПОРЯДКА $\alpha(Z\alpha)^5$

Существует еще целый ряд важных вкладов порядка  $\alpha^6$ , которые определяются диаграммами, показанными на рис. 4, 5. Радиационные поправки этих амплитуд порядка  $\alpha(Z\alpha)^5$ , включая эффекты отдачи, исследовались ранее как в лэмбовском сдвиге, так и в сверхтонкой структуре водородоподобных атомов [18, 35, 36]. При этом для радиационных фотонов удобно использовать калибровку Фрида-Йенни (ФЙ) [37–39], в которой амплитуды на массовой поверхности не содержат инфракрасных расходимостей. Инфракрасная конечность диаграмм Фейнмана в этой калибровке позволяет

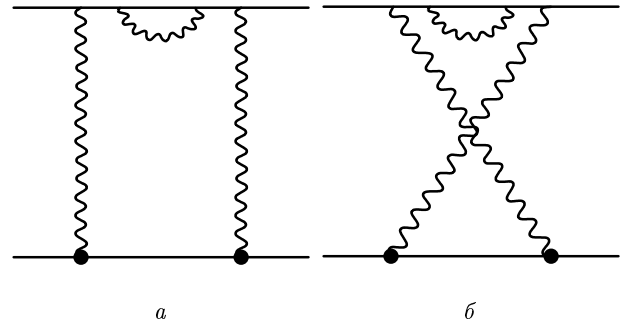


Рис. 4. Эффекты структуры протона и собственной энергии мюона порядка  $\alpha(Z\alpha)^5$

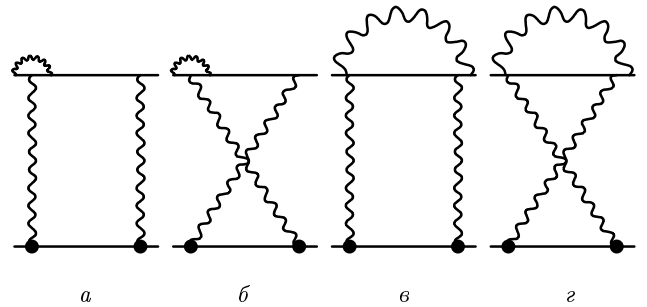


Рис. 5. Эффекты структуры протона и вершинные мюонные поправки порядка  $\alpha(Z\alpha)^5$

провести стандартную вычитательную процедуру на массовой поверхности без введения массы фотона. Рассмотрим радиационные поправки, которые определяются собственно-энергетическими вставками в мюонную линию. Перенормированный массовый оператор в калибровке ФЙ равен [18]

$$\Sigma^R(p) = \frac{\alpha}{\pi} (\hat{p}-m)^2 \int_0^1 dx \frac{-3\hat{p}x}{m_1^2x+(m_1^2-p^2)(1-x)}. \quad (46)$$

Выполняя вставки (45) в лептонном тензоре, входящем в двухфотонные обменные взаимодействия, и используя проекционные операторы (35), мы можем построить сверхтонкую часть квазипотенциала диаграмм, представленных на рис. 4. При этом, как и ранее, вершина взаимодействия протона с фотоном должна определяться электрическим и магнитным формфакторами, так как характерные петлевые импульсы имеют порядок массы мюона. Свертка протонного и лептонного тензоров по лоренцевским индексам, вычисление следов  $\gamma$ -матриц Дирака было выполнено с помощью системы Form [40]. Переходя в евклидово пространство переменной  $k$ , мы можем представить поправку к СТС атома  $\mu p$  в виде

$$\Delta E_{2\gamma, SE}^{HFS} = \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{\pi^2 n^3} \delta_{l0} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 x dx \int_0^\infty k dk \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi V_{SE}(k, \phi, x), \quad (47)$$

$$V_{SE}(k, \phi, x) = \frac{1}{(k^2 + 4m_2^2 \cos^2 \phi)[(xm_1^2 + \bar{x}k^2)^2 + 4m_1^2 \bar{x}^2 k^2 \cos^2 \phi]} \left\{ -\frac{4m_1^2 k^2 F_2^2 (x + 6\bar{x}) \cos^2 \phi}{m_2^2} - \frac{8m_1^2 k^2 x F_2^2}{m_2^2} + \right. \\ \left. + 16m_1^2 F_2 \cos^4 \phi (4F_1 \bar{x} - F_2 x - 2F_2 \bar{x}) + 16m_1^2 \cos^2 \phi (F_1^2 x + 6F_1^2 \bar{x} + 4F_1 F_2 x + 8F_1 F_2 \bar{x} + F_2^2 x + 2F_2^2 \bar{x}) + \right. \\ \left. + 32m_1^2 x F_1 (F_1 + F_2) - \frac{4k^4}{m_2^2} F_2^2 \bar{x} \cos^2 \phi - \frac{8k^4}{m_2^2} F_2^2 \bar{x} - 16k^2 F_2^2 \bar{x} \cos^4 \phi + 16k^2 \bar{x} \times \right. \\ \left. \times \cos^2 \phi (F_1^2 + 4F_1 F_2 + F_2^2) + 32k^2 F_1 \bar{x} (F_1 + F_2) \right\}. \quad (48)$$

Выполняя в этом соотношении интегрирование по углу  $\phi$ , получаем представление вклада (47) в виде интегралов по параметру  $x$  и импульсу  $k$ , использовавшееся для численных расчетов:

$$\Delta E_{2\gamma, SE}^{HFS} = E^F \frac{m_1 m_2 \alpha (Z\alpha)}{\pi^2 (1\kappa) n^3} \delta_{l0} \int_0^1 x dx \int_0^\infty dk \left\{ \left[ -\frac{8F_2^2 k^2}{m_2^2} + 32F_1 (F_1 + F_2) \right] \frac{1}{h_1(k, x)} + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{k^3 F_2^2}{m_2^4} - \frac{6m_1^2 k^3 F_2^2 \bar{x}}{m_2^4 (xm_1^2 + \bar{x}k^2)} + \frac{4k}{m_2^2} (F_1^2 + 4F_1 F_2 + F_2^2) \right] \left( \frac{1}{h_2(k, x)} - \frac{k}{h_1(k, x)} \right) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{2km_1^2}{m_2^2} F_2 (2F_1 + F_2) \bar{x} - \frac{kF_2^2}{m_2^2} (xm_1^2 + \bar{x}k^2) \right] \left[ \frac{2}{h_2^2(k, x)} - \frac{k^2}{m_2^2 (xm_1^2 + \bar{x}k^2)} \left( \frac{1}{h_2(k, x)} - \frac{k}{h_1(k, x)} \right) \right] \right\}, \quad (49)$$

$$h_1(k, x) = k \sqrt{4m_1^2 \bar{x}^2 k^2 + (xm_1^2 + \bar{x}k^2)^2} + (xm_1^2 + \bar{x}k^2) \sqrt{4m_2^2 + k^2},$$

$$h_2(k, x) = \sqrt{4m_1^2 \bar{x}^2 k^2 + (xm_1^2 + \bar{x}k^2)^2} + (xm_1^2 + \bar{x}k^2).$$

Численное значение (49), полученное с помощью формфакторов  $F_1, F_2$  из [12], составляет

$$\Delta E_{2\gamma, SE}^{HFS} = 0.008 \text{ мэВ}. \quad (50)$$

Рассмотрим вычисление вершинных поправок. Перенормированное выражение одночастичного вершинного оператора в калибровке ФЙ было получено в [41] ( $p^2 = m_1^2$ ):

$$\Lambda_\mu^R(p, p-k) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \left[ \frac{F_\mu^{(1)}}{\Delta} + \frac{F_\mu^{(2)}}{\Delta^2} \right], \quad (51)$$

где

$$\Delta = m_1^2 x + 2pk(1-x)z - k^2 z(1-xz),$$

а функции  $F_\mu^{(1)}, F_\mu^{(2)}$  определены в работе [41]. Лептонный тензор разбивается, в соответствии с (51), на два слагаемых:

$$M_{\mu\nu}^{(l)(1)} = \frac{\bar{v}(p_1) F_\nu^{(1)} (-\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1) \gamma_\mu v(q_1) (k^2 - 2k^0 m_1) [m_1^2 x - k^2 z(1-xz) + 2m_1 k^2 \bar{x}^2]}{(k^4 - 4k_0^2 m_1^2) [(m_1^2 x - k^2 z(1-xz))^2 - 4m_1^2 k_0^2 \bar{x}^2 z^2]}, \quad (52)$$

$$M_{\mu\nu}^{(l)(2)} = \frac{\bar{v}(p_1) F_\nu^{(2)} (-\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1) \gamma_\mu v(q_1) (k^2 - 2k^0 m_1) [m_1^2 x - k^2 z(1-xz) + 2m_1 k^2 \bar{x}^2]^2}{(k^4 - 4k_0^2 m_1^2) [(m_1^2 x - k^2 z(1-xz))^2 - 4m_1^2 k_0^2 \bar{x}^2 z^2]^2}, \quad (53)$$

Ограничиваясь далее для простоты главным вкладом по  $m_1/m_2$ , мы можем представить первую часть вершинной поправки порядка  $F_\mu^{(1)}$  и вторую часть порядка  $F_\mu^{(2)}$  в виде

$$\Delta E_{2\gamma, vert 1}^{HFS} = -E^F \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{8m_1m_2}{(1+\kappa)\pi n^3} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^\infty \pi \sin^2 \phi d\phi \int_0^\infty k dk \times \\ \times \frac{V_1(x, k, \phi)[F_1(F_1 + F_2) - (1 + \kappa)]}{(k^2 + 4m_1^2 \cos^2 \phi)(k^2 + 4m_2^2 \cos^2 \phi) [[m_1^2 x + k^2 z(1 - zx)]^2 + 4m_1^2 k^2 \cos^2 \phi \bar{x}^2 z^2]}, \quad (54)$$

$$V_1(x, k, \phi) = -2m_1^4 x^2(1 - x) + k^2 m_1^2 (6x^3 z^2 - 8x^2 z^2 - 3x^2 z + 8xz - 3x) + \\ + k^4 (4x^3 z^4 - 6x^2 z^4 - 5x^2 z^3 + 12xz z^3 - 2xz z^2 - 6z^2 + 3z), \quad (55)$$

$$\Delta E_{2\gamma, vert 2}^{HFS} = -E^F \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{32m_1^3 m_2}{(1+\kappa)\pi n^3} \int_0^1 x(1-x) dx \int_0^1 dz \int_0^\infty \pi \sin^2 \phi d\phi \int_0^\infty k^3 dk \times \\ \times \frac{V_2(x, k, \phi) F_1(F_1 + F_2)}{(k^2 + 4m_1^2 \cos^2 \phi)(k^2 + 4m_2^2 \cos^2 \phi) [[m_1^2 x + k^2 z(1 - zx)]^2 + 4m_1^2 k^2 \cos^2 \phi \bar{x}^2 z^2]}, \quad (56)$$

$$V_2(x, k, \phi) = m_1^4 x^2 z(2z - 1) - k^2 m_1^2 x z^2 (4xz^2 - 2xz - 4z + 2) + k^4 z^3 (2x^2 z^3 - x^2 z^2 - 4xz^2 + 2xz + 2z - 1). \quad (57)$$

Вычисляя аналитически интегралы по  $\phi$  в (54), (56) и вычитая итерационный вклад

$$\Delta E_{iter, 2\gamma, vert}^{HFS} = \langle V_{1\gamma} \times G^f \times V_{1\gamma} \rangle_{vert}^{HFS} = E^F \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 dz \int_0^1 dx \int_0^\infty dk \frac{4\mu}{k^2} \quad (58)$$

из суммы (54) и (56) (необходимо взять один кулоновский фотон, а второй фотон должен содержать сверхтонкую часть потенциала со значением магнитного формфактора в нуле), получаем следующее выражение для вершинной поправки, которая определяется диаграммами, представленными на рис. 5а, б:

$$\Delta E_{2\gamma, vert}^{HFS} = -E^F \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^\infty dk \left\{ \frac{F_1(F_1 + F_2)}{8k(1+\kappa)m_1^3 m_2 \bar{x}^2 z^2} [-2m_1^4 x^2 \bar{x} + k^2 m_1^2 x \times \right. \\ \times (6x^2 z^2 - 8xz^2 - 3xz + 8z - 3) + k^4 z(4x^3 z^3 - 6x^2 z^3 - 5x^2 z^2 + 12xz^2 - 2xz - 6z - 3)] \times \\ \times \left[ -\frac{\sqrt{1+b^2}}{b(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} + \frac{\sqrt{1+a^2}}{a(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + \frac{\sqrt{1+c^2}}{c(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} \right] + \frac{F_1(F_1 + F_2)x}{2(1+\kappa)m_1^3 m_2 k \bar{x}^3 z^4} \times \\ \times [m_1^4 x^2 z(2z - 1) - 2k^2 m_1^2 x z^2 (2xz^2 - xz - 2z + 1) + k^4 z^3 (2x^2 z^3 - x^2 z^2 - 4xz^2 + 2xz + 2z - 1)] \times \\ \times \left[ -\frac{\sqrt{1+b^2}}{b(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)^2} + \frac{\sqrt{1+a^2}}{a(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + \frac{1}{2c\sqrt{1+c^2}(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{1+c^2}}{2c^3(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} + \frac{\sqrt{1+c^2}}{c(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)} + \frac{\sqrt{1+c^2}}{c(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)^2} \right] + \frac{4\mu}{k^2} \left. \right\}, \quad (59)$$

$$a^2 = \frac{k^2}{4m_1^2}, \quad b^2 = \frac{k^2}{4m_2^2}, \quad c^2 = \frac{[m_1^2 x + k^2 z(1 - zx)]^2}{4m_1^2 k^2 \bar{x}^2 z^2}. \quad (60)$$

Численное значение вершинных поправок (59) равно

$$\Delta E_{2\gamma, vert}^{HFS} = -0.014 \text{ мэВ.} \quad (61)$$

Еще одной диаграммой вершинного типа с одним охватывающим фотоном и двумя обменными фотонами является диаграмма типа «медузы». Ее вклад в спектр энергии имеет порядок  $\alpha(Z\alpha)^5$ . В области малых петлевых импульсов данная диаграмма дает конечный результат в калибровке ФЙ. Выражение для лептонного тензора, входящего в амплитуды  $\epsilon$ ,  $z$  на рис. 5, было получено в работе [36] в виде

$$L_{\mu\nu}^{(\mu)} = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 x dx \int_0^1 (1-z) dz \sum_{n=1}^3 \frac{M_{\mu\nu}^{(n)}}{\Delta^n}, \quad (62)$$

где  $\Delta$  имеет такой же вид, как в (50), а тензорные функции  $M_{\mu\nu}^{(n)}$  представлены в работе [36]. Характер дальнейших преобразований амплитуд  $\epsilon$ ,  $z$  на

рис. 5 при построении сверхтонкой части оператора взаимодействия мюона и протона такой же, как и в случае других амплитуд, показанных на рис. 4 и 5. Опуская детали этих преобразований, выполненных с помощью Form [40], представим соответствующие трем функциям  $M_{\mu\nu}^{(n)}$  вклады в СТС атома  $\mu p$  в главном порядке по  $m_1/m_2$  в виде

$$\begin{aligned} \Delta E_{1, jellyfish}^{HFS} = & -\frac{64\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3 \delta_{l0}}{\pi^3 n^3} \times \\ & \times \int_0^1 x dx \int_0^1 (1-z)(1-3xz) \int_0^\infty k dk F_1(F_1 + F_2) \times \\ & \times \int_0^\pi \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(k^2 + 4m_2^2 \cos^2 \phi)} \times \\ & \times \frac{[m_1^2 x + k^2 z(1-xz)]}{[m_1^2 x + k^2 z(1-xz)]^2 + 4m_1^2 k^2 \cos^2 \phi \bar{x}^2 z^2}, \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{2, jellyfish}^{HFS} = & -\frac{128\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3 \delta_{l0}}{3\pi^3 n^3} \int_0^1 x dx \int_0^1 (1-z) dz \int_0^\infty k dk F_1(F_1 + F_2) \times \\ & \times \int_0^\pi \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(k^2 + 4m_2^2 \cos^2 \phi)} \frac{[m_1^2 x + k^2 z(1-xz)]^2 [k^2 x z^2 (1-xz) + m_1^2 (x^2 z + 2xz - x - 3z)]}{\{[m_1^2 x + k^2 z(1-xz)]^2 + 4m_1^2 k^2 \cos^2 \phi \bar{x}^2 z^2\}^2}, \quad (64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{3, jellyfish}^{HFS} = & \frac{512\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3 \delta_{l0}}{3\pi^3 n^3} \times \\ & \times \int_0^1 x dx \int_0^1 (1-z) z^2 dz \int_0^\infty k^3 dk m_1^2 F_1(F_1 + F_2) \times \\ & \times (x + xz - x^2 z - 1) \int_0^\pi \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(k^2 + 4m_2^2 \cos^2 \phi)} \times \\ & \times \frac{[m_1^2 x + k^2 z(1-xz)]^3}{\{[m_1^2 x + k^2 z(1-xz)]^2 + 4m_1^2 k^2 \cos^2 \phi \bar{x}^2 z^2\}^3}. \quad (65) \end{aligned}$$

Интегрирование по углу  $\phi$  может быть выполнено в (63)–(65) аналитически. Не выписывая полученных после этого интегрирования выражений, приведем окончательный численный результат для вклада диаграмм  $\epsilon$ ,  $z$  на рис. 5 в СТС атома  $\mu p$ :

$$\Delta E_{jellyfish}^{HFS} = \sum_{n=1}^3 \Delta E_{n, medusa}^{HFS} = 0.004 \text{ мэВ.} \quad (66)$$

Отметим, что в приближении точечного протона, когда формфакторы ядра, входящие в амплитуды,

представленные на рис. 4, 5, заменяются на их значения в нуле:

$$F_1(0) = 1, \quad F_2(0) = \kappa,$$

вклады (63)–(65) увеличиваются приблизительно вдвое.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы провели расчет различных квантовоэлектродинамических эффектов, эффектов структуры, поляризуемости протона и адронной поляризации вакуума в сверхтонкой структуре атома мюонного водорода. Рассматривались вклады порядка  $\alpha^5$  и  $\alpha^6$ . При этом мы учитывали, что для некоторых поправок отношение  $\mu\alpha/m_e$  близко к единице, и не увеличивали, следовательно, порядок по  $\alpha$  в этих вкладах. Численные результаты полученных вкладов представлены в таблице. В таблицу включены также КЭД поправки к энергии Ферми в сверхтонкую структуру водородоподобной системы, связанные с аномальным магнитным моментом мюо-

на  $a_\mu E^F$  [18] (использовалось экспериментальное значение аномального магнитного момента мюона  $a_\mu^{exp} = 11\,659\,203(8) \cdot 10^{-10}$  [42]), брейтовская релятивистская поправка порядка  $(Z\alpha)^6$  [43], релятивистские и радиационные эффекты того же порядка с отдачей  $(Z\alpha)^6 m_1/m_2$  с учетом аномального магнитного момента протона [30], поправка на структуру ядра порядка  $(Z\alpha)^5$  [22] (см. формулу (40) данной работы), поправка на структуру ядра порядка  $(Z\alpha)^6 \ln(Z\alpha)^2$  [8], вклады адронной поляризации вакуума [33], поляризуемости протона [16] и слабого взаимодействия при обмене  $Z$ -бозоном [18].

Отметим ряд особенностей проведенных расчетов.

1. Для мюонного водорода важную роль играют эффекты поляризации вакуума, которые приводят к модификации спин-зависимой части потенциала однофотонного взаимодействия.

2. При расчете петлевых амплитуд мы всюду учитывали структуру протона с помощью электромагнитных формфакторов. Приближение точечного протона приводит к существенно завышенным (примерно вдвое) результатам.

3. При вычислении собственно-энергетических и вершинных поправок порядка  $\alpha(Z\alpha)^5$  мы использовали полученные Эйдемсом, Гротчем и Шелюто в калибровке Фрида-Йенни выражения для соответствующих лептонных факторов в амплитудных членах квазипотенциала, дополняя их, где это требовалось, вычитаниями итерационных членов оператора взаимодействия частиц.

Полный результат для СТС основного состояния мюонного водорода, показанный в таблице, может служить надежной оценкой при проведении соответствующего эксперимента, подготовка которого в настоящее время осуществляется [23]. Как уже отмечалось выше, численные значения поправок получены с точностью 0.001 мэВ. Теоретическая ошибка, обусловленная неопределенностями фундаментальных параметров (постоянная тонкой структуры, магнитный момент протона и др.), входящих в энергию Ферми, составляет величину порядка  $10^{-5}$  мэВ. Другая часть теоретической погрешности связана с поправками более высокого порядка. Ее оценка может быть получена из ведущего вклада следующего порядка по  $\alpha$  и  $m_1/m_2$  и составляет величину

$$\frac{\alpha}{\pi}(Z\alpha)^2 \ln(Z\alpha)^2 \approx 0.0005 \text{ мэВ}$$

(использовалось значение постоянной тонкой структуры  $\alpha^{-1} = 137.03599976$  (50) [1]).

Полезно сравнить суммарный вклад в сверхтон-

кую структуру мюонного водорода, полученный в данной работе (см. таблицу), с величиной сверхтонкого расщепления в приближении точечного протона, когда учитываются лишь значения электромагнитных формфакторов протона в нуле:

$$G_E(0) = 1, \quad G_M(0) = \mu$$

(исключение составляет лишь поправка Земаха). В этом случае величина СТС основного состояния может быть представлена с точностью  $O((m_1/m_2)\alpha^6)$  в виде [18]:

$$\begin{aligned} \Delta E^{HFS}(QED) = & E^F \left\{ 1 - 2\mu\alpha R_p + \frac{3}{2}(Z\alpha)^2 + a_\mu + \alpha(Z\alpha) \left( \ln 2 - \frac{5}{2} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{1+\kappa} \left[ -\frac{3\alpha}{\pi} \frac{m_1 m_2}{m_2^2 - m_1^2} \ln \frac{m_2}{m_1} + \right. \\ & + (Z\alpha)^2 \frac{\mu^2}{m_1 m_2} \left[ \left( 2(1+\kappa) + \frac{7\kappa^2}{4} \right) \ln(Z\alpha)^{-1} - \right. \\ & - \left. \left( 8(1+\kappa) - \frac{\kappa(12-11\kappa)}{4} \right) \ln 2 + 3\frac{11}{18} + \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\kappa(11+31\kappa)}{36} \right] \right] - \frac{2}{3}(Z\alpha)^2 \ln(Z\alpha)^{-2} m_1^2 r_p^2 \right\} = \\ & = 181.177 \text{ мэВ.} \quad (67) \end{aligned}$$

Существенное расхождение между этим значением и величиной 182.725 мэВ, полученной нами, объясняется рядом причин: модификацией брейтовского потенциала за счет электронной поляризации вакуума в случае мюонного водорода, эффектами структуры протона при построении двухфотонного и трехфотонного операторов взаимодействия частиц, а также учетом вклада АПВ и поляризуемости протона в наших вычислениях. Дальнейшее улучшение теоретического результата, представленного в таблице, связано прежде всего с поправками на структуру и поляризуемость протона, теоретическая ошибка от которых составляет приблизительно 340 ppm. При этом подавляющая часть этой погрешности определяется поправками на структуру ядра порядка  $(Z\alpha)^5$  (поправка Земаха). Таким образом, осуществление эксперимента по измерению сверхтонкого расщепления уровней энергии  $1S$  и  $2S$  в мюонном водороде с точностью 30 ppm позволило бы получить более точное значение (с относительной точностью  $10^{-3}$ ) радиуса Земаха, которое затем можно будет использовать для улучшения теоретического результата по сверхтонкой структуре основного состояния атома водорода и более точной

оценки возможной величины вклада на поляризуемость протона. Увеличение количества задач, связанных с исследованием СТС спектров энергии водородоподобных атомов, которое бы включало СТС возбужденных уровней энергии [44] и СТС «новых» простейших атомных систем, приведет к уменьшению неопределенности при вычислении фундаментальных физических параметров и к росту точности при проверке Стандартной модели в низкоэнергетической физике.

Авторы выражают благодарность Д. Д. Бакалову, А. В. Борисову, А. Л. Катаеву, А. И. Студенкину, В. В. Фильченкову, И. Б. Хрипловичу за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (грант № УР.01.02.016).

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. J. Mohr and B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 351 (2000).
2. Ю. Л. Соколов, *УФН* **169**, 559 (1999).
3. F. Kottmann, F. Biraben, C. A. N. Conde et al., in: *Quantum Electrodynamics and Physics of the Vacuum, QED 2000 Second Workshop Proc. AIP Conf. Proc.*, ed. by G. Cantatore, New York (2001), Vol. 564, p. 13; R. Pohl, F. Biraben, C. A. N. Conde et al., *Hyperfine Interactions* **127**, 161 (2000).
4. A. C. Zemach, *Phys. Rev.* **104**, 1771 (1956).
5. F. Guerin, *Nuovo Cimento A* **50**, 1 (1967).
6. Г. М. Зиновьев, Б. В. Струминский, Р. Н. Фаустов, В. Л. Черняк, *ЯФ* **11**, 1284 (1970).
7. А. И. Мильштейн, С. С. Петросян, И. Б. Хриплович, *ЖЭТФ* **109**, 1146 (1996); I. V. Khriplovich and A. I. Milshtein, E-print archives nucl-th/0304069.
8. S. G. Karshenboim, *Phys. Lett. A* **225**, 97 (1997).
9. J. L. Friar, *Can. J. Phys.* **80**, 1337 (2002).
10. A. Pineda, *Phys. Rev. C* **67**, 025201 (2003).
11. R. N. Faustov and A. P. Martynenko, *Phys. Rev. A* **67**, 052506 (2003).
12. G. G. Simon, Ch. Schmitt, F. Borkowski et al., *Nucl. Phys. A* **333**, 381 (1980).
13. S. D. Drell and J. D. Sullivan, *Phys. Rev.* **154**, 1477 (1967).
14. J. Bernabeu and T. E. O. Ericson, *Z. Phys. A* **309**, 213 (1983).
15. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЯФ* **63**, 915 (2000).
16. E. V. Cherednikova, R. N. Faustov, and A. P. Martynenko, *Nucl. Phys. A* **703**, 365 (2002).
17. H. Hellwig, R. F. C. Vessot, M. W. Levine et al., *IEEE Trans. Instr. Meas.* **19**, 200 (1970).
18. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rep.* **342**, 62 (2001).
19. D. D. Bakalov, E. Milotti, C. Rizzo et al., in: *Proc. 3rd Int. Symp. on Weak and Electromagnetic Int. in Nuclei (WEIN-92)* (1992), p. 656.
20. G. T. Bodwin and D. R. Yennie, *Phys. Rev. D* **37**, 498 (1988).
21. E. Borie and G. A. Rinker, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 67 (1982).
22. K. Pachucki, *Phys. Rev. A* **53**, 2092 (1996).
23. A. Adamczak, D. Bakalov, K. Bakalova et al., *Hyperfine Interactions* **136**, 1 (2001).
24. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ТМФ* **64**, 179 (1985).
25. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
26. Р. Н. Фаустов, *ФЭЧАЯ* **3**, 238 (1972).
27. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rev. D* **65**, 013003 (2001).
28. С. А. Запругаев, Н. Л. Манаков, В. Г. Пальчиков, *Теория многозарядных ионов с одним и двумя электронами*, Энергоатомиздат, Москва (1985).
29. В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм, *ЖЭТФ* **109**, 1219 (1996).
30. G. T. Bodwin, D. R. Yennie, and M. A. Gregorio, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 723 (1985).
31. T. Kinoshita and M. Nio, *Phys. Rev. D* **53**, 4909 (1996).
32. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЖЭТФ* **115**, 1221 (1999).
33. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЯФ* **61**, 471 (1998).
34. R. R. Akhmetshin et al., *Phys. Lett. B* **476**, 33 (2000); R. R. Akhmetshin et al., *Phys. Lett. B* **509**, 217 (2001).

35. M. I. Eides, S. G. Karshenboim, and V. A. Shelyuto, *Ann. Phys.* **205**, 231 (1991).
36. M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, *Phys. Rev. A* **63**, 052509 (2001).
37. А. А. Абрикосов, *ЖЭТФ* **30**, 96 (1956).
38. Л. П. Горьков, *ЖЭТФ* **30**, 790 (1956).
39. H. M. Fried and D. R. Yennie, *Phys. Rev.* **112**, 1391 (1958).
40. J. A. M. Vermaseren, E-print archives math-ph/0010025, 2000; <http://www.nikhef.nl/~form>.
41. M. I. Eides and V. A. Shelyuto, *Eur. Phys. J. C* **21**, 489 (2001).
42. G. W. Bennett et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 101804 (2002).
43. G. Breit, *Phys. Rev.* **35**, 1447 (1930).
44. S. G. Karshenboim and V. G. Ivanov, *Eur. Phys. J. D* **19**, 13 (2002).