ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 1, стр. 72–102

РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ХОЛЕСТЕРИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ С БОЛЬШИМ ШАГОМ СПИРАЛИ

Е. В. Аксенова[a]*, *А. Ю. Вальков*[b]**, *В. П. Романов*[a]***

[a] *Санкт-Петербургский государственный университет 198504, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия*

[b] *Санкт-Петербургский институт внешнеэкономических связей, экономики и права 191104, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 23 июня 2003 г.

Рассмотрены оптические свойства холестерических жидких кристаллов с большим по сравнению с длиной световой волны шагом спирали. Анализируются собственные волны среды и функция Грина электромагнитного поля. Предложена общая схема расчета интенсивности рассеянного света в средах с одномерной периодической структурой, основанная на использовании метода Кирхгофа. Векторным методом ВКБ рассчитана пространственная корреляционная функция тепловых флуктуаций директора. Обнаружено, что существуют области, в которых имеет место трансформация двух флуктуационных мод. Рассчитана угловая и поляризационная зависимости интенсивности рассеянного света на флуктуациях директора. В частности, обнаружено, что интенсивность рассеяния немонотонно зависит от размеров системы.

PACS: 61.30.-v, 05.40.-a, 78.35.+c, 42.70.Df, 42.25.Fx

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое внимание уделяется исследованию жидких кристаллов (ЖК) самыми разнообразными методами. Интерес к этой проблеме обусловлен как целым рядом аномалий в физических свойствах этих систем, так и их широким использованием в устройствах отображения информации и, прежде всего, в жидкокристаллических дисплеях.

Одним из эффективных методов исследования жидкокристаллических систем является метод рассеяния света. Необычные оптические и структурные свойства жидких кристаллов приводят к существенным усложнениям при описании рассеяния света. К таким свойствам можно отнести значительную оптическую анизотропию, наличие регулярных пространственных структур, аномально большие флуктуации параметра порядка, аномально большую оптическую активность и т. д.

При этом возникает целый ряд физических задач, решению которых до сих пор уделялось сравнительно мало внимания. Одной из таких задач является описание рассеяния света в средах с плавно меняющейся периодической структурой. Обычно при рассмотрении рассеяния света предполагается, что среда является пространственно-однородной или описание флуктуаций и распространения волн в неоднородных средах опирается на малые параметры, которые позволяют свести решение задачи к задаче для некоторой эффективной однородной среды. Для однородных систем известны нормальные волны и поле точечного источника (функция Грина электромагнитного поля), а также достаточно просто вычисляется пространственная корреляционная функция тепловых флуктуаций диэлектрической проницаемости, на которых происходит рассеяние света. Условие пространственной однородности системы позволяет, перейдя к пространственному спектру Фурье флуктуаций, получить для интенсивности рассеянного света достаточно простые выражения в замкнутой форме.

Задача усложняется, если пространственная однородность среды существенно нарушается. При этом возникает сразу несколько проблем: описание

*E-mail: aksev@mail.ru
**E-mail: alexvalk@mail.ru
***E-mail: V.Romanov@pobox.spbu.ru

структуры падающего поля (нормальных волн в среде), вычисление функции Грина электромагнитного поля и расчет корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Типичным примером являются задачи о распространении и рассеянии света в средах с периодически меняющимися свойствами и, как наиболее простой случай, в средах с одномерной периодической структурой. К таким средам, в частности, относятся холестерические жидкие кристаллы (ХЖК), закрученные нематические жидкие кристаллы (НЖК) и некоторые виды смектических жидких кристаллов (СЖК).

Хотя этой проблемой занимаются довольно давно, здесь существуют серьезные математические трудности, связанные с тем, что задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, не допускающих в общем случае точного решения. Так, точное решение задачи о распространении электромагнитных волн в ХЖК было найдено только для случая распространения волн вдоль оси симметрии системы [1–3]. Формальное аналитическое решение задачи для случая наклонного падения [4–6] имеет вид бесконечного ряда и достаточно сложно для анализа. По этой причине в оптике слоистых жидких кристаллов широко используются различные приближенные методы [7–11]. Основное внимание при этом уделялось случаю, когда длина волны порядка периода структуры и эффективными оказываются методы, разработанные в теории дифракции рентгеновских лучей [8]. В ХЖК такой подход является основным до настоящего времени [11–15]. Характерным для этого случая является возникновение запрещенных зон. При этом изучались как задачи о нормальных волнах и поле точечного источника [16–19], так и спектр тепловых колебаний директора [20–23].

Противоположному случаю, когда длина волны много меньше характерного размера структуры ЖК, заметного внимания не уделялось. Однако в последние годы в связи с использованием в системах отображения информации твист-ячеек слабо закрученных НЖК и ХЖК с большим шагом спирали этот вопрос становится актуальным.

Для таких систем известно, что при распространении света вдоль оси спирали имеет место адиабатический режим, когда поляризация волн испытывает поворот вместе с поворотом оптической оси [24]. При больших интенсивностях падающего света наблюдались нелинейные эффекты, в частности, генерация третьей гармоники [25]. В общем случае наклонного падения здесь представляется естественным использовать метод ВКБ, поскольку размер неоднородностей значительно больше длины волны. Непосредственное применение метода ВКБ для электромагнитных волн затруднено тем, что здесь возникает система связанных уравнений [4, 5, 26]. Для задачи о распространении электромагнитных волн в локально изотропных средах с плавными неоднородностями эта проблема была решена в [27, 28]. В ХЖК с большим шагом спирали обобщение метода ВКБ, предложенное в [29], позволило получить аналитическое решение задачи о наклонном падении света (и, в частности, были найдены нормальные волны). На основе этого метода в [30–32] было получено также поле точечного источника в такой среде.

Для описания рассеяния света, кроме оптических характеристик системы, необходимо знать также корреляционную функцию тепловых флуктуаций диэлектрической проницаемости. В ХЖК основной вклад в рассеяние вносят флуктуации директора. Задача о спектре тепловых шумов директора в ХЖК рассматривалась только для флуктуаций с характерными масштабами порядка или больше, чем период структуры («смектикоподобный» ХЖК) [20–23]. Флуктуации в противоположном случае «нематикоподобного» ХЖК не изучались. Отметим, что для некоторых физических систем с плавными периодическими неоднородностями исследование флуктуаций проводилось — например, при изучении влияния гравитационного эффекта в окрестности критической точки жидкость–пар на флуктуации плотности [33]. Однако в этом случае радиус корреляции флуктуаций много меньше характерного размера регулярных неоднородностей системы. Тогда задачу можно свести к задаче о локально однородной среде, параметры которой плавно меняются от точки к точке. Особенность нашей системы состоит в том, что здесь корреляционная длина интересующих нас флуктуаций директора ограничена только размерами системы [34]. Поэтому приближение локальной однородности здесь неприменимо.

В настоящей работе с помощью векторного обобщения метода ВКБ рассчитана корреляционная функция флуктуаций директора в ХЖК с большим шагом спирали. Предложена общая схема расчета интенсивности рассеяния света для слоистых систем. Это позволило получить явные выражения для угловой и поляризационной зависимостей интенсивности однократного рассеяния света в ХЖК для случая, когда шаг спирали значительно больше длины световой волны. Результаты приведены в удобном для сравнения с экспериментом виде.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 приводятся общие уравнения, описывающие упругую энергию и флуктуации, а также распространение электромагнитных волн в ХЖК. В разд. 3 на основе метода Кирхгофа построена общая схема расчета интенсивности рассеянного света в слоистых средах. Раздел 4 посвящен нахождению нормальных волн и функции Грина электромагнитного поля в ХЖК с большим по сравнению с длиной волны света шагом спирали. В разд. 5 рассчитана корреляционная функция флуктуаций директора в ХЖК. В разд. 6 рассчитана интенсивность рассеянного света и проанализированы различные геометрии эксперимента. В Приложении приводится использованная нами для нахождении собственных волн и корреляционной функции в ХЖК схема векторного метода ВКБ.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Холестерический жидкий кристалл описывается свободной энергией вида [34]

$$F = F_0 + \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\,\big[K_{11}(\operatorname{div}\mathbf{n})^2 + + K_{22}\left(\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n} + p_0\right)^2 + K_{33}\left(\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n}\right)^2\big], \qquad (2.1)$$

где F_0 — энергия однородной системы, K_{ll} ($l = 1, 2, 3$) — модули Франка. Единичный вектор директора $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$ характеризует направление локальной преимущественной ориентации длинных осей молекул. Минимуму энергии (2.1) отвечает геликоидальное равновесное распределение директора

$$\mathbf{n}^0(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{n}^0(z) = (\cos\phi,\, \sin\phi,\, 0). \qquad (2.2)$$

Здесь введена декартова система координат с осью z, совпадающей с осью спирали ХЖК, $\phi = \phi(z) = p_0 z + \phi_0$, угол ϕ_0 определяет направление директора на плоскости $z = 0$, $p_0 = \pi/d$, d — шаг холестерической спирали. Вектор директора $\mathbf{n}^0(\mathbf{r})$ в (2.2) перпендикулярен оси z и равномерно вращается вокруг этой оси.

Оптические свойства холестерика определяются тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, который в равновесном ХЖК имеет вид [34]

$$\varepsilon^0_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon^0_{\alpha\beta}(z) = \varepsilon_\perp\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_a n^0_\alpha(z) n^0_\beta(z), \qquad (2.3)$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp$, а $\varepsilon_\parallel$, $\varepsilon_\perp$ — диэлектрические проницаемости соответственно вдоль и поперек $\mathbf{n}^0$.

Уравнения Максвелла для монохроматической волны в такой среде имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= ik_0\hat{\mu}(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}),\\ \operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -ik_0\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \end{aligned} \qquad (2.4)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, $k_0 = \omega/c$, ω — круговая частота, c — скорость света в вакууме. В дальнейшем будем полагать среду немагнитной, $\mu_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \delta_{\alpha\beta}$. Исключая из системы (2.4) вектор $\mathbf{H}$, получаем волновое уравнение для вектора $\mathbf{E}$:

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - k_0^2\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \qquad (2.5)$$

При решении задачи рассеяния удобно использовать интегральное представление для волнового уравнения (2.5):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) + k_0^2\int d\mathbf{r}'\,\widehat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}'), \qquad (2.6)$$

где $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \hat{\varepsilon}^0(\mathbf{r})$ — флуктуации тензора диэлектрической проницаемости, а поле $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ и функция Грина электромагнитного поля $\widehat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, удовлетворяют уравнениям

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - k_0^2\hat{\varepsilon}^0(z)\right)\mathbf{E}^0(\mathbf{r}) = 0\,, \qquad (2.7)$$

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - k_0^2\,\hat{\varepsilon}^0(z)\right)\widehat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\widehat{I}\,. \qquad (2.8)$$

Здесь $\widehat{I}$ — единичная матрица.

Поскольку уравнение (2.7) является однородным, поле $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ может быть выражено в виде линейной комбинации собственных (нормальных) волн задачи (2.7). Для однозначной постановки задачи уравнение (2.8) следует дополнить соответствующими граничными условиями. В неограниченной среде такими условиями являются условия излучения [35]. В силу симметрии ХЖК относительно сдвигов в плоскости XY имеем $\widehat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv \widehat{T}^0(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp; z, z')$, где $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$.

Второй член в правой части уравнения (2.6) соответствует рассеянному полю $\mathbf{E}^{(s)}$, порожденному падающим полем $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$. Решая это уравнение итерациями и ограничиваясь низшим порядком по $\delta\hat{\varepsilon}$, получим рассеянное поле $\mathbf{E}^{(s)}$ в приближении однократного рассеяния

$$\mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{r}) = = k_0^2\int d\mathbf{r}'\,\widehat{T}^0(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp; z, z')\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}')\mathbf{E}^0(\mathbf{r}'). \qquad (2.9)$$

Свойства рассеянного света определяются функцией когерентности

$$
\begin{aligned}
\langle E_\alpha^{(s)}(\mathbf{r}_1) E_\beta^{(s)*}(\mathbf{r}_2)\rangle &= \\
&= k_0^4 \int d\mathbf{r}_1' d\mathbf{r}_2'\, T^0_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}'_{1\perp}; z_1, z_1') \times \\
&\times T^{0*}_{\beta\zeta}(\mathbf{r}_{2\perp} - \mathbf{r}'_{2\perp}; z_2, z_2') \mathcal{G}_{\gamma\nu\zeta\mu}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') \times \\
&\times E^0_\nu(\mathbf{r}_1') E^{0*}_\mu(\mathbf{r}_2'), \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{G}_{\gamma\nu\zeta\mu}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = \langle \delta\varepsilon_{\gamma\nu}(\mathbf{r}_1') \delta\varepsilon^*_{\zeta\mu}(\mathbf{r}_2')\rangle$ — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости, скобки $\langle\ldots\rangle$ обозначают статистическое усреднение, а звездочка — комплексное сопряжение. В силу симметрии ХЖК имеем $\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') \equiv \widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}'_{1\perp} - \mathbf{r}'_{2\perp}; z_1', z_2')$.

Таким образом, для вычисления функции когерентности (2.10) нам необходимо знать нормальные волны, определяющие вид поля $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$, функцию Грина $\widehat{T}^0$ и корреляционную функцию флуктуаций диэлектрической проницаемости $\widehat{\mathcal{G}}$ в нашей системе.

Наиболее сильный вклад в $\delta\hat{\varepsilon}$ вносят в ЖК флуктуации директора [34]

$$
\mathbf{n}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}^0(z) + \delta\mathbf{n}(\mathbf{r}), \qquad (2.11)
$$

и в данной работе ограничимся рассмотрением только этих флуктуаций. В этом предположении не только равновесный, но и флуктуирующий тензор диэлектрической проницаемости имеет вид аналогичный (2.3), с заменой $\mathbf{n}^0(z) \to \mathbf{n}(\mathbf{r})$:

$$
\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_\perp \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon_a n_\alpha(\mathbf{r}) n_\beta(\mathbf{r})\,. \qquad (2.12)
$$

Вычитая (2.3) из (2.12), находим в главном порядке связь между флуктуациями диэлектрической проницаемости и директора в ХЖК:

$$
\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \varepsilon_a \left(n^0_\alpha(z) \delta n_\beta(\mathbf{r}) + \delta n_\alpha(\mathbf{r}) n^0_\beta(z)\right), \qquad (2.13)
$$

и связь между соответствующими корреляционными функциями

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{r}_\perp; z, z') = \varepsilon_a^2 \big[& n^0_\alpha(z) n^0_\gamma(z') g_{\beta\delta}(\mathbf{r}_\perp; z, z') + \\
&+ n^0_\alpha(z) n^0_\delta(z') g_{\beta\gamma}(\mathbf{r}_\perp; z, z') + \\
&+ n^0_\beta(z) n^0_\gamma(z') g_{\alpha\delta}(\mathbf{r}_\perp; z, z') + \\
&+ n^0_\beta(z) n^0_\delta(z') g_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_\perp; z, z')\big]\,. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}_{2\perp}; z_1, z_2) &= \\
&= \langle \delta n_\alpha(\mathbf{r}_{1\perp}, z_1) \delta n_\beta(\mathbf{r}_{2\perp}, z_2)\rangle \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

— корреляционная функция флуктуаций директора.

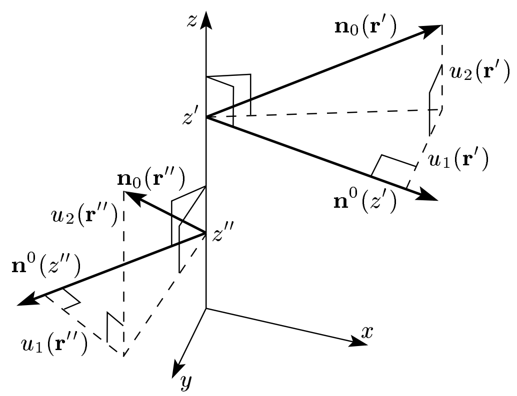

Рис. 1. Моды $u_{1,2}$ флуктуаций директора в холестерическом жидком кристалле

Для вычисления корреляционной функции флуктуаций директора в гауссовом приближении можно ограничиться квадратичным по $\delta\mathbf{n}$ вкладом в свободную энергию (2.1):

$$
\begin{aligned}
\delta F = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \Big\{ & K_{11} (\nabla\cdot\delta\mathbf{n})^2 + K_{22} \left[\mathbf{n}^0 \cdot (\nabla\times\delta\mathbf{n})\right]^2 + \\
&+ K_{33} \left[(\delta\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{n}^0 + (\mathbf{n}^0\cdot\nabla)\delta\mathbf{n}\right]^2 \Big\}\,. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

При получении этого уравнения мы учли, что для геликоидальной структуры (2.2) справедливы соотношения $\operatorname{div}\mathbf{n}^0 = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{n}^0 = -p_0\mathbf{n}^0$. Поскольку $|\mathbf{n}| = \left|\mathbf{n}^0\right| = 1$, в главном порядке по δn выполнено условие $\delta\mathbf{n} \perp \mathbf{n}^0$. Вектор $\delta\mathbf{n} = (\delta n_x, \delta n_y, \delta n_z)$ можно параметризовать с помощью двух величин. В ХЖК обычно выбирают параметризацию [20, 21]

$$
\begin{aligned}
&\delta n_x(\mathbf{r}) = -u_1(\mathbf{r}) \sin\phi(z), \\
&\delta n_y(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) \cos\phi(z), \qquad (2.17) \\
&\delta n_z(\mathbf{r}) = u_2(\mathbf{r}).
\end{aligned}
$$

Мода u_1 определяет флуктуации директора в плоскости XY, а u_2 — флуктуации вдоль оси z (рис. 1). В векторной записи

$$
\delta\mathbf{n}(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) \mathbf{h}^{(1)}(z) + u_2(\mathbf{r}) \mathbf{h}^{(2)}, \qquad (2.18)
$$

где

$$
\mathbf{h}^{(1)}(z) = \mathbf{h}^{(2)} \times \mathbf{n}_0(z)\,, \quad \mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{e}_z. \qquad (2.19)
$$

Из (2.18) получаем выражение для корреляционной функции флуктуаций директора через корреляционную матрицу скалярных величин $u_{1,2}$:

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\perp; z_1, z_2) = \\ = \sum_{k,l=1}^{2} G_{kl}(\mathbf{r}_\perp; z_1, z_2) h_\alpha^{(k)}(z_1) h_\beta^{(l)}(z_2), \quad (2.20)$$

где

$$G_{kl}(\mathbf{r}_{1\perp} - \mathbf{r}_{2\perp}; z_1, z_2) \equiv \\ \equiv G_{kl}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle u_k(\mathbf{r}_1) u_l(\mathbf{r}_2)\rangle. \quad (2.21)$$

Подставляя (2.17) в уравнение (2.16), имеем

$$\delta F = \frac{1}{2} \times \\ \times \int d\mathbf{r} \Big\{ K_{11} \left(-\sin\phi\,\partial_x u_1 + \cos\phi\,\partial_y u_1 + \partial_z u_2\right)^2 + \\ + K_{22} \left[\cos\phi\,\left(\partial_y u_2 - \partial_z\left(u_1 \cos\phi\right)\right) + \\ + \sin\phi\,\left(\partial_z\left(-u_1 \sin\phi\right) - \partial_x u_2\right)\right]^2 + \\ + K_{33} \Big[(-u_2 p_0 \sin\phi + \cos\phi\,\partial_x(-u_1 \sin\phi) + \\ + \sin\phi\,\partial_y(-u_1 \sin\phi))^2 + \\ + (u_2 p_0 \cos\phi + \cos\phi\,\partial_x(u_1 \cos\phi) + \\ + \sin\phi\,\partial_y(u_1 \cos\phi))^2 + \\ + (\cos\phi\,\partial_x u_2 + \sin\phi\,\partial_y u_2)^2\Big]\Big\}, \quad (2.22)$$

где $\partial_\ell \equiv \partial/\partial\,\ell$, $\ell = x, y, z$.

Поскольку равновесный ХЖК в плоскости, ортогональной оси z, является пространственно-однородным, удобно перейти к двумерному спектру Фурье. Ниже мы будем использовать непрерывное двумерное преобразование Фурье в виде

$$f(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} f(\mathbf{q}, z) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_\perp}, \\ f(\mathbf{q}, z) = \int d\mathbf{r}_\perp f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_\perp}. \quad (2.23)$$

Тогда энергия искажения (2.22) принимает вид

$$\delta F = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2}\,\delta F_{\mathbf{q}}, \quad (2.24)$$

где

$$\delta F_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \int dz \times \\ \times \Big\{ K_{11} \left|\partial_z u_2 + i(-\sin\phi\, q_x + \cos\phi\, q_y) u_1\right|^2 + \\ + K_{22} \left|-\partial_z u_1 + i u_2 (\cos\phi\, q_y - \sin\phi\, q_x)\right|^2 + \\ + K_{33} \Big[\left|u_2 p_0 + i(\cos\phi\, q_x + \sin\phi\, q_y) u_1\right|^2 + \\ + \left|u_2\right|^2 (\cos\phi\, q_x + \sin\phi\, q_y)^2\Big]\Big\}. \quad (2.25)$$

Выполняя интегрирование по частям и пренебрегая внеинтегральными членами, величину $\delta F_{\mathbf{q}}$ можно представить в виде квадратичной формы

$$\delta F_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \int \mathbf{u}^*(\mathbf{q}, z) \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{q}, z) \mathbf{u}(\mathbf{q}, z) dz. \quad (2.26)$$

Здесь

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\widehat{\mathcal{A}}$ представляет собой дифференциальный оператор второго порядка. В системе координат с осью x, направленной вдоль вектора $\mathbf{q}$ ($q_x = q$, $q_y = 0$), она имеет вид

$$\widehat{\mathcal{A}} = K_{11} \begin{pmatrix} q^2 \sin^2\phi & iq \sin\phi\,\partial_z \\ iq\partial_z \sin\phi & -\partial_z^2 \end{pmatrix} + \\ + K_{22} \begin{pmatrix} -\partial_z^2 & -iq\partial_z \sin\phi \\ -iq\sin\phi\,\partial_z & q^2 \sin^2\phi \end{pmatrix} + \\ + K_{33} \begin{pmatrix} q^2 \cos^2\phi & -ip_0 q \cos\phi \\ ip_0 q \cos\phi & q^2 \cos^2\phi + p_0^2 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

где $\partial_z^2 \equiv \partial^2/\partial z^2$.

Вероятность флуктуаций пропорциональна $\exp[-\delta F_{\mathbf{q}}/k_B T]$, где k_B — постоянная Больцмана, T — температура. Тогда, согласно общим принципам статической механики [36], вычисление корреляционной функции сводится к обращению матрицы $\widehat{\mathcal{A}}$, что эквивалентно решению уравнения

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{q}, z) \widehat{G}(\mathbf{q}; z, z_1) = k_B T \delta(z - z_1) \widehat{I}. \quad (2.28)$$

Для однозначной разрешимости уравнение (2.28) должно быть дополнено граничными условиями. В безграничной системе в качестве таких условий следует использовать принцип ослабления корреляций, т. е. условие $\widehat{G}(\mathbf{q}; z, z_1) \to \hat{0}$ при $z \to \pm\infty$.

3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

С оптической точки зрения холестерики представляют собой пространственно-неоднородную среду, свойства которой изменяются вдоль оси холестерика. Нормальные волны и поле точечного источника в такой среде имеют сложную структуру. Кроме того, корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости $\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ зависит здесь не только от разности пространственных координат $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, но и от их абсолютных значений. Все это

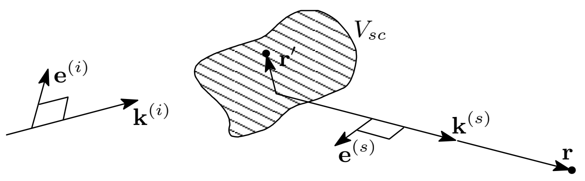

Рис. 2. Геометрия обычного эксперимента по рассеянию света: $\mathbf{k}^{(i)}$ — волновой вектор падающей волны, V_{sc} — рассеивающий объем, $\mathbf{k}^{(s)}$ — волновой вектор рассеянной волны, $\mathbf{r}$ — точка наблюдения

приводит к тому, что задача рассеяния света в ХЖК имеет специфические особенности. Для того чтобы проиллюстрировать эти особенности, изложим кратко обычный подход к решению задачи о рассеянии света в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^0_{lk} = \varepsilon_0 \delta_{lk}$.

3.1. Однородная среда

При обычной постановке задачи рассеяния света предполагается, что на образец падает плоская волна

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e}^{(i)} \exp(i\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{r}),$$

где E_0 — амплитуда, $\mathbf{e}^{(i)}$ — вектор поляризации, $\mathbf{k}^{(i)}$ — волновой вектор падающей волны ($\mathbf{e}^{(i)} \perp \mathbf{k}^{(i)}$), а рассеянное поле с вектором поляризации $\mathbf{e}^{(s)}$ регистрируется на больших расстояниях от рассеивающего объема V_{sc} (рис. 2). В этом случае можно считать рассеянное поле квазиплоской волной с волновым вектором $\mathbf{k}^{(s)}$. Чтобы не учитывать преломления на границе, будем считать, что образец окружен однородной средой с диэлектрической проницаемостью ε_0. Тогда $\left|\mathbf{k}^{(i)}\right| = \left|\mathbf{k}^{(s)}\right| = k$, где $k = k_0\sqrt{\varepsilon_0}$ — волновое число в среде.

В изотропной среде $\widehat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv \widehat{T}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, где в приближении дальней (волновой) зоны, когда $kR \gg 1$,

$$T_{0\alpha\beta}(\mathbf{R}) \approx P_{\alpha\beta}(\mathbf{R})\frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \tag{3.1}$$

где

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{R_\alpha R_\beta}{R^2} \tag{3.2}$$

— поперечный проектор на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{R}$ [37]. Наличие тензора $P_{\alpha\beta}$ в (3.1) обеспечивает поперечность поля точечного источника в дальней зоне.

На больших расстояниях от образца, когда $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \gg V_{sc}^{1/3} \sim r'$, можно в неэкспонециальных множителях формулы (3.1) провести замену $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$, а в показателе экспоненты использовать «фраунгоферовское» приближение $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}/r$ (последнее подразумевает выполнение также условия $kV_{sc}^{2/3} \ll r$). В результате из выражения (3.1) получаем «плосковолновое» приближение для функции Грина:

$$T_{0\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \approx P_{\alpha\beta}(\mathbf{r})\frac{e^{ikr}}{4\pi r}e^{-i\mathbf{k}^{(s)}\cdot\mathbf{r}'}, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{k}^{(s)} = k\mathbf{r}/r$ — волновой вектор рассеянной волны.

Полагая в (2.9) $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r})$ и используя формулу (3.3), получаем выражение для рассеянного поля

$$E^{(s)}_\alpha(\mathbf{r}) = E_0\frac{k_0^2 e^{ikr}}{4\pi r}P_{\alpha\beta}(\mathbf{r})e^{(i)}_\gamma \times \\ \times \int\limits_{V_{sc}} d\mathbf{r}'\delta\varepsilon_{\beta\gamma}(\mathbf{r}')e^{i\left(\mathbf{k}^{(i)}-\mathbf{k}^{(s)}\right)\cdot\mathbf{r}'}. \tag{3.4}$$

Таким образом, получаем, что рассеянное поле определяется трехмерной фурье-компонентой флуктуаций диэлектрической проницаемости $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{Q})$ в объеме V_{sc}, где $\mathbf{Q} = \mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}$ — вектор рассеяния. Учитывая, что $e^{(s)}_\alpha P_{\alpha\beta} = e^{(s)}_\beta$, получаем, в частности, для компоненты рассеянного поля с поляризацией $\mathbf{e}^{(s)}$

$$E^{(s)}(\mathbf{r}) = E_0\frac{k_0^2 e^{ikr}}{4\pi r}\,\mathbf{e}^{(s)}\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{Q})\mathbf{e}^{(i)}. \tag{3.5}$$

Соответствующая интенсивность (модуль вектора Пойнтинга) рассеянного света,

$$I^{(s)}_{(i)} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_0}\left\langle\left|E^{(s)}\right|^2\right\rangle, \tag{3.6}$$

имеет, таким образом, вид

$$I^{(s)}_{(i)} = \frac{V_{sc}I_0^{(i)}k_0^4}{(4\pi)^2 r^2}\,e^{(s)}_\alpha e^{(s)}_\beta \mathcal{G}_{\alpha\nu\beta\mu}(\mathbf{Q})e^{(i)}_\mu e^{(i)}_\nu, \tag{3.7}$$

где $I_0^{(i)}$ — интенсивность падающего света, а $\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{Q})$ — трехмерный фурье-образ корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости, которая в однородной среде зависит только от разности координат $\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Здесь мы учли соотношение $\langle\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{Q})\otimes\delta\hat{\varepsilon}^*(\mathbf{Q})\rangle = V_{sc}\widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{Q})$, $\otimes$ — знак тензорного произведения.

Подчеркнем, что с симметрийной точки зрения тот факт, что в формуле (3.5) рассеянное поле выражено через одну трехмерную фурье-гармонику флуктуаций $\delta\hat{\varepsilon}$, является следствием пространственной однородности системы по отношению к ее оптическим свойствам.

3.2. Среда с периодическими неоднородностями

Перейдем теперь к рассмотрению интересующей нас ситуации, когда свойства среды меняются периодически.

Простейший подход, позволяющий учесть периодические неоднородности, — использовать так называемое кинематическое приближение в теории дифракции [8, 9]. Запишем тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\delta_{\alpha\beta} + \Delta\varepsilon^0_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) + \delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}),$$

где член $\Delta\hat{\varepsilon}^0(\mathbf{r})$ учитывает периодические неоднородности структуры, а $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ — случайные флуктуации. Рассматривая $\Delta\hat{\varepsilon}^0(\mathbf{r}) + \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ как возмущение, можно считать, что падающее и рассеянное поля распространяются в однородной среде, и мы получим, аналогично (3.4), соответствующее рассеянное поле с поляризацией $\mathbf{e}^{(s)}$ в виде

$$E^{(s)}(\mathbf{r}) = E_0\frac{k_0^2 e^{ikr}}{4\pi r}\times \\ \times\left[\mathbf{e}^{(s)}\Delta\hat{\varepsilon}^0(\mathbf{Q})\mathbf{e}^{(i)} + \mathbf{e}^{(s)}\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{Q})\mathbf{e}^{(i)}\right]. \quad (3.8)$$

Первый из членов суммы в правой части (3.8) соответствует рассеянию на периодической структуре (дифракции), а второй — обычному рэлеевскому рассеянию (3.4).

Обе формулы, (3.4) и (3.8), соответствуют приближению однократного рассеяния. Однако, если в случае (3.4) это приближение обосновано малостью тепловых флуктуаций $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$, в случае (3.8) периодическая часть неоднородностей $\Delta\hat{\varepsilon}_0(\mathbf{r})$ обычно уже не мала и приближение однократного рассеяния для нее, вообще говоря, несправедливо. Использование формулы типа (3.8) для описания рассеяния света может быть правомерно только в случае очень малых периодических неоднородностей или в очень тонких образцах.

Проблема учета влияния немалых периодических неоднородностей на рассеяние света корректно решается, если перейти от описания рассеяния в терминах нормальных волн $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \propto \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ и функции Грина $\widehat{T}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ однородной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0\delta_{\alpha\beta}$ к нормальным волнам $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ и функции Грина $\widehat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ периодически неоднородной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^0_{\alpha\beta} = \varepsilon_0\delta_{\alpha\beta} + \Delta\varepsilon^0_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$.

В этом случае однократно рассеянное на случайных флуктуациях $\delta\hat{\varepsilon}$ поле описывается формулой (2.9). Эта формула учитывает одну кратность рассеяния на флуктуациях $\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и все порядки рассеяния на периодической структуре $\Delta\hat{\varepsilon}_0(\mathbf{r})$ (дифракция). Последнее следует из того, что в интегральной форме уравнения (2.7) и (2.8), определяющие $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ и $\widehat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, имеют вид

$$\mathbf{E}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + k_0^2\int \widehat{T}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Delta\hat{\varepsilon}_0(\mathbf{r}')\mathbf{E}^0(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}',$$

$$\widehat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \widehat{T}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \\ + k_0^2\int \widehat{T}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\Delta\hat{\varepsilon}_0(\mathbf{r}'')\widehat{T}^0(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}''.$$

Итерируя эти уравнения, мы действительно получаем в правой части все порядки по $\Delta\hat{\varepsilon}_0$.

Отметим, что здесь, в отличие от случая однородной среды (3.1), функция Грина $\widehat{T}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ уже не есть функция разности $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, а нормальные волны $\mathbf{E}^0(\mathbf{r})$ не имеют простого вида плоской волны пропорционального $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. Соответственно, несправедливо также «плосковолновое» приближение (3.3) для функции Грина в координатном представлении. Поэтому в такой среде интенсивность однократного рассеяния не будет пропорциональна трехмерному фурье-образу флуктуаций диэлектрической проницаемости $\delta\varepsilon$ на волновом векторе $\mathbf{Q} = \mathbf{k}^{(s)} - \mathbf{k}^{(i)}$.

Таким образом, в этом случае неприменима обычная схема расчета интенсивности рассеяния (3.1)–(3.7), и нужен другой подход.

Кроме проблемы учета периодических неоднородностей, которая решается путем использования формулы (2.9) вместо (3.4), в задаче рассеяния для неоднородных систем имеется еще одна проблема. Формула (2.9), в отличие от (3.4), описывает рассеянное поле только внутри среды. В эксперименте же обычно измеряются интенсивности рассеяния вне среды. Для однородных в среднем рассеивающих сред эта проблема обычно решается следующим образом. В простейшем случае предполагается, что рассеивающий объем помещен внутрь однородной среды с диэлектрической проницаемостью ε_0, что позволяет избежать рассмотрения вопроса о преломлении на границе образца. Более последовательный подход — учет преломления света на границах образца. Поскольку в однородной среде падающая волна является плоской, а рассеянная волна в дальней зоне внутри образца также может считаться квазиплоской, задача преломления может решаться на основе обычных формул Френеля. Здесь, однако, даже в изотропной системе существует тонкость, связанная с нетривиальной коррекцией телесных углов при преломлении. Для анизотропных рассеивающих сред эта проблема разобрана в работах [38].

Оптические свойства рассеивающей системы с периодическими неоднородностями рассеивающей и окружающей однородной среды различаются принципиально. Нормальные волны и функция Грина внутри и вне рассеивающего объема существенно различны (и, в частности, падающая и рассеянная волны могут считаться плоскими только вне образца), что не позволяет игнорировать наличие границы.

Для преодоления этих трудностей в средах с одномерными периодическими неоднородностями можно использовать следующую схему расчета интенсивности однократного рассеяния. Пусть рассеивающий объем представляет собой плоский слой $0 \leqslant z \leqslant L$ с достаточно большими поперечными размерами $L_\perp \gg L$, на который со стороны $z = -\infty$ падает плоская волна, а рассеянное поле регистрируется в области $z > L$, т. е. в передней полусфере. Последнее не принципиально, поскольку тем же способом можно рассматривать и рассеяние в задней полусфере, $z < 0$.

Сначала мы определим падающее поле $\mathbf{E}_{in}^{(i)}(\mathbf{r})$ внутри среды, порожденное плоской падающей волной $\mathbf{E}_{out}^{(i)}(\mathbf{r})$ вне среды с волновым вектором $\mathbf{k}^{(i)}$. Здесь и далее индексы «*in*» и «*out*» относятся к величинам, вычисленным соответственно внутри и вне неоднородной среды. Связь между компонентами поля внутри и снаружи образца на его границе без труда может быть найдена на основе общих граничных условий в электродинамике. Для плоскослоистых сред с границами, параллельными слоям, волна внутри среды будет иметь вид

$$\mathbf{E}_{in}^{(i)}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z) e^{i\mathbf{k}_\perp^{(i)}\cdot\mathbf{r}_\perp}, \tag{3.9}$$

где функция $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z)$ определяется свойствами плоскослоистой среды, поляризацией падающей волны $\mathbf{E}_{out}^{(i)}(\mathbf{r})$ и ее амплитудой. Поэтому нам потребуется соответствующее соотношение только для фурье-компонент полей $\mathbf{E}_{out}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z)$ и $\mathbf{E}_{in}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z)$ по координатам x и y.

Отметим, что в силу тождества $k_z^2 + k_\perp^2 = k_0^2\varepsilon_0$, справедливого вне плоскослоистой среды, для задания полного волнового вектора $\mathbf{k}$ достаточно задать вектор $\mathbf{k}_\perp$ и знак компоненты k_z. Поэтому при известном направлении падения волны на образец (положительном или отрицательном по отношению к z) достаточно задать вектор $\mathbf{k}_\perp^{(i)}$. Это же справедливо и для волнового вектора $\mathbf{k}_\perp^{(s)}$ рассеянной волны

$$\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z) e^{i\mathbf{k}_\perp^{(s)}\cdot\mathbf{r}_\perp}. \tag{3.10}$$

Рассеянное поле $\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L)$ на границе $z = L$ внутри неоднородного образца можно найти, используя формулы (2.9), (3.9). Имеем

$$\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) = k_0^2 \int\limits_0^L dz'\, \widehat{T}^0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; L, z') \times \\ \times \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}_\perp^{(s)} - \mathbf{k}_\perp^{(i)}, z') \boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z'). \tag{3.11}$$

Здесь, как мы видим, кроме знания функций $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z)$ нам потребуется выражение для фурье-компонент функции Грина $\widehat{T}^0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; z, z')$.

На основе граничных условий можно определить связь между полем $\mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{r})$ вне образца и полем $\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{r})$ внутри образца на границе. Причем фактически, нам потребуется соответствующее соотношение только для фурье-компонент $\mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L)$ и $\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L)$.

Поле $\mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{r})$ в точке наблюдения $\mathbf{r}$ вдали от образца можно найти по значениям поля $\mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{r}_\perp, L)$ на границе рассеивающего объема вне образца с помощью метода Кирхгофа [39].

3.3. Метод Кирхгофа

Поясним применение метода Кирхгофа сначала на примере скалярного волнового поля. Рассмотрим произвольную область Γ, ограниченную замкнутой поверхностью Σ, лежащую целиком вне неоднородного образца, т. е. в однородной среде. Внутри области Γ поле $E(\mathbf{r}) = E_{out}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left(\Delta + k_0^2\varepsilon_0\right) E(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{3.12}$$

Пусть функция $T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = T_{out}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ для всех $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Gamma$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\Delta + k_0^2\varepsilon_0\right) T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{3.13}$$

Тогда из (3.12), (3.13) следует интегральная теорема Кирхгофа–Гельмгольца [39],

$$E(\mathbf{r}) = \int\limits_\Sigma d^2\mathbf{r}'\, (T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'} E(\mathbf{r}') - \\ - E(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'} T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}')\,, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{r} \in \Gamma$ — произвольная точка, $\mathbf{r}' \in \Sigma$, $\mathbf{s}(\mathbf{r}')$ — внешняя нормаль к поверхности Σ в точке $\mathbf{r}'$.

Уравнение (3.13) не определяет функцию $T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ однозначно — требуются дополнительно граничные условия. Если в качестве граничного условия к этому уравнению взять $T|_\Sigma = 0$, то в этом случае поле в точке наблюдения $E(\mathbf{r})$ может быть выражено через значения поля $E(\mathbf{r}')$ на поверхности Σ:

$$E(\mathbf{r}) = -\int_{\Sigma} d^2\mathbf{r}' E(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{s}(\mathbf{r}'). \qquad (3.15)$$

Вид функции Грина, удовлетворяющей условию $T|_\Sigma = 0$, зависит от формы образца. Рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда поверхность Σ является участком плоскости $z = L$ с достаточно большими поперечными размерами $L_\perp$, замкнутым большой полусферой. Если функция Грина $T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ удовлетворяет на бесконечности условиям излучения (а мы ниже будем выбирать именно такие функции), то вклад в интеграл (3.15) от этой полусферы стремится к нулю с ростом её размеров. В этом случае граничное условие $T|_\Sigma = 0$ сводится к $T|_{z=L} = 0$ и, используя метод зеркальных отображений, получим

$$T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'_1|} \right), \qquad (3.16)$$

где $\mathbf{r}'_1$ — зеркальное отражение точки $\mathbf{r}'$ относительно плоской границы $z = L$.

Предположим, что измерение поля осуществляется в точке $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\perp, z)$, $z - L \gg L_\perp$. Тогда можно применить приближение типа (3.3) в обоих членах формулы (3.16). Учитывая, что в нашей геометрии $\mathbf{s}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} = -\partial/\partial z'$, из (3.15) находим

$$E(\mathbf{r}) = \frac{-ik_0\sqrt{\varepsilon_0}}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{z}{r} e^{-ik_z^{(s)}L} \times \\ \times \int_{\Sigma} d^2\mathbf{r}'_\perp E(\mathbf{r}'_\perp, L) e^{-i\mathbf{k}_\perp^{(s)} \cdot \mathbf{r}'_\perp}. \qquad (3.17)$$

Таким образом, при $L_\perp \gg \lambda$, где λ — длина волны света, получаем, что поле в точке $\mathbf{r}$ пропорционально поперечной фурье-компоненте поля на плоскости Σ:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{-ik_0\sqrt{\varepsilon_0}}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{z}{r} e^{-ik_z^{(s)}L} E(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L). \qquad (3.18)$$

Соответствующая интенсивность имеет, таким образом, вид

$$I \propto |E(\mathbf{r})|^2 = \frac{k_0^2\varepsilon_0}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{z}{r}\right)^2 \left|E(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L)\right|^2. \qquad (3.19)$$

Перейдем теперь к рассмотрению реальной векторной ситуации для электромагнитного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{out}(\mathbf{r})$ вне неоднородного образца удовлетворяет волновому уравнению

$$\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - k_0^2\varepsilon_0\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \qquad (3.20)$$

Нетрудно проверить, что система трех связанных уравнений (3.20) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \left(\Delta + k_0^2\varepsilon_0\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \end{cases} \qquad (3.21)$$

Первое уравнение (3.21) означает, что каждая из трех векторных компонент поля удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\left(\Delta + k_0^2\varepsilon_0\right) E_\alpha(\mathbf{r}) = 0, \qquad (3.22)$$

а второе уравнение — что все три компоненты вместе — дополнительному условию $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, соответствующему поперечности электромагнитного поля. Поэтому формально для каждой из трех компонент поля E_α применима скалярная формула типа Кирхгофа (3.18). При этом мы, однако, не учли условие поперечности поля $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ в (3.21). Для его учета умножим набор трех скалярных формул (3.18) для каждой из компонент поля на проектор $\widehat{P}(\mathbf{r})$ (3.2), обеспечивающий поперечность поля в дальней зоне. В результате получаем векторный аналог формулы Кирхгофа в виде[1)]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-ik_0\sqrt{\varepsilon_0}}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \times \\ \times \frac{z}{r} e^{-ik_z^{(s)}L} \widehat{P}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L). \qquad (3.23)$$

Тогда в силу соотношения $e_\alpha^{(s)} P_{\alpha\beta} = e_\beta^{(s)}$ получаем аналогично (3.5)–(3.7) формулу для интенсивности компоненты рассеянного поля с поляризацией $\mathbf{e}^{(s)}$,

$$I^{(s)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}c^2}{8\pi} \frac{k_0^2\varepsilon_0}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{z}{r}\right)^2 \times \\ \times \left\langle \left| \mathbf{e}^{(s)} \cdot \mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) \right|^2 \right\rangle. \qquad (3.24)$$

В случае пространственно-однородных систем формула (3.24) переходит в выражение (3.7). Дей-

[1)] Как известно [39], прямой перенос скалярной формулы Кирхгофа на векторный случай приводит к проблеме — нарушению условия поперечности $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Для устранения этого противоречия можно использовать векторную формулу Кирхгофа–Котлера (см., например, [40]). Однако в приближении дальней зоны образца непоперечность поля $\mathbf{E}$ при применении обычных формул Кирхгофа имеет порядок $\lambda/L_\perp \ll 1$. В такой ситуации использование простой векторной формулы (3.23), в которой поперечность поля обеспечивается проектором $P_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$, эквивалентно использованию метода Кирхгофа–Котлера.

ствительно, выполняя в формуле (2.9) преобразование Фурье по поперечным переменным x и y, имеем

$$\mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) = E_0 k_0^2 \int\limits_0^L dz' \widehat{T}^0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L - z') \times \\ \times \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}_\perp^{(s)} - \mathbf{k}_\perp^{(i)}, z') \mathbf{e}^{(i)} e^{ik_z^{(i)} z'}. \quad (3.25)$$

Фурье-образ функции Грина $\widehat{T}^0(\mathbf{r})$ по координатам x, y имеет вид

$$\widehat{T}^0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L - z') = \frac{i}{2k_z^{(s)}} e^{ik_z^{(s)}|L-z'|} \widehat{P}(\mathbf{k}^{(s)}), \quad (3.26)$$

где $k_z^{(s)} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0 - k_\perp^{(s)2}}$. Для однородной системы, в которой ε_0 внутри и вне образца совпадают,

$$\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) = \mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L).$$

Поскольку $\mathbf{k}^{(s)} = k_0 \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{r}/r$, имеем

$$k_z^{(s)} = k_0 \sqrt{\varepsilon_0} z/r, \quad \widehat{P}(\mathbf{k}^{(s)}) = \widehat{P}(\mathbf{r}).$$

Подставляя (3.26) в (3.25), получаем с учетом условия $z' < L$,

$$\mathbf{E}_{(out)}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) = \\ = \frac{iE_0 k_0^2}{2k_z^{(s)}} \widehat{P}(\mathbf{r}) \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \mathbf{e}^{(i)} e^{ik_z^{(s)} L}. \quad (3.27)$$

Подставляя это выражение в формулу (3.23) и умножая скалярно левую и правую части на вектор $\mathbf{e}^{(s)}$, получаем (3.5).

При применении формулы (3.24) к задаче о рассеянии света в ХЖК пренебрегать разницей между полями $\mathbf{E}_{in}$ и $\mathbf{E}_{out}$ нельзя. Для нахождения связи между ними учтем, что при проходе через границу раздела двух сред тангенциальная составляющая поля не меняется:

$$\begin{gathered} E_{out\perp}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0) = E_{in\perp}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0), \\ E_{out\perp}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) = E_{in\perp}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L), \end{gathered} \quad (3.28)$$

а компоненты $E_{out\,z}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L)$, $E_{out\,z}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0)$ можно получить из условия $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$.

В случае, когда шаг спирали велик по сравнению с длиной волны $d \gg \lambda$, можно использовать приближение геометрической оптики внутри ХЖК. При этом между полями на границах внутри $\mathbf{E}_{in}$ и вне $\mathbf{E}_{out}$ среды имеются линейные соотношения вида

$$\begin{gathered} \mathbf{E}_{in}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0) = \widehat{M}^{out\to in}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0) \mathbf{E}_{out}^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0), \\ \mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) = \widehat{M}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) \mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L), \end{gathered} \quad (3.29)$$

где матрицы пересчета $\widehat{M}^{out\to in}$, $\widehat{M}^{in\to out}$ несложно получить из уравнений (3.28) и условия $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$.

Из (3.11), (3.29) и соотношения $\langle \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}_\perp, z) \otimes \otimes \delta\hat{\varepsilon}^*(\mathbf{k}_\perp, z') \rangle = S_\perp \widehat{\mathcal{G}}(\mathbf{k}_\perp; z, z')$, где $S_\perp$ — площадь поперечного сечения образца, находим соответствующую величину в формуле (3.24), определяющую интенсивность однократного рассеяния:

$$\left\langle \left| \mathbf{e}^{(s)} \cdot \mathbf{E}_{out}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) \right|^2 \right\rangle = k_0^4 S_\perp e_\alpha^{(s)} e_\gamma^{(s)} \times \\ \times M_{\alpha\beta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) M_{\gamma\delta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) \times \\ \times \int\limits_0^L dz_1 \int\limits_0^L dz_2\, T_{\beta\rho}^0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; L, z_1) T_{\delta\varphi}^{0*}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; L, z_2) \times \\ \times \mathcal{G}_{\rho\nu\varphi\mu}(\mathbf{k}_\perp^{(s)} - \mathbf{k}_\perp^{(i)}; z_1, z_2) \mathcal{E}_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_1) \times \\ \times \mathcal{E}_\mu^{(i)*}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_2). \quad (3.30)$$

Здесь для простоты опущены матрицы пересчета $\widehat{M}^{out\to in}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, 0)$, позволяющие выразить поле внутри среды через поле, падающее на образец.

4. ОПТИКА ХЖК С БОЛЬШИМ ШАГОМ СПИРАЛИ

Рассмотрим задачу о распространении волн в ХЖК. Для наших целей удобнее вместо волнового уравнения (2.7) рассматривать непосредственно систему уравнений Максвелла (2.4) в равновесном ХЖК. С учетом соотношений $\operatorname{div} \hat{\varepsilon}^0 \mathbf{E} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ в $(\mathbf{q}, z)$-представлении задача сводится к системе уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ -H_y \end{pmatrix} = \\ = -i\Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 - q^2/k_0^2 \varepsilon_\perp \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon_{xy}^0(\xi) & \varepsilon_{yy}^0(\xi) - q^2/k_0^2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{xx}^0(\xi) & \varepsilon_{xy}^0(\xi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ -H_y \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где $\xi = p_0 z$ — безразмерная переменная, $\Omega = k_0/p_0 = 2d/\lambda$ — безразмерный параметр, λ — длина волны света. Оси координат x и y выбраны так же, как и в (2.27), т.е. направление оси x совпадает с направлением вектора $\mathbf{q}$. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют, согласно (2.2), (2.3), вид

$$\varepsilon^0_{xx} = \varepsilon_\perp + \varepsilon_a \cos^2\phi, \quad \varepsilon^0_{xy} = \varepsilon_a \sin\phi\cos\phi,$$
$$\varepsilon^0_{yy} = \varepsilon_\perp + \varepsilon_a \sin^2\phi\,.$$

Поскольку в этом разделе мы рассматриваем только равновесный ХЖК, мы опустили верхний индекс «0» у компонент поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (так же, как и ниже у компонент поля точечного источника $\widehat{T}(\mathbf{r},\mathbf{r}'))$.

Для описания распространения волн в ХЖК система типа (4.1) использовалась в работе [41]. Там аналогичная система численно решалась для случая $\lambda \sim d$. В нашем случае, когда $\lambda \ll d$ $(\Omega \gg 1)$, прямые численные методы решения неэффективны из-за быстроосциллирующего характера решения и для построения решения лучше использовать векторное обобщение метода ВКБ.

4.1. Нормальные волны

Асимптотическое ВКБ-решение системы (4.1) получено в [29]. Согласно [29] в ХЖК с большим шагом спирали для данного $\mathbf{q}$ существуют четыре нормальные волны. Две из них распространяются в сторону положительных z, а две другие — в сторону отрицательных z. Восстанавливая компоненты E_z из уравнения $\operatorname{div}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{E} = 0$, эти волны можно записать в виде

$$\mathbf{E}^{(j)}_\pm(\mathbf{r}) = E^{(j)}_0 A^{(j)}(\mathbf{q}; z, z_0)\, \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q}, z) \times \\ \times \exp\left(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_\perp \pm i\int\limits_{z_0}^{z} k^{(j)}_z(\mathbf{q}, z')dz'\right), \quad (4.2)$$

где $j = 1{,}2$, а знаки $\pm$ соответствуют направлению распространения волны. Постоянные $E^{(j)}_0$ характеризуют начальную амплитуду поля на плоскости z_0. Здесь $k^{(j)}_z(\mathbf{q}, z) \sim k_0$, $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q}, z)$ — единичные векторы, а $A^{(j)}(\mathbf{q}; z, z_0)$ — амплитудные множители. Причем все эти величины — плавно меняющиеся на масштабе λ функции. Поэтому волны (4.2) локально являются плоскими с волновыми векторами $\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{q}, z) = (\mathbf{q},\ \pm k^{(j)}_z(\mathbf{q}, z))$ и векторами поляризации $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q}, z)$. В главном порядке по большому параметру Ω

$$k^{(1)}_z(\mathbf{q}, z) \equiv k^{(1)}_z(q) = \sqrt{\varepsilon_\perp k_0^2 - q^2}, \\ k^{(2)}_z(\mathbf{q}, z) = \sqrt{\varepsilon_\parallel k_0^2 - q^2 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_\perp}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}^0(z))^2}\,, \quad (4.3)$$

$$A^{(1)}(\mathbf{q}; z, z_0) = 1, \quad A^{(2)}(\mathbf{q}; z, z_0) = \\ = \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp^2 k_0^2 + \varepsilon_a(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}^0(z))^2}{\varepsilon_\perp^2 k_0^2 + \varepsilon_a(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}^0(z_0))^2}} \sqrt{\frac{k^{(2)}_z(\mathbf{q}, z_0)}{k^{(2)}_z(\mathbf{q}, z)}}\,, \quad (4.4)$$

а векторы поляризации $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q}, z)$ в использованной выше системе координат имеют вид

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{q}, z) = \frac{1}{\sqrt{k_0^2\varepsilon_\perp - q^2\cos^2\phi}} \times \\ \times \left(k^{(1)}_z \sin\phi,\ -k^{(1)}_z\cos\phi,\ -q\sin\phi\right),$$

$$\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{q}, z) = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp}}{\sqrt{(k_0^2\varepsilon_\perp - q^2\cos^2\phi)(k_0^2\varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_a q^2\cos^2\phi)}} \times \\ \times \left((k_0^2\varepsilon_\perp - q^2)\cos\phi, k_0^2\varepsilon_\perp\sin\phi, -qk^{(2)}_z\cos\phi\right). \quad (4.5)$$

Так как векторы $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q}, z)$ в (4.5) вещественны, волны (4.2) в главном порядке по Ω локально являются линейно-поляризованными[2)].

Величины $A^{(j)}(\mathbf{q}; z, z_0)$ в (4.4), можно записать в виде

$$A^{(j)}(\mathbf{q}; z, z_0) = \frac{B^{(j)}(\mathbf{q}, z)}{B^{(j)}(\mathbf{q}, z_0)}\,, \quad (4.6)$$

где

$$B^{(1)}(\mathbf{q}, z) \equiv B^{(1)}(q) = \sqrt{\frac{k_0}{k^{(1)}_z(q)}}, \\ B^{(2)}(\mathbf{q}, z) = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp^2 k_0^2 + \varepsilon_a(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}^0(z))^2}}{\varepsilon_\perp\sqrt{k_0 k^{(2)}_z(\mathbf{q}, z)}}. \quad (4.7)$$

Формулы (4.2)–(4.7) имеют внешне достаточно формальный характер. Физический смысл волн $\mathbf{E}^{(j)}(\mathbf{r})$ станет яснее, если мы обратим внимание, что векторы поляризации $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q}, z)$ в (4.5) удовлетворяют условиям

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{q}, z) \perp \mathbf{n}^0(z), \quad \mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{q}, z) \perp \mathbf{k}^{(1)}(\mathbf{q}, z), \\ \hat{\varepsilon}^0(z)\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{q}, z) \perp \mathbf{k}^{(2)}(\mathbf{q}, z), \quad (4.8)$$

и вектор $\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{q}, z)$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{k}^{(2)}(\mathbf{q}, z)$ и $\mathbf{n}^0(z)$. Заметим также, что согласно (4.3) волновые числа

$$k^{(j)}(\mathbf{q}, z) = \sqrt{q^2 + k^{(j)2}_z(\mathbf{q}, z)}$$

[2)] В следующем порядке по большому параметру в $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q}, z)$ появляется мнимая добавка и волны (4.2) становятся, таким образом, слабо эллиптически-поляризованными [31] (ср. также с формулой (П.12) в Приложении).

этих волн удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} k^{(1)2}(\mathbf{q},z) &= k_0^2\varepsilon_\perp\,, \\ k^{(2)2}(\mathbf{q},z) &= k_0^2\frac{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp+\varepsilon_a\cos^2\theta}\,, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где θ — угол между $\mathbf{n}^0(z)$ и $\mathbf{k}^{(2)}(\mathbf{q},z)$ (здесь следует иметь в виду, что второе из этих равенств представляет собой уравнение для $k^{(2)}(\mathbf{q},z)$, так как

$$\cos\theta = \mathbf{n}^0(z)\cdot\mathbf{k}^{(2)}(\mathbf{q},z)/k^{(2)}(\mathbf{q},z) = \\ = q\cos\phi(z)/k^{(2)}(\mathbf{q},z)).$$

Сравнивая формулы (4.8), (4.9) с обычными формулами для поляризаций и волновых чисел нормальных волн в однородной одноосной анизотропной среде [37], мы видим, что две волны (4.2)–(4.5) локально являются обыкновенной (индекс (1)) и необыкновенной (индекс (2)) волнами в данной точке ХЖК.

Таким образом, формулы (4.2)–(4.5) соответствуют адиабатическому режиму распространения волн. Их можно рассматривать как обобщение известного решения Могена [24] на случай наклонного падения. Физический смысл этих формул состоит в следующем. При падении на плоскость $z=z_0$ нормальной волны с номером j за счет пробега в среде волна наберет фазу $\int_{z_0}^{z}k_z^{(j)}(\mathbf{q},z')dz'$, и попадет на плоскость z как нормальная волна с тем же номером j. При этом в силу отличия $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q},z)$ от $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q},z_0)$ вектор поляризации волны повернется. Появление же зависимости от z амплитудных множителей $A^{(j)}(\mathbf{q},z)$ в (4.4) связано с обеспечением сохранения энергии для волны в неоднородной среде без поглощения (см. ниже (4.11)–(4.14)).

Волновой вектор $\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{q},z)$ в данной точке ХЖК направлен вдоль нормали к волновому фронту. При этом для обыкновенного луча волновой вектор волны $\mathbf{k}^{(1)}=\mathbf{k}^{(1)}(q)$ не зависит от точки z, а для необыкновенного луча волновой вектор $\mathbf{k}^{(2)}=\mathbf{k}^{(2)}(\mathbf{q},z)$ меняется в зависимости от z по величине и направлению. В то же время векторы поляризации $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q},z)$ меняются по направлению вместе с z для обеих типов волн. Однако в любом случае при фиксированном значении $\mathbf{q}$ волновой вектор $\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{q},z)$ всегда лежит в одной плоскости (содержащей векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{e}_z$) как для обыкновенного, так и для необыкновенного луча.

Траектория распространения луча в анизотропной среде характеризуется соответствующим лучевым вектором волны, направленным вдоль вектора Пойнтинга, который для плоской волны в анизотропной среде имеет вид [37]

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{c}{8\pi k_0}\left[\mathbf{k}\,|E|^2 - \mathbf{E}\,(\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{k})\right]. \tag{4.10}$$

Для волн (4.2) получаем, в частности,

$$\mathbf{S}^{(j)}(\mathbf{r}) = \frac{c\left|E_0^{(j)}\right|^2}{8\pi k_0}A^{(j)2}(\mathbf{q},z)\left[\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{q},z)- \right. \\ \left. -\,\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q},z)\left(\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{q},z)\cdot\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q},z)\right)\right]. \tag{4.11}$$

Поскольку $\mathbf{e}^{(1)}\cdot\mathbf{k}^{(1)}=0$, то $\mathbf{S}^{(1)}(\mathbf{q},z)\parallel\mathbf{k}^{(1)}(q)$ и обыкновенный луч имеет прямолинейную траекторию. В то же время, в общем случае, $\mathbf{e}^{(2)}\cdot\mathbf{k}^{(2)}\neq 0$, и, как показывает анализ выражения (4.11), вектор $\mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{q},z)$ при изменении z не остается в одной плоскости. Поэтому траектория необыкновенного луча, касательная в каждой точке которой должна быть параллельна $\mathbf{S}^{(j)}(\mathbf{r})$ в этой точке, не лежит в одной плоскости. На рис. 3 показана типичная траектория необыкновенного луча, рассчитанная на основе формулы (4.11).

Проанализируем следствия закона сохранения энергии $\mathrm{div}\mathbf{S}^{(j)}=0$ для волн (4.2). В нашем случае имеем $\mathrm{div}\mathbf{S}^{(j)}=\partial_z S_z^{(j)}(\mathbf{q},z)=0$. Поэтому компонента $S_z^{(j)}(\mathbf{q},z)$ не зависит от z. Тогда из (4.11) получаем

$$A^{(j)2}(\mathbf{q},z) = C_0^{(j)}(\mathbf{q})k_0\left[k_z^{(j)}(\mathbf{q},z)- \right. \\ \left. -\,e_z^{(j)}(\mathbf{q},z)(\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{q},z)\cdot\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q},z))\right]^{-1}, \tag{4.12}$$

где $C_0^{(j)}$ — произвольные безразмерные функции $\mathbf{q}$. Из (4.5) находим

$$\frac{k_z^{(j)}-e_z^{(j)}\mathbf{k}^{(j)}\cdot\mathbf{e}^{(j)}}{k_0} = \\ = \begin{cases} k_z^{(1)}(q)/k_0\,, & \text{при } j=1\,, \\ \dfrac{k_z^{(2)}(\mathbf{q},z)k_0\varepsilon_\perp^2}{k_0^2\varepsilon_\perp^2+\varepsilon_a q^2\cos^2\phi(z)}\,, & \text{при } j=2\,. \end{cases} \tag{4.13}$$

Правая часть, согласно (4.7), совпадает с $1/B^{(j)2}(\mathbf{q},z)$, и из (4.12) получаем

$$A^{(j)2}(\mathbf{q},z) = C_0^{(j)}(\mathbf{q})B^{(j)2}(\mathbf{q},z)\,. \tag{4.14}$$

Это выражение переходит в (4.6), если положить $C_0^{(j)}(\mathbf{q}) = 1/B^{(j)2}(\mathbf{q},z_0)$. Последний выбор удобен тем, что в этом случае амплитуда $E_0^{(j)}$ в (4.2) не зависит от выбора начальной точки z_0.

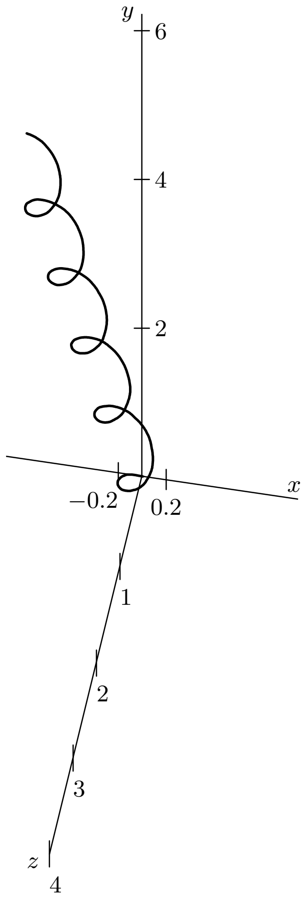

Рис. 3. Траектория необыкновенного луча в ХЖК. Расчет проведен для $\varepsilon_a = 2,0$, $\varepsilon_\parallel = 2,5$. Все расстояния даны в единицах d

Обсудим условия, при которых волны (4.2) могут распространяться в глубь ХЖК. Рассмотрим сначала обыкновенную волну. Заметим, что $k_z^{(1)}$ вещественно при условии $q^2 \leqslant k_0^2\varepsilon_\perp$. При этом обыкновенная волна распространяется в область любых z. В случае $q^2 > k_0^2\varepsilon_\perp$ величина $k_z^{(1)}$ становится мнимой и обыкновенная волна не распространяется в среде при всех z и z_0.

Для необыкновенной волны условия распространения более сложные — они зависят от соотношения параметров q и z. Здесь возможны следующие ситуации.

1) Если $q^2 > k_0^2 \max(\varepsilon_\parallel, \varepsilon_\perp)$, то $k_z^{(2)}(\mathbf{q}, z)$ будет мнимым при любых z и такая волна распространяться в ХЖК не будет.

2) В случае $q^2 \leqslant k_0^2 \min(\varepsilon_\parallel, \varepsilon_\perp)$ величина $k_z^{(2)}(\mathbf{q}, z)$ вещественна при всех z и волна в среде распространяется в область любых z.

3) При условии $k_0^2 \min(\varepsilon_\parallel, \varepsilon_\perp) < q^2 < k_0^2 \max(\varepsilon_\parallel, \varepsilon_\perp)$

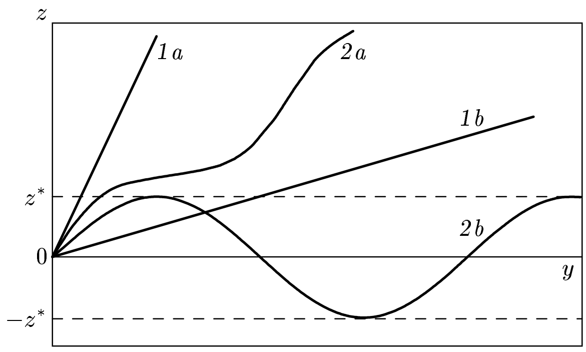

Рис. 4. Типы траекторий лучей в ХЖК: кривые $1a$, $1b$ — обыкновенные лучи, кривая $2a$ — необыкновенный луч вне волнового канала, кривая $2b$ — необыкновенный луч, захваченный в волновой канал

необыкновенная волна может распространяться в среде только при определенных значениях z. Область соответствующих z определяется неравенством $\cos^2\phi(z) \leqslant \varepsilon_\perp(k_0^2\varepsilon_\parallel - q^2)/q^2\varepsilon_a$ при $\varepsilon_a > 0$ и неравенством $\cos^2\phi(z) \geqslant \varepsilon_\perp(k_0^2\varepsilon_\parallel - q^2)/q^2\varepsilon_a$ при $\varepsilon_a < 0$ (отметим, что в рассматриваемой области значений q выполнено условие $0 < \varepsilon_\perp(k_0^2\varepsilon_\parallel - q^2)/q^2\varepsilon_a < 1$).

Таким образом, в последнем случае возникает эффект захвата необыкновенного луча в ХЖК [31, 32]. Физическая картина эффекта состоит в том, что необыкновенный луч начинает поворачиваться и в некоторой точке $z = z^*(\mathbf{q})$ величина $k_z^{(2)}(\mathbf{q}, z)$ обратится в нуль, а затем сменит знак. В определенном смысле данный эффект аналогичен эффекту полного внутреннего отражения от некоторой плоскости внутри среды. Так как показатель преломления — периодическая функция, то такой луч будет попеременно отражаться от двух плоскостей, перпендикулярных оси z. Поэтому образуется плоский волновой канал, внутри которого необыкновенная волна может распространяться в область сколь угодно больших $\mathbf{r}_\perp$, оставаясь в пределах одного периода по z. На рис. 4 схематически показаны проекции траекторий обыкновенного и необыкновенного лучей на плоскость yz, демонстрирующие эффект волноводного распространения.

4.2. Поле точечного источника

Соответствующая задача (2.8) для поля точечного источника $\widehat{T}^0(\mathbf{q}; z, z_1)$ сводится к системе уравнений вида

$$\widehat{\mathfrak{L}}(z)\widehat{T}^0(\mathbf{q}; z, z_1) = \delta(z - z_1)\widehat{I}, \tag{4.15}$$

где

$$\widehat{\mathfrak{L}}(z) = \\ = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - k_0^2\varepsilon^0_{xx} & -k_0^2\varepsilon^0_{xy} & iq\dfrac{\partial}{\partial z} \\ -k_0^2\varepsilon^0_{xy} & -\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + q^2 - k_0^2\varepsilon^0_{yy} & 0 \\ iq\dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & q^2 - k_0^2\varepsilon_\perp \end{pmatrix}$$

— линейный дифференциальный оператор второго порядка.

Решение этой системы получено нами в [32] векторным методом ВКБ. Построение решения базируется на методе работы [29] для однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения (4.15) конструируется как суперпозиция решений (4.2) соответствующего однородного уравнения отдельно в двух областях $z > z_1$ и $z < z_1$ с подбором коэффициентов суперпозиции, обеспечивающих нужный характер особенности правой части (4.15). Результат [32] имеет вид

$$\widehat{T}^0(\mathbf{q}; z, z_1) = \widehat{T}^{(1)}(\mathbf{q}; z, z_1) + \widehat{T}^{(2)}(\mathbf{q}; z, z_1), \qquad (4.16)$$

где

$$T^{(j)}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}; z, z_1) = \frac{i}{2k_0} B^{(j)}(\mathbf{q}, z) B^{(j)}(\mathbf{q}, z_1)\, e^{(j)}_\alpha(\mathbf{q}, z) \times \\ \times e^{(j)}_\beta(\mathbf{q}, z_1) \exp\left(i\left|\int\limits_{z_1}^{z} k^{(j)}_z(\mathbf{q}, z')dz'\right|\right). \qquad (4.17)$$

Проанализируем предел $p_0 \to 0$ в (4.17), который соответствует однородной одноосной анизотропной среде (в нашем физическом контексте — нематическому жидкому кристаллу). Величины $\mathbf{n}^0(z)$, $k^{(j)}_z(\mathbf{q}, z)$, $B^{(j)}(\mathbf{q}, z)$, $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q}, z)$ в этом пределе перестают зависеть от координаты z: $\mathbf{n}^0(z) = \mathbf{n}^0$, $k^{(j)}_z(\mathbf{q}, z) = k^{(j)}_z(\mathbf{q})$, $B^{(j)}(\mathbf{q}, z) = B^{(j)}(\mathbf{q})$, $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q}, z) = \mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q})$, а функции $\widehat{T}^{(j)}(\mathbf{q}; z, z_1)$ становятся зависящими лишь от разности пространственных координат, $\widehat{T}^{(j)}(\mathbf{q}; z, z_1) = \widehat{T}^{(j)}(\mathbf{q}; z - z_1)$. Формула (4.17) тогда приобретает вид

$$T^{(j)}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}; z - z_1) = \\ = \frac{i}{2k_0} B^{(j)2}(\mathbf{q})\, e^{(j)}_\alpha(\mathbf{q}) e^{(j)}_\beta(\mathbf{q})\, e^{ik^{(j)}_z(\mathbf{q})|z - z_1|}. \qquad (4.18)$$

Выражение для поля точечного источника в однородной анизотропной среде в трехмерном фурье-представлении имеет вид [42]

$$T^0_{\alpha\beta}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{k_0^2} \sum_{j=1,2} \frac{e_{(j)\alpha}(\mathbf{Q}) e_{(j)\beta}(\mathbf{Q})}{\mathbf{e}_{(j)}(\mathbf{Q})\hat{\varepsilon}^0\mathbf{e}_{(j)}(\mathbf{Q})} \times \\ \times \frac{k^2_{(j)}(\mathbf{Q})}{Q^2 - k^2_{(j)}(\mathbf{Q}) - i0} - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{\mathbf{Q}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{Q}}. \qquad (4.19)$$

Здесь $\mathbf{Q}$ — трехмерный волновой вектор, $\mathbf{e}_{(j)}$ — векторы поляризации, а $k_{(j)}$ — волновые числа двух распространяющихся в однородной анизотропной среде плоских волн (обыкновенной и необыкновенной). Последний член в правой части (4.19) связан с ближним полем диполя и далее нас интересовать не будет. Для случая одноосной среды соответствующие векторы поляризации и волновые числа обыкновенной и необыкновенной волн имеют вид

$$\begin{gathered} e_{(1)}(\mathbf{Q}) = \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{n}^0}{Q}, \quad k_{(1)}(\mathbf{Q}) = k_0\sqrt{\varepsilon_\perp}, \\ e_{(2)}(\mathbf{Q}) = \frac{\mathbf{n}^0(\mathbf{Q}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{Q}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{n}^0)}{\sqrt{(\mathbf{Q}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{Q})^2 - 2(\mathbf{Q}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{Q})(\mathbf{Q}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{n}^0)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{n}^0) + Q^2(\mathbf{Q}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{n}^0)^2}}, \\ k_{(2)}(\mathbf{Q}) = k_0 Q\sqrt{\frac{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp Q^2 + \varepsilon_a(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{n}^0)^2}}. \end{gathered} \qquad (4.20)$$

Запишем волновой вектор $\mathbf{Q}$ в виде $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}; q_z)$ и выполним в (4.19) по переменной q_z обратное преобразование Фурье

$$T^0_{\alpha\beta}(\mathbf{q}; z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_z}{2\pi}\, T^0_{\alpha\beta}(\mathbf{q}; q_z)\, e^{iq_z z}. \qquad (4.21)$$

Главный вклад в асимптотику интеграла при $z \gg \lambda$ дается вычетами в полюсах первого порядка на двух дисперсионных поверхностях:

$$q^2 + q_z^2 - k^2_{(j)}(\mathbf{q}; q_z) = 0, \qquad (4.22)$$

$j = 1, 2$. Обозначая два решения каждого дисперсионного уравнения относительно q_z как $q_z = \pm q^{(j)}_z(\mathbf{q})$, из (4.19) получаем

$$T^0_{\alpha\beta}(\mathbf{q}; z) = \frac{i}{k_0^2} \sum_{j=1,2} k^2_{(j)} \left(2q_z - \frac{\partial k^2_{(j)}}{\partial q_z}\right)^{-1} \times \\ \times \frac{e_{(j)\alpha} e_{(j)\beta}}{\mathbf{e}_{(j)}\hat{\varepsilon}^0\mathbf{e}_{(j)}}\, e^{iq^{(j)}_z|z|}, \qquad (4.23)$$

где величины $\mathbf{e}_{(j)}$ и $k_{(j)}$ вычислены на волновом векторе $\mathbf{Q}^{(j)}(\mathbf{q}) \equiv (\mathbf{q}, q_z^{(j)}(\mathbf{q}))$.

Подставляя в (4.22) выражения (4.20) для $k_{(j)}^2(\mathbf{Q})$ и решая полученные уравнения для $j = 1,2$ относительно q_z, получим в обоих случаях, что $q_z^{(j)} = k_z^{(j)}(\mathbf{q})$, где $k_z^{(j)}(\mathbf{q})$ определено в (4.3) (при $j = 2$ следует принять во внимание, что $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{n}^0 = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}^0$). Таким образом, $\mathbf{Q}^{(j)}(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}, k_z^{(j)}(\mathbf{q})) = \mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{q})$. Как нетрудно проверить с помощью (4.20), величины $\mathbf{e}_{(j)}(\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{q}))$ и $k_{(j)}(\mathbf{k}^{(j)}(\mathbf{q}))$ при этом совпадают с $\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q})$ и $k^{(j)}(\mathbf{q})$ в (4.3) и (4.5) при $p_0 = 0$. Также несложно проверяется тождество

$$\frac{k_z^{(j)}(\mathbf{q})B^{(j)2}(\mathbf{q})}{k_0} = \frac{k^{(j)2}(\mathbf{q})}{k_0^2\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q})\hat{\varepsilon}^0\mathbf{e}^{(j)}(\mathbf{q})} \times \\ \times \left(q_z - \frac{1}{2}\frac{\partial k_{(j)}^2(\mathbf{q}, q_z)}{\partial q_z}\bigg|_{q_z = k_z^{(j)}(\mathbf{q})}\right)^{-1} \quad (4.24)$$

для обоих случаев $j = 1, 2$. В результате (4.23) совпадает с (4.16), (4.17).

5. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ДИРЕКТОРА В ХЖК С БОЛЬШИМ ШАГОМ СПИРАЛИ

Задача (2.28) для оператора (2.27) — это неоднородная система двух дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Решение соответствующей однородной системы удовлетворяет теореме Флоке [43], имея вид произведения двух матричных функций от z и z_1: экспоненциальной (с показателем экспоненты линейным по z и z_1) и периодической с периодом $2d = 2\pi/p_0$. Для нахождения показателей экспонент и фурье-гармоник периодической функции обычно используется стандартная для уравнений типа Хилла расчетная схема [43], приводящая к бесконечной системе трехчленных рекуррентных соотношений. Применительно к изучению флуктуаций директора в ХЖК подробный анализ проблемы на основе такого подхода был проведен в [20, 21]. В этих работах в предположении $q/p_0 \ll 1$, когда с ростом номеров гармоник Фурье их вклады быстро убывают, были найдены низшие гармоники трехмерного спектра Фурье корреляционной функции $\hat{g}$. С физической точки зрения предел $q/p_0 \to 0$ соответствует «смектикоподобному» ХЖК, что и подтверждается результатом [20]: главный вклад в корреляционную функцию

$$\hat{g}(\mathbf{q}, k_z) \sim q^2/(k_z^2 + c_0 p_0^{-2} q^4),$$

где c_0 — безразмерная постоянная. Коррелятор именно такого вида характерен для флуктуаций директора в смектиках А [34].

Ситуация ХЖК с большим шагом спирали соответствует противоположному предельному случаю нематикоподобного ХЖК, когда $p_0/q \to 0$. Проблема с точки зрения обычного подхода Флоке здесь состоит в том, что главный вклад в корреляционную функцию вносит широкий спектр гармоник Фурье с большими номерами для периодических сомножителей. В такой ситуации методы, основанные на теории Флоке не эффективны, и представляется более перспективным метод ВКБ по большому параметру $q/p_0 \gg 1$.

5.1. Общая схема расчета корреляционной функции в средах с одномерными неоднородностями

Уравнение (2.28) вместе с условием убывания $\widehat{G}(z, z_1)$ при $z \to \pm\infty$ представляет собой уравнение для функции Грина. Заметим, что при $z \neq z_1$ уравнение (2.28) становится однородным. Мы сначала решим однородные уравнения отдельно для случаев $z > z_1$ и $z < z_1$. Затем, используя условия непрерывности функции $\widehat{G}$ и скачка её производной при $z = z_1$, построим функцию Грина.

Система однородных уравнений имеет вид

$$\left[-\begin{pmatrix} K_{22} & 0 \\ 0 & K_{11}\end{pmatrix}\frac{d^2}{d\xi^2} + i\widetilde{\Omega}(K_{11} - K_{22})\sin\phi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{d}{d\xi} + \\ + \begin{pmatrix} \widetilde{\Omega}^2(K_{11}\sin^2\phi + K_{33}\cos^2\phi) & -i\widetilde{\Omega}\cos\phi\,(K_{22} + K_{33}) \\ i\widetilde{\Omega}\cos\phi\,(K_{11} + K_{33}) & \widetilde{\Omega}^2(K_{22}\sin^2\phi + K_{33}\cos^2\phi) + K_{33}\end{pmatrix}\right]\mathbf{u}(\xi) = 0, \quad (5.1)$$

где $\widetilde{\Omega} = q/p_0$. Уравнение (5.1) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Эта система имеет четыре линейно независимых решения. Составим из четырех линейно независимых векторов-столбцов решений уравнения (5.1) две матрицы $\hat{u}_1(\xi)$ и $\hat{u}_2(\xi)$, такие что $\hat{u}_1(\xi) \to \widehat{0}$ при $\xi \to +\infty$, а $\hat{u}_2(\xi) \to \widehat{0}$ при $\xi \to -\infty$. Этот выбор обеспечит нам нужное поведение $\widehat{G}(\xi,\xi_1)$ на бесконечности.

Будем искать функцию Грина в виде

$$\widehat{G}(\xi,\xi_1) = \begin{cases} \hat{u}_1(\xi)\hat{v}_1(\xi_1) & \text{при} \quad \xi \geqslant \xi_1\,, \\ \hat{u}_2(\xi)\hat{v}_2(\xi_1) & \text{при} \quad \xi < \xi_1\,, \end{cases} \tag{5.2}$$

где $\hat{v}_1$ и $\hat{v}_2$ — матрицы размера 2×2. Для нахождения восьми элементов этих матриц воспользуемся условиями для функции Грина в окрестности точки $\xi = \xi_1$. Эти условия представляют собой непрерывность самой функции и скачок ее первой производной такой, чтобы удовлетворить уравнению (2.28)

$$\begin{gathered} \widehat{G}(\xi_1+0,\xi_1) = \widehat{G}(\xi_1-0,\xi_1), \\ \widehat{K}\left(\left.\frac{\partial\widehat{G}}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_1-0} - \left.\frac{\partial\widehat{G}}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_1+0}\right) = \frac{k_BT}{p_0}\widehat{I}, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} K_{22} & 0 \\ 0 & K_{11} \end{pmatrix}.$$

Подставляя (5.2) в (5.3), получаем систему восьми уравнений для элементов матриц $\hat{v}_{1,2}$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(\xi_1)\hat{v}_1(\xi_1) = \hat{u}_2(\xi_1)\hat{v}_2(\xi_1), \\ \hat{u}_1'(\xi_1)\hat{v}_1(\xi_1) - \hat{u}_2'(\xi_1)\hat{v}_2(\xi_1) = \\ = -k_BTp_0^{-1}\widehat{K}^{-1}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Формулу (5.4) нетрудно получить, проинтегрировав (2.28) по переменной z в бесконечно малом интервале, содержащем точку z_1. Решая систему (5.4), получаем

$$\hat{v}_j = \frac{k_BT}{p_0}\hat{u}_j^{-1}\hat{w}\widehat{K}^{-1}\,, \tag{5.5}$$

где $\hat{w}(\xi) = \left(\hat{u}_2'(\xi)\hat{u}_2^{-1}(\xi) - \hat{u}_1'(\xi)\hat{u}_1^{-1}(\xi)\right)^{-1}$, $j = 1{,}2$.

Подставляя (5.5) в (5.2), окончательно находим для функции Грина

$$\begin{gathered} \widehat{G}(\xi,\xi_1) = k_BTp_0^{-1} \times \\ \times \begin{cases} \hat{u}_1(\xi)\hat{u}_1^{-1}(\xi_1)\hat{w}(\xi_1)\widehat{K}^{-1} & \text{при} \quad \xi \geqslant \xi_1\,, \\ \hat{u}_2(\xi)\hat{u}_2^{-1}(\xi_1)\hat{w}(\xi_1)\widehat{K}^{-1} & \text{при} \quad \xi < \xi_1\,. \end{cases} \end{gathered} \tag{5.6}$$

Выбор матриц $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ неоднозначен (например, их столбцы могут быть умножены на произвольные константы), однако эта неоднозначность в формуле (5.6) исчезает за счет множителей $\hat{w}$.

Обратим внимание, что $\widehat{G}(\xi,\xi_1) \to 0$ при $|\xi-\xi_1| \to \infty$ в силу нашего выбора матриц $\hat{u}_{1,2}$, т. е. граничные условия для $\widehat{G}$ выполнены.

Данная схема построения функции Грина при помощи решений однородного уравнения является общей и не требует использования большого параметра $\widetilde{\Omega}$.

5.2. Применение метода ВКБ для нахождения корреляционной функции

Наличие большого параметра в нашей задаче мы используем для явного построения решений $\mathbf{u}$ однородного уравнения (5.1). Эти решения найдем векторным методом ВКБ. Вводя вектор

$$\mathbf{v} = \frac{1}{i\widetilde{\Omega}}\frac{d\mathbf{u}}{d\xi}\,,$$

приведем (5.1) к системе четырех уравнений первого порядка:

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{d\xi} = \left(i\widetilde{\Omega}\widehat{B} + \widehat{C}\right)\mathbf{\Psi}. \tag{5.7}$$

Здесь мы использовали следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & b_2 & b_4 & 0 \end{pmatrix}, \\ \widehat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ c_2 & c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{5.8}$$

где

$$b_1 = -\frac{K_{11}\sin^2\phi + K_{33}\cos^2\phi}{K_{22}},$$

$$b_2 = -\frac{K_{22}\sin^2\phi + K_{33}\cos^2\phi}{K_{11}},$$

$$b_3 = \left(\frac{K_{11}}{K_{22}} - 1\right)\sin\phi\,,$$

$$b_4 = \left(1 - \frac{K_{22}}{K_{11}}\right)\sin\phi\,,$$

$$c_1 = -\left(1 + \frac{K_{33}}{K_{22}}\right)\cos\phi\,,$$

$$c_2 = \left(1 + \frac{K_{33}}{K_{11}}\right)\cos\phi\,,$$
$$c_3 = -i\frac{1}{\widetilde{\Omega}}\frac{K_{33}}{K_{11}}\,.$$

Решение системы (5.7) можно записать в виде

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \widehat{M}(\xi,\xi_0)\mathbf{\Psi}(\xi_0)\,, \tag{5.9}$$

где $\widehat{M}(\xi,\xi_0)$ — матрица эволюции этой системы, $\widehat{M}(\xi_0,\xi_0) = \widehat{I}$. Мы найдем матрицу эволюции в главном порядке по параметру $\widetilde{\Omega}$.

Процедура построения матрицы эволюции приведена в Приложении. Согласно (П.17) имеем

$$\widehat{M}(\xi,\xi_0) \approx \widehat{U}(\xi)\widehat{\mathrm{diag}}\left\{\exp\left[-\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\left(\widetilde{\Omega}\mu_l(x) + \left(\widehat{U}^{-1}(x)\frac{\partial\widehat{U}(x)}{\partial x} - \widehat{U}^{-1}(x)\widehat{C}(x)\widehat{U}(x)\right)_{ll}\right)dx\right]\right\}\times \widehat{U}^{-1}(\xi_0), \tag{5.10}$$

где $i\mu_l$ — собственные значения матрицы $\widehat{B}$ ($l = 1$–4), а столбцы матрицы $\widehat{U}$ — собственные векторы матрицы $\widehat{B}$. Здесь используется обозначение $\widehat{\mathrm{diag}}(x_l)$ для диагональной матрицы с элементами $x_1, x_2, \ldots$ на диагонали. Обратим внимание, что выражение (5.10) неприменимо, если собственные значения матрицы $\widehat{B}$ сближаются. Как видно из выражения (П.15), V_{lm} при этом становится большим и условие применимости метода ВКБ $|V_{lm}| \ll \widetilde{\Omega}$ (П.18) может нарушаться.

Формула (5.10) дает решение уравнения (5.7) при любых начальных условиях $\mathbf{\Psi}(\xi_0)$. Это решение можно рассматривать как линейную комбинацию четырех линейно независимых векторов, представляющих собой столбцы матрицы эволюции $\widehat{M}(\xi,\xi_0)$, с четырьмя коэффициентами — элементами вектора $\mathbf{\Psi}(\xi_0)$.

Для построения функции Грина нам нужны решения $\mathbf{u}$, которые представляют собой первые две компоненты решения $\mathbf{\Psi}(\xi)$. В качестве столбцов матриц $\hat{u}_{1,2}(\xi)$ можно использовать векторы, компонентами которых являются первые два элемента столбцов матрицы $\widehat{M}(\xi,\xi_0)\widehat{U}(\xi_0)$ или линейные комбинации этих столбцов.

Найдем сначала матрицу эволюции $\widehat{M}(\xi,\xi_0)$ (5.10). Для этого нам необходимы собственные значения и собственные векторы матрицы $\widehat{B}$. Собственные значения определяются из соотношения

$$\det(\widehat{B} - i\mu\widehat{I}) = 0, \tag{5.11}$$

которое представляет собой биквадратное уравнение. Решение этого уравнения дает

$$\begin{aligned} &\mu_l(\xi) = \sqrt{\sin^2\phi(\xi) + \frac{K_{33}}{K_{ll}}\cos^2\phi(\xi)},\\ &l = 1,2,\\ &\mu_3 = -\mu_1, \quad \mu_4 = -\mu_2. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Собственные векторы $\boldsymbol{\psi}_l$ удовлетворяют соотношению $\widehat{B}\boldsymbol{\psi}_l = i\mu_l\boldsymbol{\psi}_l$. Найдем эти векторы и составим из них матрицу $\widehat{U}(\xi) = (\boldsymbol{\psi}_1(\xi), \boldsymbol{\psi}_2(\xi), \boldsymbol{\psi}_3(\xi), \boldsymbol{\psi}_4(\xi))$:

$$\widehat{U} = \begin{pmatrix} -i\mu_1^{-1}\sin\phi & 1 & i\mu_1^{-1}\sin\phi & -1 \\ -1 & -i\mu_2^{-1}\sin\phi & -1 & -i\mu_2^{-1}\sin\phi \\ \sin\phi & i\mu_2 & \sin\phi & i\mu_2 \\ -i\mu_1 & \sin\phi & i\mu_1 & -\sin\phi \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

При выборе векторов $\boldsymbol{\psi}_l(\xi)$, а следовательно, и матрицы $\widehat{U}(\xi)$, имеется произвол, связанный с нормировочными множителями, причем эти множители могут зависеть от ξ. Нетрудно показать, однако, что правая часть выражения (5.10) не зависит от выбора нормировок векторов $\boldsymbol{\psi}_l(\xi)$. Далее найдем матрицу $\widehat{U}^{-1}(\xi)$:

$$\widehat{U}^{-1} = \frac{-1}{2K_{33}\cos^2\phi}\begin{pmatrix} iK_{11}\mu_1\sin\phi & K_{22}\mu_2^2 & K_{22}\sin\phi & -iK_{11}\mu_1 \\ -K_{11}\mu_1^2 & iK_{22}\mu_2\sin\phi & iK_{22}\mu_2 & K_{11}\sin\phi \\ -iK_{11}\mu_1\sin\phi & K_{22}\mu_2^2 & K_{22}\sin\phi & iK_{11}\mu_1 \\ K_{11}\mu_1^2 & iK_{22}\mu_2\sin\phi & iK_{22}\mu_2 & -K_{11}\sin\phi \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

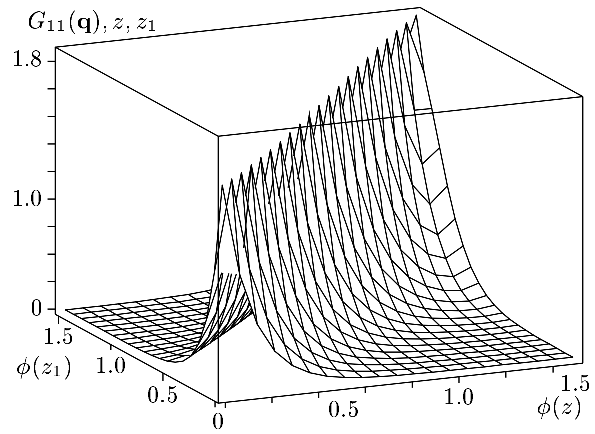

Рис. 5. Компонента корреляционной функции ХЖК $G_{11}(\mathbf{q}; z, z_1)$, выраженная в относительных единицах, в зависимости от координат двух точек, z и z_1

Пренебрегая в матрице $\widehat{C}$ (5.8) членом порядка $1/\widetilde{\Omega}$ (т. е. элементом c_3), поскольку он не вносит вклада в матрицу эволюции в используемом нами приближении (5.10), получим

$$\left(\widehat{U}^{-1}\widehat{C}\widehat{U}\right)_{ll} = \frac{(K_{11}-K_{22})\sin\phi}{2K_{33}\cos\phi}(-1)^{l+1}, \quad l = 1,\ldots,4. \tag{5.15}$$

Диагональные элементы матрицы $\widehat{U}^{-1}\partial\widehat{U}/\partial\xi$ можно представить в виде, удобном для интегрирования:

$$\left(\widehat{U}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\xi}\right)_{ll} = \frac{1}{2}\frac{(\cos\phi/\mu_l)'}{\cos\phi/\mu_l} + \frac{1}{2}\frac{(\cos\phi)'}{\cos\phi} - \frac{K_{11}-K_{22}}{2K_{33}}\frac{(\cos\phi)'}{\cos\phi}(-1)^{l+1}, \tag{5.16}$$

$l = 1,\ldots,4$. Вычитая (5.16) из (5.15) и интегрируя, получим

$$\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\left(\widehat{U}^{-1}\widehat{C}\widehat{U} - \widehat{U}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\xi'}\right)_{ll} d\xi' = -\frac{1}{2}\ln\frac{\mu_l(\xi_0)|\cos\phi|}{\mu_l(\xi)|\cos(\xi_0+\phi_0)|} - \frac{1}{2}\ln\frac{|\cos\phi|}{|\cos(\xi_0+\phi_0)|}. \tag{5.17}$$

Подставляя (5.17) в (5.10), имеем

$$\widehat{M}(\xi,\xi_0) = \widehat{U}(\xi)\frac{|\cos(\xi_0+\phi_0)|}{|\cos\phi|} \times \widehat{\operatorname{diag}}\left\{\sqrt{\frac{\mu_l(\xi)}{\mu_l(\xi_0)}}\exp\left(-\widetilde{\Omega}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\mu_l(\xi')d\xi'\right)\right\} \times \widehat{U}^{-1}(\xi_0). \tag{5.18}$$

Для нахождения корреляционной функции надо построить матрицы $\hat{u}_1(\xi)$ и $\hat{u}_2(\xi)$. Выбирая первые две компоненты столбцов матрицы $\widehat{M}(\xi,\xi_0)\widehat{U}(\xi_0)$, имеющие требуемое поведение на бесконечности, получаем

$$\begin{gathered}\hat{u}_1(\xi) = \begin{pmatrix}-i\mu_1^{-1}\sin\phi & 1\\ -1 & -i\mu_2^{-1}\sin\phi\end{pmatrix} \times \exp(\widehat{\Phi}_-),\\ \hat{u}_2(\xi) = \begin{pmatrix}i\mu_1^{-1}\sin\phi & -1\\ -1 & -i\mu_2^{-1}\sin\phi\end{pmatrix} \times \exp(\widehat{\Phi}_+),\end{gathered} \tag{5.19}$$

где

$$\exp(\widehat{\Phi}_\pm) = \frac{|\cos(\xi_0+\phi_0)|}{|\cos\phi|} \times \widehat{\operatorname{diag}}\left\{\sqrt{\frac{\mu_l(\xi)}{\mu_l(\xi_0)}}\exp\left(\pm\widetilde{\Omega}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\mu_l(\xi')d\xi'\right)\right\}, \quad l = 1, 2. \tag{5.20}$$

Таким образом, условия $\hat{u}_1(\xi) \to \widehat{0}$ при $\xi \to +\infty$ и $\hat{u}_2(\xi) \to \widehat{0}$ при $\xi \to -\infty$ выполнены для матриц (5.19).

Подставим матрицы $\hat{u}_{1,2}(\xi)$ из (5.19) в выражение для корреляционной функции (5.6). Пренебрегая во внеэкспоненциальных множителях членами порядка $1/\widetilde{\Omega}$, получим

$$\widehat{G}(\xi,\xi_1)=\frac{k_BT}{2qK_{33}\cos\phi(\xi_1)\cos\phi(\xi)}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\mathrm{sign}(\xi-\xi_1)\sin\phi(\xi) & i\,\mathrm{sign}(\xi-\xi_1)\mu_2(\xi)\\ -i\mu_1(\xi) & \sin\phi(\xi)\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{\exp\left(-\widetilde{\Omega}\left|\int\limits_{\xi}^{\xi_1}\mu_1 d\xi'\right|\right)}{\sqrt{\mu_1(\xi)\mu_1(\xi_1)}} & 0\\ 0 & \dfrac{\exp\left(-\widetilde{\Omega}\left|\int\limits_{\xi}^{\xi_1}\mu_2 d\xi'\right|\right)}{\sqrt{\mu_2(\xi)\mu_2(\xi_1)}}\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\mathrm{sign}(\xi_1-\xi)\sin\phi(\xi_1) & i\mu_1(\xi_1)\\ i\,\mathrm{sign}(\xi_1-\xi)\mu_2(\xi_1) & -\sin\phi(\xi_1)\end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Функцию $\widehat{G}$ удобно разбить на две части, связанные с двумя показателями μ_1 и μ_2. Возвращаясь от безразмерной переменной ξ к переменной z, имеем окончательно

$$\widehat{G}(\mathbf{q};z_1,z_2)=\widehat{G}_1(\mathbf{q};z_1,z_2)+\widehat{G}_2(\mathbf{q};z_1,z_2)\,, \quad (5.22)$$

где

$$\widehat{G}_j(\mathbf{q};z_1,z_2)=\frac{k_BT}{2qK_{33}\cos\phi(z_1)\cos\phi(z_2)}\times$$
$$\times\exp\left(-q\left|\int\limits_{z_1}^{z_2}\mu_j(z)dz\right|\right)\widehat{W}^{(j)}(\mathbf{q};z_1,z_2), \quad (5.23)$$

$$\widehat{W}^{(1)}(\mathbf{q};z_1,z_2)=$$
$$=\begin{pmatrix}-\dfrac{\sin\phi(z_1)\sin\phi(z_2)}{\sqrt{\mu_1(z_1)\mu_1(z_2)}} & i\,\mathrm{sign}(z_1-z_2)\sin\phi(z_1)\dfrac{\sqrt{\mu_1(z_2)}}{\sqrt{\mu_1(z_1)}}\\ i\,\mathrm{sign}(z_1-z_2)\sin\phi(z_2)\dfrac{\sqrt{\mu_1(z_1)}}{\sqrt{\mu_1(z_2)}} & \sqrt{\mu_1(z_1)\mu_1(z_2)}\end{pmatrix},$$
$$\widehat{W}^{(2)}(\mathbf{q};z_1,z_2)=$$
$$=\begin{pmatrix}\sqrt{\mu_2(z_1)\mu_2(z_2)} & -i\,\mathrm{sign}(z_1-z_2)\sin\phi(z_2)\dfrac{\sqrt{\mu_2(z_1)}}{\sqrt{\mu_2(z_2)}}\\ -i\,\mathrm{sign}(z_1-z_2)\sin\phi(z_1)\dfrac{\sqrt{\mu_2(z_2)}}{\sqrt{\mu_2(z_1)}} & -\dfrac{\sin\phi(z_1)\sin\phi(z_2)}{\sqrt{\mu_2(z_1)\mu_2(z_2)}}\end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Здесь $\cos\phi=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_0/q$, $\sin\phi=\sqrt{q^2-(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_0)^2}/q$.

На рис. 5 показана компонента G_{11} корреляционной функции, выраженная в относительных единицах. Рисунок получен в результате численных расчетов по формулам (5.22)–(5.24). Корреляции убывают экспоненциально с увеличением расстояния $|z-z_1|$. Обратим также внимание на рост корреляций при $z=z_1$ по мере приближения $\phi(z)$ к $\pi/2$. Последнее определяется приближением к нулю величин $\cos\phi(z_{1,2})$ в знаменателе общего множителя (5.23). Это характеризует приближение к области, где метод ВКБ неприменим и формула (5.27) несправедлива. Мы обсудим этот вопрос подробнее в конце данного раздела.

Матрицы $\widehat{W}^{(j)}(\mathbf{q};z_1,z_2)$ можно записать в виде

$$W^{(j)}_{\alpha\beta}(\mathbf{q};z_1,z_2)=\ell^{(j)}_{\alpha}(\mathbf{q};z_1,z_2)\ell^{(j)*}_{\beta}(\mathbf{q};z_2,z_1), \quad (5.25)$$

где

$$\boldsymbol{\ell}^{(1)}(\mathbf{q};z,z')=$$
$$=\left(i\,\mathrm{sign}(z-z')\frac{\sin\phi(z)}{\sqrt{\mu_1(z)}},\ \sqrt{\mu_1(z)}\right),$$
$$\boldsymbol{\ell}^{(2)}(\mathbf{q};z,z')=$$
$$=\left(\sqrt{\mu_2(z)},\ -i\,\mathrm{sign}(z-z')\frac{\sin\phi(z)}{\sqrt{\mu_2(z)}}\right). \quad (5.26)$$

Из формул (2.19), (2.20), (5.22)–(5.26), выполнив суммирование по k и l в (2.20), получаем итоговое выражение для корреляционной функции флуктуаций директора

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{q};z_1,z_2)=\frac{k_BT}{2qK_{33}\cos\phi(z_1)\cos\phi(z_2)}\times\\ \times\sum_{j=1}^{2}\exp\left(-q\left|\int\limits_{z_1}^{z_2}\mu_j(z)dz\right|\right)\times\\ \times f_\alpha^{(j)}(\mathbf{q};z_1,z_2)f_\beta^{(j)*}(\mathbf{q};z_2,z_1),\quad(5.27)$$

где $\mathbf{f}^{(j)}(\mathbf{q};z,z')=\sum_{k=1,2}\ell_k^{(j)}(\mathbf{q};z,z')\mathbf{h}^{(k)}(z)$. В используемой нами системе координат векторы $\mathbf{f}^{(j)}$ имеют вид

$$\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{q};z,z')=\\ =\frac{1}{\sqrt{\mu_1(z)}}\Bigg(-i\,\mathrm{sign}(z-z')\sin^2\phi(z),\\ \frac{i}{2}\,\mathrm{sign}(z-z')\sin2\phi(z),\mu_1(z)\Bigg),\quad(5.28)\\ \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{q};z,z')=\sqrt{\mu_2(z)}\,(-\sin\phi(z),\cos\phi(z),-\\ -i\,\mathrm{sign}(z-z')\frac{\sin\phi(z)}{\mu_2(z)}\Bigg).$$

Отметим, в частности, что

$$\mathbf{f}^{(j)}(\mathbf{q};z,z')\cdot\mathbf{n}^0(z)=0,$$

$$\left|\mathbf{f}^{(j)}(\mathbf{q};z,z')\right|^2=\mu_j(z)+\frac{\sin^2\phi(z)}{\mu_j(z)}.$$

Из (5.27) и (2.14) находим корреляционную функцию диэлектрической проницаемости $\mathcal{G}_{\beta\delta\gamma\nu}(\mathbf{q},z_1,z_2)$ в виде

$$\mathcal{G}_{\beta\delta\gamma\nu}(\mathbf{q};z_1,z_2)=\frac{k_BT\varepsilon_a^2}{2qK_{33}\cos\phi(z_1)\cos\phi(z_2)}\times\\ \times\sum_{j=1}^{2}\exp\left(-q\left|\int\limits_{z_1}^{z_2}\mu_j(z)dz\right|\right)\times\\ \times\mathcal{M}_{\beta\delta\gamma\nu}^{(j)}(\mathbf{q};z_1,z_2),\quad(5.29)$$

где

$$\mathcal{M}_{\beta\delta\gamma\nu}^{(j)}(z_1,z_2)=n_\beta^0(z_1)n_\gamma^0(z_2)\times\\ \times f_\delta^{(j)}(z_1,z_2)f_\nu^{(j)*}(z_2,z_1)+\\ +n_\delta^0(z_1)n_\gamma^0(z_2)f_\beta^{(j)}(z_1,z_2)f_\nu^{(j)*}(z_2,z_1)+\\ +n_\beta^0(z_1)n_\nu^0(z_2)f_\delta^{(j)}(z_1,z_2)f_\gamma^{(j)*}(z_2,z_1)+\\ +n_\delta^0(z_1)n_\nu^0(z_2)f_\beta^{(j)}(z_1,z_2)f_\gamma^{(j)*}(z_2,z_1).\quad(5.30)$$

Обсудим вопрос об области применимости формул (5.27), (5.29). Кроме неравенства $q\gg p_0$ здесь могут возникать еще два ограничения, связанные с неравенствами (П.19) и (П.20). Неравенство (П.20) с учетом того, что $\mu_{1,2}\sim1$, дает $|z_1-z_2|\ll q/p_0^2$.

Наиболее существенно для нас ограничение (П.19). Это связано с тем, что согласно (5.12) при $\cos\phi=0$ собственные числа μ_1 и μ_2 совпадают. Поэтому формула (5.27) теряет смысл, если точка z_*, такая что $\cos\phi(z_*)=0$, попадает в область между точками z_1 и z_2[3)].

Оценим ограничение на область применимости формул (5.27), (5.29), связанную с этим эффектом. Для этого введем новую переменную $\zeta=p_0z+\phi_0-\pi/2=\phi-\pi/2$ и разложим μ_l в ряд в окрестности точки $\zeta=0$

$$\mu_l\approx1-\frac{1}{2}C_l\zeta^2,\quad l=1,2,\\ \mu_3=-\mu_1,\quad\mu_4=-\mu_2,\quad(5.31)$$

где $C_l=1-K_{33}/K_{ll}$. Заметим, что соответствующие линии $\mu_1(\zeta)$ и $\mu_2(\zeta)$ не пересекаются в точке $\zeta=0$, а лишь соприкасаются. Для матричного элемента V_{12} в окрестности точки $\zeta=0$ можно получить оценку

$$V_{12}\sim\frac{1}{\zeta^3}\left(1+O(\zeta^2)\right).$$

Тогда первое условие (П.18) имеет вид

$$\widetilde{\Omega}|\zeta|^3\gg1.\quad(5.32)$$

Это означает, что выражение (5.27) применимо лишь в случаях, когда $\widetilde{\Omega}|\zeta|^3\gg1$, $\widetilde{\Omega}|\zeta_1|^3\gg1$ и между точками ζ и ζ_1 нет точек, в которых $\mu_{1,2}$ совпадают, т. е. точек, в которых $\cos\phi=0$.

Анализ поведения корреляционной функции в окрестности точек, для которых $\cos\phi=0$, требует методов, используемых при исследовании точек поворота в методе ВКБ. Этот вопрос подробно обсуждался нами в работе [44]. Там показано, что на самом деле корреляционная функция флуктуаций в окрестности областей $\cos\phi(z_1)=0$ и $\cos\phi(z_2)=0$ ограничена. Существенно, однако, что в интересующей нас задаче рассеяния света основной вклад в интеграл (3.30), как будет показано ниже в разд. 6.1, вносит область с $|z_1-z_2|\ll d$. А в случае, когда обе точки $z_{1,2}$ оказываются одновременно в области

[3)] Кроме того, поскольку при $K_{11}=K_{22}$ тождественно выполнено равенство $\mu_1=\mu_2$, необходимо выполнение неравенства $|K_{11}-K_{22}|\gg2(K_{11}K_{22}/K_{33})(p_0/q)$, и, в частности, наши формулы (5.27), (5.29) не допускают использования одноконстантного приближения для энергии Франка (2.1).

$\cos\phi(z_{1,2}) = 0$, особенность в корреляционной функции сокращается. Это нетрудно увидеть, так как в пределе $z_1 \to z_2$ и $\cos\phi(z_1), \cos\phi(z_2) \to 0$ в формуле (5.23) показатели экспонент $\mu_1(z), \mu_2(z) \to 1$, и выполнено условие $\sum_{j=1,2} \widehat{W}^{(j)}(\mathbf{q}; z_1, z_2) \to 0$. Физически отсутствие особенности в этом случае можно объяснить тем, что в области близких значений z_1, z_2 ХЖК почти неотличим от нематика. А в НЖК корреляционная функция (5.21), как мы видели, конечна при $\cos\phi_0 = 0$.

Таким образом, для задачи рассеяния можно ограничиться выражением для корреляционной функции (5.27) при выполнении неравенств $q \gg p_0$ и

$$|z_1 - z_2| \ll q/p_0^2. \tag{5.33}$$

5.3. Предельные случаи

Проанализируем поведение выражения (5.27) при $p_0 \to 0$. Этот предельный переход соответствует переходу к нематическому жидкому кристаллу. Если положить $p_0 = 0$, то формула (5.22) примет вид

$$\widehat{G}(\mathbf{q}; z - z_1) = \frac{k_B T e^{-q\mu_1|z-z_1|}}{2qK_{33}\cos^2\phi_0} \times \\ \times \begin{pmatrix} -\mu_1^{-1}\sin^2\phi_0 & i\,\mathrm{sign}(z-z_1)\sin\phi_0 \\ i\,\mathrm{sign}(z-z_1)\sin^2\phi_0 & \mu_1 \end{pmatrix} + \\ + \frac{k_B T e^{-q\mu_2|z-z_1|}}{2qK_{33}\cos^2\phi_0} \times \\ \times \begin{pmatrix} \mu_2 & -i\,\mathrm{sign}(z-z_1)\sin\phi_0 \\ -i\,\mathrm{sign}(z-z_1)\sin\phi_0 & -\mu_2^{-1}\sin^2\phi_0 \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

Выполняя по переменной $z - z_1$ преобразование Фурье (4.21), получаем

$$\widehat{G}(\mathbf{q}, k_z) = \frac{k_B T}{(K_{33}q^2\cos^2\phi_0 + K_{11}(q^2\sin^2\phi_0 + k_z^2))(K_{33}q^2\cos^2\phi_0 + K_{22}(q^2\sin^2\phi_0 + k_z^2))} \times \\ \times \begin{pmatrix} (K_{33}\cos^2\phi_0 + K_{22}\sin^2\phi_0)q^2 + K_{11}k_z^2 & qk_z\sin\phi_0\,(K_{11} - K_{22}) \\ qk_z\sin\phi_0\,(K_{11} - K_{22}) & (K_{33}\cos^2\phi_0 + K_{11}\sin^2\phi_0)q^2 + K_{22}k_z^2 \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

Обратим внимание, что в формуле (5.34) при $\phi_0 \to \pi/2$ возникает неопределенность, которая легко раскрывается и приводит к конечному выражению при $\phi_0 = \pi/2$. Поэтому в окрестности этой точки корреляционная функция (5.35) не имеет особенностей.

Если перейти в систему координат, где $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{q} \parallel \mathbf{e}_x$, то матрица $\widehat{G}$ становится диагональной, и формула (5.35) переходит в известную формулу для корреляционной функции НЖК [34]:

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{k_B T}{K_{33}k_z^2 + K_{\alpha\alpha}k_\perp^2}\delta_{\alpha\beta}.$$

Представляет интерес сравнить наш результат (5.22) для корреляционной матрицы $\widehat{G}(\mathbf{q}; z_1, z_2)$, справедливый в пределе $q \gg p_0$ (нематикоподобный ХЖК) с известным результатом для $\widehat{G}(\mathbf{q}; z_1, z_2)$, полученным в противоположном предельном случае $q \ll p_0$ (смектикоподобный ХЖК) [20, 21]. Для простоты рассмотрим одноконстантное приближение, когда модули Франка равны $K_{11} = K_{22} = K_{33} = K$. Нас будет интересовать поведение $\widehat{G}(\mathbf{q}; z_1, z_2)$ как функции от модуля волнового вектора q и величины $z_1 - z_2$.

При $q \gg p_0$ компоненты корреляционной матрицы $\widehat{G}$ согласно (5.22) имеют характерные зависимости от q и $z_1 - z_2$ вида

$$G_{\beta\gamma}(\mathbf{q}; z_1, z_2) \sim \frac{1}{q}\exp(-q|z_1 - z_2|). \tag{5.36}$$

С другой стороны, трехмерные фурье-образы элементов корреляционной матрицы в случае $q \ll p_0$ имеют вид [21],

$$G_{11}(\mathbf{q}, q_z) = \frac{2p_0^2 k_B T}{K(2p_0^2q_z^2 + q^2q_z^2 + q^4)}, \\ G_{22}(\mathbf{q}, q_z) = \frac{k_B T}{K(p_0^2 + q^2 + q_z^2)}, \\ G_{12} = G_{21} = 0. \tag{5.37}$$

Выражения (5.37) были получены путем усреднения по многим шагам спирали. Поэтому здесь моды u_1 и u_2 не коррелируют (недиагональные элементы корреляционной матрицы равны нулю), в отличие от нашего ответа, учитывающего почти локальные флуктуации. Обращает на себя внимание, что в этом предельном случае флуктуации директора в плоскости, перпендикулярной оси спирали (G_{11}), имеют характер, аналогичный флуктуациям смещений слоев в смектике А. В то же время флуктуации вдоль оси спирали (G_{22}) имеют такой же характер, как флуктуации директора в нематике, но при этом ограничены шагом холестерической спирали.

Переходя в (5.37) к $(\mathbf{q}, z)$-представлению, получим

$$\begin{aligned} G_{11}(\mathbf{q}; z_1 - z_2) &\sim \frac{p_0^2}{q^2\sqrt{2p_0^2+q^2}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{q^2|z_1-z_2|}{\sqrt{2p_0^2+q^2}}\right), \\ G_{22}(\mathbf{q}; z_1 - z_2) &\sim \frac{1}{\sqrt{p_0^2+q^2}} \times \\ &\times \exp\left(-\sqrt{p_0^2+q^2}|z_1-z_2|\right). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Хотя выражения (5.38) применимы лишь при $q \ll p_0$, мы формально экстраполируем их в область $q \gg p_0$ и сравним с ответом (5.36) для $\widehat{G}$. Это позволит нам оценить поведение флуктуационных мод в широкой области изменения q. При $q \gg p_0$ в (5.38) имеем

$$\begin{aligned} G_{11}(\mathbf{q}; z_1 - z_2) &\sim \frac{p_0^2}{q^3}\exp(-q|z_1-z_2|), \\ G_{22}(\mathbf{q}; z_1 - z_2) &\sim \frac{1}{q}\exp(-q\,|z_1-z_2|). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Экспоненциальные множители в (5.39) и (5.36) совпадают. Однако коэффициенты перед экспонентой для моды u_1, отвечающей флуктуациям в плоскости, перпендикулярной оси холестерика, в этих формулах различаются. Коэффициенты же для моды u_2, отвечающей флуктуациям вдоль оси спирали, совпадают. Последнее позволяет предположить, что полученное нами в области $q \gg p_0$ выражение для G_{22} имеет применимость в более широкой области значений q. Первая мода оказывается более чувствительной к шагу спирали, и ее поведение сильно различается для случаев $q \ll p_0$ и $q \gg p_0$.

6. РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ХЖК

Рассмотрим образец ХЖК в виде плоского слоя толщиной L с достаточно большими поперечными размерами (рис. 6). На образец падает плоская волна с волновым вектором $\mathbf{k}^{(i)}$ и исследуется рассеянная волна в дальней зоне образца с волновым вектором $\mathbf{k}^{(s)}$.

Для простоты ограничимся случаем, когда поляризация падающего света вне образца подобрана так, что внутри образца образуется падающая волна $\mathbf{E}_{in}^{(i)}(\mathbf{r})$ только одного из двух допустимых типов (4.2) — в противном случае необходимо выполнять суммирование по (i) внутри среды. Аналогично выберем также поляризацию рассеянного света вне образца так, чтобы ей внутри образца отвечала рассеянная волна $\mathbf{E}_{in}^{(s)}(\mathbf{r})$ только одного из двух допустимых типов (4.2). Это позволит нам в дальнейшем избежать суммирования по (s) внутри среды. Таким образом индексы (i) и (s) мы можем отождествлять с числами 1, 2 в зависимости от типа падающей и рассеянной волн.

Для этой геометрии интенсивность однократно рассеянного света в ХЖК согласно (3.24) и (3.30) определяется выражением

$$\begin{aligned} I^{(s)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}c^2}{8\pi}\,\frac{k_0^6\varepsilon_0}{4\pi^2}\,\frac{S_\perp}{r^2}\left(\frac{z}{r}\right)^2 e_\alpha^{(s)}e_\gamma^{(s)} \times \\ \times M_{\alpha\beta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L)M_{\gamma\delta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) \times \\ \times \int_0^L dz_1 \int_0^L dz_2\, T_{\beta\rho}^0(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; L, z_1)T_{\delta\varphi}^{0*}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; L, z_2) \times \\ \times \mathcal{G}_{\rho\nu\varphi\mu}(\mathbf{k}_\perp^{(s)} - \mathbf{k}_\perp^{(i)}; z_1, z_2) \times \\ \times \mathcal{E}_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_1)\mathcal{E}_\mu^{(i)*}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_2). \end{aligned} \tag{6.1}$$

В выражение для интенсивности рассеяния (6.1) входят сопряженные пары падающих полей и функций Грина. Используя (4.2) и (4.17), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_1)\mathcal{E}_\mu^{(i)*}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_2) = \\ = E_0^{(i)2}A^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}; z_1, 0)A^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}; z_2, 0) \times \\ \times \exp\left[-i\int_{z_1}^{z_2} k_z^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z')dz'\right] \times \\ \times e_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_1)e_\mu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_2), \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} T_{\beta\rho}^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; L, z_1)T_{\delta\varphi}^{(s)*}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}; L, z_2) = \\ = \frac{1}{4k_0^2}\exp\left[i\int_{z_1}^{z_2} k_z^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z')dz'\right] \times \\ \times B^{(s)2}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L)B^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_1)B^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_2) \times \\ \times e_\beta^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L)e_\delta^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) \times \\ \times e_\rho^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_1)e_\varphi^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_2). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Если подставить в формулу (6.1) выражения для функций Грина (6.3), корреляционной функции (5.29) и падающего поля (6.2), интенсивность

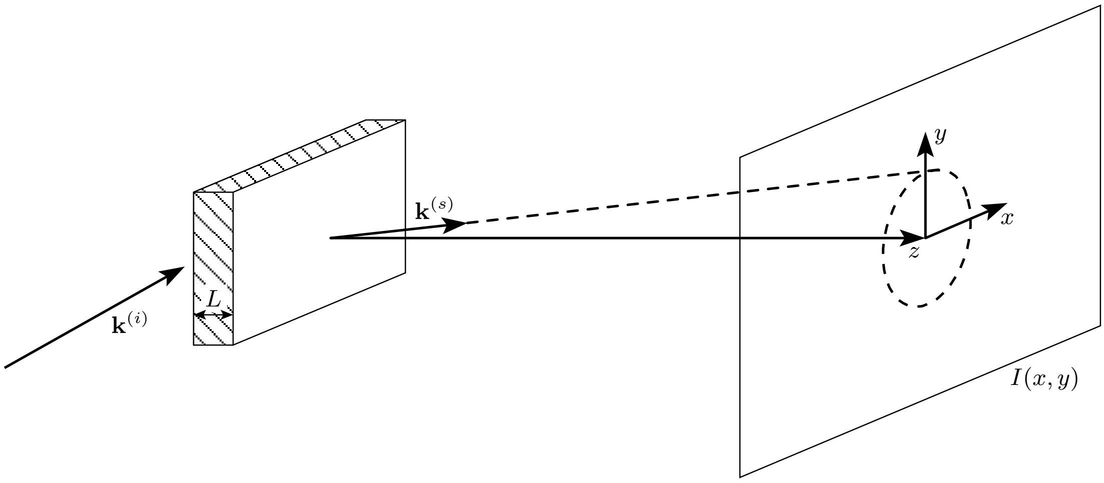

Рис. 6. Геометрия рассеяния света в ХЖК

рассеяния примет вид суммы двукратных интегралов, соответствующих двум флуктуационным модам директора

$$I^{(s)} = \sum_{j=1}^{2} I_j = J_0 \sum_{l=1}^{2} \int_0^L dz_1 \int_0^L dz_2 \times$$
$$\times \exp\left[i\int_{z_1}^{z_2} (k_z^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z') - k_z^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z'))dz' \right] \times$$
$$\times \exp\left(-q\left| \int_{z_1}^{z_2} \mu_j(z)dz \right| \right) A^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}; z_1, 0) \times$$
$$\times A^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}; z_2, 0) B^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_1) B^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_2) \times$$
$$\times e_\rho^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_1) e_\varphi^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, z_2) \mathcal{M}_{\rho\nu\varphi\mu}^{(j)}(\mathbf{q}; z_1, z_2) \times$$
$$\times e_\nu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_1) e_\mu^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, z_2), \quad (6.4)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_\perp^{(s)} - \mathbf{k}_\perp^{(i)}$,

$$J_0 = E_0^2 \frac{\sqrt{\varepsilon_0} c^2}{8\pi} \frac{k_0^4 \varepsilon_0}{16\pi^2} \frac{S_\perp}{r^2} \left(\frac{z}{r}\right)^2 B^{(s)2}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) \times$$
$$\times e_\alpha^{(s)} e_\gamma^{(s)} M_{\alpha\beta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) \times$$
$$\times M_{\gamma\delta}^{in\to out}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) e_\beta^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L) e_\delta^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, L).$$

6.1. Использование больших параметров в выражении для интенсивности

Наличие в нашей системе больших параметров $\Omega = k_0/p_0$ и $\widetilde{\Omega} = q/p_0$ позволяет существенно упростить общее выражение для интенсивности рассеяния (6.4). Для этого удобно снова вернуться к безразмерной переменной $\xi = p_0 z$. Тогда I_j принимает вид

$$I_j = \int_0^{Lp_0} \int_0^{Lp_0} d\xi_1 d\xi_2 F_j(\xi_1, \xi_2) \exp(i\Phi_{opt}(\xi_1, \xi_2) +$$
$$+ \Phi_{cor}^{(j)}(\xi_1, \xi_2)), \quad (6.5)$$

где Φ_{opt} — фаза, обусловленная падающим полем и функцией Грина,

$$\Phi_{opt}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{p_0} \times$$
$$\times \left[-\int_{\xi_1}^{\xi_2} k_z^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi')d\xi' + \int_{\xi_1}^{\xi_2} k_z^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi')d\xi' \right] =$$
$$= \frac{1}{p_0} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Delta k_z(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi')d\xi'. \quad (6.6)$$

Здесь $\Delta k_z(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = k_z^{(s)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi) - k_z^{(i)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi)$, $k_z^{(s)}$ и $k_z^{(i)}$ равны $k_z^{(1)}$ или $k_z^{(2)}$ в зависимости от типов падающей и рассеянной волн. «Фаза» корреляционной функции $\Phi_{cor}^{(j)}(\xi_1, \xi_2)$ имеет вид

$$\Phi_{cor}^{(j)}(\xi_1, \xi_2) = -\frac{q}{p_0} \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mu_j(\mathbf{q}, \xi')d\xi' \right|. \quad (6.7)$$

Функция $F_j(\xi_1, \xi_2)$, связанная с внеэкспоненциальными множителями в выражениях для падающего поля, функции Грина и корреляционной функции, может быть согласно (5.27), (5.28) записана в виде

$$F_j(\xi_1, \xi_2) = F_{1j}(\xi_1, \xi_2) + i\,\mathrm{sign}(\xi_2 - \xi_1) F_{2j}(\xi_1, \xi_2),$$

где $F_{1j}(\xi_1,\xi_2)$ и $F_{2j}(\xi_1,\xi_2)$ — гладкие функции.

Интеграл (6.5) имеет характер зависимости по большим параметрам $k_0/p_0 \sim q/p_0$ типичный для задач, решаемых методом перевала. В данном случае осложняющим фактором является наличие особенности в фазовой функции на линии $\xi_1 = \xi_2$, связанной со знаком абсолютной величины в показателе экспоненты (6.7), а также с особенностью вида $\mathrm{sign}(\xi_1 - \xi_2)$ функции $F_j(\xi_1,\xi_2)$ на этой же линии.

Вещественный показатель экспоненты (6.7) достигает максимума на линии $\xi_1 = \xi_2$. На этой же линии этот множитель имеет особенность, связанную с наличием знака модуля. Последнее приводит к тому, что в окрестности этой линии не происходит полного сокращения осцилляций, связанных с фазой Φ_{opt}. В результате линия $\xi_1 = \xi_2$ дает главный вклад в асимптотику всего интеграла (6.5)[4].

Переходя к новым переменным $\xi_+ = (\xi_1+\xi_2)/2$ и $\xi_- = (\xi_2-\xi_1)/2$, разложим фазовые функции возле линии $\xi_- = 0$, с точностью до членов первого порядка. Имеем

$$\Phi_j(\xi_+,\xi_-) = i\Phi_{opt}(\xi_1,\xi_2) + \Phi^{(j)}_{cor}(\xi_1,\xi_2) \approx \approx \frac{2i}{p_0}\Delta k_z(\xi_+)\xi_- - \frac{2q}{p_0}\mu_j(\xi_+)\left|\xi_-\right|. \quad (6.8)$$

Таким образом, интегралы, определяющие интенсивность рассеянного света, имеют структуру вида

$$I_j = 2\int_0^{Lp_0} d\xi_+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_- \left[F_{1j}(\xi_+,\xi_-) + \right. \left. + i\,\mathrm{sign}(\xi_-)F_{2j}(\xi_+,\xi_-)\right] e^{\Phi_j(\xi_+,\xi_-)}. \quad (6.9)$$

По переменной ξ_- мы распространили интегрирование от $-\infty$ до $+\infty$, так как вклад по ξ_- вносит только узкая окрестность вблизи $\xi_- = 0$.

Разбивая промежуток интегрирования на два участка $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$ и заменяя внеэкспоненциальные гладкие функции $F_{1j,2j}$ их значениями при $\xi_- = 0$, получаем для внутреннего интеграла в (6.9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(\xi_+,\xi_-)e^{\Phi_j(\xi_+,\xi_-)}d\xi_- =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} d\xi_- \exp\left(\frac{2i}{p_0}\Delta k_z(\xi_+)\xi_- + \frac{2q}{p_0}\mu_j(\xi_+)\xi_-\right) \times \times \left(F_{1j}(\xi_+,0) - iF_{2j}(\xi_+,0)\right) +$$

$$+ \int_0^{+\infty} d\xi_- \exp\left[\frac{2i}{p_0}\Delta k_z(\xi_+)\xi_- - \frac{2q}{p_0}\mu_j(\xi_+)\xi_-\right] \times \times \left(F_{1j}(\xi_+,0) + iF_{2j}(\xi_+,0)\right) =$$

$$= \frac{qp_0\mu_j(\xi_+)F_{1j}(\xi_+,0)}{q^2\mu_j^2(\xi_+) + \Delta k_z^2(\xi_+)} - - \frac{k_0p_0\Delta k_z(\xi_+)F_{2j}(\xi_+,0)}{q^2\mu_j^2(\xi_+) + \Delta k_z^2(\xi_+)}. \quad (6.10)$$

Таким образом, в главном порядке по большому параметру получаем выражение для интенсивности рассеяния в виде однократного интеграла

$$I_j = 2p_0\int_0^{Lp_0} d\xi_+ \times \times \frac{q\mu_j(\xi_+)F_{1j}(\xi_+,0) - \Delta k_z(\xi_+)F_{2j}(\xi_+,0)}{q^2\mu_j^2(\xi_+) + \Delta k_z^2(\xi_+)}. \quad (6.11)$$

6.2. Основные геометрии рассеяния

Рассмотрим рассеяние света различных поляризаций.

Рассеяние типа (o)–(o) отсутствует. В этом нетрудно убедиться, если принять во внимание, что в интенсивность рассеянного света входят скалярные произведения векторов поляризаций падающей и рассеянной волн и вектора директора, входящего в выражение для корреляционной функции (5.30), а вектор поляризации обыкновенной волны ортогонален директору. Здесь ситуация вполне аналогична нематическому жидкому кристаллу.

Рассмотрим рассеяние типа (o)–(e). Выполняя суммирование по повторяющимся индексам и интегрирование по разностной переменной в выражении (6.4), получим

[4] Вклады стационарных точек осциллирующего множителя с фазой (6.6), лежащие вне линии $\xi_1 = \xi_2$, умножаются на экспоненциально малые сомножители с фазой (6.7), и ими можно пренебречь.

$$I(\mathbf{e}^{(1)},\mathbf{e}^{(2)})=\frac{J_0}{p_0}\frac{\varepsilon_a^2 k_B T}{qK_{33}}\,\frac{k_0^2\varepsilon_\perp^2+\varepsilon_a k_\perp^{(s)2}\cos^2(\phi(L)-\gamma_s)}{\varepsilon_\perp^2 k_0 k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L)}\int\limits_0^{Lp_0} d\xi_+\frac{V_0(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)}{\cos^2(\xi_++\phi_0)}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{2}\frac{q\mu_j(\xi_+)V_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)-[k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi_+)-k_z^{(1)}(k_\perp^{(i)})]W_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)}{q^2\mu_j^2(\xi_+)+[k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi_+)-k_z^{(1)}(k_\perp^{(i)})]^2}, \quad (6.12)$$

где γ_s — угол между векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}_\perp^{(s)}$, γ_i — угол между векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}_\perp^{(i)}$,

$$V_0(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)=$$
$$=\frac{k_0}{k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi)}\,\frac{k_0^2\varepsilon_\perp-k_\perp^{(s)2}\cos^2(\phi(\xi)-\gamma_s)}{k_0^2\varepsilon_\perp-k_\perp^{(i)2}\cos^2(\phi(\xi)-\gamma_i)}, \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}V_1(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)&=-\frac{k_z^{(1)2}(k_\perp^{(i)})}{k_0^2\varepsilon_\perp}\,\frac{\sin^2\phi(\xi)}{\mu_1(\xi)}+\\&+\frac{k_\perp^{(i)2}}{k_0^2\varepsilon_\perp}\sin^2(\phi(\xi)-\gamma_i)\mu_1(\xi),\\V_2(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)&=\frac{k_z^{(1)2}(k_\perp^{(i)})}{k_0^2\varepsilon_\perp}\mu_2(\xi)-\\&-\frac{k_\perp^{(i)2}}{k_0^2\varepsilon_\perp}\sin^2(\phi(\xi)-\gamma_i)\frac{\sin^2\phi(\xi)}{\mu_2(\xi)},\end{aligned} \quad (6.14)$$

$$W_1(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)=W_2(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)=$$
$$=\frac{2k_\perp^{(i)}k_z^{(1)}(k_\perp^{(i)})}{k_0^2\varepsilon_\perp}\sin(\phi(\xi)-\gamma_i)\sin\phi(\xi). \quad (6.15)$$

Интенсивность рассеяния (e)–(o) может быть легко получена из интенсивности рассеяния (o)–(e), если выполнить замены: $\mathbf{e}^{(1)}\rightleftharpoons\mathbf{e}^{(2)}$ и $\mathbf{k}^{(s)}\rightleftharpoons\mathbf{k}^{(i)}$.

Различие при расчете интенсивности рассеяния (e)–(e) состоит в том, что после выполнения сверток вклад в рассеяние дадут все четыре слагаемых корреляционной функции (5.30). Выполняя суммирование по повторяющимся индексам и интегрирование по разностной переменной в выражении (6.4), получим интенсивность рассеяния (e)–(e) в виде

$$I(\mathbf{e}^{(2)},\mathbf{e}^{(2)})=\frac{J_0}{p_0}\frac{\varepsilon_a^2 k_B T}{qK_{33}}\,\frac{k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},0)[k_0^2\varepsilon_\perp^2+\varepsilon_a k_\perp^{(s)2}\cos^2(\phi(L)-\gamma_s)]}{k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},L)[k_0^2\varepsilon_\perp^2+\varepsilon_a k_\perp^{(i)2}\cos^2(\phi_0-\gamma_i)]\varepsilon_\perp^2}\times$$
$$\times\int\limits_0^{Lp_0}\frac{d\xi_+}{\cos^2(\xi_++\phi_0)}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4}V_0^{(k)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)\times$$
$$\times\frac{q\mu_j(\xi_+)V_j^{(k)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)-[k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi_+)-k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)]W_j^{(k)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)}{q^2\mu_j^2(\xi_+)+[k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi_+)-k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi_+)]^2}. \quad (6.16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}V_0^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)&=\frac{k_0^2\varepsilon_\perp-k_\perp^{(s)2}\cos^2(\phi(\xi)-\gamma_s)}{k_0^2\varepsilon_\perp-k_\perp^{(i)2}\cos^2(\phi(\xi)-\gamma_i)}\,\frac{k_\perp^{(i)2}\cos^2(\phi(\xi)-\gamma_i)}{k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi)k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)},\\V_0^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)=V_0^{(3)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)&=\frac{k_\perp^{(s)}k_\perp^{(i)}\cos(\phi(\xi)-\gamma_s)\cos(\phi(\xi)-\gamma_i)}{k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi)},\\V_0^{(4)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)&=\frac{k_0^2\varepsilon_\perp-k_\perp^{(i)2}\cos^2(\phi(\xi)-\gamma_i)}{k_0^2\varepsilon_\perp-k_\perp^{(s)2}\cos^2(\phi(\xi)-\gamma_s)}\,\frac{k_\perp^{(s)2}\cos^2(\phi(\xi)-\gamma_s)}{k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)k_z^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi)},\end{aligned} \quad (6.17)$$

$$V_j^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)=\tilde V_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi),$$
$$V_j^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)=V_j^{(3)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)=\tilde V_j(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi),$$
$$V_j^{(4)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(i)},\xi)=\tilde V_j(\mathbf{k}_\perp^{(s)},\mathbf{k}_\perp^{(s)},\xi),$$

где $j = 1, 2$ и

$$
\begin{gathered}
\tilde{V}_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi) = -\frac{k_1 k_2}{k_0^2} \frac{\sin^2 \phi(\xi)}{\mu_1(\xi)} \times \\
\times \sin(\phi(\xi) - \gamma_1) \sin(\phi(\xi) - \gamma_2) + \\
+ \frac{k_z^{(2)}(\mathbf{k}_1, \xi) k_z^{(2)}(\mathbf{k}_2, \xi)}{k_0^2} \mu_1(\xi), \\
\tilde{V}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi) = \\
= \frac{k_1 k_2}{k_0^2} \mu_2(\xi) \sin(\phi(\xi) - \gamma_1) \sin(\phi(\xi) - \gamma_2) - \\
- \frac{k_z^{(2)}(\mathbf{k}_1, \xi) k_z^{(2)}(\mathbf{k}_2, \xi)}{k_0^2} \frac{\sin^2 \phi(\xi)}{\mu_2(\xi)},
\end{gathered} \tag{6.18}
$$

γ_j — угол между векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}_j$.

$$
\begin{gathered}
W_j^{(1)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \tilde{W}_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi), \\
W_j^{(2)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = W_j^{(3)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \\
= \tilde{W}_j(\mathbf{k}_\perp^{(i)}, \mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi), \\
W_j^{(4)}(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(i)}, \xi) = \tilde{W}_j(\mathbf{k}_\perp^{(s)}, \mathbf{k}_\perp^{(s)}, \xi),
\end{gathered}
$$

где $j = 1, 2$ и

$$
\begin{gathered}
\tilde{W}_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi) = -\frac{\sin \phi(\xi)}{k_0^2} \times \\
\times \Big[k_1 k_z^{(2)}(\mathbf{k}_2, \xi) \sin(\phi(\xi) - \gamma_1) + \\
+ k_2 k_z^{(2)}(\mathbf{k}_1, \xi) \sin(\phi(\xi) - \gamma_2) \Big], \\
\tilde{W}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi) = -\tilde{W}_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \xi).
\end{gathered} \tag{6.19}
$$

Выражения (6.12) и (6.16) позволяют рассчитывать интенсивность однократного рассеяния света ячейкой ХЖК в переднюю полусферу при произвольной ориентации директора в плоскостях границ. Расчет интенсивности рассеяния в заднюю полусферу можно провести теми же методами.

Использование нами больших параметров $\Omega = k_0/p_0$ и $\tilde{\Omega} = q/p_0$ приводит к определенным ограничениям на геометрические условия рассеяния, при которых применимы формулы (6.12), (6.16). Во-первых, угол γ между векторами $\mathbf{k}_\perp^{(i)}$ и $\mathbf{k}_\perp^{(s)}$ не может быть очень малым ($\gamma \gg p_0/k_0 \sim \lambda/d$), поскольку выражения разд. 5.2 для корреляционной функции получены в приближении $q \gg p_0$. Во-вторых, углы, образуемые волновыми векторами падающей $\mathbf{k}^{(i)}$ и рассеянной $\mathbf{k}^{(s)}$ волн необыкновенного типа с осью z, должны быть не слишком близки к 90°. Это связано с описанным в разд. 4.1 эффектом захвата необыкновенного луча в плоский волновой канал. Наконец, условие применимости ВКБ приближения (5.27) для корреляционной функции, связанное с неравенством (5.33), дает ограничение на толщину L

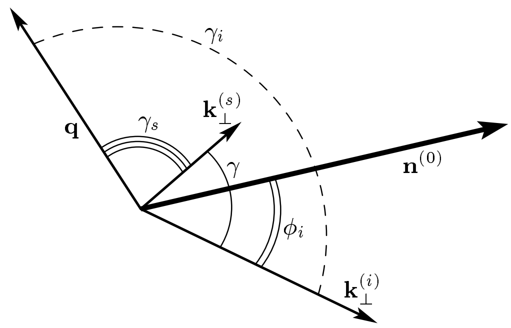

Рис. 7. Проекции волновых векторов на плоскость xy

допустимого ХЖК: $L \ll k_0/p_0^2 \sim \pi d^2/\lambda$. Из последнего неравенства следует, что полученные нами формулы позволяют, в частности, рассматривать ХЖК, содержащий много периодов спирали.

Мы рассчитали интенсивность рассеянного света для приведенных геометрий. При расчетах вводился угол ϕ_i между вектором директора $\mathbf{n}^0$ и вектором $\mathbf{k}^{(i)}$ на плоскости $z = 0$, а также угол γ между поперечными проекциями волновых векторов падающей и рассеянной волн. Эти углы показаны на рис. 7.

Рассчитывались интенсивности рассеяния $I(\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)})$ и $I(\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(2)})$. На рис. 8 показаны линии постоянной интенсивности рассеянного света для холестерика с полным углом закрутки $Lp_0 = \pi/2$, когда угол падения по отношению к оси z равен $\pi/8$ и $\phi_i = \pi/4$. Максимальная интенсивность для обоих типов рассеяния достигается в области $\mathbf{k}^{(s)} \approx \mathbf{k}^{(i)}$. Видно, что для рассеяния (о)–(е) «пятно на экране» значительно шире, чем для рассеяния (е)–(е). Интенсивность рассеяния (е)–(е) в центре формально не ограничена, в то время как для рассеяния (о)–(е) она конечна. Отметим также более сложную форму пика для рассеяния (е)–(е). На рис. 9 приведены те же интенсивности, но для угла падения $\pi/4$.

Специфической особенностью данной системы является нелинейная зависимость интенсивности однократного рассеяния света от объема образца $V = S_\perp L$. А именно, при изменении толщины образца наблюдаются осцилляции величины I/L как функции параметра Lp_0. При этом зависимость I от $S_\perp$ по-прежнему линейная. Эта особенность показана на рис. 10 для обоих типов рассеяния.

Мы также рассчитали степень поляризации P при рассеянии необыкновенной волны [39]

$$
P = \frac{|I(\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(2)}) - I(\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(1)})|}{I(\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(2)}) + I(\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(1)})}.
$$

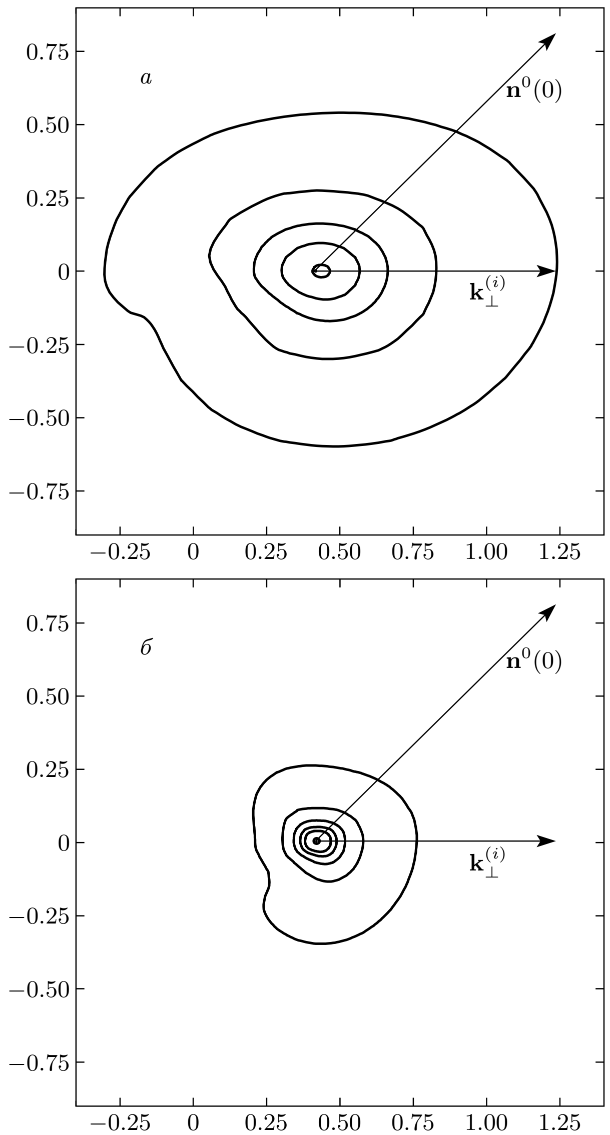

Рис. 8. Линии постоянной интенсивности рассеянного света для рассеяний типа (о)–(е) — *а* и типа (е)–(е) — *б*. На осях отложены расстояния в относительных единицах, одинаковых для обоих типов рассеяния. Интенсивности рассчитаны для $\varepsilon_a = 0.5$, $\varepsilon_\perp = 2.0$, $K_{11} = 3.0 \cdot 10^{-6}$ дин, $K_{22} = 2.0 \cdot 10^{-6}$ дин, $K_{33} = 5.0 \cdot 10^{-6}$ дин, угол падения составляет $\pi/8$, $\phi_i = \pi/4$, $Lp_0 = \pi/2$. Высота пика рассеяния (о)–(е) составляет 2.1 отн. ед. Линии постоянной интенсивности построены на пяти уровнях: 2.0, 1.0, 0.5, 0.2, 0.05

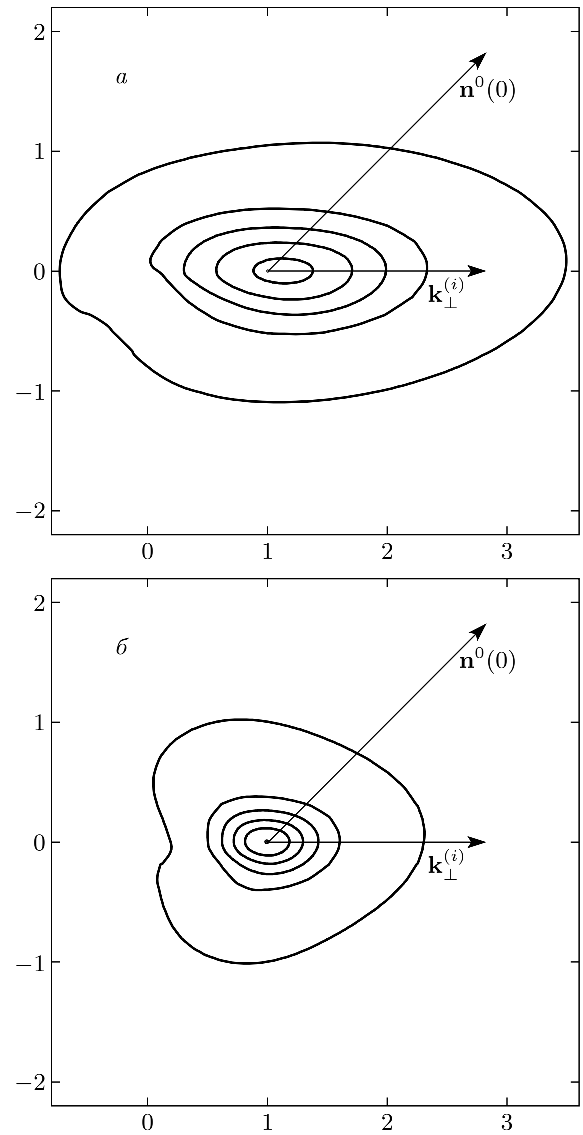

Рис. 9. Линии постоянной интенсивности рассеянного света для рассеяний типа (о)–(е) — *а* и типа (е)–(е) — *б*. На осях отложены расстояния в относительных единицах, одинаковых для обоих типов рассеяния. Значения диэлектрических проницаемостей и модулей Франка такие же, как на рис. 8. Угол падения составляет $\pi/4$, $\phi_i = \pi/4$, $Lp_0 = \pi/2$. Высота пика рассеяния (о)–(е) 0.68 отн. ед. Линии постоянной интенсивности построены на пяти уровнях: 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01

Интенсивность рассеяния типа (е)–(о), $I(\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(1)})$, может быть получена аналогично интенсивности рассеяния типа (о)–(е) (6.12). Линии постоянной степени поляризации показаны на рис. 11. Эти линии имеют достаточно сложный характер, поскольку пики (е)–(е) и (е)–(о) значительно различаются. Пик рассеяния (е)–(е) имеет большую высоту и резко убывает с углом, а пик рассеяния (е)–(о) более пологий и имеет значительно меньшую высоту. В результате в окрестности нулевого угла рассеяния степень поляризации близка к единице, затем она достаточ-

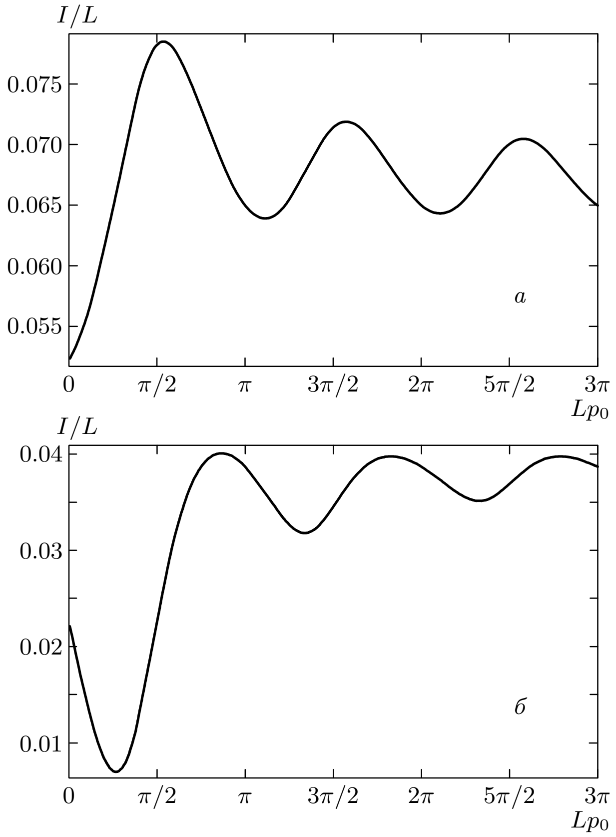

Рис. 10. Зависимость величины I/L от параметра Lp_0 для рассеяний типа (o)–(e) — a и типа (e)–(e) — $б$, выраженной в относительных единицах. Значения диэлектрических проницаемостей и модулей Франка такие же, как на рис. 8. Угол падения составляет $\pi/8$, угол рассеяния $\pi/4$, $\gamma = \pi/6$, $\phi_i = \pi/4$

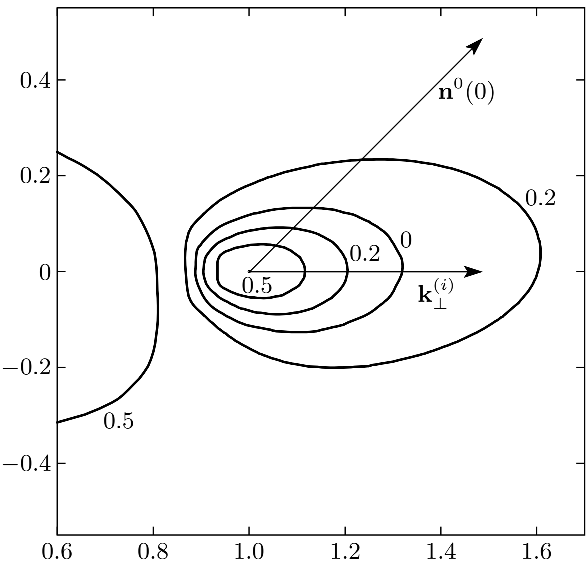

Рис. 11. Линии постоянной степени поляризации для рассеяний типа (e)–(o) и типа (e)–(e). На осях отложены расстояния в относительных единицах. Значения диэлектрических проницаемостей и модулей Франка такие же, как на рис. 8. Угол падения составляет $\pi/4$, $\phi_i = \pi/4$, $Lp_0 = \pi/2$. Линии постоянной степени поляризации построены на трех уровнях: 0.5, 0.2, 0.0

но быстро убывает до нуля, а далее снова начинает нарастать. На рис. 11 изолиния $P = 0.5$ в области, где интенсивность рассеяния (e)–(o) становится больше, замыкается при больших углах рассеяния и поэтому мы привели только часть этой линии.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали рассеяние света в холестериках с большим шагом спирали. При решении этой задачи оказалось, что учет пространственной неоднородности среды существен как при описании нормальных волн и функции Грина, так и при расчете пространственных корреляционных функций флуктуаций диэлектрической проницаемости и спектров тепловых шумов.

Использованный метод расчета может оказаться полезным при изучении рассеяния света в разнообразных слоистых средах и средах с одномерной периодичностью, когда длина световой волны мала по сравнению с пространственной неоднородностью среды. В частности, в рамках развитого подхода можно исследовать проблему распространения и рассеяния света в волновом канале.

Проведенные расчеты показывают, что предложенная теория дает возможность из измерений угловых и поляризационных характеристик интенсивности рассеянного света получать данные о корреляционных функциях в средах, свойства которых периодически меняются в пространстве.

Авторы благодарны В. А. Белякову за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 02-02-16577, 03-02-16173), а также при частичной поддержке Министерства Образовании РФ и администрации Санкт-Петербурга (гранты №№ PD02-1.2-297, PD03-1.2-36), а также НАТО (грант № PST.CLG.979652) и The Royal Society (грант № 15298).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Векторный метод ВКБ

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\widehat{M}(\xi,\xi_0)=\left(i\widetilde{\Omega}\widehat{B}+\widehat{C}\right)\widehat{M}(\xi,\xi_0), \tag{П.1}$$

с начальным условием $\widehat{M}(\xi_0,\xi_0)=\widehat{I}$, где $\widetilde{\Omega}\gg 1$, $\widehat{B}=\widehat{B}(\xi)$, $\widehat{C}=\widehat{C}(\xi)$. Удобно сделать замену неизвестного, для которого в главном порядке по большому параметру $\widetilde{\Omega}$ система станет диагональной. Для этого представим $\widehat{M}(\xi,\xi_0)$ в виде

$$\widehat{M}(\xi,\xi_0)=\widehat{U}(\xi)\widehat{H}(\xi,\xi_0), \tag{П.2}$$

где $\widehat{U}(\xi)$ — некоторая невырожденная матрица, выбор которой будет сделан позже, $\widehat{H}$ — новое неизвестное, удовлетворяющее начальному условию $\widehat{H}(\xi_0,\xi_0)=\widehat{U}^{-1}(\xi_0)$.

Уравнение (П.1) примет тогда вид

$$\frac{\partial\widehat{H}}{\partial\xi}=\left(i\widetilde{\Omega}\widehat{U}^{-1}\widehat{B}\widehat{U}+\widehat{U}^{-1}\widehat{C}\widehat{U}-\widehat{U}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\xi}\right)\widehat{H}. \tag{П.3}$$

Выберем теперь $\widehat{U}(\xi)$ так, чтобы матрица $\widehat{U}^{-1}\widehat{B}\widehat{U}$ стала диагональной, т. е.

$$\widehat{U}^{-1}\widehat{B}\widehat{U}=\widehat{\Lambda}, \tag{П.4}$$

где $\widehat{\Lambda}$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы $\widehat{B}$[5)]. При этом столбцы матрицы $\widehat{U}$ являются собственными векторами матрицы $\widehat{B}$. Тогда уравнение (П.3) принимает вид

$$\frac{\partial\widehat{H}}{\partial\xi}=i\widetilde{\Omega}\left[\widehat{\Lambda}+\frac{i}{\widetilde{\Omega}}\left(\widehat{U}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\xi}-\widehat{U}^{-1}\widehat{C}\widehat{U}\right)\right]\widehat{H}. \tag{П.5}$$

Если отбросить в квадратных скобках правой части (П.5) член, имеющий относительный порядок $1/\widetilde{\Omega}$, то в силу диагональности матрицы $\widehat{\Lambda}$ система расщепляется на независимые уравнения

$$\frac{\partial\widehat{H}_{(0)}}{\partial\xi}=i\widetilde{\Omega}\widehat{\Lambda}\widehat{H}_{(0)}\,, \tag{П.6}$$

решение которых имеет вид

$$\widehat{H}_{(0)}(\xi,\xi_0)=\exp\left[i\widetilde{\Omega}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\widehat{\Lambda}(\xi')d\xi'\right]\widehat{U}^{-1}(\xi_0)\,. \tag{П.7}$$

5) Ситуация, когда матрица $\widehat{B}$ в некоторых точках не приводится к диагональной форме, обсуждается применительно к задачам распространения волн и теории колебаний в [45], а применительно к флуктуациям в ХЖК — в [44].

Основной недостаток этой формулы «нулевого приближения» состоит в том, что она вместе с (П.2) дает выражение для $\widehat{M}(\xi,\xi_0)$ не инвариантное относительно произвольного зависящего от точки ξ выбора нормировки собственных векторов матрицы $\widehat{B}$. Чтобы преодолеть эту трудность, нам необходимо решение в следующем порядке по $\widetilde{\Omega}$. Для этого представим $\widehat{H}(\xi,\xi_0)$ в виде

$$\widehat{H}(\xi,\xi_0)=\widehat{U}_{(1)}(\xi)\widehat{H}_{(1)}(\xi,\xi_0)\,, \tag{П.8}$$

где $\widehat{U}_{(1)}(\xi)$ — неопределенная пока невырожденная матрица. Подставляя (П.8) в (П.5), получим уравнение для $\widehat{H}_{(1)}(\xi,\xi_0)$:

$$\frac{\partial\widehat{H}_{(1)}}{\partial\xi}=i\widetilde{\Omega}\left\{\widehat{U}_{(1)}^{-1}\left[\widehat{\Lambda}+\frac{i}{\widetilde{\Omega}}\left(\widehat{U}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\xi}-\widehat{U}^{-1}\widehat{C}\widehat{U}\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\,\widehat{U}_{(1)}+\frac{i}{\widetilde{\Omega}}\widehat{U}_{(1)}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}_{(1)}}{\partial\xi}\right\}\widehat{H}_{(1)} \tag{П.9}$$

с начальным условием $\widehat{H}_{(1)}(\xi_0,\xi_0)=\widehat{U}_{(1)}^{-1}(\xi_0)\widehat{U}^{-1}(\xi_0)$.

Выберем теперь матрицу $\widehat{U}_{(1)}(\xi)$ так, чтобы

$$\widehat{U}_{(1)}^{-1}\left[\widehat{\Lambda}+\frac{i}{\widetilde{\Omega}}\left(\widehat{U}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\xi}-\widehat{U}^{-1}\widehat{C}\widehat{U}\right)\right]\widehat{U}_{(1)}=$$
$$=\widehat{\Lambda}_{(1)}\,, \tag{П.10}$$

где $\widehat{\Lambda}_{(1)}$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы, стоящей в квадратных скобках (П.10). Тогда уравнение (П.9) принимает вид

$$\frac{\partial\widehat{H}_{(1)}}{\partial\xi}=\left(i\widetilde{\Omega}\widehat{\Lambda}_{(1)}-\widehat{U}_{(1)}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}_{(1)}}{\partial\xi}\right)\widehat{H}_{(1)}\,. \tag{П.11}$$

Заметим, что в случае $\widetilde{\Omega}\gg 1$ матрица $\widehat{\Lambda}+i\widetilde{\Omega}^{-1}\left(\widehat{U}^{-1}\partial\widehat{U}/\partial\xi-\widehat{U}^{-1}\widehat{C}\widehat{U}\right)$ близка к матрице $\widehat{\Lambda}$, а значит, близки матрицы $\widehat{\Lambda}$ и $\widehat{\Lambda}_{(1)}$, поэтому матрица $\widehat{U}_{(1)}$ в (П.10) близка к единичной матрице, т. е.

$$\begin{aligned}\widehat{U}_{(1)}(\xi)&\approx\widehat{I}+\frac{i}{\widetilde{\Omega}}\widehat{V}(\xi)\,,\\ \widehat{U}_{(1)}^{-1}(\xi)&\approx\widehat{I}-\frac{i}{\widetilde{\Omega}}\widehat{V}(\xi)\,,\end{aligned} \tag{П.12}$$

где $\widehat{V}=O(1)$.

Из соотношений (П.12) следует, что второе слагаемое в скобках (П.11) имеет по отношению к первому порядок $1/\widetilde{\Omega}^2$. Пренебрегая этим слагаемым, получим

$$\widehat{H}_{(1)}(\xi,\xi_0) \approx$$
$$\approx \exp\left[i\widetilde{\Omega}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\widehat{\Lambda}_{(1)}(\xi')d\xi'\right]\widehat{U}_{(1)}^{-1}(\xi_0)\widehat{U}^{-1}(\xi_0). \quad (\text{П.13})$$

Подставляя формулы (П.12) в уравнение (П.10), получим для новых матриц $\widehat{\Lambda}_{(1)}$ и $\widehat{V}$ в главных порядках по $\widetilde{\Omega}$

$$(\widehat{\Lambda}_{(1)})_{ll} \approx i\mu_l + \frac{i}{\widetilde{\Omega}}\left(\widehat{U}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\xi} - \widehat{U}^{-1}\widehat{C}\widehat{U}\right)_{ll}, \quad (\text{П.14})$$

$$V_{lm} \approx \frac{1}{i(\mu_m-\mu_l)}\left(\widehat{U}^{-1}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial\xi} - \widehat{U}^{-1}\widehat{C}\widehat{U}\right)_{lm}, \quad l\neq m, \quad (\text{П.15})$$

где $\mu_l = -i\Lambda_{ll}$. Нахождение диагональных членов V_{ll} матрицы $\widehat{V}$ требует следующей итерации в нашем методе последовательной диагонализации — подстановке вида

$$\widehat{H}_{(1)}(\xi,\xi_0) = \widehat{U}_{(2)}(\xi)\widehat{H}_{(2)}(\xi,\xi_0)$$

в (П.11) и вычисления величин $\widehat{U}_{(2)}$ и $\widehat{H}_{(2)}$ с учетом поправок порядка $1/\widetilde{\Omega}^2$. Однако в выражении для оператора эволюции «первого приближения»

$$\widehat{M}(\xi,\xi_0) = \widehat{U}(\xi)\widehat{U}_{(1)}(\xi)\widehat{H}_{(1)}(\xi,\xi_0), \quad (\text{П.16})$$

вклады от диагональной части $\widehat{V}$, связанные с внешними множителями $\widehat{U}_{(1)}(\xi)$ в (П.16) и $\widehat{U}_{(1)}^{-1}(\xi_0)$ в (П.13), сокращаются с вкладом от диагональной части $\widehat{V}$, происходящим от члена $\widehat{U}_{(1)}^{-1}\partial\widehat{U}_{(1)}/\partial\xi$ в (П.11). Поэтому в интересующем нас порядке по $\widetilde{\Omega}$ можно не учитывать диагональных членов матрицы $\widehat{V}$.

Пренебрегая в выражениях (П.12) для матриц $\widehat{U}_{(1)}$ и $\widehat{U}_{(1)}^{-1}$ поправками порядка $1/\widetilde{\Omega}$ (т. е., фактически, заменяя их на единичные матрицы), получаем из (П.16) матрицу $\widehat{M}(\xi,\xi_0)$ в «ВКБ-приближении»:

$$\widehat{M}(\xi,\xi_0) = \widehat{U}(\xi)\widehat{\mathrm{diag}}\left\{\exp\left[-\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\left(\widetilde{\Omega}\mu_l(x) + \left(\widehat{U}^{-1}(x)\frac{\partial\widehat{U}(x)}{\partial x} - \widehat{U}^{-1}(x)\widehat{C}(x)\widehat{U}(x)\right)_{ll}\right)dx\right]\right\}\times$$
$$\times\,\widehat{U}^{-1}(\xi_0). \quad (\text{П.17})$$

Эта формула при $\widehat{C} = \hat{0}$ представляет собой векторный аналог классического ВКБ-приближения.

Область применимости этой формулы определяется неравенствами

$$\widetilde{\Omega} \gg 1, \quad |V_{lm}(\xi')| \ll \widetilde{\Omega}\,,$$
$$\widetilde{\Omega}\left|\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\left(\widehat{\Lambda}_{(2)}(\xi') - \widehat{\Lambda}_{(1)}(\xi')\right)_{ll}d\xi'\right| \ll 1\,, \quad (\text{П.18})$$

где $\widehat{\Lambda}_{(2)}$ — соответствующая диагональная матрица второго приближения.

Первое неравенство означает просто, что $\widetilde{\Omega}$ является большим параметром. Второе неравенство связано с пренебрежением при получении (П.17) членами $\pm i\widehat{V}(\xi)/\widetilde{\Omega}$ в (П.12) и согласно (П.15) дает ограничение на близость собственных чисел μ_l и μ_m во всем интервале от ξ_0 до ξ,

$$\min_{\xi_0\leqslant\xi'\leqslant\xi}|\mu_l(\xi') - \mu_m(\xi')| \gg \widetilde{\Omega}^{-1}. \quad (\text{П.19})$$

Наконец, третье неравенство означает малость следующей поправки к экспоненциальному члену в (П.17) при любых ξ_0, ξ и дает ограничение на допустимую ширину области $\xi - \xi_0$, в которой можно пользоваться ВКБ-формулой (П.17). По порядку величины $\Lambda_{(1)ll}(\xi') - \Lambda_{(2)ll}(\xi') \sim \mu_l(\xi')\widetilde{\Omega}^{-2}$, поэтому

$$|\xi - \xi'| \ll \overline{\mu_l}\widetilde{\Omega}, \quad (\text{П.20})$$

где $\overline{\mu_l}$ — среднее значение μ_l на интервале $[\xi_0;\,\xi]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. W. Oseen, Trans. Faraday Soc. **29**, 883 (1933).
2. H. De Vries, Acta Crystallogr. **4**, 219 (1951).
3. Е. И. Кац, ЖЭТФ **59**, 1854 (1970).
4. D. W. Berreman and T. J. Scheffer, Phys. Rev. A **5**, 1397 (1971).
5. D. W. Berreman, J. Opt. Soc. Am. **62**, 502 (1972); **63**, 1374 (1973).
6. Sah Yuvaraj and K. A. Suresh, J. Opt. Soc. Am. A **11**, 740 (1994).
7. С. Чандрасекхар, *Жидкие кристаллы*, Мир, Москва (1980).
8. В. А. Беляков, *Дифракционная оптика периодических сред сложной структуры*, Наука, Москва (1988).

9. В. А. Беляков, С. А. Сонин, *Оптика холестерических жидких кристаллов,* Наука, Москва (1982).

10. C. Oldano, Phys. Rev. A **40**, 6014 (1989).

11. С. П. Палто, ЖЭТФ **119**, 638 (2001).

12. P. Galatola, Phys. Rev. E **55**, 4338 (1997).

13. P. Hubert, P. Jagemalm, C. Oldano, and M. Rajteri, Phys. Rev. E **58**, 3264 (1998).

14. C. Oldano and S. Ponti, Phys. Rev. E **63**, 011703 (2000).

15. S. Ponti, C. Oldano, and M. Becchi, Phys. Rev. E **64**, 021704 (2001).

16. M. A. Peterson, Phys. Rev. A **27**, 520 (1983).

17. N. A. Nicorovici, R. C. McPhedran, and R. Petit, Phys. Rev. E **49**, 4563 (1994).

18. P. Galatola, Phys. Rev. E **49**, 4552 (1994).

19. А. Ю. Вальков, В. П. Романов, А. Н. Шалагинов, Акуст. ж. **37**, 636 (1991).

20. T. C. Lubensky, Phys. Rev. A **6**, 452 (1972).

21. M. J. Stephen and J. P. Straley, Rev. Mod. Phys. **46**, 617 (1974).

22. Р. Л. Стратанович, ЖЭТФ **70**, 1290 (1976).

23. М. С. Вещунов, ЖЭТФ **76**, 1515 (1979).

24. M. C. Mauguin, Bull. Soc. Franc. Miner. Crist. **34**, 71 (1911).

25. J. W. Shelton and Y. R. Shen, Phys. Rev. Lett. **25**, 23 (1970); **26**, 538 (1971); Phys. Rev. A **5**, 1867 (1972).

26. В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, УФН **141**, 257, (1983).

27. V. S. Liberman and B. Ya. Zel'dovich, Phys. Rev. E **49**, 2389 (1994).

28. A. Yu. Savchenko and B. Ya. Zel'dovich, Phys. Rev. E **50**, 2287 (1994).

29. А. Ю. Вальков, Р. В. Гринин, В. П. Романов, Опт. и спектр. **83**, 239 (1997).

30. E. V. Aksenova, V. P. Romanov, and A. Yu. Val'kov, Phys. Rev. E **59**, 1184 (1999).

31. E. V. Aksenova, A. Yu. Val'kov, and V. P. Romanov, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **359**, 351 (2001).

32. Е. В. Аксенова, А. Ю. Вальков, В. П. Романов, Опт. и спектр. **91**, 1030 (2001).

33. М. А. Анисимов, *Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах,* Наука, Москва (1987).

34. П. Де Жен, *Физика жидких кристаллов,* Мир, Москва (1977).

35. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).

36. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика,* ч. 1, Наука, Москва (1976).

37. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

38. M. Lax and D. F. Nelson, *Proc. of III Rochester Conference on Coherent and Quantum Optics,* Plenum, New York, 415 (1973); *Theory of Light Scattering in Condenced Media,* I Soviet-American Conference. Nauka, Moskow, Vol. 2 (1976), p. 452.

39. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).

40. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, 1-е изд., Наука, Москва (1979).

41. D. W. Berreman and T. J. Scheffer, Phys. Rev. Lett. **25**, 577 (1970).

42. M. Lax and D. F. Nelson, Phys. Rev. B **4**, 3694 (1971).

43. В. А. Якубович, В. М. Стражинский, *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их применения*, Наука, Москва (1987).

44. E. V. Aksenova, V. P. Romanov, and A. Yu. Val'kov *Proceedings of the International Seminar «Day on Diffraction-2001»*, Saint-Petersburg (2001), p. 7.

45. М. В. Перель, *Проблемы дифракции и распространения волн*, ЛГУ, Ленинград, вып. **23**, 58 (1990); М. В. Перель, Радиофизика **33**, 1208 (1990).