ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 2, стр. 195–204

ЭФФЕКТ КВАНТОВОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ И РАДИАЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ ЭЛЕКТРОНА ДИРАКА

Г. Ф. Ефремов[*], *В. В. Шарков*

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 1 апреля 2002 г.,
после переработки 17 июня 2003 г.

Установлен эффект квантовой пространственно-временной нелокальности, который заключается в запаздывании взаимодействия между электроном и собственным полем излучения на расстоянии порядка комптоновской длины волны. С учетом конечного значения дисперсии приращения координаты электрона в собственной системе координат получена частотная зависимость коэффициента радиационного трения, свободная от расходимостей и известных парадоксов классической теории радиационного затухания. Установлена взаимосвязь между радиационным затуханием, лэмбовским сдвигом уровней и электромагнитной массой электрона.

PACS: 05.40.Jc, 12.20.Ds, 05.30.-d, 41.60.-m

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблемы радиационного затухания и электромагнитной массы, возникшие в начале двадцатого столетия, до сих пор продолжают привлекать к себе внимание многих исследователей ввиду особой важности их решения [1–11]. Радиационное затухание, представляющее собой реакцию собственного поля излучения на движение заряженной частицы при одновременном воздействии поля электромагнитного вакуума, является одним из фундаментальных эффектов электродинамики и затрагивает наиболее принципиальные вопросы физической теории.

Настоящая работа, являясь продолжением [11], посвящена решению парадоксов, возникших сто лет назад в теории радиационного затухания. Как известно, классическая формула радиационной силы трения,

$$\mathbf{F} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^3}{dt^3}\mathbf{r}(t), \tag{1}$$

приводит к неустойчивости движения свободного электрона. Физически это связано с тем, что реакция собственного поля излучения точечной заряженной частицы не учитывает запаздывания взаимодействия и вследствие этого приводит к ее ускорению и нарушению принципа причинности. Кроме того, для точечной заряженной частицы собственная энергия бесконечна, поэтому самовоздействие в классической электродинамике допускает корректное описание лишь при введении процедуры перенормировок [12]. Решение данной проблемы связано с фундаментальными вопросами локальности и нелокальности современной квантовой теории. Возникает вопрос, каким образом в локальной физической теории учитывается запаздывание взаимодействия между заряженной частицей и собственным полем излучения.

Несмотря на значительные успехи квантовой электродинамики применение ее традиционных методов к проблеме радиационного затухания натолкнулось на определенные трудности. В связи с этим заметим, что вычисление силы трения любой физической природы является центральной задачей квантовой статистической физики. Взаимосвязь и взаимовлияние методов квантовой теории поля и статистической физики хорошо известны. Методы квантовой теории поля успешно применяются при решении фундаментальных проблем статистической физики и физики конденсированных сред [13]. С другой стороны, при решении ряда фундаментальных проблем квантовой теории поля наиболее адекватными являются методы статистической физики. К таким задачам, в частности, относится проблема радиационно-

[*]E-mail: efremov@rf.unn.ru

го трения [4, 11, 14–16].

В нашей работе [11] предложено решение проблемы радиационного затухания на основе разработанных в [17–19] методов флуктуационно-диссипационной теории нелинейных открытых квантовых систем. Эта теория принципиально отличается от линейной теории броуновского движения квантовых систем, развитой Швингером [20] и Сеницким [21], и от других методов своими возможностями учета флуктуаций и запаздывания взаимодействия при вычислении физических эффектов. В работе [11] точная формула для радиационной силы трения использована при вычислении коэффициента радиационного трения в нерелятивистском пределе для динамических переменных электрона. В то же время для полного решения проблемы необходимо учитывать вклад в физические эффекты больших импульсов, передаваемых от поля излучения электрону. Вследствие этого при вычислении коэффициента радиационного трения необходимо использовать релятивистскую динамику с учетом внутренних степеней свободы электрона.

Благодаря фундаментальной особенности, обусловленной наличием внутренних степеней свободы электрона Дирака, дисперсия приращения координаты, $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)$, оказывается конечной в собственной системе координат. Учет конечности дисперсии $(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1))^2$ и некоммутативности операторов координаты в различные моменты времени приводит к запаздыванию взаимодействия между электроном и собственным полем излучения на расстоянии порядка комптоновской длины волны, т. е. к эффекту пространственно-временной квантовой нелокальности. Этот эффект решает проблему точечности электрона в квантовой теории и, таким образом, исключает парадоксы самоускорения и нарушения принципа причинности, присущие классической теории. Кроме того, устранение расходимостей при вычислении основополагающих эффектов квантовой электродинамики позволяет установить взаимосвязь радиационного трения с лэмбовским сдвигом уровней и конечным вкладом в электромагнитную массу реакции поля излучения.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. КОЭФФИЦИЕНТ РАДИАЦИОННОГО ЗАТУХАНИЯ

Взаимодействие электрона Дирака с полем электромагнитного вакуума и собственным полем излучения определяет радиационное трение, электромагнитную массу электрона, служит фундаментальным механизмом флуктуаций, является физической причиной лэмбовского сдвига уровней и аномального магнитного момента электрона. Анализ перечисленных выше эффектов квантовой электродинамики может быть проведен на основе предложенной в [11] одночастичной флуктуационно-диссипационной квантовой электродинамики. Учет запаздывания взаимодействия между электроном и полем излучения позволит не только устранить парадоксы радиационного трения, но и исключить расходимости при вычислении указанных выше электродинамических эффектов.

Рассмотрим взаимодействие релятивистского электрона с квантованным полем излучения, находящегося в некотором внешнем потенциальном поле $V(\mathbf{r}, t)$. Гамильтониан полной системы имеет вид

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right) + \\ + \beta mc^2 + eA_0(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) + F, \quad (2)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, $A_0(\mathbf{r}, t)$ — потенциалы поля, F — гамильтониан квантового поля излучения, $\boldsymbol{\alpha}$ и β — матрицы Дирака. При выборе поперечной калибровки для потенциалов поля,

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3)$$

скалярный потенциал $A_0(\mathbf{r}, t)$, ответственный в этом случае за кулоновское взаимодействие, не приводит к наблюдаемым эффектам в одноэлектронной задаче и может быть опущен в гамильтониане системы.

Исходными уравнениями, следующими из (2), являются уравнения Максвелла для потенциалов поля и уравнение Лоренца для динамических переменных электрона Дирака:

$$\frac{d}{dt}\pi_j(t) + \nabla_j V(\mathbf{r}, t) = \\ = -\frac{e}{c}\frac{d}{dt}A_j(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c}\nabla_j \dot{r}_\alpha(t) A_\alpha\left(\mathbf{r}(t), t\right), \quad (4)$$

где

$$\pi_j(t) = p_j - \frac{e}{c}A_j\left(\mathbf{r}(t), t\right)$$

— кинетический импульс электрона.

Особенность силы Лоренца, воздействующей на электрон со стороны поля излучения в правой части (4), состоит в том, что она определяется полной производной от векторного потенциала и содержит слагаемое, зависящее от скорости $\dot{r}_\alpha(t)$. В гейзенберговском представлении потенциалы поля в уравнении (4) являются функциями координаты электрона

$\mathbf{r}(t)$, поэтому их удобно представить в виде разложения Фурье:

$$A_j(\mathbf{r}(t),t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,A_j(\mathbf{k},t), \qquad (5)$$

где компоненты Фурье $A_j(\mathbf{k},t)$ явно не содержат динамических переменных электрона. Канонически-сопряженные с $A_j(\mathbf{k},t)$ компоненты плотности тока находим из гамильтониана (2) согласно

$$-\frac{\delta H}{\delta A_j(\mathbf{k},t)} = \frac{e}{c}\dot r_j(t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)).$$

Из выражения (2) следуют также уравнения Максвелла для фурье-компонент $A_j(\mathbf{k},t)$ потенциалов поля:

$$\left(k^2+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\right)A_j(\mathbf{k},t) = \frac{4\pi}{c}e\dot r_j(t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)). \qquad (6)$$

Запишем решение уравнения (6) в виде

$$A_j(\mathbf{k},t) = A_j^0(\mathbf{k},t) + \\ + \frac{e}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))\,\dot r_l(t_1). \qquad (7)$$

Второе слагаемое в (7), определяемое функцией Грина фотона $D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)$, есть собственное поле излучения электрона, а свободное решение $\mathbf{A}^0(\mathbf{k},t)$ — невозмущенное поле электромагнитного вакуума. В принятой калибровке (3) функция Грина и ее спектр Фурье имеют вид [13]

$$D_{jl}(\mathbf{k},t) = \frac{4\pi c}{k}\sin(ckt)\left(\delta_{jl}-\frac{k_lk_j}{k^2}\right)\eta(t),$$

$$D_{jl}(\mathbf{k},\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\,D_{jl}(\mathbf{k},t)\exp(i\omega t) = \\ = 4\pi(k^2+\kappa^2)^{-1}\left(\delta_{jl}-\frac{k_lk_j}{k^2}\right), \qquad (8)$$

$$k=|\mathbf{k}|, \quad \kappa^2 = \left(\frac{i\omega}{c}\right)^2(1+i\varepsilon\,\mathrm{sign}\,\omega).$$

Наличие множителя $i\varepsilon\,\mathrm{sign}\,\omega$ ($\varepsilon>0$) обеспечивает правильный обход полюса запаздывающей функции Грина.

Подставим вынужденное решение (7) в выражение для векторного потенциала (5), определяющее квантовую силу Лоренца в уравнении (4). После симметризации произведения коммутирующих между собой операторов $A_j(\mathbf{k},t)$ и $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))$ получим

$$A_j(\mathbf{r}(t),t) = \frac{e}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)\times \\ \times\frac{1}{2}\left[\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)),\dot r_l(t_1)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))\right]_+.$$

Пренебрегая вторым слагаемым в выражении для силы Лоренца, получим следующее уравнение движения релятивистского электрона с учетом его собственного поля излучения:

$$\frac{d}{dt}\pi_j(t)+\nabla_jV(\mathbf{r},t) = -\frac{e^2}{c^2}\frac{d}{dt}\times \\ \times\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}D_{jl}(\mathbf{k},t-t_1)\times \\ \times\frac{1}{2}\left[\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)),\dot r_l(t_1)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))\right]_+ = F_j(t). \qquad (9)$$

Таким образом, мы не учитываем воздействие на электрон поля электромагнитного вакуума. Это позволит на первом этапе значительно упростить анализ эффекта запаздывания взаимодействия.

Для того чтобы исследовать основные особенности эффекта радиационного затухания, рассмотрим электрон в однородном электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}(t)$, энергия взаимодействия с которым есть

$$V(t) = -r_jeE_j(t) = -r_jf_j.$$

Определенная таким образом внешняя сила $f_j(t) = eE_j(t)$ является канонически-сопряженной координате $r_j(t)$ электрона. Согласно нестационарной теории возмущений эволюция оператора координаты $r_\beta(t)$ электрона при заданном стороннем возмущении есть [22]

$$r_j(t) = r_j^0(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1\hat\varphi_{jl}(t,t_1)f_l(t_1),$$

где $r_j^0(t)$ определяется свободной эволюцией при $f=0$, а

$$\hat\varphi_{jl}(t,t_1) = \frac{i}{\hbar}\left[r_j^0(t),r_l^0(t_1)\right]_-\eta(t-t_1) = \frac{\delta r_j(t)}{\delta f_l(t_1)} \qquad (10)$$

есть линейный случайный отклик, равный квантовой скобке Пуассона операторов $r_j^0(t)$ и $r_l^0(t_1)$ с обратным знаком, умноженной на функцию Хевисайда $\eta(\tau)$. При усреднении (10) по начальному состоянию полной системы имеем

$$\langle r_j(t)\rangle = \int dt_1\varphi_{jl}(t,t_1)f_l(t_1),$$

где

$$\left\langle \left. \frac{\delta r_j(t)}{\delta f_l(t_1)} \right|_{f=0} \right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{i}{\hbar} \left[r_j^0(t), r_l^0(t_1) \right]_- \eta(t-t_1) \right\rangle = \varphi_{jl}(t,t_1) \quad (11)$$

есть так называемый линейный отклик, зависящий от разности моментов времени и обладающий свойством изотропии:

$$\varphi_{jl}(t,t_1) = \varphi(t,t_1)\delta_{jl}. \quad (12)$$

При периодическом возмущении

$$f_\alpha(t) = f_\alpha(\omega)\exp(-i\omega t) + \text{c.c.}$$

согласно (11) имеем

$$\langle r_\alpha(t) \rangle = \chi(\omega) f_\alpha(\omega)\exp(-i\omega t) + \text{c.c.},$$

где

$$\chi(\omega) = \int d\tau\, \exp(i\omega\tau)\varphi(\tau)$$

— линейная восприимчивость, определяющая частотную зависимость диссипации энергии и дисперсии вследствие реакции поля излучения. Чтобы вычислить восприимчивость с учетом радиационной силы (9), необходимо найти ее изменение под действием возмущения, т. е. вычислить производную

$$\left\langle \frac{1}{m} \frac{\delta F_j(t)}{\delta f_l(t_2)} \right\rangle =$$
$$= -\frac{d}{dt}\int dt' \left\langle \hat{\gamma}_{jl}(t,t') \frac{d}{dt'} \hat{\varphi}_{jl}(t',t_2) \right\rangle. \quad (13)$$

Здесь мы воспользовались изотропией линейного отклика и учли поперечную калибровку для функции Грина (3).

Будем считать, что нелинейность системы, связанная с радиационной силой, мала, следовательно, можно пренебречь флуктуациями отклика в соответствии с нелинейными флуктуационно-диссипационными теоремами [22]. Поэтому в выражении (13) можно заменить отклик его статистическим средним значением, при этом с учетом (11) и (12) получим

$$\left\langle \frac{1}{m} \frac{\delta F_j(t)}{\delta f_l(t_2)} \right\rangle = -\frac{d}{dt}\int dt' \gamma_{jl}(t-t') \frac{d}{dt'}\varphi(t'-t_2), \quad (14)$$

где определена функция

$$\gamma_{jl}(t-t_1) = \frac{e^2}{mc^2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D_{jl}(\mathbf{k}, t-t_1) \times$$
$$\times \left\langle \frac{1}{2}\left[\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)\right), \exp\left(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1)\right) \right]_+ \right\rangle. \quad (15)$$

Угловые скобки обозначают усреднение по основному состоянию полной системы. Функцию (15) и ее спектр Фурье,

$$\gamma_{jl}(\omega) = \int d\tau\, \gamma_{jl}(\tau),$$

будем называть коэффициентом радиационного трения. С учетом (14), (15) уравнение (9) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{m}\frac{d}{dt}\pi_j + \frac{1}{m}\nabla_j V(\mathbf{r}) +$$
$$+ \frac{d}{dt}\int dt_1 \gamma_{jl}(t-t_1)\dot{r}_l(t_1) = \frac{1}{m} f_j(t). \quad (16)$$

В принятом нами приближении при вычислении коэффициента радиационного затухания не учтено второе слагаемое в правой части уравнения Лоренца. Кроме того, мы пренебрегаем вкладом в (15) параметрического воздействия флуктуаций электромагнитного вакуума.

Среднее значение координаты электрона $\langle r_j(t)\rangle$, находящегося в потенциальном поле $V(r) = m\Omega^2 r^2/2$ и однородном электрическом поле, в собственной системе координат подчиняется уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle r_j(t)\rangle + \Omega^2\langle r_j(t)\rangle =$$
$$= \frac{1}{m} f_j(t) - \frac{d}{dt}\int dt_1 \gamma_{jl}(t-t_1)\frac{d}{dt_1}\langle r_l(t_1)\rangle. \quad (17)$$

Из уравнения (17) определим отклик на гармоническую силу

$$f_j(t) = f_j(\omega)\exp(-i\omega t).$$

Будем полагать также, что $\gamma_{jl}(\tau) = \delta_{jl}\gamma(\tau)$. По определению имеем

$$\langle r_j(\omega)\rangle = \chi(\omega) f_j(\omega). \quad (18)$$

Применяя к уравнению (17) преобразование Фурье, получим

$$\left(\Omega^2 - \omega^2\right)\langle r_j(\omega)\rangle = \frac{1}{m} f_j(\omega) + \omega^2\gamma(\omega)\langle r_j(\omega)\rangle.$$

По определению (18) линейная восприимчивость будет иметь следующий вид:

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{m}\,\frac{1}{\omega^2\left(1+\gamma(\omega)\right) - \Omega^2}. \quad (19)$$

В соответствии с принципом причинности восприимчивость (19) должна быть аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной переменной ω [23].

3. ЭФФЕКТ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ КВАНТОВОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

Коэффициент радиационного трения удовлетворяет принципу причинности и учитывает запаздывание взаимодействия электрона с собственным полем излучения, обусловленное конечностью скорости распространения света и особенностями гейзенберговских операторов координаты электрона, взятых в различные моменты времени. Принципиально нелинейная зависимость (15) от операторов координаты $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t_1)$ определяется произведением экспоненциальных множителей, которое может быть записано в виде

$$\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1)) = \exp(i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})\exp(-iB), \quad (20)$$

где $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_1)$ — оператор приращения координаты за промежуток времени $t-t_1$. Наличие унитарного оператора $\exp(-iB)$ в выражении (20) обусловлено некоммутативностью операторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t_1)$ в различные моменты времени и определенным образом влияет на запаздывание взаимодействия между электроном и полем излучения. В нерелятивистском пределе это запаздывание учтено в работе [11] с целью устранения парадокса самоускорения. В квантовой электродинамике в отличие от классической используется фундаментальный малый параметр — постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$. Благодаря этому при вычислении произведения (20) в коэффициенте радиационного трения (15) достаточно воспользоваться приближением свободной эволюции для оператора координаты электрона $r_j(t)$, следующей из гамильтониана

$$H = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = mc^2. \quad (21)$$

Из уравнений Гейзенберга имеем

$$\begin{aligned} \dot r_j(t) &= c\alpha_j, \\ \dot\alpha_j(t) &= \frac{1}{i\hbar}[\alpha_j, H]. \end{aligned} \quad (22)$$

Импульс $\mathbf{p}$ и гамильтониан (21) электрона являются интегралами движения. Из перестановочных соотношений для матриц Дирака $\boldsymbol{\alpha}$ и β имеем также соотношения

$$\alpha_j H + H\alpha_j = 2cp_j. \quad (23)$$

Решая систему уравнений (22) с учетом (23), находим

$$r_j(t) = r_j(0) + \frac{c^2 p_j}{H}\left[t - \frac{\hbar}{2\tilde H}\sin\left(\frac{2\tilde H}{\hbar}t\right)\right] + \alpha_j(0)\frac{\hbar c}{2\tilde H}\sin\left(\frac{2\tilde H}{\hbar}t\right) + \dot\alpha_j(0)\frac{\hbar^2 c}{4\tilde H^2}\left[1-\cos\left(\frac{2\tilde H}{\hbar}t\right)\right], \quad (24)$$

где $\tilde H = \sqrt{c^2p^2+\varepsilon_0^2}$, что следует из условия $\tilde H^2 \equiv H^2 = c^2p^2+\varepsilon_0^2$. Впервые решение (24) было получено Шредингером [24].

Воспользуемся решением (24) для вычисления дисперсии оператора

$$F_0 = \mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_1)) = \mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r} \quad (25)$$

в собственной системе координат электрона. Используя перестановочные соотношения матриц α_j и $\dot\alpha_j$, получим следующее выражение для дисперсии приращения (25):

$$F_0^2 = k^2\lambda_0^2\sin^2(\omega_0 t) = x^2\sin^2(\omega_0 t), \quad (26)$$

где

$$\omega_0 = \frac{mc^2}{\hbar}, \quad x = \frac{k}{k_0}, \quad \lambda_0 = \frac{1}{k_0}.$$

Дисперсия приращения координаты электрона Дирака оказывается конечной в собственной системе координат в отличие от случая релятивистской бесспиновой частицы. Быстрые осцилляции на больших временах ($t \gg \tau_0 = 1/\omega_0$) оказываются несущественными и можно считать

$$F_0^2 \approx \frac{1}{2}k^2\lambda_0^2 = \frac{1}{2}x^2. \quad (27)$$

Таким образом, дисперсия приращения координаты, $\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_1)$, для электрона Дирака оказывается конечной в собственной системе координат благодаря наличию собственных (внутренних) степеней свободы, задаваемых матрицами Дирака. Конечное значение дисперсии, как показано ниже, приводит к запаздыванию взаимодействия между электроном и собственным полем излучения, что снимает известные парадоксы радиационного затухания и логарифмическую расходимость в квантовой электродинамике. Запаздывание взаимодействия определяется временем прохождения светом комптоновской длины волны:

$$t_0 = \frac{\lambda_0}{c} = \frac{\hbar}{mc^2} = \frac{1}{\omega_0}.$$

Следовательно, квантовая теория радиационного затухания должна быть принципиально немарковской теорией, учитывающей запаздывание взаимодействия между электроном и полем излучения. Характерное время запаздывания взаимодействия, t_0, чрезвычайно мало, поэтому использование свободной эволюции $\mathbf{r}(t)$ в выражениях (9) и (20) на малых временах порядка t_0 оказывается оправданным.

Чтобы найти коэффициент радиационного затухания, необходимо вычислить произведение экспонент в виде (20):

$$\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1)) = \\ = \exp(i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})\exp(-iB).$$

Множитель $\exp(i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})$ строго определяется решением (24), где оператор (25) подчиняется свойству (26). Нетривиальная особенность вычисления унитарного оператора $\exp(-iB)$ связана с зависимостью координаты электрона $\mathbf{r}(t)$ от импульса и матриц Дирака согласно (24). В результате вычислений имеем

$$\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1)) = \exp(i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})\times \\ \times\exp\left\{-\frac{i\omega_0\tau}{2}\left[\beta x\,\mathrm{arctg}\,x+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x-\mathrm{arctg}\,x)\right]\right\} \quad (28)$$

и для обратного произведения экспонент —

$$\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)) = \\ = \left[\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t))\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))\right]^{\dagger}\Big|_{\mathbf{k}\to-\mathbf{k}} = \\ = \exp\left\{-\frac{i\omega_0\tau}{2}\left[-\beta x\,\mathrm{arctg}\,x+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x-\mathrm{arctg}\,x)\right]\right\}\times \\ \times\exp(i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$, $\tau = t-t_1$. Найденные выражения позволяют записать в явном виде антикоммутатор, входящий в формулу (15) для коэффициента радиационного трения. Поскольку в выражение для оператора $\Delta\mathbf{r}$ согласно формуле (24) входят матрицы Дирака, можно представить $\exp(i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r})$ в виде

$$\exp(i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r}) = \cos(k\Delta r) + \frac{i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{r}}{k\Delta r}\sin(k\Delta r), \quad (29)$$

где $\Delta r = |\Delta\mathbf{r}| = \lambda_0|\sin(\omega_0\tau)|$ не содержит матриц Дирака. В дальнейшем мы не будем учитывать слагаемое, содержащее $\sin(k\Delta r)$, в (29) ввиду его малости. Используя выражения (28), (29) и представление $\Delta\mathbf{r}$ (24) в собственной системе координат, в изотропном случае для антикоммутатора в (15) имеем

$$\left\langle\left[\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)),\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t_1))\right]_+\right\rangle = \\ = 2\cos(x|\sin(\omega_0\tau)|)\cos(\omega_0\tau f(x)), \quad (30)$$

где

$$f(x) = 0.5\sqrt{(x-\mathrm{arctg}\,x)^2+x^2\,\mathrm{arctg}^2\,x} \approx 0.5x\,\mathrm{arctg}\,x.$$

Подставим (30) в выражение для коэффициента радиационного затухания (15). После усреднения по основному электронному состоянию $\langle\beta\rangle = 1$ и вычисления интеграла по угловым переменным пространства волновых векторов получим

$$\gamma(\tau) = \frac{4\alpha\omega_0}{3\pi}\int\limits_0^\infty dx\,x\sin(x\omega_0\tau)\times \\ \times\cos(f(x)\omega_0\tau)\cos(x|\sin(\omega_0\tau)|)\,\eta(\tau). \quad (31)$$

1. Сначала рассмотрим асимптотический вклад в $\gamma(\tau)$, соответствующий большим передаваемым импульсам при $x\to\infty$, когда функцию $\mathrm{arctg}\,x$ можно считать постоянной и равной $\pi/2$. Полагая $\mathrm{arctg}\,x = \pi/2$, запишем выражение (31) в виде

$$\gamma(\tau) = \frac{\alpha}{3\pi}\omega_0\int\limits_0^\infty dx\,x\times \\ \times\left\{\sin\left[\left(\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\omega_0\tau+|\sin(\omega_0\tau)|\right)x\right]+\right. \\ +\sin\left[\left(\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\omega_0\tau-|\sin(\omega_0\tau)|\right)x\right]+ \\ +\sin\left[\left(\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\omega_0\tau+|\sin(\omega_0\tau)|\right)x\right]+ \\ \left.+\sin\left[\left(\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\omega_0\tau-|\sin(\omega_0\tau)|\right)x\right]\right\}\eta(\tau). \quad (32)$$

Принимая во внимание четность подынтегральной функции по переменной интегрирования x и принцип причинности ($\tau>0$), из (32) получим

$$\gamma(\tau) = \frac{\alpha\omega_0}{3}\delta'\left(\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\omega_0\tau-|\sin(\omega_0\tau)|\right)\eta(\tau).$$

Для вычисления частотной зависимости коэффициента радиационного трения:

$$\gamma(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\,\exp(i\omega t)\gamma(t) = \\ = \frac{\alpha\omega_0}{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\,\exp(i\omega t)\times \\ \times\delta'\left(\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\omega_0 t-|\sin(\omega_0 t)|\right)\eta(t),$$

определим условие равенства нулю аргумента δ-функции:

$$\sin(\omega_0 t^*) = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \omega_0 t^* = \theta = 0.56, \quad \omega_0 t^* = 2.55. \tag{33}$$

После этого получим асимптотическую формулу:

$$\gamma(\omega) = \frac{\alpha}{3} \left[\frac{i\omega}{\omega_0} \frac{1}{[1 - \pi/4 - \cos(\omega_0 t^*)]^2} + \right. \\ \left. + \frac{|\sin(\omega_0 t^*)|}{|1 - \pi/4 - \cos(\omega_0 t^*)|^3} \right] \exp(i\omega t^*), \tag{34}$$

которая согласуется с принципом причинности и не содержит парадокса самоускорения. Основной вывод, который можно сделать из асимптотического рассмотрения, заключается в том, что существенный вклад в коэффициент радиационного трения дает область, определяемая условием (33). Следовательно, исходную формулу (31) согласно (33) можно записать в виде

$$\gamma(\tau) = \frac{4\alpha\omega_0}{3\pi} \times \\ \times \int_0^\infty x\,dx\, \sin(x\omega_0\tau) \cos\left(f(x)\omega_0\tau\right) \cos(x\theta)\eta(\tau). \tag{35}$$

Отсюда следует частотная зависимость коэффициента трения:

$$\gamma(\omega) = \frac{4\alpha\omega_0}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(i\omega\tau) \times \\ \times \int_0^\infty x\,dx\, \sin(x\omega_0\tau) \cos\left(f(x)\omega_0\tau\right) \cos(x\theta)\eta(\tau). \tag{36}$$

Заметим, что в асимптотике при $\operatorname{arctg} x = \pi/2$ выражение (36) сводится к (34).

2. Перейдем к анализу вклада в (31) малых передаваемых импульсов и, соответственно, малых частот. В этой области в выражении для дисперсии координаты электрона (26) быстрыми осцилляциями можно пренебречь, т.е. $F_0^2 \approx x^2/2$ согласно (27). С учетом этого из выражения (31) при $\theta = 1/\sqrt{2}$ получаем (35).

Основное свойство коэффициента радиационного трения (36) заключается в том, что оно учитывает запаздывание взаимодействия между электроном и собственным полем излучения. Чтобы выяснить эту особенность, можно пренебречь квантовыми поправками, связанными с множителем $\operatorname{arctg} x$, полагая в формуле (36) $\cos(f(x)\omega_0\tau) \approx 1$. В этом случае частотная зависимость коэффициента радиационного затухания запишется в виде

$$\gamma(\omega) = \alpha \frac{4\omega_0}{3\pi} \int_0^\infty dx\, x \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \exp(i\omega\tau) \sin(x\omega_0\tau) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \eta(\tau). \tag{37}$$

Интегрируя (37), получим

$$\gamma(\omega) = i\frac{2\alpha}{3} \frac{\omega}{\omega_0} \exp \frac{i\omega}{\sqrt{2}\,\omega_0}. \tag{38}$$

С учетом выражения (38) линейная восприимчивость (19) при $\Omega = 0$ запишется следующим образом:

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{m\omega^2} \left(1 + i\frac{2\alpha}{3} \frac{\omega}{\omega_0} \exp \frac{i\omega}{\sqrt{2}\,\omega_0}\right)^{-1}. \tag{39}$$

Легко видеть, что восприимчивость (39) не имеет полюсов в верхней полуплоскости комплексного переменного ω и, таким образом, удовлетворяет принципу причинности.

В то же время коэффициент радиационного затухания, следующий из классической формулы Абрагама–Лоренца (1),

$$\gamma^0(\omega) = i\omega\tau_0, \quad \tau_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\omega_0},$$

дает полюс в выражении для восприимчивости (39) в верхней полуплоскости ω, что и приводит к парадоксу самоускорения в классической теории радиационного затухания [23].

Из формулы для линейного отклика (39) следует уравнение движения электрона во внешнем электрическом поле:

$$m\ddot{r}_j(t) - m\tau_0 \dddot{r}_j(t - t_0) = eE_j(t), \\ \tau_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}, \quad t_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{mc^2}. \tag{40}$$

В частности, из (40) при нулевом внешнем поле имеем уравнение

$$m\ddot{r}_j(t) - m\tau_0 \dddot{r}_j(t - t_0) = 0,$$

из которого следует устойчивость свободного движения электрона $\mathbf{v} = \mathrm{const}$.

Таким образом, запаздывание взаимодействия устраняет парадокс самоускорения, присущий классической теории Абрагама–Лоренца. Кроме того, из уравнения (40) следует строгое обоснование приближенных классических формул для радиационной силы трения. Поскольку радиационная сила трения «включается» с опозданием на время t_0, можно считать, что в течение этого времени электрон движется только под действием внешнего поля. Следовательно, на этом промежутке времени получаем уравнение движения вида

$$m\ddot{r}_j(t) = eE_j(t).$$

Отсюда после подстановки

$$\dddot{r}_j(t) = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}eE_j(t)$$

в (40) получим уравнение

$$m\ddot{r}_j(t) - eE_j(t) = \tau_0\frac{d}{dt}eE_j(t-t_0) \approx \tau_0\frac{d}{dt}eE_j(t). \quad (41)$$

Полученное таким образом уравнение (41) служит строгим обоснованием принятой в классической теории формальной процедуры устранения парадокса самоускорения [3, 25].

Наконец, приведем полученное нами в работе [16] выражение для мнимой части коэффициента радиационного трения с учетом флуктуаций электромагнитного вакуума:

$$\gamma''(\omega) = \frac{2\alpha}{3}\int\limits_0^\infty dx\, x\cos\frac{x}{\sqrt{2}} \times \delta\left(\frac{\omega}{\omega_0} - (x + f(x))\right)\operatorname{sign}\omega, \quad (42)$$

определяющей собственно радиационное затухание.

Действительная часть коэффициента радиационного трения определяет так называемую дисперсию или собственную энергетическую часть электрона. В частности, коэффициент трения на нулевой частоте $\gamma(0) = \gamma'(0)$ определяет вклад реакции поля излучения в электромагнитную массу электрона.

4. РАДИАЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ МАССА ЭЛЕКТРОНА, ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ

Физическая значимость эффекта квантовой нелокальности (запаздывания взаимодействия) далеко не исчерпывается устранением парадоксов классической теории радиационного трения. Запаздывание взаимодействия между электроном и полем излучения устраняет расходимости, присущие традиционным методам квантовой электродинамики. В частности, из полученных выше формул для $\gamma(\omega)$ следует конечный вклад реакции поля излучения в электромагнитную массу электрона. Действительно, из асимптотической формулы (34) при $\omega = 0$ получим

$$\delta m_{el} = m_0\gamma(0) = \frac{\alpha m_0}{3}\,\frac{|\sin(\omega_0 t^*)|}{|1 - \pi/4 - \cos(\omega_0 t^*)|^3}. \quad (43)$$

Установим взаимосвязь между физическими эффектами, обусловленными взаимодействием электрона с собственным полем излучения и полем электромагнитного вакуума.

1. В силу принципа причинности действительная часть коэффициента радиационного трения $\gamma'(\omega)$ однозначно определяется мнимой частью коэффициента трения. Из соотношений Крамерса–Кронига получим

$$\gamma'(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega'\frac{\gamma''(\omega')}{\omega - \omega'} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\omega'\frac{\gamma''(\omega')\omega'}{\omega^2 - \omega'^2}.$$

Откуда с учетом (42) имеем следующее выражение для электромагнитной массы электрона:

$$\delta m_{el} = m_0\gamma'(0) = \frac{2m_0}{\pi}\int\limits_0^\infty d\omega'\frac{\gamma''(\omega')}{\omega'} = \frac{2m_0\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty dx\frac{\cos\left(x/\sqrt{2}\right)}{1 + 0.5\operatorname{arctg} x} \approx 0.5\alpha m_0.$$

Таким образом, можно сделать принципиальный вывод, что масса электрона лишь частично имеет электромагнитную природу. Вопрос о вычислении спектра масс лептонов остается открытым. Взаимосвязь эффекта радиационного трения, определяемого $\gamma''(\omega)$, и электромагнитной массы электрона, определяемой дисперсионными соотношениями, указывает на принципиальную необходимость знать мнимую часть коэффициента радиационного трения во всем интервале частот.

2. Кроме того, флуктуационно-диссипационная теорема Калена–Велтона позволяет определить вклад $\gamma''(\omega)$ в лэмбовский сдвиг уровней, имеющий флуктуационную природу.

Пусть электрон находится в сферически-симметричном потенциальном поле $V(r) = m\Omega_n^2 r^2/2$ и подвергается воздействию флуктуаций электромагнитного вакуума. Тогда согласно флуктуационно-диссипационной теореме Калена–Велтона при нулевой температуре спектральная плотность флуктуаций проекции координаты определяется мнимой частью восприимчивости (19):

$$(x^2)_\omega = \hbar\chi''(\omega)\,\mathrm{sign}\,\omega = \frac{\hbar}{m}\,\frac{\omega^2\gamma''(\omega)\,\mathrm{sign}\,\omega}{(\omega^2-\Omega_n^2)^2+\omega^4\gamma''^2}\,.$$

Соответственно, полный квадрат флуктуаций координаты есть

$$\langle\delta x^2\rangle = \frac{\hbar}{\pi m}\int\limits_0^\infty d\omega\frac{\omega^2\gamma''(\omega)}{(\omega^2-\Omega_n^2)^2+\omega^4\gamma''^2}\,. \qquad (44)$$

По Велтону [26] лэмбовский сдвиг уровней определяется флуктуационной поправкой к потенциальной энергии, которую можно получить следующим образом. Будем считать, что на электрон в атоме водорода действует эффективный потенциал

$$V(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}), \qquad (45)$$

где $\mathbf{r}$ — среднее положение электрона, $\delta\mathbf{r}$ — его флуктуации, $V(\mathbf{r}) = -e^2/r$. Разложим величину (45) в ряд по флуктуациям положения электрона и усредним по невозмущенному состоянию вакуума. В силу изотропии имеем

$$\langle V(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})\rangle = V(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\,\Delta V(r)\langle\delta x^2\rangle + \ldots$$

Таким образом, флуктуационную поправку после перехода к безразмерным переменным можно записать в виде

$$\delta V = \frac{1}{2}\Delta V(r)\langle\delta x^2\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{a}4\pi\delta(\boldsymbol{\rho})\langle\delta\rho_x^2\rangle, \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{a}\,,$$

где a — боровский радиус.

В соответствии с теорий возмущений первая поправка к уровню n равна

$$\delta E_L = \langle n|\delta V|n\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{a}\langle\delta\rho_x^2\rangle 4\pi|\psi_n(0)|^2 = \\ = \frac{2\alpha^3}{n^3}\,\frac{e^2}{\lambda}\langle\delta\rho_x^2\rangle. \qquad (46)$$

Здесь не ставится цель точного расчета в силу тех приближений, которые мы сделали в этой работе. Поэтому при вычислении лэмбовского сдвига уровней (46) воспользуемся флуктуационно-диссипационной теоремой Калена–Велтона, рассматривая очень простую осцилляторную модель связанного состояния электрона в атоме водорода (44). С учетом выражения для мнимой части коэффициента радиационного трения (42) имеем

$$\delta E_L = \frac{2\alpha^4 mc^2}{\pi n^3}\int\limits_0^\infty d\omega\frac{\omega^2\gamma''(\omega)}{(\omega^2-\tilde\Omega_n^2)^2+\omega^4\gamma''^2} = \\ = \frac{4\alpha^5 mc^2}{3\pi n^3}\int\limits_0^\infty dx\frac{x\,(x+f(x))^2\cos\left(x/\sqrt{2}\,\right)}{\left[(x+f(x))^2-\tilde\Omega_n^2\right]^2}\,, \qquad (47)$$

где $\tilde\Omega_n = \Omega_n/\omega_0$ — характерная частота, пропорциональная α^2 и слабо зависящая от номера уровня n. Вычислим интеграл в (47) следующим образом. Разобьем область интегрирования на две части: от 0 до α и от α до бесконечности. Отметим, что в силу эффекта квантовой нелокальности исчезает расходимость интеграла (47) по верхнему пределу $x = \infty$. При этом вычисление высокочастотного вклада $\alpha < x < \infty$ оказывается достаточно точным, так как движение электрона в этой области можно считать свободным. Для этого интеграла имеем

$$\int\limits_\alpha^\infty dx\frac{x\cos\left(x/\sqrt{2}\,\right)}{(x+x\,\mathrm{arctg}(x)/2)^2} \approx 4.14.$$

Менее точными являются расчеты в низкочастотной области $0 < x < \alpha$, так как мы использовали осцилляторную модель связанного состояния и не приняли во внимание изменение коэффициента радиационного трения $\gamma(\omega)$ в случае связанного состояния электрона. В этом приближении согласно (47) получим

$$\int\limits_0^\alpha dx\frac{x(x+x^2/2)\cos\left(x/\sqrt{2}\,\right)}{\left((x+x^2/2)^2-\tilde\Omega_n^2\right)^2} = \\ = -\frac{1}{2} + \ln\alpha - \ln\tilde\Omega_n - \frac{\alpha}{2}.$$

В сумме оба слагаемых приводят к следующему результату для лэмбовского сдвига уровней (47):

$$\delta E_L = \frac{4\alpha^5 mc^2}{3\pi n^3}\left(2\ln\frac{1}{\alpha} + \ln 2 - 1.3\right) = 0.48mc^2.$$

Таким образом, вычисленная нами с учетом запаздывания взаимодействия важная диссипативная характеристика $\gamma''(\omega)$ определяет одновременно лэмбовский сдвиг уровней, собственную энергетическую часть, в частности, электромагнитную массу электрона.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен новый подход в квантовой электродинамике, свободный от расходимостей, характерных для традиционных методов квантовой теории поля. В последнее время ведутся интенсивные экспериментальные исследования лэмбовского сдвига уровней и других эффектов квантовой электродинамики. Развитые в работе новые методы и полученные результаты могут позволить выйти за рамки метода возмущений и сократить существенное отставание теории от эксперимента.

В работе доказано, что в локальной квантовой теории имеет место запаздывание взаимодействия между электроном Дирака и собственным полем излучения, равное по порядку величины времени прохождения светом комптоновской длины волны. Непосредственно эффект квантовой пространственно-временной нелокальности обусловлен как конечностью значения дисперсии приращения координаты, так и фазовым множителем, обусловленным некоммутативностью оператора координаты в различные моменты времени.

Таким образом, в работе строго показано, как происходит запаздывание взаимодействия между электроном Дирака и собственным полем излучения, что устраняет расходимости и снимает парадоксы, связанные с точечностью классического электрона. Решение парадокса века о самоускорении имеет принципиальное значение само по себе и в то же время может оказаться существенным для последующего развития теории. В конце работы установлена взаимосвязь между радиационным трением, конечным вкладом в электромагнитную массу электрона и лэмбовским сдвигом энергетических уровней.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Abraham, *Theorie der Elektrizität*, Bd. 2: *Elektromagnetische Theorie der Strahlung*, Teubner, Leipzig (1905); H. A. Lorentz, *Theory of Electrons*, 2nd edition (1915), reprinted by Dover, New York (1952).
2. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York (1975).
3. В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика*, Наука, Москва (1981).
4. G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell, Phys. Rev. Lett. **55**, 2273 (1985).
5. P. M. Barone and A. O. Caldeira, Phys. Rev. A **43**, 57 (1991).
6. V. Hakim and V. Ambegaokar, Phys. Rev. A **32**, 423 (1985).
7. M. Cetto and L. de la Pena, Phys. Rev. A **37**, 1952 (1988).
8. A. O. Barut and J. F. Van Huele, Phys. Rev. A **32**, 3187 (1985).
9. M. D. Crisp, Phys. Rev. A **72**, 3703 (1990).
10. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **110**, 510 (1998).
11. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ **110**, 1629 (1996).
12. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ **114**, 1661 (1998).
13. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
14. G. F. Efremov, M. A Novicov, and L. G. Mourokh, in *The Present Status of Quantum Theory of Light*, ed. by S. Jeffers and J. P. Vigier, Kluwer Academ. Publ. (1997), p. 97.
15. G. F. Efremov, M. A Novicov, and B. B. Ivanov, in *Causality and Locality in Modern Physics*, Kluwer Academ. Publ. (1996), p. 87.
16. Г. Ф. Ефремов, В. В. Шарков, *Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление*, вып. 25, Изд-во ННГУ, Н. Новгород (2002), с. 141.
17. Г. Ф. Ефремов, В. А. Казаков, Изв. ВУЗов, радиофизика **22**, 453 (1979).
18. Г. Ф. Ефремов, А. Ю. Смирнов, ЖЭТФ **80**, 1071 (1981).
19. Г. Ф. Ефремов, *Стохастические уравнения для открытых квантовых систем. Учебное пособие*, Изд-во ГГУ, Горький (1982).
20. J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).
21. R. Senitzky, Phys. Rev. **119**, 670 (1960); **124**, 642 (1961).
22. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ **55**, 2322 (1968).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976).
24. П. А. М. Дирак, *Принципы квантовой механики*, Физматгиз, Москва (1960).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
26. T. A. Welton, Phys. Rev. **74**, 1157 (1948).