ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 2, стр. 256–260

ЧЕТЫРЕХФОТОННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РАССЕЯНИИ

О. А. Иванова, М. В. Чехова [*]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119899, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 июня 2003 г.

Рассматриваются четырехфотонные корреляции для излучения на выходе параметрического усилителя с вакуумом на входе при произвольном коэффициенте параметрического преобразования. В литературе такие состояния интерпретируются как четырехфотонные. Показано, что корреляционная функция четвертого порядка для таких состояний в пределе малого числа фотонов имеет асимптотику, характерную для двухфотонных состояний. Тем не менее даже в «классическом» пределе больших интенсивностей уровень четырехфотонных корреляций, т. е. величина нормированной корреляционной функции четвертого порядка значительно выше, чем для когерентного и даже теплового полей.

PACS: 42.50.Ar, 42.50.Dv, 42.65.Lm

1. ВВЕДЕНИЕ

Большая часть экспериментов по квантовой оптике связана с получением различных видов неклассического света, т. е. света, свойства которого описываются лишь в рамках последовательного квантового подхода. Однако существует совсем немного видов неклассического света, которые на сегодняшний день можно приготовить экспериментально. Прежде всего это однофотонный свет, получаемый при однофотонных переходах в атомах [1], при люминесценции квантовых точек [2, 3], а также с помощью некоторых преобразований, проводимых над двухфотонным светом [4]. В свою очередь двухфотонный свет можно получить при двухфотонных переходах в атомах [5], но гораздо более эффективно — за счет спонтанного параметрического рассеяния [6]. В пределе большого числа фотонов двухфотонный свет переходит в сжатый свет, который тоже является неклассическим [7]. В последнее время появились работы по генерации двухфотонного света за счет гиперпараметрического рассеяния [8]. Следует также отметить, что как однофотонное, так и двухфотонное состояния света (относящиеся к классу фоковских состояний) генерируются во всех перечисленных случаях лишь в суперпозиции с вакуумным состоянием.

Получение других видов неклассического света, например, фоковских состояний более высокого порядка, интересно прежде всего с фундаментальной точки зрения. Применение таких состояний обсуждается в связи с проблемой квантовой информации [9], а также с идеей квантовой литографии [10], но эти задачи достаточно далеки от реализации. Попытки приготовить в эксперименте трехфотонные и четырехфотонные состояния в основном мотивируются так называемым парадоксом Гринбергера–Хорна–Цейлингера (ГХЦ) [11]. Парадокс возникает при попытке классически описать результаты интерференционного эксперимента над состоянием, которое имеет вид

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|++++\rangle + |----\rangle\right) \qquad (1)$$

(четырехфотонное состояние ГХЦ) или

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+++\rangle + |---\rangle\right) \qquad (2)$$

(трехфотонное состояние ГХЦ). Здесь символ $|++++\rangle$ обозначает состояние четырех фотонов с правой круговой поляризацией, символ $|----\rangle$ — состояние четырех фотонов с левой круговой поляризацией и т. д.

[*] E-mail: masha@qopt.phys.msu.su

В работах [12, 13] для получения состояния ГХЦ используются «четверки» фотонов, образующиеся за счет случайного наложения пар фотонов при параметрическом рассеянии. Один из фотонов служит «триггером», а оставшиеся три образуют состояние с поляризационной частью вида (2). Во многих работах получаемые таким образом «тройки» фотонов называются трехфотонными состояниями. Аналогично, «четверки», возникающие при случайном наложении пар фотонов, называются четырехфотонными состояниями [14]. В работе [14] утверждается, что такие «четверки» представляют собой четырехфотонные перепутанные (entangled) состояния. Приводятся результаты по наблюдению четырехфотонной интерференции, т. е. зависимости скорости счета четырехфотонных совпадений от фазы, вносимой между различными «четверками» фотонов (точнее, между импульсами накачки, генерирующими эти «четверки»). Следует отметить, что наличие интерференционной картины, наблюдаемой в четверных совпадениях фотоотсчетов, вполне объясняется интерференцией, наблюдаемой в двойных совпадениях и характерной для двухфотонного света.

Возникает вопрос: можно ли считать получаемые таким образом состояния «истинными четырехфотонными»? Очевидно, ответ зависит от задачи, для которой приготавливаются четырехфотонные состояния. Так, например, для реализации условий трехфотонного парадокса ГХЦ описанный способ подходит, так как он дает возможность получить поляризационное состояние (2). Если ставится задача наблюдения четырехфотонной интерференции, параметрическое рассеяние, видимо, не подходит для ее решения [14]. Наконец, интерес представляет характер четырехфотонных корреляций, т. е. совокупность корреляционных функций четвертого порядка по интенсивности или, говоря языком экспериментатора, число четверных совпадений фотоотсчетов.

Именно с этой точки зрения в работе анализируется параметрическое рассеяние света. Поскольку в работе [14] подчеркивается, что параметрическое рассеяние носит вынужденный характер, рассмотрим случай произвольного коэффициента параметрического усиления. Тем самым, неприменимой оказывается теория возмущений, обычно используемая для описания многофотонных корреляций.

При описании параметрического рассеяния можно выделить три случая, которые оказываются различными с точки зрения статистики фотонов. Это случаи одномодового (коллинеарного и частотно-вырожденного) режима, двухмодового (невырожденного по частоте, углу рассеяния или поляризации) и четырехмодового (при котором, например, рассеянное излучение занимает две частотные и две поляризационные моды). Этот последний режим и использовался в работе [14], именно он приводит к генерации двухфотонных белловских состояний, т. е. состояний вида

$$\begin{aligned}\Phi^{\pm} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H_1H_2\rangle \pm |V_1V_2\rangle\right),\\ \Psi^{\pm} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H_1V_2\rangle \pm |V_1H_2\rangle\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь символы H и V обозначают состояния фотона с горизонтальной и вертикальной поляризацией, соответственно, а индекс 1, 2 нумерует частотные (или пространственные) моды.

2. ОДНОМОДОВЫЙ РЕЖИМ

В этом случае гамильтониан параметрического взаимодействия имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\, i\hbar\Gamma\left(a^{\dagger 2} - a^2\right), \tag{4}$$

где Γ — коэффициент параметрического усиления, $a^{\dagger}$ и a — операторы рождения и уничтожения фотонов. В первом порядке теории возмущений вектор состояния поля, излучаемого при параметрическом рассеянии, представляет собой суперпозицию вакуумного и двухфотонного состояний:

$$|\psi\rangle = C_0|0\rangle + C_1|2\rangle. \tag{5}$$

Однако точное решение дает вектор состояния, содержащий, кроме двухфотонного, также четырехфотонные состояния, шестифотонные и т. д.:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle = C_0|0\rangle + C_1|2\rangle + C_2|4\rangle + C_3|6\rangle + \ldots &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} C_n|2n\rangle.\end{aligned} \tag{6}$$

В качестве характеристики числа «четверок фотонов» целесообразно рассмотреть корреляционную функцию четвертого порядка

$$g^{(4)} = \frac{\langle a^{\dagger 4}a^4\rangle}{\langle a^{\dagger}a\rangle^4}. \tag{7}$$

Она измеряется по числу совпадений фотоотсчетов четырех детекторов в эксперименте, аналогичном

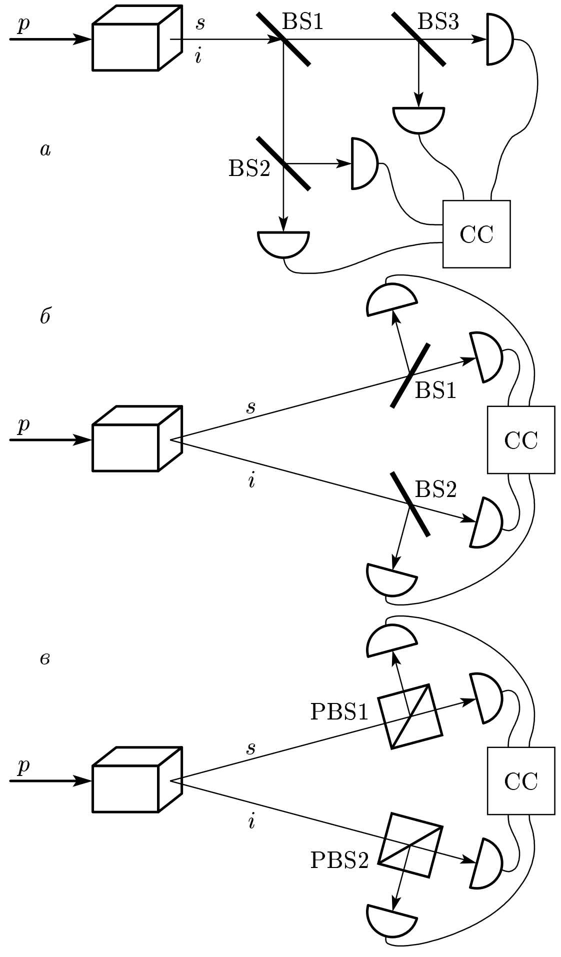

Схема эксперимента по измерению $g^{(4)}$ для излучения на выходе параметрического преобразователя. На входе в нелинейный кристалл — только излучение накачки (p), в сигнальной (s) и холостой (i) модах — вакуум. a — Одномодовый режим: сигнальный и холостой фотоны относятся к одной пространственной и частотной моде. Для измерения корреляционной функции четвертого порядка используются три неполяризационных светоделителя BS1, BS2, BS3, четыре фотодетектора и схема четверных совпадений фотоотсчетов CC. $б$ — Двухмодовый режим: сигнальный и холостой фотоны относятся к разным модам, в данном случае — пространственным. Для измерения корреляционной функции четвертого порядка используются два неполяризационных светоделителя BS1, BS2, четыре фотодетектора и схема четверных совпадений фотоотсчетов CC. $в$ — Режим генерации белловских состояний. Сигнальный и холостой фотоны излучаются в две пространственные и две поляризационные моды. Для измерения корреляционной функции четвертого порядка используются два поляризационных светоделителя PBS1, PBS2, четыре фотодетектора и схема четверных совпадений фотоотсчетов CC

эксперименту Брауна–Твисса (рис. a), с нормировкой на произведение средних интенсивностей, регистрируемых детекторами. Нормированная корреляционная функция четвертого порядка характеризует эффективность излучения при регистрации четырехфотонных эффектов [15]. Например, для когерентного излучения $g^{(4)} = 1$, для теплового (гауссова) излучения $g^{(4)} = 4! = 24$. В контексте этой работы представляет интерес величина $g^{(4)}$ для четырехфотонного излучения (в суперпозиции с вакуумом), которое можно было бы получить в процессе параметрического распада фотонов накачки на «четверки» фотонов. Вектор состояния для такого излучения имеет вид

$$|\Psi\rangle = C_0|0\rangle + C_1|4\rangle.$$

Для такого состояния корреляционная функция четвертого порядка равна

$$g^{(4)} = \frac{6}{N^3}\,, \tag{8}$$

где $N \equiv \langle a^\dagger a\rangle$ — среднее число фотонов.

Обратимся теперь к состоянию, генерируемому при параметрическом рассеянии с гамильтонианом (4). В рамках подхода Гейзенберга корреляционные функции могут быть найдены точно для любого коэффициента параметрического усиления Γ. Записывая уравнения Гейзенберга для операторов рождения и уничтожения, получим решение в виде

$$a(t) = a_0 \operatorname{ch}(\Gamma t) + a_0^\dagger \operatorname{sh}(\Gamma t)$$

и аналогично для оператора рождения. Здесь $a_0^\dagger$, a_0 — операторы рождения и уничтожения в момент времени $t = 0$ (или без учета параметрического взаимодействия). Корреляционная функция четвертого порядка определяется выражением (7), где $a^\dagger \equiv a^\dagger(t)$, $a \equiv a(t)$, а усреднение проводится по вакуумному состоянию. Аналогично можно найти корреляционную функцию второго порядка. В результате получим

$$g_a^4(t) = 24 + 72 \operatorname{cth}^2(\Gamma t) + 9 \operatorname{cth}^4(\Gamma t), \tag{9}$$

$$g_a^{(2)}(t) = 2 + \operatorname{cth}^2(\Gamma t). \tag{10}$$

При этом среднее число фотонов равно $N = \operatorname{sh}^2(\Gamma t)$. Видно, что корреляционные функции как четвертого, так и второго порядка неограниченно растут при малых коэффициентах параметрического преобразования:

$$g_a^{(4)}(t) \propto \frac{9}{(\Gamma t)^4} \propto \frac{9}{N^2}, \quad g_a^{(2)}(t) \propto \frac{1}{(\Gamma t)^2} \propto \frac{1}{N}$$

при $\Gamma t \to 0$.

Такая асимптотика говорит лишь о парной корреляции фотонов: четырехфотонные состояния в соответствии с (8) должны давать более быстрый рост $g^{(4)}$ при малых N. Асимптотика при больших коэффициентах параметрического преобразования ($\Gamma t \gg 1$) дает $g_a^{(4)} \to 105$, $g_a^{(2)} \to 3$. Таким образом, в пределе больших коэффициентов усиления на выходе вырожденного параметрического усилителя должно наблюдаться излучение с суперпуассоновской и даже супергауссовой статистикой.

Статистика излучения на выходе вырожденного параметрического усилителя с вакуумом на входе рассматривалась ранее в работе [16], где были получены в общем виде корреляционные функции всех порядков, в том числе и результаты (9), (10).

3. ДВУХМОДОВЫЙ РЕЖИМ

Рассмотрим теперь параметрическое рассеяние в невырожденном (двухмодовом) случае. Этот случай реализуется либо при коллинеарном частотно-невырожденном параметрическом рассеянии, либо при неколлинеарном частотно-вырожденном параметрическом рассеянии, либо при параметрическом рассеянии типа II в коллинеарном частотно-вырожденном режиме. Соответственно, фотоны одной пары принадлежат двум различным модам — частотным, пространственным или поляризационным. Обозначим операторы рождения и уничтожения в этих модах $a^\dagger$, a и $b^\dagger$, b. Тогда гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_{ab} = i\hbar\Gamma\left(a^\dagger b^\dagger - ab\right). \tag{11}$$

Решая уравнения Гейзенберга, получим

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \operatorname{ch}(\Gamma t) + b_0^\dagger \operatorname{sh}(\Gamma t), \\ b(t) &= b_0 \operatorname{ch}(\Gamma t) + a_0^\dagger \operatorname{sh}(\Gamma t). \end{aligned} \tag{12}$$

Точные выражения для корреляционных функций четвертого и второго порядков имеют вид

$$\begin{aligned} g_{ab}^{(4)}(t) \equiv \frac{\langle (a^\dagger)^2 (b^\dagger)^2 a^2 b^2\rangle}{\langle a^\dagger a\rangle^2 \langle b^\dagger b\rangle^2} = \\ = 4 + 16\operatorname{cth}^2(\Gamma t) + 4\operatorname{cth}^4(\Gamma t), \end{aligned} \tag{13}$$

$$g_{ab}^{(2)}(t) = \frac{\langle a^\dagger b^\dagger ab\rangle}{\langle a^\dagger a\rangle\langle b^\dagger b\rangle} = 1 + \operatorname{cth}^2(\Gamma t) \tag{14}$$

(схема измерения $g_{ab}^{(4)}$ показана на рис. *б*). Видно, что и в этом случае асимптотика корреляционных функций при малых коэффициентах параметрического усиления носит «двухфотонный» характер, т. е. $g_{ab}^{(4)}$ имеет порядок $1/N^2$, а $g_{ab}^{(2)}(t)$ — порядок $1/N$. При больших коэффициентах параметрического усиления получим $g_{ab}^{(4)} \to 24$, $g_{ab}^{(2)} \to 2$. Такая статистика была бы у теплового излучения, однако следует принять во внимание, что в данном случае идет речь о двух различных модах a, b. Поэтому и в двухмодовом случае статистику можно назвать супергауссовой.

4. РЕЖИМ ГЕНЕРАЦИИ БЕЛЛОВСКИХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим теперь режим параметрического рассеяния, использовавшийся в работе [14] и приводящий в пределе малого коэффициента параметрического преобразования к генерации в суперпозиции с вакуумом одного из белловских состояний (3), а именно, состояния Ψ^-. Как и выше, будем рассматривать случай произвольного коэффициента параметрического преобразования.

Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_{a_H b_V} = i\hbar\Gamma\left(a_H^\dagger b_V^\dagger - a_V^\dagger b_H^\dagger\right) + \text{H.c.} \tag{15}$$

Здесь, по-прежнему, $a^\dagger$, $b^\dagger$ — операторы рождения в двух модах, которые могут быть частотными или пространственными, а индексы H, V обозначают, соответственно, вертикальную и горизонтальную поляризацию.

Решение для операторов рождения и уничтожения в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} a_H(t) &= a_{H0}\operatorname{ch}(\Gamma t) + b_{V0}^\dagger \operatorname{sh}(\Gamma t), \\ b_V(t) &= b_{V0}\operatorname{ch}(\Gamma t) - a_{H0}^\dagger \operatorname{sh}(\Gamma t), \\ a_V(t) &= a_{V0}\operatorname{ch}(\Gamma t) - b_{H0}^\dagger \operatorname{sh}(\Gamma t), \\ b_H(t) &= b_{H0}\operatorname{ch}(\Gamma t) + a_{V0}^\dagger \operatorname{sh}(\Gamma t). \end{aligned} \tag{16}$$

Для корреляционных функций четвертого и второго порядков получим

$$\begin{aligned} & g_{a_H b_V a_V b_H}^{(4)}(t) = \\ & = \frac{\langle a_H^\dagger b_V^\dagger a_V^\dagger b_H^\dagger a_H b_V a_V b_H\rangle}{\langle a_H^\dagger a_H\rangle\langle b_V^\dagger b_V\rangle\langle a_V^\dagger a_V\rangle\langle b_H^\dagger b_H\rangle} = \\ & = 1 + 2\operatorname{cth}^2(\Gamma t) + \operatorname{cth}^4(\Gamma t), \\ & g_{a_H b_V}(t) = \frac{\langle a_H^\dagger b_V^\dagger a_H b_V\rangle}{\langle a_H^\dagger a_H\rangle\langle b_V^\dagger b_V\rangle} = 1 + \operatorname{cth}^2(\Gamma t). \end{aligned} \tag{17}$$

Видно, что статистика в этом случае характеризуется еще меньшей величиной четырехфотонных корреляций, чем в двухмодовом случае, но все же является супергауссовой: $g^{(4)}_{a_H b_V} \to 4$, $g^{(2)}_{a_H b_V} \to 2$ при $\Gamma t \to 0$. Схема измерения соответствующей корреляционной функции четвертого порядка показана на рис. *в*.

Можно рассмотреть также случай, когда в таком же режиме параметрического рассеяния (рис. *в*) измеряется момент четвертого порядка:

$$g^{(4)}_{a_H b_V a_H b_V}(t) = \frac{\langle a_H^{\dagger 2} b_V^{\dagger 2} a_H^2 b_V^2 \rangle}{\langle a_H^\dagger a_H \rangle^2 \langle b_V^\dagger b_V \rangle^2} .$$

Эта корреляционная функция равна $4 + 16\,\mathrm{cth}^2(\Gamma t) + 4\,\mathrm{cth}^4(\Gamma t)$ как и в двухмодовом случае.

Таким образом, состояние, генерируемое при параметрическом рассеянии, характеризуется значительно более слабыми четырехфотонными корреляциями, чем «истинное четырехфотонное состояние», которое можно было бы получить, например, за счет распада фотонов накачки на четверки фотонов в среде с нелинейностью четвертого порядка (разумеется, вероятность такого процесса чрезвычайно мала). Тем не менее четырехфотонные корреляции для этого состояния даже в пределе больших коэффициентов параметрического усиления значительно сильнее, чем для классических источников с пуассоновской или гауссовой статистикой. В этом смысле наиболее сильные корреляции должны наблюдаться для вырожденного режима параметрического рассеяния.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-16664), программы поддержки научных школ (НШ-166.2003.02), а также программы INTAS (грант № 01-2122).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977).
2. E. Moreau, I. Robert, L. Manin, V. Thierry-Mieg, J.-M. Gerard, and I. Abram, Phys. Rev. Lett. **87**, 183601 (2001).
3. A. Kiraz, S. Falth, C. Becher, B. Gayral, W. V. Schoenfeld, P. M. Petroff, L. Zhang, E. Hu, and A. Imamoglu, Phys. Rev. B **65**, 161303 (2002).
4. J. G. Rarity, P. R. Tapster, and E. Jakeman, Opt. Comm. **62**, 201 (1987).
5. C. A. Kocher and E. D. Commins, Phys. Rev. Lett. **18**, 575 (1967).
6. Д. Н. Клышко, Письма в ЖЭТФ **6**, 490 (1967).
7. Д. Н. Клышко, УФН **166**, 613 (1996).
8. P. Kumar, X. Li, M. Fiorentino, P. L. Voss, J. E. Sharping, and G. A. Barbosa, E-print archives, quant-phys/0209112; IEEE Photon. Tech. Lett. **14**, 983 (2002).
9. В сб. *Физика квантовой информации*, под ред. Д. Боумейстера, А. Экерта, А. Цейлингера, Постмаркет, Москва (2002).
10. A. N. Boto, P. Kok, D. S. Abrams, S. L. Braunstein, C. P. Williams, and J. P. Dowling, Phys. Rev. Lett. **85**, 2733 (2000).
11. D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, Amer. J. Phys. **58**, 1131 (1990).
12. J.-W. Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Nature **403**, 515 (2000).
13. J.-W. Pan, M. Daniell, S. Gasparoni, G. Weihs, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **86**, 4435 (2001).
14. A. Lamas-Linares, J. C. Howell, and D. Bouwmeester, Nature **412**, 887 (2001).
15. R. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529(1963).
16. J. Jansky and Y. Yushin, Phys. Rev. A **36**, 1288 (1987).