ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 2, стр. 345–355

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА ПРИ УЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

В. П. Макаров*, А. А. Рухадзе

Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 июля 2003 г.

Вычислены продольная $\varepsilon^l(\omega,k)$ и поперечная $\varepsilon^{tr}(\omega,k)$ диэлектрические проницаемости одноатомного газа. Определены области частот, в которых имеют физический смысл диэлектрическая $\varepsilon(\omega)$ и магнитная $\mu(\omega)$ проницаемости газа без учета пространственной дисперсии. Найдены предельное значение магнитной восприимчивости $\chi(\omega)$ при $\omega = 0$ и статическая магнитная восприимчивость. Обсуждается возможность распространения в одноатомном газе электромагнитной волны, групповая и фазовая скорости которой антипараллельны.

PACS: 42.25.Bs

1. ВВЕДЕНИЕ

Нахождение тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$ [1–3] сводится к вычислению плотности электрического тока, индуцируемого в среде электромагнитным полем $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Sp}\left(\hat{W}\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)\right)/\,\mathrm{Sp}\,\hat{W}, \tag{1.1}$$

где $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ — оператор плотности электрического тока, а $\hat{W}$ — матрица плотности, удовлетворяющая уравнению [4, § 6]

$$\hat{W} = -i\left[\hat{H},\hat{W}\right], \tag{1.2}$$

в котором $\hat{H}$ — полный гамильтониан[1] системы «среда + электромагнитное поле» при учете энергии взаимодействия $\hat{U}$ между ними.

Обозначим через α (или β) полный набор квантовых чисел, характеризующих стационарные состояния среды в отсутствие поля; соответствующие уровни энергии обозначим через E_α (или E_β). Решение уравнения (1.2) в линейном приближении по $\hat{U}$ в этих обозначениях имеет следующий вид:

$$W_{\alpha\beta}(t) = W_\alpha^{(0)}\delta_{\alpha\beta} + \left(W_\alpha^{(0)} - W_\beta^{(0)}\right)\times \int \frac{U_{\alpha\beta}(\omega)}{\omega_{\alpha\beta}-\omega}e^{-i\omega t}d\omega, \tag{1.3}$$

где $\omega_{\alpha\beta} = E_\alpha - E_\beta$, $W_{\alpha\beta}^{(0)} = W_\alpha^{(0)}\delta_{\alpha\beta}$ — матрица плотности среды в отсутствие поля, $U_{\alpha\beta}(\omega)$ — фурье-компонента матричного элемента $U_{\alpha\beta}(t)$. Полагаем, что в отсутствие поля среда находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре T. Тогда [4, § 31]

$$W_\alpha^{(0)} = e^{(F-E_\alpha)/T}, \quad \mathrm{Sp}\,\hat{W}^{(0)} = \sum_\alpha W_\alpha^{(0)} = 1, \tag{1.4}$$

где F — свободная энергия среды[2]. Из (1.3), (1.4) видно, что $\mathrm{Sp}\,\hat{W} = 1$.

Оператор $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ плотности тока состоит из двух частей:

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{j}}^{(0)}(\mathbf{r}) + \delta\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t), \tag{1.5}$$

где $\hat{\mathbf{j}}^{(0)}(\mathbf{r})$ — оператор плотности тока в отсутствие поля (не зависит от времени), а оператор $\delta\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ пропорционален полю. Подставив (1.3) и (1.5) в (1.1), получим для фурье-компонент плотности тока в ли-

*E-mail: asam@ran.gpi.ru

[1] Используется система единиц, в которой $\hbar = 1$.

[2] Температура измеряется в энергетических единицах.

нейном по полю приближении следующее выражение:

$$\mathbf{j}(\omega,\mathbf{k}) = \sum_\alpha W_\alpha^{(0)} \left[\delta\mathbf{j}_{\alpha\alpha}(\omega,\mathbf{k}) - \right.$$
$$\left. - \sum_\beta \left(\frac{U_{\alpha\beta}(\omega)\mathbf{j}^{(0)}_{\beta\alpha}(\mathbf{k})}{\omega_{\beta\alpha}+\omega} + \frac{\mathbf{j}^{(0)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})U_{\beta\alpha}(\omega)}{\omega_{\beta\alpha}-\omega} \right) \right]. \quad (1.6)$$

Из (1.6) находится тензор диэлектрической проницаемости среды [1, § 2; 2, § 12; 3, § 31][3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k}), \\ j_i(\omega,\mathbf{k}) &= \sigma_{ij}(\omega,\mathbf{k})E_j(\omega,\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Тензор диэлектрической проницаемости для изотропной негиротропной среды из соображений симметрии записывается в виде [1, § 2; 2, § 1; 3, § 28]

$$\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon^{tr}(\omega,k)\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right) + \varepsilon^l(\omega,k)\frac{k_ik_j}{k^2}, \quad (1.8)$$

где $\varepsilon^l(\omega,k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega,k)$ — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости.

Скалярный потенциал электромагнитного поля будем полагать равным нулю. Тогда фурье-компоненты полей $\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})$, $\mathbf{B}(\omega,\mathbf{k})$ и векторного потенциала $\mathbf{A}(\omega,\mathbf{k})$ связаны соотношениями [2, § 12]

$$\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k}) = \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}(\omega,\mathbf{k}), \quad \mathbf{B}(\omega,\mathbf{k}) = i\mathbf{k}\times\mathbf{A}(\omega,\mathbf{k}). \quad (1.9)$$

2. ПРОДОЛЬНАЯ И ПОПЕРЕЧНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Если среда — идеальный газ, то, чтобы найти ток $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, достаточно найти ток, создаваемый одной молекулой: умножив его на полное число молекул NV (N — число молекул в единице объема, V — объем газа), получим выражение для $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ в газе.

Обозначим через $\mathbf{R}_\alpha$ координаты Z электронов ($a = 1, 2, \ldots, Z$) и через $\mathbf{R}_n$ координаты ядра атома в лабораторной системе отсчета, в которой задано поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Энергия взаимодействия атома с полем в линейном по полю приближении, если пренебречь в ней членами порядка m/M_n, где m — масса электрона и M_n — масса ядра, имеет вид [5, § 113]

$$\hat{U} = \mu_B \sum_a \left[\hat{\mathbf{P}}_a \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}_a,t) + \right.$$
$$\left. + \mathbf{A}(\mathbf{R}_a,t)\cdot\hat{\mathbf{P}}_a + 2\hat{\mathbf{s}}_a\cdot\mathbf{B}(\mathbf{R}_a,t) \right], \quad (2.1)$$

где $\mu_B = e/2mc$ — магнетон Бора, $\hat{\mathbf{P}}_a = -i\partial/\partial\mathbf{R}_a$ и $\hat{\mathbf{s}}_a$ — операторы импульса и спина электронов.

Выражение для оператора плотности тока имеет вид

$$\frac{\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)}{NV} = -\frac{e}{2m}\sum_a \left[\delta(\mathbf{R}_a - \mathbf{r}) \left(\hat{\mathbf{P}}_a + 2i\hat{\mathbf{P}}_a \times \hat{\mathbf{s}}_a \right) + \right.$$
$$\left. + \left(\hat{\mathbf{P}}_a - 2i\hat{\mathbf{P}}_a\times\hat{\mathbf{s}}_a \right)\delta(\mathbf{R}_a - \mathbf{r}) \right] -$$
$$- \frac{e^2}{2mc}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\sum_a \delta(\mathbf{R}_a - \mathbf{r}) \quad (2.2)$$

и только учетом спинов отличается от известного выражения для плотности тока [1, § 31; 2, § 12; 6, § 24].

Для вычисления матричных элементов, входящих в (1.6), следует от координат $\mathbf{R}_a$ и $\mathbf{R}_n$ перейти к координатам электронов относительно ядра, $\mathbf{r}_a$, и координатам центра масс атома, $\mathbf{R}$ [7, §§ 13, 40]:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a - \mathbf{R}_n, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M}\left(m\sum_a \mathbf{R}_a + M_n\mathbf{R}_n \right), \quad (2.3)$$

где $M = Zm + M_n$ — масса атома.

Полный набор квантовых чисел и энергия атома представляются в виде

$$\alpha = \{\mathbf{P}, J, M, n\}, \quad E_\alpha = \frac{1}{2M}P^2 + E_{Jn}. \quad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{P}$ — импульс центра масс атома, J — момент импульса ($J = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$), $M = J, J-1, \ldots, -J$ — проекция момента на ось z и E_{Jn} — энергия атома в системе отсчета, относительно которой $\mathbf{P} = 0$; число n нумерует состояния атома с одинаковыми J и M, но с различными значениями энергии.

Простые вычисления приводят к следующим выражениям для матричных элементов фурье-компонент операторов (2.1) и (2.2):

[3] По дважды повторяющимся индексам $i, j, \ldots = x, y, z$ везде подразумевается суммирование.

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{P}' J' M' n' | \hat{U}(\omega) | \mathbf{P} J M n \rangle = -\frac{ie}{m\omega} \frac{(2\pi)^3}{V} \times \\
&\times \mathbf{E}(\omega, \mathbf{P}' - \mathbf{P}) \langle J' M' n' | \hat{P}(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) | J M n \rangle, \\
&\langle \mathbf{P}' J' M' n' | \hat{\mathbf{j}}^{(0)}(\mathbf{k}) | \mathbf{P} J M n \rangle = \\
&= -\frac{eNV}{m(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{P}', \mathbf{P}-\mathbf{k}} \langle J' M' n' | \hat{\mathbf{P}}(-\mathbf{k}) | J M n \rangle, \\
&\langle \mathbf{P}' J' M' n' | \delta\hat{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{k}) | \mathbf{P} J M n \rangle = \\
&= \frac{ie^2 N}{m\omega} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k} - \mathbf{P} + \mathbf{P}') \times \\
&\times \langle J' M' n' | \sum_a \exp\left[i(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \cdot \mathbf{r}_a\right] | J M n \rangle.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Мы ввели операторы[4)] $\hat{\mathbf{p}}_a = -i\partial/\partial \mathbf{r}_a$ и

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}) = \sum_a \left\{ \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{p}}_a \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) + \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) \hat{\mathbf{p}}_a \right] + i\hat{\mathbf{s}}_a \times \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a) \right\}. \tag{2.6}$$

Условие нормировки (1.4) при учете (2.4) после перехода от суммирования к интегрированию по $\mathbf{P}$ принимает вид

$$V \left(\frac{MT}{2\pi} \right)^{3/2} \sum_{Jn} (2J+1) \exp\left(\frac{F - E_{Jn}}{T} \right) = 1. \tag{2.7}$$

Используя формулы (2.4)–(2.7), находим ток $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})$ (см. (1.6)), а затем тензор диэлектрической проницаемости (см. (1.7)):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \delta_{ij} - \frac{4\pi e^2 NV}{m^2 \omega^2} \left(\frac{MT}{2\pi} \right)^{3/2} \times \\
\times \sum_{Jn} \exp\left(\frac{F - E_{Jn}}{T} \right) \times \\
\times \sum_{J'n'} A^{ij}_{J'n', Jn}(\mathbf{k}) \Phi_{J'n', Jn}(\omega, k; T).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_e / m}$ — плазменная частота атомных электронов ($N_e = ZN$),

$$\begin{aligned}
&\Phi_{J'n', Jn}(\omega, k; T) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\, k\bar{v}} \left[\frac{F(z^{(+)}_{J'n', Jn})}{z^{(+)}_{J'n', Jn}} - \frac{F(z^{(-)}_{J'n', Jn})}{z^{(-)}_{J'n', Jn}} \right], \\
&z^{(\pm)}_{J'n', Jn} = \frac{\omega \pm (\omega_{J'n', Jn} + k^2/2M)}{\sqrt{2}\, k\bar{v}},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$\bar{v} = \sqrt{T/M}$ — средняя тепловая скорость атомов,

$$F(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{t - z}\, dt, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
A^{ij}_{J'n', Jn}(\mathbf{k}) = \sum_{MM'} \langle JMn | \hat{P}_i(-\mathbf{k}) | J' M' n' \rangle \times \\
\times \langle J' M' n' | \hat{P}_j(\mathbf{k}) | JMn \rangle = A^{ji}_{J'n', Jn}(-\mathbf{k}).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Последнее равенство в (2.11) легко получить, если учесть, что при обращении времени [5, § 60]

$$|JMn\rangle \to (-1)^{J-M} |J, -M, n\rangle, \quad \mathbf{r}_a \to \mathbf{r}_a,$$

$$\hat{\mathbf{p}}_a \to -\hat{\mathbf{p}}_a, \quad \hat{\mathbf{s}}_a \to -\hat{\mathbf{s}}_a.$$

Исходя из того, что состояния $|JMn\rangle$ с различными M преобразуются по неприводимому представлению $D^{(J)}$ группы вращений и все состояния $|JMn\rangle$ (независимо от M) — либо четные, либо нечетные, нетрудно показать, что (при данных J и n) величины $A^{ij}_{J'n', Jn}(\mathbf{k})$ преобразуются по представлению $D^{(0)} + D^{(2)}$ группы вращений. Следовательно, они могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
A^{ij}_{J'n', Jn}(\mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) A^{tr}_{J'n', Jn}(k) + \\
+ \frac{k_i k_j}{k^2} A^{l}_{J'n', Jn}(k).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Наконец, из равенства $\hat{\mathbf{P}}^{(+)}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{P}}(-\mathbf{k})$ следует, что величины $A^{l,tr}_{J'n', Jn}(k)$ — вещественные. Они могут быть вычислены, например, по формулам:

$$\begin{aligned}
A^{l}_{J'n', Jn}(k) = A^{zz}_{J'n', Jn}(k\mathbf{e}_z), \\
A^{tr}_{J'n', Jn}(k) = A^{zz}_{J'n', Jn}(k\mathbf{e}_x),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где $\mathbf{e}_i$ — единичные векторы вдоль координатных осей.

Подстановка (2.12) приводит тензор диэлектрической проницаемости (2.8), как и должно быть, к виду (1.8), где продольная и поперечная диэлектрические проницаемости определяются по формуле

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{l,tr}(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi e^2 NV}{m^2 \omega^2} \left(\frac{MT}{2\pi} \right)^{3/2} \times \\
\times \sum_{Jn} \exp\left(\frac{F - E_{Jn}}{T} \right) \times \\
\times \sum_{J'n'} \Phi_{J'n', Jn}(\omega, k; T) A^{l,tr}_{J'n', Jn}(k).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Интеграл в (2.10) при вещественном z не имеет смысла. Полагаем в (2.14) (и далее) $\omega > 0$, считаем,

[4)] Строго говоря, к оператору $\hat{\mathbf{p}}_a$ следует добавить слагаемое, связанное со спин-орбитальным взаимодействием [6, §§ 55, 59]; заметим, что в формуле (55,7) в [6] опущен знак «минус» в правой части, а в формуле (59,12) m^2 нужно заменить на m.

что поле, пропорциональное $\exp(-i\omega t)$, адиабатически включается при $t \to -\infty$, и делаем соответствующую подстановку $\omega \to \omega + i\delta$, где $\delta \to +0$ [1, § 11; 3, § 29; 5, § 42]. В теории плазмы это правило обхода полюса в интегралах вида (2.10) называется правилом обхода Ландау [3, § 29].

В дальнейшем нам потребуются предельные выражения для функции $F(z)$, $z = z' + iz''$, $z'' > 0$ [1, § 12; 3, § 31]:

$$F(z) \approx \\ \approx \begin{cases} i\sqrt{\pi}\, z - 2z^2, & |z| \ll 1, \\ -1 - \dfrac{1}{2z^2} + i\sqrt{\pi}\, z e^{-z^2}, & |z| \gg 1, \\ & |z'| \gg z''. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Будем далее полагать, что поле — не очень коротковолновое: если боровский радиус $a_B = 1/me^2$ — величина порядка «радиуса» атома, то $ka_B \ll 1$. Тогда матричные элементы в (2.11) можно разложить в ряды по степеням малого параметра ka_B. Ограничиваясь членами второго порядка малости, запишем оператор (2.6) в виде

$$\hat{P}_i(\mathbf{k}) = \hat{p}_i + \frac{i}{2}\left[\left(\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{S}}\right) \times \mathbf{k}\right]_i + \\ + ik_j \hat{B}_{ij} - k_j k_k \hat{C}_{i,jk}, \qquad (2.16)$$

где

$$\hat{\mathbf{p}} = \sum_a \hat{\mathbf{p}}_a, \quad \hat{\mathbf{S}} = \sum_a \hat{\mathbf{s}}_a, \quad \hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{L}}, \\ \hat{\mathbf{L}} = \sum_a \hat{\mathbf{l}}_a, \quad \hat{\mathbf{l}}_a = \mathbf{r}_a \times \hat{\mathbf{p}}_a,$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_a \left(\hat{p}_{ai} r_{aj} + r_{ai}\hat{p}_{aj}\right) = \hat{B}_{ji}, \\ \hat{C}_{i,jk} &= \frac{1}{4}\sum_a \left(\hat{p}_{ai} r_{aj} r_{ak} + r_{aj} r_{ak} \hat{p}_{ai} - \right. \\ &\quad \left. - 4e_{ijl} r_{ak} \hat{s}_{al}\right) = \\ &= \delta_{ik}\hat{C}_j^{(1)} - \delta_{jk}\left[\hat{C}_i^{(1)} - \hat{C}_i^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 3\delta_{jz}\delta_{kz})\hat{C}_i^{(3)}\right] + \hat{\tilde{C}}_{i,jk}, \\ \hat{\mathbf{C}}^{(1)} &= \frac{1}{2}\sum_a \mathbf{r}_a \times \hat{\mathbf{s}}_a, \\ \hat{\mathbf{C}}^{(2)} &= \frac{1}{12}\sum_a \left(\hat{\mathbf{p}}_a r_a^2 + r_a^2 \hat{\mathbf{p}}_a\right), \\ \hat{\mathbf{C}}^{(3)} &= \frac{1}{20}\sum_a \left[\mathbf{r}_a(\mathbf{r}_a \cdot \hat{\mathbf{p}}_a) + (\hat{\mathbf{p}}_a \cdot \mathbf{r}_a)\mathbf{r}_a - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3}(r_a^2 \hat{\mathbf{p}}_a + \hat{\mathbf{p}}_a r_a^2)\right], \end{aligned} \qquad (2.17)$$

а величины $\hat{\tilde{C}}_{i,jk}$ преобразуются по представлению $D^{(3)} + 2D^{(2)} + D^{(0)}$ и с принятой степенью точности (порядка $(ka_B)^2$) не дают вклада в $A^{l,tr}_{J'n',Jn}(k)$. Заметим, что

$$\hat{\mathbf{p}} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{r} = \sum_a \mathbf{r}_a = -\frac{\mathbf{d}}{e},$$

$$\hat{B}_{ij} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}R_{ij}, \\ R_{ij} = \sum_a r_{ai} r_{aj} = \frac{1}{3}\delta_{ij}R_{kk} - \frac{1}{3e}Q_{ij}, \qquad (2.18)$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный и Q_{ij} — квадрупольный электрические моменты атома [5, § 75].

Матричные элементы операторов (2.16)–(2.18) удобно вычислять, вводя соответствующие сферические тензоры и используя теорему Вигнера–Эккарта и известные свойства $3j$-символов [5, §§ 106, 107]. В результате получаем

$$\begin{aligned} &A^{l,tr}_{J'n',Jn}(k) = A^{l,tr(d)}_{J'n',Jn}(k) + A^{l,tr(m)}_{J'n',Jn}(k) + \\ &+ A^{l,tr(q)}_{J'n',Jn}(k) + A^{l,tr(s)}_{J'n',Jn}(k), \\ &A^{l,tr(d)}_{J'n',Jn}(k) = \frac{m^2\omega^2_{J'n',Jn}}{3e^2}\left|\langle Jn \parallel d \parallel J'n'\rangle\right|^2 + \\ &+ \frac{2}{3}k^2\,\mathrm{Re}\langle Jn \parallel p \parallel J'n'\rangle\langle J'n' \parallel C^{l,tr} \parallel Jn\rangle, \\ &\hat{\mathbf{C}}^l = -\left(\hat{\mathbf{C}}^{(2)} + 2\hat{\mathbf{C}}^{(3)}\right), \\ &\hat{\mathbf{C}}^{tr} = \hat{\mathbf{C}}^{(1)} - \hat{\mathbf{C}}^{(2)} + \hat{\mathbf{C}}^{(3)}, \\ &A^{l(m)}_{J'n',Jn}(k) = 0, \\ &A^{tr(m)}_{J'n',Jn}(k) = \frac{1}{12}k^2\left|\langle Jn \parallel J + S \parallel J'n'\rangle\right|^2, \\ &A^{l(q)}_{J'n',Jn}(k) = \frac{4}{3}A^{tr(q)}_{J'n',Jn}(k) = \\ &= \frac{1}{270e^2}m^2\omega^2_{J'n',Jn}k^2\left|\langle Jn \parallel Q \parallel J'n'\rangle\right|^2, \\ &A^{l(s)}_{J'n',Jn}(k) = \\ &\qquad = \frac{1}{36}m^2\omega^2_{J'n',Jn}k^2\left|\langle Jn \parallel R_0 \parallel J'n'\rangle\right|^2, \\ &A^{tr(s)}_{J'n',Jn}(k) = 0, \end{aligned} \qquad (2.19)$$

где $\langle Jn \parallel \ldots \parallel J'n'\rangle$ — приведенные матричные элементы; $R_{00} = R_{ii}$ [5, § 107]. Так как $\hat{\mathbf{J}}$ коммутирует с гамильтонианом атома [5, § 29], имеем

$$\langle Jn \parallel J \parallel J'n'\rangle = \delta_{J'J}\delta_{n'n}\sqrt{J(J+1)(2J+1)}. \qquad (2.20)$$

В нулевом приближении по спин-орбитальному взаимодействию можно до конца провести вычисление матричных элементов $\langle Jn \parallel S \parallel J'n'\rangle$ [8, § 50].

Обозначим нерасщепленный спин-орбитальным взаимодействием атомный терм через LSn, так что $J = L+S,\, L+S-1, \ldots, |L-S|$. Тогда

$$\langle J'L'S'n' \parallel S \parallel JLSn\rangle = \frac{1}{2}\delta_{L'L}\delta_{S'S}\delta_{n'n}\left\{\delta_{J'J}\sqrt{\frac{2J+1}{J(J+1)}}\,[J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)] - \right.$$
$$- \delta_{J',J+1}\sqrt{\frac{(J+2+L+S)(J+1+S-L)(J+1+L-S)(L+S-J)}{J+1}} -$$
$$\left. - \delta_{J',J-1}\sqrt{\frac{(J+L+S+1)(J+S-L)(J+L-S)(L+S+1-J)}{J}}\right\}, \quad (2.21)$$

т. е. матричные элементы спина $\hat{\mathbf{S}}$ отличны от нуля только для переходов внутри тонкой структуры терма.

Формулы (2.14) и (2.19) дают окончательные выражения для $\varepsilon^l(\omega,k)$ и $\varepsilon^{tr}(\omega,k)$. Далее мы ограничим рассмотрение случаем не очень высоких температур: если ω_0 — энергетический интервал между основным и первым возбужденным атомными уровнями, то $T \ll \omega_0$. Тогда при учете (2.7) формула (2.14) принимает вид

$$\varepsilon^{l,tr}(\omega,k) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi Ne^2}{m^2\omega^2(2J_0+1)} \times \\ \times \sum_{Jn}\Phi_{Jn,J_0n_0}(\omega,k;T)A^{l,tr}_{Jn,J_0n_0}(k). \quad (2.22)$$

Состояния основного атомного уровня мы отмечаем индексом «нуль»: $|J_0M_0n_0\rangle$ и $E_{J_0n_0}$. Если $L_0=0$ или $S_0=0$, то основной терм не имеет тонкой структуры, при этом $\omega_0 \sim \omega_R = 1/(ma_B)^2$. Если $L_0, S_0 \neq 0$, то [5, § 72] для нормального мультиплета

$$J_0 = |L_0 - S_0|, \quad \omega_0 = |A_{L_0S_0}|(J_0+1),$$

а для обращенного мультиплета

$$J_0 = L_0 + S_0, \quad \omega_0 = |A_{L_0S_0}|J_0,$$

входящая сюда постоянная $|A_{L_0S_0}| \sim \omega_R(Ze^2/c)^2$.

В дальнейшем нам придется использовать величину, пропорциональную разности $\varepsilon^{tr}(\omega,k) - \varepsilon^l(\omega,k)$. Введем для нее специальное обозначение:

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega,k)} = \frac{\omega^2}{c^2k^2}\left[\varepsilon^{tr}(\omega,k) - \varepsilon^l(\omega,k)\right] = \\ = -\frac{\pi e^2N}{3(mc)^2(2J_0+1)} \times \\ \times \sum_{Jn}\Phi_{Jn,J_0n_0}(\omega,k;T)M_{Jn,J_0n_0}, \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} &M_{Jn,J_0n_0} = M^{(d)}_{Jn,J_0n_0} + M^{(m)}_{Jn,J_0n_0} + \\ &+ M^{(q)}_{Jn,J_0n_0} + M^{(s)}_{Jn,J_0n_0}, \\ &M^{(d)}_{Jn,J_0n_0} = 8\,\mathrm{Re}\langle J_0n_0 \parallel p \parallel Jn\rangle \times \\ &\times \langle Jn \parallel C^\mu \parallel J_0n_0\rangle, \\ &\hat{\mathbf{C}}^\mu = \hat{\mathbf{C}}^{(1)} + 3\hat{\mathbf{C}}^{(3)}, \\ &M^{(m)}_{Jn,J_0n_0} = \left|\langle J_0n_0 \parallel J+S \parallel Jn\rangle\right|^2, \\ &M^{(q)}_{Jn,J_0n_0} = \\ &= -\frac{m^2\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{90e^2}\left|\langle J_0n_0 \parallel Q \parallel Jn\rangle\right|^2, \\ &M^{(s)}_{Jn,J_0n_0} = \\ &= -\frac{m^2\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{3}\left|\langle J_0n_0 \parallel R_0 \parallel Jn\rangle\right|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

3. ПРОДОЛЬНАЯ И ПОПЕРЕЧНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЧАСТОТ

Исходя из формулы (2.22), получим выражения для $\varepsilon^{tr,l}(\omega,k)$ в различных областях частот. Сначала рассмотрим случай, когда частота ω близка к частоте какого-либо атомного перехода: расстройка $\delta_{Jn} = \omega - \omega_{Jn,J_0n_0}$ удовлетворяет условию

$$|\delta_{Jn}| \ll |\omega_{Jn,J'n'}|, \\ (Jn) \neq (J_0n_0), \quad (J'n') \neq (Jn). \quad (3.1)$$

Так как шириной (естественной и столкновительной) ν_{Jn} возбужденного уровня мы пренебрегаем, расстройка в (3.1) не может быть очень малой: $|\delta_{Jn}| \gg \nu_{Jn}$. При выполнении условия (3.1) в функции (2.9) достаточно сохранить только второй член. Тогда, как следует из (2.22),

$$\varepsilon^{l,tr}(\omega,k)=\tilde{\varepsilon}(\omega)+\frac{4\pi e^2 N}{m^2\omega^2(2J_0+1)(\delta_{Jn}-k^2/2M)}\times \\ \times F\left(\frac{\delta_{Jn}-k^2/2M}{\sqrt{2}\,k\bar{v}}\right)A^{l,tr}_{Jn,J_0n_0}(k), \quad (3.2)$$

где $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ некоторая плавная функция частоты в области (3.1). Заметим, что величина $k\bar{v}$ совпадает с доплеровской шириной спектральной линии, соответствующей переходу $J_0n_0 \leftrightarrow Jn$ [9, § 20; 10, § 103]. Выражение (2.23) принимает вид

$$1-\frac{1}{\mu(\omega,k)}=\frac{\pi e^2 N}{3(mc)^2(2J_0+1)(\delta_{Jn}-k^2/2M)}\times \\ \times F\left(\frac{\delta_{Jn}-k^2/2M}{\sqrt{2}\,k\bar{v}}\right)M_{Jn,J_0n_0}. \quad (3.3)$$

Теперь рассмотрим случай, когда частота ω далека от резонансных частот:

$$|\delta_{Jn}|\gg k\bar{v},k^2/M, \quad (Jn)\neq(J_0n_0). \quad (3.4)$$

При этом, согласно (2.9) и (2.15), с принятой степенью точности имеем

$$\Phi_{Jn,J_0n_0}(\omega,k;T)=\frac{2\omega_{Jn,J_0n_0}}{\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0}}\times \\ \times\left[1+\frac{k^2}{M(\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0})}\times \\ \times\left(\frac{\omega^2+\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{2\omega_{Jn,J_0n_0}}+\frac{3\omega^2+\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0}}T\right)\right]. \quad (3.5)$$

С той же точностью из (2.22), (2.19), (2.23) и (2.24) получаем

$$\varepsilon^{l,tr}(\omega,k)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}+\frac{8\pi e^2N}{m^2\omega^2(2J_0+1)}\times \\ \times\sum_{Jn}{}'\frac{\omega_{Jn,J_0n_0}}{\omega^2_{Jn,J_0n_0}-\omega^2}\times \\ \times\left[A^{l,tr}_{Jn,J_0n_0}(k)+\frac{m^2k^2\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{3Me^2(\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0})}\times \\ \times|\langle J_0n_0\parallel d\parallel Jn\rangle|^2\times \\ \times\left(\frac{\omega^2+\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{2\omega_{Jn,J_0n_0}}+\frac{T(3\omega^2+\omega^2_{Jn,J_0n_0})}{\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0}}\right)\right]- \\ -\frac{4\pi e^2N}{m^2\omega^2(2J_0+1)}A^{l,tr}_{J_0n_0,J_0n_0}(k)\Phi_0(\omega,k;T), \quad (3.6)$$

$$1-\frac{1}{\mu(\omega,k)}=\frac{\pi e^2N}{3(mc)^2}\left[\frac{2}{2J_0+1}\sum_{Jn}{}'\frac{\omega_{Jn,J_0n_0}}{\omega^2_{Jn,J_0n_0}-\omega^2}\times \\ \times M_{Jn,J_0n_0}-J_0(J_0+1)g_0^2\Phi_0(\omega,k;T)\right], \quad (3.7)$$

где

$$\sum_{Jn}{}'(\dots)=\sum_{(Jn)\neq(J_0n_0)}(\dots),$$

$$\Phi_0(\omega,k;T)=\Phi_{J_0n_0,J_0n_0}(\omega,k;T),$$

$$g_0=g_{J_0L_0S_0},$$

и

$$g_{JLS}=1+\frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (3.8)$$

— множитель Ланде атомного уровня $JLSn$ [5, § 113]. В (3.6) и (3.7) мы учитываем, что, как следует из (2.19)–(2.21),

$$A^l_{Jn,Jn}(k)=0, \\ A^{tr}_{Jn,Jn}(k)=\frac{1}{12}k^2J(J+1)(2J+1)g^2_{JLS}. \quad (3.9)$$

Если кроме условий (3.4) выполняются еще и условия (3.1), то выражения, получающиеся из (3.6) и (3.7), совпадают с выражениями, получающимися из (3.2) и (3.3), если учесть, что в этом случае $\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0}\approx 2\omega_{Jn,J_0n_0}\delta_{Jn}$ и (см. (2.15))

$$\frac{1}{z^{(-)}_{Jn,J_0n_0}}F\left(z^{(-)}_{Jn,J_0n_0}\right)\approx \\ \approx-\frac{\sqrt{2}\,k\bar{v}}{\delta_{Jn}}\left[1+\frac{k^2}{M\delta_{Jn}}\left(\frac{1}{2}+\frac{T}{\delta_{Jn}}\right)\right], \quad (3.10)$$

$$\varepsilon^{l,tr}(\omega,k)=\tilde{\varepsilon}(\omega)-\frac{4\pi e^2N}{m^2\omega^2(2J_0+1)\delta_{Jn}}\times \\ \times\left[A^{l,tr}_{Jn,J_0n_0}(k)+\frac{m^2k^2\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{3e^2M\delta_{Jn}}\times \\ \times|\langle J_0n_0\parallel d\parallel Jn\rangle|^2\left(\frac{1}{2}+\frac{T}{\delta_{Jn}}\right)\right], \quad (3.11)$$

$$1-\frac{1}{\mu(\omega,k)}=-\frac{\pi e^2N}{3(mc)^2(2J_0+1)\delta_{Jn}}M_{Jn,J_0n_0}. \quad (3.12)$$

Случай низких частот, $\omega\ll\omega_0$, содержится в формулах (3.6) и (3.7). Члены, пропорциональные k^2 в выражении для $A^{l,tr}_{Jn,J_0n_0}(k)$ при $Jn\neq J_0n_0$, по порядку величины равны $m\omega_R(ka_B)^2$, а остальные члены в квадратных скобках в (3.6) при $\omega\ll\omega_0$ имеют порядок величины $m\omega_R(ka_B)^2m/M$. Такими членами (порядка m/M) мы с самого начала пренебрегаем. Поэтому при $\omega \ll \omega_0$

$$\varepsilon^{l,tr}(\omega,k) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{8\pi e^2 N}{m^2\omega^2(2J_0+1)} \times \sum_{Jn}{}' \frac{\omega_{Jn,J_0n_0}}{\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0}} A^{l,tr}_{Jn,J_0n_0}(k) - \frac{4\pi e^2 N}{m^2\omega^2(2J_0+1)} A^{l,tr}_{J_0n_0,J_0n_0}(k)\Phi_0(\omega,k;T). \quad (3.13)$$

Известно [2, § 12], как можно исключить полюс при $\omega = 0$ в выражении для $\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{k})$, если рассматривается вклад только дипольных переходов. Оказывается, что аналогичную процедуру можно провести и в (3.13). Заметим сначала, что

$$\frac{1}{\omega^2(\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0})} = \frac{1}{\omega^2_{Jn,J_0n_0}}\left(\frac{1}{\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0}} - \frac{1}{\omega^2}\right). \quad (3.14)$$

Получающиеся после подстановки (3.14) в (3.13) суммы (пропорциональные $1/\omega^2$) можно вычислить, используя формулы (2.17)–(2.19), теорему Вигнера–Эккарта и известные свойства $3j$- и $6j$-символов [5, §§ 106–110]. В результате получим

$$\begin{gathered}\sum_{Jn}{}' \frac{1}{\omega_{Jn,J_0n_0}} A^l_{Jn,J_0n_0}(k) = \frac{Zm}{2}(2J_0+1), \\ \sum_{Jn}{}' \frac{A^{tr}_{Jn,J_0n_0}(k)}{\omega_{Jn,J_0n_0}} = \frac{Zm}{2}(2J_0+1) + \frac{k^2}{12} \times \left[\sum_{Jn}{}' \frac{|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle|^2}{\omega_{Jn,J_0n_0}} - \frac{m(2J_0+1)}{\sqrt{2L_0+1}}\langle J_0n_0 \parallel R_0 \parallel J_0n_0\rangle\right].\end{gathered} \quad (3.15)$$

Окончательные выражения получаются из (3.13)–(3.15) и (3.9):

$$\varepsilon^l(\omega,k) = 1 - \frac{8\pi e^2 N}{m^2(2J_0+1)} \times \sum_{Jn}{}' \frac{1}{\omega_{Jn,J_0n_0}(\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0})} A^l_{Jn,J_0n_0}(k), \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{tr}(\omega,k) = 1 &- \frac{8\pi e^2 N}{m^2(2J_0+1)} \times \sum_{Jn}{}' \frac{1}{\omega_{Jn,J_0n_0}(\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0})} \times A^{tr}_{Jn,J_0n_0}(k) + \frac{2\pi e^2 N k^2}{3m^2\omega^2} \times \\ &\times \left[-\frac{m\langle L_0n_0 \parallel R_0 \parallel L_0n_0\rangle}{\sqrt{2L_0+1}} + \frac{1}{2J_0+1} \times \sum_{Jn}{}' \frac{|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle|^2}{\omega_{Jn,J_0n_0}} - \frac{J_0(J_0+1)}{2} g_0^2\Phi_0(\omega,k;T)\right],\end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{\mu(\omega,k)} = &-\frac{2\pi e^2 N\omega^2}{3(mc)^2(2J_0+1)} \times \sum_{Jn}{}' \frac{1}{\omega_{Jn,J_0n_0}(\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0})} \times M_{Jn,J_0n_0} + \frac{2\pi e^2 N}{3(mc)^2} \times \\ &\times \left[-\frac{m\langle L_0n_0 \parallel R_0 \parallel L_0n_0\rangle}{\sqrt{2L_0+1}} + \frac{1}{2J_0+1} \times \sum_{Jn}{}' \frac{|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle|^2}{\omega_{Jn,J_0n_0}} - \frac{J_0(J_0+1)}{2} g_0^2\Phi_0(\omega,k;T)\right].\end{aligned} \quad (3.18)$$

Формулу (3.18) можно получить и из (3.7) с помощью преобразования, аналогичного преобразованию, использованному при переходе от (3.13) к (3.16) и (3.17).

Продольная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon^l(\omega,k)$ является регулярной функцией ω. Из (3.16), учитывая (2.19), получаем

$$\varepsilon^l(\omega,0) = \varepsilon^l(\omega,k)\Big|_{\frac{ka_B}{\omega/\omega_R}\to 0} = 1 + \frac{8\pi N}{3(2J_0+1)} \times \sum_{Jn}{}' \frac{\omega_{Jn,J_0n_0}|\langle J_0n_0 \parallel d \parallel Jn\rangle|^2}{\omega^2_{Jn,J_0n_0}-\omega^2}, \quad (3.19)$$

$$\varepsilon^l(0,k) = \varepsilon^l(\omega,k)\Big|_{\frac{\omega/\omega_R}{ka_B}\to 0} = 1 + \frac{8\pi e^2 N}{m^2(2J_0+1)} \times \sum_{Jn}{}' \frac{A^l_{Jn,J_0n_0}(k)}{\omega^3_{Jn,J_0n_0}}, \quad (3.20)$$

так что предельное значение

$$\varepsilon_0^l = \varepsilon^l(\omega,0)\Big|_{\omega/\omega_R\to 0} = \varepsilon^l(0,k)\Big|_{ka_B\to 0} = \\ = 1 + \frac{8\pi N}{3(2J_0+1)} \times \\ \times \sum_{Jn}{}' \frac{|\langle J_0 n_0 \parallel d \parallel Jn\rangle|^2}{\omega_{Jn,J_0n_0}} \quad (3.21)$$

не зависит от порядка перехода к пределу: сначала $ka_B \to 0$, а потом $\omega/\omega_R \to 0$ или наоборот — сначала $\omega/\omega_R \to 0$, а потом $ka_B \to 0$.

В отличие от $\varepsilon^l(\omega,k)$, поперечная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon^{tr}(\omega,k)$ и $\mu(\omega,k)$ имеют особенности при $\omega = 0$. Функция $\Phi_0(\omega,k;T)$ имеет следующие предельные выражения (см. (2.9) и (2.15)):

$$\Phi_0(\omega,k;T) \approx \frac{k^2}{M\omega^2} \quad \text{при} \quad \omega \gg \frac{k^2}{M}, k\overline{v}, \quad (3.22)$$

$$\Phi_0(\omega,k;T) \approx -\frac{4M}{k^2} \quad \text{при} \quad k \gg \sqrt{M\omega}, M\overline{v}, \quad (3.23)$$

$$\Phi_0(\omega,k;T) \approx -\frac{1}{T} \quad \text{при} \quad \sqrt{M\omega} \ll k \ll M\overline{v}. \quad (3.24)$$

При $ka_B \ll \omega/\omega_R$ условия в (3.22) выполняются, так что из (3.17) и (3.18), учитывая (2.19) и (3.19), получаем

$$\varepsilon^{tr}(\omega,0) = \varepsilon^{tr}(\omega,k)\Big|_{\frac{ka_B}{\omega/\omega_R}\to 0} = \varepsilon^l(\omega,0), \\ \varepsilon^{tr}(\omega,0)\Big|_{\frac{\omega}{\omega_R}\to 0} = \varepsilon_0^l, \quad (3.25)$$

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega,0)} = 1 - \frac{1}{\mu(\omega,k)}\Big|_{\frac{ka_B}{\omega/\omega_R}\to 0} = \\ = \frac{2\pi N}{3(2J_0+1)}\left(\frac{e\omega}{mc}\right)^2 \times \\ \times \sum_{Jn}{}' \frac{M_{Jn,J_0n_0}}{\omega_{Jn,J_0n_0}(\omega^2_{Jn,J_0n_0}-\omega^2)} + \frac{2\pi e^2 N}{3(mc)^2} \times \\ \times \left(-\frac{m}{\sqrt{2L_0+1}}\langle L_0n_0 \parallel R_0 \parallel L_0n_0\rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{2J_0+1}\sum_{Jn}{}' \frac{|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle|^2}{\omega_{Jn,J_0n_0}}\right), \quad (3.26)$$

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega,0)}\Big|_{\frac{\omega}{\omega_R}\to 0} = \frac{2\pi e^2 N}{3(mc)^2} \times \\ \times \left(-\frac{m}{\sqrt{2L_0+1}}\langle L_0n_0 \parallel R_0 \parallel L_0n_0\rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{2J_0+1}\sum_{Jn}{}' \frac{|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle|^2}{\omega_{Jn,J_0n_0}}\right). \quad (3.27)$$

Если условие $k \gg \sqrt{M\omega}$ в (3.23), (3.24) выполняется, то выполняется и условие $ka_B \gg \omega/\omega_R$. В этом случае из (3.17) и (3.18) получаем

$$\varepsilon^{tr}(\omega,k)\Big|_{\frac{\omega}{k^2/M}\to 0} = 1 + \frac{2\pi e^2 N k^2}{3m^2\omega^2} \times \\ \times \left[-\frac{m}{\sqrt{2L_0+1}}\langle L_0n_0 \parallel R_0 \parallel L_0n_0\rangle + \right. \\ + \frac{1}{2}J_0(J_0+1)g_0^2\Phi_0 + \frac{1}{2J_0+1} \times \\ \left. \times \sum_{Jn}{}' \frac{|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle|^2}{\omega_{Jn,J_0n_0}}\right], \quad (3.28)$$

$$1 - \frac{1}{\mu(0,k)} = 1 - \frac{1}{\mu(\omega,k)}\Big|_{\frac{\omega}{k^2/M}\to 0} = \\ = \frac{2\pi e^2 N}{3(mc)^2}\left[-\frac{m}{\sqrt{2L_0+1}}\langle L_0n_0 \parallel R_0 \parallel L_0n_0\rangle + \right. \\ + \frac{1}{2}J_0(J_0+1)g_0^2\Phi_0 + \frac{1}{2J_0+1} \times \\ \left. \times \sum_{Jn}{}' \frac{|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle|^2}{\omega_{Jn,J_0n_0}}\right]. \quad (3.29)$$

Функция $\Phi_0 = \Phi_0(\omega,k;T) = -4M/k^2$, если $k \gg M\overline{v}$ и $\Phi_0 = \Phi_0(\omega,k;T) = -1/T$, если $k \ll M\overline{v}$ (см. (3.23), (3.24)).

4. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ $\varepsilon(\omega)$ И МАГНИТНАЯ $\mu(\omega)$ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В том подходе к электродинамике материальных сред, в котором, наряду с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, вводятся еще векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, свойства изотропной среды характеризуются диэлектрической $\varepsilon(\omega)$ и магнитной $\mu(\omega)$ проницаемостями [1, § 2; 10, § 77]:

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega), \quad \mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\omega). \quad (4.1)$$

С рассматриваемыми здесь продольной $\varepsilon^l(\omega,k)$ и поперечной $\varepsilon^{tr}(\omega,k)$ проницаемостями они связаны соотношениями [1, § 2; 10, § 103]

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon^l(\omega,k), \quad \mu(\omega) = \mu(\omega,k), \quad (4.2)$$

где $\mu(\omega,k)$ — функция, введенная в (2.23). Из этих соотношений ясно, что величины $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ имеют смысл лишь тогда, когда можно пренебречь зависимостями $\varepsilon^l(\omega,k)$ и $\mu(\omega,k)$ от k. Таким образом, как следует из результатов разд. 3, величина $\varepsilon(\omega)$ теряет свой физический смысл (как коэффициент, связывающий $\mathbf{D}(\omega)$ и $\mathbf{E}(\omega)$) не только при частотах ω, достаточно близких к частоте любого разрешенного перехода [10, § 103], но и во всех областях ω, в которых заметный вклад в $\varepsilon^l(\omega,k)$ дают электрические квадрупольные и полносимметричные переходы.

Согласно (4.2), магнитная проницаемость $\mu(\omega)$ при низких ($\omega \ll \omega_R$) частотах определяется формулами (3.26), (3.27). Если ввести магнитную восприимчивость $\chi(\omega) = [\mu(\omega) - 1]/4\pi$, то ее низкочастотный предел, согласно (3.27), будет определяться следующей формулой:

$$\chi(0) = \frac{Ne^2}{6(mc)^2}\left(-\frac{m}{\sqrt{2L_0+1}}\langle L_0 n_0 \parallel R_0 \parallel L_0 n_0\rangle + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2J_0+1}{\sum_{Jn}}' \frac{|\langle J_0 n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle|^2}{\omega_{Jn,J_0 n_0}}\right). \quad (4.3)$$

По порядку величины $|\chi(0)| \approx Na_B^3\omega_R/mc^2 \ll 1$, так как $Na_B^3 < 10^{-4}$ и $\omega_R/mc^2 \approx 10^{-4}$. Статическая восприимчивость в однородном поле получается из (3.29) при $\Phi_0 = -1/T$:

$$\chi_{st}(0) = \chi(0) + \frac{1}{3T}N\mu_B^2 J_0(J_0+1)g_0^2, \quad (4.4)$$

где $\chi(0)$ определяется по формуле (4.3). Если g-фактор основного атомного уровня отличен от нуля, то последний член в (4.4) существенно больше, чем $\chi(0)$: по порядку величины он равен $\chi(0)\omega_R/T$; однако и в этом случае $\chi_{st}(0) \ll 1$. Как и должно быть, выражение (4.4) для $\chi_{st}(0)$ совпадает с известной формулой Ван Флека [4, § 52]. Заметим, что диамагнитный и парамагнитный члены, не зависящие от T, сохраняются и при достаточно больших частотах (см. (4.3) и (3.26)). Поэтому нет оснований считать [10, § 79], что величина $\mu(\omega)$, в отличие от $\varepsilon(\omega)$, при увеличении ω сравнительно рано теряет свой физический смысл и нужно полагать $\mu(\omega) = 1$. Но при оптических частотах вклад в $\mu(\omega)$ электрических квадрупольных переходов становится сравнимым с вкладом магнитных дипольных и полносимметричных переходов (см. (3.26) и (2.24)), так что при этих частотах вектор

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} - \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi}[\mu(\omega) - 1]$$

теряет смысл магнитного момента единицы объема газа в согласии с [10, § 79][5].

В заключение остановимся на вопросе о возможности распространения в одноатомном газе поперечной электромагнитной волны с групповой скоростью, антипараллельной фазовой скорости. Этот вопрос в настоящее время широко обсуждается в литературе (см., например, [11] и цитированную там литературу). В работе [12] Мандельштам обратил внимание на интересные особенности распространения электромагнитной волны с антипараллельными групповой и фазовой скоростями в прозрачной изотропной среде[6]. Дисперсионное уравнение для поперечной электромагнитной волны в изотропной негиротропной среде имеет вид [1, § 6]:

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = \varepsilon^{tr}(\omega,k). \quad (4.5)$$

Чтобы затуханием волны можно было пренебречь (т. е. чтобы волновой вектор k был вещественным), для $\varepsilon^{tr} = \varepsilon^{tr'} + i\varepsilon^{tr''}$ нужно потребовать выполнения условий [1, § 6]

$$\varepsilon^{tr''}(\omega,k) \approx 0, \quad \varepsilon^{tr'}(\omega,k) > 0. \quad (4.6)$$

Для фазовой $\mathbf{u}_f = \omega\mathbf{k}/k^2$ и групповой $\mathbf{u}_{gr} = (\mathbf{k}/k)\,d\omega/dk$ скоростей волны из уравнения (4.5) имеем следующий результат:

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon^{tr'}}{\partial k^2} < 1, \quad \text{то} \quad \mathbf{u}_{gr} \parallel \mathbf{u}_f, \\ &\text{если} \quad \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon^{tr'}}{\partial k^2} > 1, \quad \text{то } \mathbf{u}_{gr} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_f \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{антипараллельны}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

так что групповая и фазовая скорости могут быть антипараллельны только при учете пространственной дисперсии [2, §§ 7, 10]. В той области частот, где $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ (см. (4.2) и (2.23)) имеют смысл, уравнение (4.5) эквивалентно уравнению [10, § 83]

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = \varepsilon(\omega)\mu(\omega), \quad (4.8)$$

а условия (4.6), (4.7) эквивалентны следующим условиям [13]:

$$\varepsilon'' \approx 0, \quad \mu'' \approx 0, \quad \varepsilon'\mu' > 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad \varepsilon',\mu' > 0, \quad \text{то} \quad \mathbf{u}_{gr} \parallel \mathbf{u}_f, \\ &\text{если} \quad \varepsilon',\mu' < 0, \quad \text{то} \quad \mathbf{u}_{gr} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_f \\ &\qquad\qquad\qquad \text{антипараллельны}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Первое из условий (4.6) выполняется, если только частота ω не слишком близка к какой-либо из собственных частот атома: расстройка $|\delta_{Jn}| \gg \tilde{\nu}_{Jn}$, где

[5] Рассуждения, которые приводятся в [10], только этот результат и доказывают.

[6] Из соображений симметрии очевидно, что в изотропной среде групповая и фазовая скорости любой волны либо параллельны, либо антипараллельны.

$\tilde{\nu}_{Jn}$ — полная ширина уровня Jn, включающая в себя естественную и столкновительную ширину ν_{Jn} и доплеровскую ширину $k\overline{v}$. При этом (см. (3.6), (3.9) и (2.19))

$$\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon^{tr}(\omega,k)}{\partial k^2} = \frac{8\pi e^2 N}{3(mc)^2(2J_0+1)} \times \\ \times \left\{-\frac{1}{8}J_0(J_0+1)g_0^2\Phi_0 + \sum_{Jn}{}' \frac{\omega_{Jn,J_0n_0}}{\omega^2_{Jn,J_0n_0}-\omega^2} \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{4}\left|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle\right|^2 + \right. \\ + \frac{m^2\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{120e^2}\left|\langle J_0n_0 \parallel Q \parallel Jn\rangle\right|^2 + \\ + \frac{m^2\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{Me^2(\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0})}\left|\langle J_0n_0 \parallel d \parallel Jn\rangle\right|^2 \times \\ \left.\left. \times \left(\frac{\omega^2+\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{2\omega_{Jn,J_0n_0}} + T\frac{3\omega^2+\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{\omega^2-\omega^2_{Jn,J_0n_0}}\right)\right]\right\}. \quad (4.11)$$

Полагая в (4.11) $\omega, |\delta_{Jn}| \sim \omega_R$ и учитывая (3.22), находим, что в этом случае

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{\partial\varepsilon^{tr}}{\partial k^2}\right| \sim Na_B^3\frac{\omega_R}{mc^2} \ll 1. \quad (4.12)$$

Отсюда и из (4.7) следует, что для волн с частотами, далекими от частот атомных переходов, $\mathbf{u}_{gr} \parallel \mathbf{u}_f$.

При очень малых частотах ($\omega \ll T$) равенство (4.11) приводится к виду (см. (3.28))

$$\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon^{tr}(\omega,k)}{\partial k^2} = \frac{2\pi e^2 N}{3(mc)^2} \times \\ \times \left[-\frac{m}{\sqrt{2L_0+1}}\langle L_0n_0 \parallel R_0 \parallel L_0n_0\rangle + \frac{1}{2T}J_0(J_0+1)g_0^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2J_0+1}\sum_{Jn}{}'\frac{\left|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle\right|^2}{\omega_{Jn,J_0n_0}}\right]. \quad (4.13)$$

Если $g_0 = 0$, то остается справедливым результат (4.12); если же $g_0 \neq 0$, то

$$\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon^{tr}(\omega,k)}{\partial k^2} = \frac{4\pi\mu_B^2 N}{3T}g_0^2 J_0(J_0+1) \sim \\ \sim Na_B^3\frac{\omega_R}{mc^2}\frac{\omega_R}{T} \ll 1. \quad (4.14)$$

Следовательно, для волн с очень малыми частотами также $\mathbf{u}_{gr} \parallel \mathbf{u}_f$.

Остается рассмотреть случай волны с частотой, близкой к частоте ω_{Jn,J_0n_0} какого-либо атомного перехода: выполняется условие (3.1), но по-прежнему $|\delta_{Jn}| \gg \tilde{\nu}_{Jn}$. При этом равенство (4.11) приводится к виду (см. (3.11) и (2.19))

$$\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon^{tr}(\omega,k)}{\partial k^2} = -\frac{4\pi e^2 N}{3(mc)^2(2J_0+1)\delta_{Jn}} \times \\ \times \left\{\frac{1}{4}\left|\langle J_0n_0 \parallel S \parallel Jn\rangle\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle J_0n_0 \parallel p \parallel Jn\rangle \times \right. \\ \times \langle Jn \parallel C^{tr} \parallel J_0n_0\rangle + \frac{m^2\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{e^2} \times \\ \times \left[\frac{1}{120}\left|\langle J_0n_0 \parallel Q \parallel Jn\rangle\right|^2 + \right. \\ \left.\left. + \frac{1}{M\delta_{Jn}}\left|\langle J_0n_0 \parallel d \parallel Jn\rangle\right|^2\left(\frac{1}{2}+\frac{T}{\delta_{Jn}}\right)\right]\right\}. \quad (4.15)$$

Для уровней Jn, на которые разрешены магнитные дипольные и электрические квадрупольные переходы, находим

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{\partial\varepsilon^{tr}}{\partial k^2}\right| \sim Na_B^3\frac{\omega_R}{mc^2}\frac{\omega_R}{|\delta_{Jn}|} \ll 1, \quad (4.16)$$

так как даже $\omega_R/\nu_{Jn} < 10^7$, а $|\delta_{Jn}| \gg \tilde{\nu}_{Jn} > \nu_{Jn}$.

Для уровней Jn, на которые возможен электрический дипольный переход, из (4.15) получаем

$$\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial\varepsilon^{tr}(\omega,k)}{\partial k^2} = -\frac{2\pi N}{3Mc^2(2J_0+1)} \times \\ \times \frac{\omega^2_{Jn,J_0n_0}}{\delta^2_{Jn}}\left|\langle J_0n_0 \parallel d \parallel Jn\rangle\right|^2\left(1+\frac{2T}{\delta_{Jn}}\right). \quad (4.17)$$

Вклад первого члена в правой части по порядку величины равен $Na_B^3(\omega_R/mc^2)(m/M)(\omega_R/\delta_{Jn})^2$. Поскольку $m/M < 10^{-3}$, первый член составляет величину порядка единицы только при $|\delta_{Jn}| < 10^{-6}\omega_R$. Если, однако, $|\delta_{Jn}| \gg \tilde{\nu}_{Jn}$, то первый член в правой части (4.17) по порядку величины остается меньше единицы. Второй член в правой части (4.17) по порядку величины отличается от первого множителем $(T/\omega_R)(\omega_R/|\delta_{Jn}|)$, так что он может стать примерно равным единице уже при $|\delta_{Jn}| \le 10^{-4}\omega_R$. Если при этом $\delta_{Jn} < 0$, то выполняется и второе условие (4.6) и, согласно (4.7), групповая и фазовая скорости волны могут быть антипараллельными.

Таким образом, направление групповой скорости электромагнитной поперечной волны в одноатомном газе при всех частотах совпадает с направлением фазовой скорости, кроме случая частот, слегка отстроенных в длинноволновую сторону от частот электрических дипольных переходов. Заметим, что в этом случае (см. (3.11), (3.12))

$$\varepsilon^l(\omega,k) = \varepsilon^{tr}(\omega,k), \quad \mu(\omega,k) = 1$$

и условия (4.9), (4.10) неприменимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Госатомиздат, Москва (1961).

2. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии*, Наука, Москва (1965).

3. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).

4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976).

5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).

6. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Наука, Москва (1978).

7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1973).

8. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).

9. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собельман, Е. А. Юков, *Возбуждение атомов и уширение спектральных линий*, Наука, Москва (1979).

10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).

11. A. A. Houck, J. B. Brock, and I. L. Chung, Phys. Rev. Lett. **90**, 137401 (2003).

12. Л. И. Мандельштам, ЖЭТФ **15**, 475 (1945); *Полное собрание трудов*, т. 2, АН СССР, Москва (1947), с. 334; *Полное собрание трудов*, т. 5, АН СССР, Москва (1950), с. 461.

13. В. Г. Веселаго, УФН **92**, 517 (1967).