ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 2, стр. 382–384

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ НА МУЛЬТИКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

С. В. Белим *

Омский государственный университет
644077, Омск, Россия

Поступила в редакцию 29 августа 2003 г.

Осуществлено теоретико-полевое описание поведения однородных трехмерных систем с эффектами дальнодействия, задаваемых двумя параметрами порядка в бикритической и тетракритической точках в двухпетлевом приближении с применением техники суммирования Паде–Бореля. Проведен анализ ренормгрупповых уравнений и выделены фиксированные точки, соответствующие различным типам мультикритического поведения. Показано, что влияние эффектов дальнодействия может приводить к переходу от бикритического поведения к тетракритическому.

PACS: 64.60.-i

Как было показано в работе [1], влияние эффектов дальнодействия, описываемого на больших расстояниях степенным законом $1/r^{-D-a}$, существенно при значениях параметра $a < 2$ и приводит к изменению режима критического поведения. Также выявлено, что для трехмерных систем в области значений $a < 1.5$ система описывается среднеполевыми критическими индексами.

Предметом данной статьи является исследование влияния эффектов дальнодействия на системы, описываемые двумя флуктуирующими параметрами порядка. Фазовые диаграммы таких систем могут содержать мультикритические точки, носящие бикритический или тетракритический характер. В первом случае в мультикритической точке пересекаются две линии фазовых переходов второго рода и одна линия фазовых переходов первого рода, во втором — четыре линии фазовых переходов второго рода. В непосредственной окрестности мультикритической точки система демонстрирует специфическое критическое поведение, характеризующееся конкуренцией типов упорядочения. При этом в бикритической точке происходит вытеснение одного критического параметра другим, тетракритическая же точка допускает существование смешанной фазы с сосуществующими типами упорядочения. Такие системы [2] могут быть описаны путем введения двух параметров порядка, преобразующихся по различным неприводимым представлениям.

Модельный гамильтониан системы имеет вид

$$\begin{aligned}H_0 = \frac{1}{2}\int d^Dq(\tau_1+q^a)\Phi_q\Phi_{-q} +\\ +\frac{1}{2}\int d^Dq(\tau_2+q^a)\Psi_q\Psi_{-q} +\\ +u_{01}\int d^D\{q_i\}(\Phi_{q1}\Phi_{q2})(\Phi_{q3}\Phi_{-q1-q2-q3}) +\\ +u_{02}\int d^D\{q_i\}(\Psi_{q1}\Psi_{q2})(\Psi_{q3}\Psi_{-q1-q2-q3}) +\\ +2u_{03}\int d^D\{q_i\}(\Phi_{q1}\Phi_{q2})(\Psi_{q3}\Psi_{-q1-q2-q3}),\end{aligned} \quad (1)$$

где Φ и Ψ — флуктуирующие параметры порядка, u_{01} и u_{02} — положительные константы,

$$\tau_1 \propto |T-T_{c1}|/T_{c1}, \quad \tau_2 \propto |T-T_{c2}|/T_{c2},$$

T_{c1} и T_{c2} — температуры фазового перехода соответственно для первого и второго параметров порядка, a — параметр дальнодействия.

Данный гамильтониан приводит к широкому разнообразию мультикритических точек. Условие тетракритического поведения имеет вид $u_3^2 < u_1u_2$; условие бикритического поведения — $u_3^2 \ge u_1u_2$.

В рамках теоретико-полевого подхода [3] асимптотическое критическое поведение и структура

*E-mail: belim@univer.omsk.su

фазовых диаграмм во флуктуационной области определяются ренормгрупповым уравнением Каллана–Симанчика для вершинных частей неприводимых функций Грина. Для вычисления β- и γ-функций как функций, входящих в уравнение Каллана–Симанчика перенормированных вершин взаимодействия u_1, u_2, u_3, был применен стандартный метод, основанный на диаграммной технике Фейнмана и процедуре перенормировки [4]. В результате в рамках двухпетлевого приближения были получены следующие выражения для β-функций:

$$\begin{aligned}
\beta_{u1} &= -u_1 + 36J_0u_1^2 + 4J_0u_3^2 - 1728\left(2J_1 - J_0^2 - \frac{2}{9}G\right)u_1^3 - 192\left(2J_1 - J_0^2 - \frac{2}{9}G\right)u_1u_3^2 - 64(2J_1 - J_0^2)u_3^3,\\
\beta_{u2} &= -u_2 + 36J_0u_2^2 + 4J_0u_3^2 - 1728\left(2J_1 - J_0^2 - \frac{2}{9}G\right)u_2^3 - 192\left(2J_1 - J_0^2 - \frac{2}{9}G\right)u_2u_3^2 - 64(2J_1 - J_0^2)u_3^3,\\
\beta_{u3} &= -u_3 + 16J_0u_3^2 + 12J_0u_1u_3 + 12J_0u_2u_3 - 320\left(2J_1 - J_0^2 - \frac{2}{5}G\right)u_3^3 - 288\left(2J_1 - J_0^2 - \frac{2}{3}G\right)u_1^2u_3 -\\
&\quad - 288\left(2J_1 - J_0^2 - \frac{2}{3}G\right)u_2^2u_3 - 576\left(2J_1 - J_0^2\right)u_1u_3^2 - 576\Big(2J_1 - J_0^2\Big)u_2u_3^2, \qquad (2)\\
J_1 &= \int \frac{d^Dqd^Dp}{(1+|\mathbf{q}|^a)^2(1+|\mathbf{p}|^a)(1+|q^2+p^2+2\mathbf{pq}|^{a/2})},\\
J_0 &= \int \frac{d^Dq}{(1+|\mathbf{q}|^a)^2},\\
G &= -\frac{\partial}{\partial|\mathbf{k}|^a}\int \frac{d^Dqd^Dp}{(1+|q^2+k^2+2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}|^a)(1+|\mathbf{p}|^a)(1+|q^2+p^2+2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}|^{a/2})}.
\end{aligned}$$

Переопределим вершины взаимодействия:

$$v_1 = \frac{u_1}{J_0}, \quad v_2 = \frac{u_2}{J_0}, \quad v_3 = \frac{u_3}{J_0}. \qquad (3)$$

В результате приходим к следующим выражениям для β-функций:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -v_1 + 36v_1^2 + 4v_3^2 - 1728\left(2\widetilde{J_1} - 1 - \frac{2}{9}\widetilde{G}\right)u_1^3 - 192\left(2\widetilde{J_1} - 1 - \frac{2}{9}\widetilde{G}\right)v_1v_3^2 - 64(2\widetilde{J_1} - 1)v_3^3,\\
\beta_2 &= -v_2 + 36v_2^2 + 4v_3^2 - 1728\left(2\widetilde{J_1} - 1 - \frac{2}{9}\widetilde{G}\right)v_2^3 - 192\left(2\widetilde{J_1} - 1 - \frac{2}{9}\widetilde{G}\right)v_2v_3^2 - 64(2\widetilde{J_1} - 1)v_3^3,\\
\beta_{u3} &= -v_3 + 16v_3^2 + 12v_1v_3 + 12v_2v_3 - 320\left(2\widetilde{J_1} - 1 - \frac{2}{5}\widetilde{G}\right)v_3^3 - 288\left(2\widetilde{J_1} - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G}\right)v_1^2v_3 - \qquad (4)\\
&\quad - 288\left(2\widetilde{J_1} - 1 - \frac{2}{3}\widetilde{G}\right)v_2^2v_3 - 576\Big(2\widetilde{J_1} - 1\Big)v_1v_3^2 - 576\Big(2\widetilde{J_1} - 1\Big)v_2v_3^2,\\
\widetilde{J_1} &= \frac{J_1}{J_0^2}, \quad \widetilde{G} = \frac{G}{J_0^2}.
\end{aligned}$$

Такое переопределение приобретает смысл при значениях $a \le D/2$. При этом J_0, J_1, G становятся расходящимися функциями. Вводя же параметр обрезания Λ и рассматривая предел отношений

$$\begin{aligned}
\frac{J_1}{J_0^2} &= \int\limits_0^\Lambda\int\limits_0^\Lambda \frac{d^Dq\,d^Dp}{(1+|\mathbf{q}|^a)^2(1+|\mathbf{p}|^a)(1+|q^2+p^2+2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}|^a)}\left[\int\limits_0^\Lambda \frac{d^Dq}{(1+|\mathbf{q}|^a)^2}\right]^{-2},\\
\frac{G}{J_0^2} &= -\frac{\partial}{\partial|\mathbf{k}|^a}\int\limits_0^\Lambda\int\limits_0^\Lambda \frac{d^Dq\,d^Dp}{(1+|q^2+k^2+2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}|^a)(1+|\mathbf{p}|^a)(1+|q^2+p^2+2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}|^a)}\left[\int\limits_0^\Lambda \frac{d^Dq}{(1+|\mathbf{q}|^a)^2}\right]^{-2},
\end{aligned} \qquad (5)$$

Значения фиксированных точек и собственных значений матрицы устойчивости

a	v_1^*	v_2^*	v_3^*	b_1	b_2	b_3
1.9	0.035842	0.035842	0.039202	0.069	0.505	0.702
1.8	0.033682	0.033682	0.034575	0.090	0.571	0.753
1.7	0.031287	0.031287	0.031334	0.113	0.629	0.809
1.6	0.027427	0.027427	0.026699	0.157	0.738	0.919
1.5	0.026514	0.026514	0.025973	0.171	0.762	0.949

при $\Lambda \to \infty$ получаем конечные выражения.

Значения интегралов находились численно. Для случая $a \leq D/2$ строилась последовательность значений J_1/J_0^2 и G/J_0^2 при различных значениях Λ и аппроксимировалась на бесконечность.

Известно, что ряды теории возмущений являются асимптотическими, а вершины взаимодействия флуктуаций параметров порядка во флуктуационной области достаточно велики, чтобы можно было непосредственно применять выражения (4). Поэтому с целью извлечения из полученных выражений нужной физической информации был применен обобщенный на многопараметрический случай метод Паде–Бореля. При этом прямое и обратное преобразования Бореля имеют вид

$$f(v_1, v_2, v_3) = \sum_{i_1, i_2, i_3} c_{i_1 i_2 i_3} v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3} = \\ = \int_0^\infty e^{-t} F(v_1 t, v_2 t, v_3 t, z_1 t, z_2 t, w_1 t, w_2 t)\, dt, \quad (6)$$

$$F(v_1, v_2, v_3) = \sum_{i_1, i_2, i_3} \frac{c_{i_1, i_2, i_3}}{(i_1 + i_2 + i_3)!} v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3}. \quad (7)$$

Для аналитического продолжения борелевского образа функции вводится ряд по вспомогательной переменной θ:

$$\tilde{F}(v_1, v_2, v_3, \theta) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \sum_{i_1, i_2, i_3} \frac{c_{i_1 i_2 i_3}}{k!} v_1^{i_1} v_2^{i_2} v_3^{i_3} \delta_{i_1+i_2+i_3, k}, \quad (8)$$

к которому применяется аппроксимация Паде [L/M] в точке $\theta = 1$.

В двухпетлевом приближении для вычисления β-функций был использован аппроксимант [2/1]. Природа критического поведения определяется существованием устойчивой фиксированной точки (v_1^*, v_2^*, v_3^*), удовлетворяющей системе уравнений:

$$\beta_i(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Требование устойчивости фиксированной точки сводится к условию, чтобы собственные значения b_i матрицы

$$B_{i,j} = \frac{\partial \beta_i(v_1^*, v_2^*, v_3^*)}{\partial v_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

лежали в правой комплексной полуплоскости.

Полученная система просуммированных β-функций содержит широкое разнообразие фиксированных точек, лежащих в физической области значений вершин с $v_i \geq 0$. Полный анализ фиксированных точек, соответствующих критическому поведению только одного параметра порядка, приведен в работе [1]. Рассмотрим совместное критическое поведение обоих параметров порядка. Устойчивые фиксированные точки и собственные значения матрицы устойчивости приведены в таблице.

Анализ значений фиксированных точек и их устойчивости позволяет сделать ряд выводов. Для значений параметра дальнодействия $a > 1.6$ так же, как и для короткодействующих [2] систем, наблюдается бикритическое поведение ($v_3^2 \geq v_1 v_2$). Для значений $1.5 < a \leq 1.6$ поведение становится тетракритическим ($v_3^2 < v_1 v_2$).

Таким образом, эффекты дальнодействия приводят к смене бикритического поведения тетракритическим при значениях параметра дальнодействия $1.5 < a \leq 1.6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Белим, Письма в ЖЭТФ **77**, 118 (2003).
2. В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. А. Федоренко, ФТТ **42**, 1, 158 (2000).
3. D. Amit, *Field Theory the Renormalization Group and Critical Phenomena*, McGraw-Hill, New York (1976).
4. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (1989).