

СТРУКТУРА ХАОТИЧЕСКОГО СЛОЯ МАЯТНИКА

В. В. Вечеславов*

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 23 июня 2003 г.

Продолжено изучение хаотического слоя маятника в области, где сепаратрисное отображение содержит гармоники как одинарной, так и двойной частоты. Построены резонансные инварианты первых трех порядков для гармоники двойной частоты. Вместе с уже известными инвариантами для одинарной частоты это позволило получить дополнительную информацию о слое и исследовать, в частности, окрестности нулей интегралов Мельникова–Арнольда.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема взаимодействия нелинейных резонансов и образования динамического хаоса в типичных (т. е. неинтегрируемых) гамильтоновых системах все еще далека от своего разрешения и продолжает привлекать к себе внимание исследователей. Очень часто рассматриваемую задачу удается свести к изучению поведения маятника (основной резонанс, вблизи которого выбираются начальные условия), находящегося под действием квазипериодического возмущения

$$H(y, p, t) = \frac{p^2}{2} + \omega_0^2 \cos y + V(y, t), \quad (1)$$

$$V(y, t) = \varepsilon_1 \cos(m_1 y - \Omega_1 t) + \varepsilon_2 \cos(m_2 y - \Omega_2 t), \quad (2)$$

где амплитуды гармоник $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$ считаются малыми.

Во многих работах (см., например, [1–3]) рассматривалась ситуация в окрестности невозмущенных сепаратрис основного резонанса. Напомним, что каждая такая сепаратриса идет из седла в седло и образуется двумя пространственно совпадающими траекториями, отвечающими ходу времени соответственно вперед и назад. Период движения по сепаратрисам бесконечен, взаимодействие резонансов здесь всегда существенно и именно эта область традиционно считалась «зародышем» хаоса.

Так оно и есть на самом деле для аналитического потенциала основного резонанса, фурье-амплитуды которого убывают экспоненциально. В этом случае наличие хотя бы одного возмущающего резонанса всегда расщепляет каждую сепаратрису на две ветви, которые уже не возвращаются в седло и не совпадают друг с другом, но пересекаются в так называемых гомоклинических точках. Свободные концы этих ветвей образуют бесконечное число петель неограниченно возрастающей длины, которые заполняют узкую область вблизи невозмущенных сепаратрис. Именно эти петли и формируют хаотический слой, в котором необходимо различать три части: верхнюю w_{tp} (фаза y вращается сверху, $p > 0$), среднюю w_{md} (фаза колеблется) и нижнюю w_{bt} (фаза y вращается снизу, $p < 0$).

Но ситуация может быть кардинально иной, если потенциал является гладкой функцией, фурье-амплитуды которой убывают как некоторая степень их номера (см. [4] и ссылки там). Поразительные факты сохранения сепаратрис целых и дробных резонансов несмотря на наличие возмущения и сильного локального хаоса в кусочно-линейных системах приведены и обсуждаются в работах [5–7].

В исследовании хаотического слоя маятника можно отметить несколько этапов. Прежде всего, Чириков [1] подробно изучил формирование этого слоя для случая симметричного высокочастотного возмущения

$$V(y, t) = \varepsilon \cos\left(\frac{m}{2} y - \Omega t\right) + \varepsilon \cos\left(\frac{m}{2} y + \Omega t\right), \quad (3)$$

*E-mail: vecheslavov@inp.nsk.su

$\Omega \gg \omega_0$ и m — целое число. Используя свойства стандартного отображения и свой критерий перекрытия резонансов, он показал, что в этом высокочастотном пределе все три части слоя имеют одинаковый размер

$$w_{tp} = |w_{md}| = w_{bt} = \lambda W, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $\lambda = \Omega/\omega_0$ — так называемый параметр адиабатичности и $w = H(x, p, t)/\omega_0^2 - 1$ — относительное отклонение от невозмущенной сепаратрисы по энергии.

Входящая в (4) величина W является амплитудой гармоники сепаратрисного отображения системы (1), (3) частоты Ω :

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w + W \sin x, & \bar{x} &= x + \lambda \ln(32/|\bar{w}|), \\ & & x &= \Omega T_0 \bmod(2\pi). \end{aligned} \quad (5)$$

Это отображение, впервые введенное в работе [8], приближенно описывает динамику вблизи сепаратрисы в моменты T_0 прохождения системой состояния устойчивого равновесия (см. также [1]). Его итерации позволяют найти энергетический размер слоя (4).

Теоретическое значение амплитуды $W = W_T$ связано соотношением

$$W_T(\lambda) = \varepsilon \lambda A_m(\lambda) \quad (6)$$

с введенными в [1] интегралами Мельникова–Арнольда $A_m(\lambda)$ (эти интегралы приведены также в работах [9, 11]). Важно подчеркнуть, что в этом высокочастотном пределе $\lambda \rightarrow \infty$ величина W_T экспоненциально убывает с ростом λ .

Следующим по времени шагом явилось рассмотрение также высокочастотного, но не симметричного возмущения (2). Первые же численные эксперименты [9, 10] показали, что картина здесь кардинально отличается от симметричного случая: в спектре сепаратрисного отображения системы помимо явно входящих в возмущение (2) первичных частот Ω_1, Ω_2 появляются также пропорциональные величине $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ комбинационные гармоники на их сумме и разности. Еще более удивительным оказался тот факт, что при определенных условиях именно эти вторичные гармоники полностью определяют размер хаотического слоя. В [10] приведен пример, когда вклад вторичной гармоники на сумме частот в амплитуду сепаратрисного отображения в несколько сотен раз превысил вклады от первичных гармоник. Этот факт объясняется упоминавшейся выше экспоненциальной зависимостью W_T от частоты, что и приводит к аномально сильному влиянию слабых, но низкочастотных вторичных гармоник.

В [11] построены резонансные инварианты первых трех порядков сепаратрисного отображения (5) и полученные с их помощью результаты сравниваются с данными численного счета. Здесь же показано, что каждый такой инвариант неплохо передает расположение и форму «своего» резонанса и позволяет надежно оценить величину скачка в размере хаотического слоя после его объединения с этим резонансом. Как и всякое аналитическое описание, инварианты не в состоянии уловить хаотическую компоненту и, в частности, передать размер хаотического слоя.

Наконец, в недавней работе [12] изучалась низкочастотная асимптотика для симметричного возмущения (3) и было показано, что в этом случае энергетический размер хаотического слоя вообще перестает зависеть от частоты. Это прямо следует из асимптотических свойств интегралов Мельникова–Арнольда и того факта, что при их выводе в обзоре [1] не делалось никаких упрощающих предположений и допущений. Они справедливы при любой частоте возмущения и стремятся к постоянной (зависящей только от значения m) величине вместе с $\lambda \rightarrow 0$. Заметим, что амплитуда сепаратрисного отображения в этом пределе растет линейно с λ и потому роль вторичных гармоник при несимметричном возмущении, в отличие от высокочастотного случая, оказывается исчезающе мала.

В [12] показано также, что наиболее трудным для анализа оказывается участок средних частот возмущений примерно в интервале $0.1 \lesssim \lambda \lesssim 5$, где параметр адиабатичности нельзя считать ни малым, ни большим. Там же отмечалась важная роль, которая в этой области может принадлежать резонансным инвариантам. Мы вернемся к этому вопросу, после того как обсудим особенности спектрального состава сепаратрисного отображения.

2. РЕЗОНАНСНЫЕ ИНВАРИАНТЫ СЕПАРАТРИСНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Одной из особенностей сепаратрисного отображения маятника в области средних частот при симметричном возмущении (3) является то, что на самом деле оно содержит две гармоники с частотами Ω и 2Ω (см. [12]) и его следует переписать в виде

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w + W_1 \sin x + W_2 \sin 2x, \\ \bar{x} &= x + \lambda \ln(32/|\bar{w}|), \quad x = \Omega T_0 \bmod(2\pi), \end{aligned} \quad (7)$$

где W_1, W_2 — амплитуды гармоник соответственно одинарной и двойной частот. Гармоника двойной

частоты убывает при подходе к границам обеих (низкочастотной и высокочастотной) асимптотических областей и здесь ее влияние можно не учитывать, но в средней области так поступать нельзя. Особенно это относится к окрестностям нулей интегралов Мельникова–Арнольда, которые располагаются как раз в исследуемой области средних частот и число которых растет пропорционально параметру гармоника возмущения m [1]. Более того, когда значение параметра адиабатичности λ соответствует нулю интеграла, гармоника одинарной частоты проходит через нуль со сменой знака и сепаратрисное отображение в окрестности этого нуля вновь становится одночастотным, как (5), но с удвоенной частотой 2Ω (это следует из (7) при $W_1 = 0$).

Используя предложенную в [9] технику, можно показать, что эта гармоника оказывается вторичной, т. е. пропорциональна ε^2 (что подтверждается численным экспериментом) и возникает на разности частот. Мы не делаем этого из-за того, что получающиеся выражения оказываются слишком громоздкими.

Для сепаратрисного отображения (5) с одинарной частотой резонансные инварианты построены в [11]. В настоящей работе к ним добавляются инварианты двойной частоты, что позволит нам исследовать окрестности нулей интегралов Мельникова–Арнольда.

Напомним, что сепаратрисное отображение, как и известное стандартное отображение Чирикова, принадлежит к классу так называемых явных отображений поворота вида

$$\bar{J} = J - \xi \frac{dQ(\theta)}{d\theta}, \quad \bar{\theta} = \theta + 2\pi\nu(\bar{J}), \quad (8)$$

где J, θ — переменные действие–угол, $\nu(J)$ — частота невозмущенного движения и $Q(\theta + 2\pi) = Q(\theta)$ в общем случае является тригонометрическим полиномом (см., например, (7)).

Разностные уравнения (8), как известно, во всех отношениях эквивалентны непрерывным уравнениям Гамильтона с возмущением в форме толчков

$$\dot{\theta} = \nu(J), \quad \dot{J} = -\xi \delta_*(t) \frac{dQ(\theta)}{d\theta}, \quad (9)$$

где

$$\delta_*(t) = \left[1 + 2 \sum_{n \geq 1} \cos nt \right] / 2\pi$$

— периодическая дельта-функция [1, 2].

Сепаратрисному отображению с одной гармоникой двойной частоты отвечают зависимости

$$Q(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{2}, \quad \nu(J) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{32}{|w|}.$$

В работе [13] резонансным инвариантом порядка q названа функция динамических переменных и времени вида

$$S_q(J(t), \theta(t), t) = r_0(J) + \sum_{n=1}^q \frac{\xi^n}{n!} G_n(J, \theta, t), \quad (10)$$

для которой вдоль истинных траекторий системы (9) выполнено условие

$$\frac{D}{Dt} S_q(J(t), \theta(t), t) = \mathcal{O}(\xi^{q+1}), \quad (11)$$

где D/Dt — обобщенная производная, равная сумме обычной производной и обусловленной разрывами компоненты [14]. В [13] также показано, что величины всех входящих в (10) слагаемых сохраняются на интервалах времени между толчками и претерпевают скачкообразные изменения только в моменты толчков. Таким образом, обычная производная в (10) всюду равна нулю и условие (11) надо понимать как ограничение на величину разрыва первого рода ступенчатой функции.

Следуя подробно изложенной в [13] технике, для первых трех инвариантов двойной частоты находим

$$G_1(J, \theta, t) = \frac{r'_0(J)}{2 \sin(2\pi\nu(J))} \cos 2\Theta, \quad (12)$$

$$G_2(J, \theta, t) = \frac{a'_1(J)}{4 \sin(4\pi\nu(J))} \cos 4\Theta, \quad (13)$$

$$G_3(J, \theta, t) = \frac{r'''_0(J) + 3a'_2(J)}{16 \sin(6\pi\nu(J))} \cos 6\Theta - 3 \frac{r''_0(J) + a'_2(J)}{16 \sin(2\pi\nu(J))} \cos 2\Theta. \quad (14)$$

В последних формулах штрих означает производную по J и использованы зависимости

$$\begin{aligned} \Theta &= \theta + (\pi - t_*)\nu(J), \\ a_1(J) &= r'_0 \operatorname{ctg}(2\pi\nu(J)), \\ a'_2(J) &= a'_1 \operatorname{ctg}(4\pi\nu(J)), \end{aligned} \quad (15)$$

где $0 < t_* \leq 2\pi$ — локальное время между толчками.

Выражения (12)–(14) содержат резонансные знаменатели, которые надо устранить по описанному в работе [15] методу (ДЛТ). Для этого следует распорядиться входящей в эти формулы функцией r'_0 так,

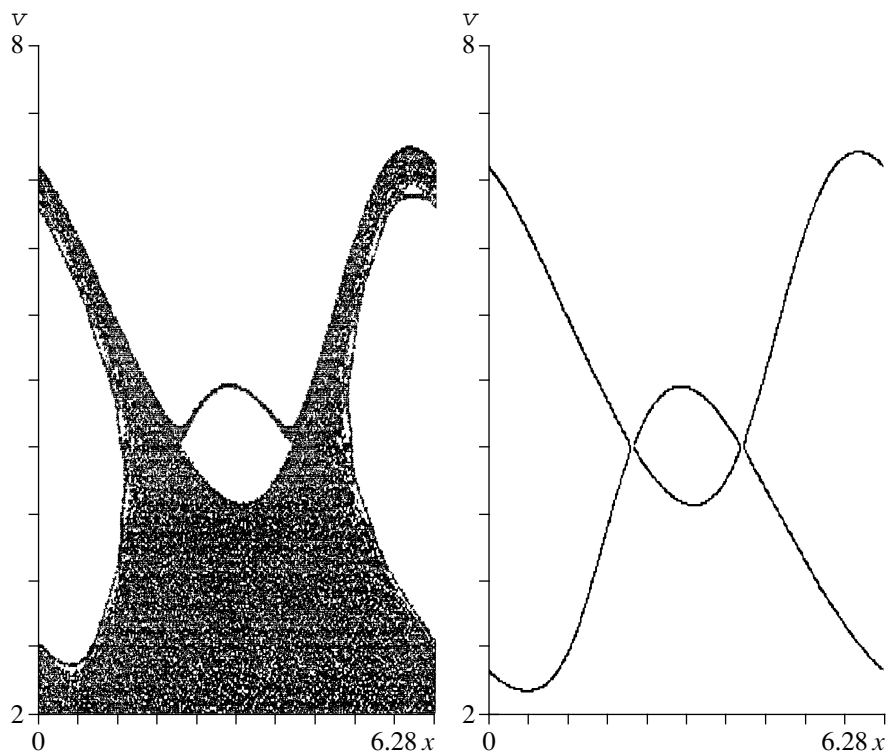


Рис. 1. Амплитуды гармоник в отображении (7): $W_1 = 3.81 \cdot 10^{-3}$, $W_2 = 2.93 \cdot 10^{-3}$. Слева хаотический слой основного резонанса. Справа линии уровня инварианта первого порядка (П.5)

чтобы число и порядок ее нулей совпали с числом и порядком полюсов резонансных знаменателей. Выбор этих функций и формулы для инвариантов первых трех порядков двойной частоты в исходных переменных x, w выписаны в Приложении.

3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА И ПОСТРОЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ

В качестве первого примера рассмотрим систему (1) с симметричным возмущением (3) и параметрами

$$\omega_0 = 1.0, \quad \varepsilon = 0.01, \quad m = 4, \quad \Omega = 1.8.$$

Ей отвечает сепаратрисное отображение (7) с близкими по величине амплитудами одинарной $W_1 = 3.81 \cdot 10^{-3}$ и двойной $W_2 = 2.93 \cdot 10^{-3}$ частот; параметр адиабатичности равен $\lambda = 1.8$.

Слева на рис. 1 приведена картинка основного хаотического слоя; по вертикальной оси отложен относительный размер $v = w/|W_1 + W_2|$. В верхней части этого слоя расположился объект, который, на

первый взгляд, напоминает полуцелый резонанс. На самом деле это два целых резонанса, внутренности которых (островки устойчивости) никак не связаны друг с другом.

Справа построены линии уровня инварианта первого порядка сепаратрисного отображения (формула (П.5)), который правильно описывает совместное действие обеих входящих в (7) гармоник.

На следующих двух рисунках используются второй и третий инварианты двойной частоты, и потому они построены в нуле интеграла Мельникова–Арнольда $A_4(\lambda) = 0$ при $\lambda = \lambda_1 = 1.41715$, где одинарная частота отсутствует. По вертикальной оси на этих рисунках отложена величина $v = w/W_2$.

Рисунок 2 относится к системе (1), (3) с $\varepsilon = 0.0287$, $\Omega = 1.41715$, ей отвечает сепаратрисное отображение (7) с амплитудами $W_1 = 0$, $W_2 = 6.7 \cdot 10^{-3}$. На нем показаны две хаотические траектории, из которых верхняя окружает полуцелый резонанс сепаратрисного отображения, островки которого переходят друг в друга. Нижняя траектория является основным хаотическим слоем и рисунок относится к ситуации, предшествующей (по возмущению) моменту слияния этих объектов.

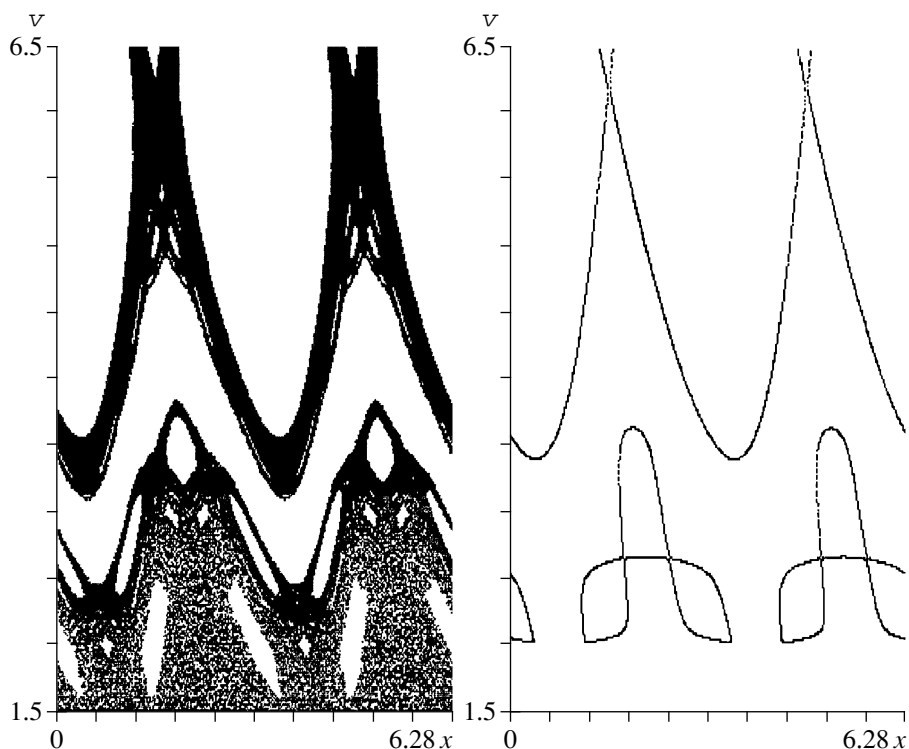


Рис. 2. Амплитуды гармоник в отображении (7): $W_1 = 0$, $W_2 = 6.7 \cdot 10^{-3}$. Слева две траектории, нижняя из которых является хаотическим слоем основного резонанса. Справа сверху линии уровня инварианта первого порядка (П.5), снизу — третьего порядка (П.7)

В основном слое отчетливо видны цепочки из четырех и шести островков, которые описываются вторым и третьим инвариантами двойной частоты (соответственно формулы (П.6) и (П.7)). Анализ этих цепочек показал, что первая из них представляет резонанс четвертого порядка, а вторая — два отдельных резонанса третьего порядка, причем принадлежащие каждому из них три островка расположены через один. Эти резонансы в основном слое перекрыты, линии их инвариантов пересекаются, рисунок получается некрасивым и потому мы показали на нем только линии третьего инварианта.

Наконец, на рис. 3 показано слияние главного резонанса с основным хаотическим слоем при увеличении возмущения до значения $\epsilon = 0.03$, когда размер слоя скачком возрастает на величину фазового объема присоединившегося резонанса. Здесь также линии второго и третьего инвариантов пересекаются и для разнообразия показан только второй.

Мы продемонстрировали качество второго и третьего инвариантов двойной частоты, исследуя окрестность единственного нуля интеграла Мельникова–Арнольда с параметром $m = 4$. Выше

отмечалось, что с ростом m число нулей этого интеграла также растет и в каждом из них, как показали наши предварительные измерения, сепаратрисное отображение представлено единственной гармоникой двойной частоты. Можно надеяться, что роль и значение полученных в настоящей работе инвариантов с увеличением m будет существенно возрастать.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возмущенный маятник, как и его дискретный аналог — стандартное отображение, — является весьма распространенной в нелинейной динамике моделью, которой посвящено и с помощью которой выполнено огромное число работ.

Приведенные в [11] и в настоящей работе резонансные инварианты сепаратрисного отображения могут, по нашему мнению, стать основой дальнейшего более детального изучения хаотического слоя маятника в наиболее трудной для анализа области средних частот. Практика показала, что использование с этой целью инвариантов первых трех порядков вполне достаточно.

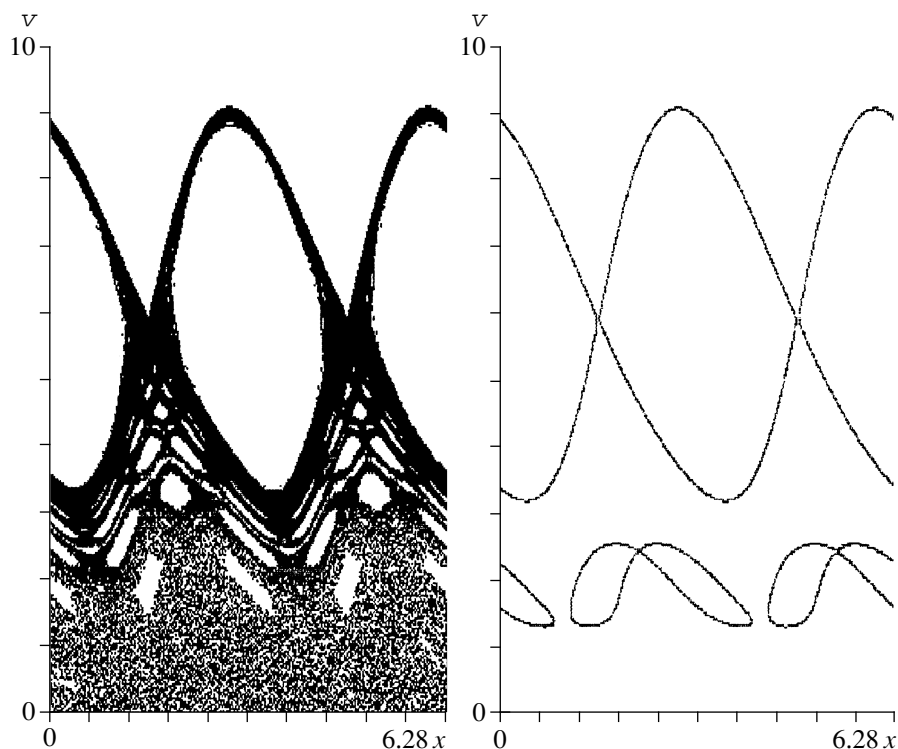


Рис. 3. Амплитуды гармоник в отображении (7): $W_1 = 0, W_2 = 7.0 \cdot 10^{-3}$. Слева хаотический слой основного резонанса. Справа сверху линии уровня инварианта первого порядка (П.5), снизу — второго порядка (П.6)

Желательно также дальнейшее развитие теории самих инвариантов и построение формул второго и третьего порядков, учитывающих действие обеих входящих в отображение (7) гармоник (как это сделано для первого инварианта (см. формулу (П.5)).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 01-02-16836) и комплексной научной программы РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

ПРИЛОЖЕНИЕ

Резонансные инварианты сепаратрисного отображения двойной частоты

Для фактического построения инвариантов сепаратрисного отображения удобно возвратиться от переменных действие–фаза J, θ к прежним переменным сепаратрисного отображения x, w , поэтому во всех формулах данного Приложения штрих означает производную по w . Как отмечалось в [11], прямое использование формул (12)–(14) сильно затруднено из-за вычислительной неустойчивости при по-

строении линий уровня инварианта. Положение резко улучшается, если вместо w ввести новую переменную вида

$$z(w) = \frac{\lambda}{2} \ln \frac{32}{|w|}. \tag{П.1}$$

Чтобы получить правильную картину резонансов на плоскости x, w , надо положить входящий в (15) момент наблюдения t_* равным 2π .

Предложенные в [13] для подавления малых знаменателей стандартного отображения конкретные зависимости r'_0 оказались также пригодны для сепаратрисного отображения одинарной частоты и были использованы в работе [11]. В случае двойной частоты это не так и их пришлось подбирать заново. В наших обозначениях имеем для инварианта первого порядка

$$r'_0 = \sin 2z, \tag{П.2}$$

для инварианта второго порядка

$$r'_0 = \sin^2 2z \sin 4z = \frac{\sin 4z}{2} - \frac{\sin 8z}{4}, \tag{П.3}$$

и для инварианта третьего порядка

$$r'_0 = \sin^2 2z \sin^2 4z \sin 6z = \frac{1}{16} (\sin 2z + 3 \sin 6z - \sin 10z - 2 \sin 14z + \sin 18z). \tag{П.4}$$

Ниже выписаны выражения для первых трех инвариантов двойной частоты. Отметим, что первый инвариант, как оказалось, неплохо описывает также двухчастотное сепаратрисное отображение (7) (см. рис. 1), и потому в нем представлены обе амплитуды W_1, W_2 :

$$S_1 = e^{-2z/\lambda} (\sin 2z + \lambda \cos 2z) + \frac{1 + \lambda^2}{32} \times \\ \times \left[W_1 \cos z \cos(x - z) + \frac{W_2}{2} \cos 2(x - z) \right], \quad (\text{П.5})$$

$$S_2 = 16e^{-2z/\lambda} \times \\ \times \left[\frac{\sin 4z + 2\lambda \cos 4z}{1 + 4\lambda^2} - \frac{\sin 8z + 4\lambda \cos 8z}{2(1 + 16\lambda^2)} \right] + \\ + \frac{W_2}{2} \sin 2z \sin 4z \cos 2(x - z) - \\ - \frac{\lambda e^{2z/\lambda} W_2^2}{128} \cos 4z \cos 4(x - z), \quad (\text{П.6})$$

$$S_3 = e^{-2z/\lambda} c_0(z) + \frac{W_2}{2} \sin 2z \sin^2 4z \sin 6z \times \\ \times \cos 2(x - z) - \frac{3\lambda e^{2z/\lambda}}{2} \left(\frac{W_2}{8} \right)^2 \times \\ \times \sin 4z (\sin 2z + 3 \sin 10z) \times \\ \times \cos 4(x - z) + \frac{\lambda}{6} \left(\frac{e^{2z/\lambda}}{256} \right)^2 \times \\ \times W_2^3 [c_1(z) \cos 6(x - z) - 3c_2(z) \cos 2(x - z)]. \quad (\text{П.7})$$

В последнем выражении использованы обозначения

$$c_0(z) = g(2z) + 3g(6z) - g(10z) - 2g(14z) + g(18z), \\ g(nz) = \frac{2 \sin(nz) + n\lambda \cos(nz)}{1 + (n\lambda/2)^2},$$

$$c_1(z) = \lambda(27 + 35 \cos 4z + 49 \cos 8z + 81 \cos 12z) + \\ + 7 \sin 4z + 7 \sin 8z + 9 \sin 12z,$$

$$c_2(z) = \lambda(23 + 51 \cos 4z + 69 \cos 8z + 49 \cos 12z) + \\ + 5 \sin 4z + 11 \sin 8z + 7 \sin 12z.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
2. A. Lichtenberg and M. Leiberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer (1992).
3. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
4. B. V. Chirikov, Chaos, Solitons, and Fractals **1**, 79 (1991).
5. S. Bullett, Comm. Math. Phys. **107**, 241 (1986).
6. В. В. Вечеславов, *Динамика пилообразного отображения: 1. Новые численные результаты*. Препринт ИЯФ 2000-27, Новосибирск (2000); E-print archives, nlin.CD/0005048.
7. В. В. Вечеславов, Б. В. Чириков, ЖЭТФ **120**, 740 (2001).
8. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ **54**, 1590 (1965).
9. В. В. Вечеславов, ЖЭТФ **109**, 2208 (1996).
10. В. В. Вечеславов, Письма в ЖЭТФ **63**, 989 (1996).
11. В. В. Вечеславов, ЖТФ **72**, вып. 2, 20 (2002).
12. В. В. Вечеславов, *Хаотический слой маятника при низких и средних частотах возмущений*, Препринт ИЯФ 2003-11, Новосибирск (2003).
13. В. В. Вечеславов, ЖТФ **58**, вып. 1, 20 (1988).
14. И. М. Гельфонд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Гостехиздат, Москва (1958).
15. D. A. Dunnet, E. W. Laing, and J. B. Taylor, J. Math. Phys. **9**, 1819 (1968).