ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 2, стр. 423–440

О СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ ВО ВРЕМЕНИ КЛАССИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ ПО КВАНТОВЫМ КАНАЛАМ СВЯЗИ

С. Н. Молотков [*]

Институт физики твердого тела Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Факультет вычислительной математики и кибернетики,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 марта 2003 г.

Рассмотрено кодирование квантовых каналов связи в реальном времени для ситуации, когда классическая информация кодируется в непрерывные квантовые степени свободы (форму амплитуды квантовых состояний с произвольным числом фотонов). Показано, что нелокализуемость состояний в квантовой теории поля приводит к неизбежности учета тождественности частиц, что вместе с конечной предельной скоростью приводит к тому, что формулы для пропускной способности нерелятивистских каналов связи имеют асимптотический характер (справедливы формально лишь при бесконечной раздвижке между посылками, когда тождественностью частиц можно пренебречь, и, соответственно, бесконечно медленной скорости передачи во времени — [бит/посылка · с]). Получена величина пропускной способности в реальном времени последовательного релятивистского квантового канала связи с учетом тождественности частиц для чистых сигнальных состояний с произвольным числом фотонов. Получено также явное аналитическое выражение для пропускной способности квантового канала с конечной полосой пропускания во времени для однофотонных входных состояний.

PACS: 42.50.Dv, 89.70.+c

1. ВВЕДЕНИЕ

Пропускная способность является важнейшей характеристикой канала связи и определяет скорость передачи информации через него. Данная величина определяет асимптотическую границу в пределе длинных сообщений, до которой возможна безошибочная передача информации (точнее, со сколь угодно малой вероятностью ошибки). Классическая теория информации, а также теоремы кодирования, определяющие данную асимптотическую границу для каналов связи, формулируются в терминах статистических ансамблей. Источник дискретных сообщений описывается конечным или бесконечным набором символов (алфавитом) $x = \{x_i\}$, каждый из которых источник посылает в канал связи с априорными вероятностями $\{p(x_i)\}$. Дискретный канал связи без памяти задается входным и выходным алфавитом $y = \{y_i\}$, который может совпадать частично или полностью с входным алфавитом, а также переходными вероятностями $\{p(y_j|x_i)\}$, которые собственно описывают передаточные свойства канала связи.

Собственная информация источника описывается энтропией Шеннона [1], которая для ансамбля x равна

$$H(x) = -\sum_i p(x_i)\log p(x_i), \tag{1}$$

где используется логарифм по основанию 2. Величина $H(x)$ равна количеству информации в битах, приходящейся на один символ. Точнее, для достаточно длинной последовательности длины n ($n \to \infty$) информация в битах на один символ последовательности с вероятностью единица равна $H(x)$.

Модель статистических ансамблей отвечает реальной ситуации. Например, в стандартном английском тексте достаточно большой длины частота по-

[*] E-mail: molotkov@issp.ac.ru

явления отдельных букв x_i (символов алфавита) стремится к априорным вероятностям $p(x_i)$. Количество информации в битах на один символ в тексте равно 1.3 бит на один байт (восемь бит), $H(x) = 1.3/8$. Соответственно избыточность текста составляет $1–1.3/8 \approx 84\,\%$. Это означает, что достаточно длинный текст может быть сжат на 84 % без потери полезной информации.

Количество информации на один символ, которое может быть передано через канал связи, дается взаимной информацией

$$I(x;y) = H(x) - H(x|y),$$
$$H(x|y) = -\sum_{i,j} p(y_j)\frac{p(y_j|x_i)p(x_i)}{p(y_j)} \times \times \log\frac{p(y_j|x_i)p(x_i)}{p(y_j)}, \tag{2}$$

где $H(x|y)$ — условная энтропия входа относительно выхода, которая описывает потерю информации в канале, например, за счет шума. Соответственно информация, которую можно передать при помощи последовательности достаточно большой длины, стремится к $I_n(x;y) = nI(x;y)$.

Максимум (точнее, точная верхняя грань) взаимной информации по всевозможным входным априорным вероятностям $p(x_i)$

$$C = \max_{p(x_i)} I(x;y) = \lim_{n\to\infty} \max_{p(x_i)} \frac{I_n(x;y)}{n} \tag{3}$$

является пропускной способностью канала связи и определяет максимально возможное количество информации на один символ, которое может быть передано через канал связи безошибочно (со сколь угодно малой вероятностью ошибки) [1].

Обратим внимание на то, что пропускная способность C определяет «скорость» передачи информации в смысле числа бит (≤ 1) на одну посылку (символ алфавита) [бит/посылка], а не в смысле скорости передачи в реальном времени [бит/посылка·с], которая как раз и представляет наибольший интерес для приложений.

Рассуждения, приведенные выше, являются чисто математическими и никак не апеллируют к физической реальности, сами носители информации, которым приписываются определенные символы алфавита, также никак не конкретизируются. Хотя в любой реальной ситуации носителями информации всегда являются конкретные физические объекты (классические или квантовые). В нерелятивистской классической физике, когда говорят о пропускной способности для дискретных каналов как скорости передачи информации во времени, неявно подразумевают следующее. Поскольку нет никаких принципиальных ограничений на время приготовления классического объекта (локализованного или протяженного в пространстве), скорость передачи ограничена лишь частотой посылок во времени носителей информации в канал связи, которая также, в принципе, может быть произвольно большой. Если частота посылки в канал связи равна $1/T$, то скорость передачи информации есть

$$\frac{C}{T} \quad \left[\frac{\text{бит}}{\text{посылка}\cdot\text{с}}\right]. \tag{4}$$

Все сказанное выше относилось к классическим дискретным каналам связи. Классический сигнал, вообще говоря, должен описываться вещественной функцией координат и времени. Способность передавать информацию с помощью непрерывных во времени сигналов с конечной частотной полосой дается знаменитой теоремой Котельникова об отсчетах [2]. Последняя гласит, что для сигнала $f(t)$ (с конечной частотной полосой $\mathrm{supp} f(\omega) \in \Delta\omega$) число независимых степеней свободы (символов непрерывного алфавита) на конечном временном интервале T равно $2\Delta\omega T$. Если нет шума в канале и нет ограничений на амплитуду значений функции в отсчетных точках по времени, то формально пропускная способность стремится к бесконечности, поскольку набор значений каждой из $2\Delta\omega T$ степеней свободы может принимать любые значения.

Пропускная способность классического канала с аддитивным гауссовским шумом, конечной частотной полосой, гауссовским распределением значений входного непрерывного сигнала и ограниченной мощностью последнего дается знаменитой формулой Винера–Шеннона [1].

Описание классических каналов связи, когда сигнал является только функцией времени, является идеализацией. Если иметь в виду передачу информации в пространстве при помощи электромагнитных волн (именно эта ситуация неявно подразумевается), распространение которых обязано описываться уравнениями Максвелла, то невозможно рассматривать сигналы, которые являются только функциями координат. Поэтому описанные выше подходы являются идеализацией и не описывают ситуацию в полной мере. Кроме того, при понижении уровня сигнала неизбежно требуется учитывать квантовые эффекты. Например, в системах квантовой криптографии (квантовый канал связи в этом случае, как правило, представляет собой оптоволоконную линию связи), когда уровень сигнала приближается к однофотонному, требуется релятивистское квантовое описание ситуации, поскольку фотоны, будучи безмассовыми частицами, являются принципиально релятивистскими объектами. Выяснение фундаментальных ограничений, накладываемых на пропускную способность канала связи во времени как квантовой природой сигнала, так и специальной теорией относительности, уже на сегодняшний день представляет вполне практический интерес. Поскольку все реализованные прототипы квантовых криптосистем используют оптоволокно, которое в силу свойств материала имеет конечную полосу пропускания, получение формул для пропускной способности, описывающих скорость передачи информации во времени, представляет даже прагматический интерес.

2. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ КВАНТОВЫЕ КАНАЛЫ СВЯЗИ С РАЗЛИЧИМЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Пока речь шла о классических каналах связи. При понижении уровня сигнала до уровня отдельных фотонов неизбежно должны возникать принципиальные ограничения на пропускную способность и скорость передачи классической информации при помощи квантовых состояний. Этот вопрос представляет вполне практический интерес в связи с задачами квантовой криптографии.

На сегодняшний день получены глубокие и красивые результаты по кодированию в нерелятивистских квантовых каналах связи [3–6]. Достигнуто существенное продвижение в понимании передачи квантовых состояний как таковых, а также передачи классической информации при помощи распределенных квантовых каналов связи (сверхплотное кодирование, см., например, [7]). Несмотря на достигнутый прогресс, нет четкого ответа на вопрос о скорости передачи классической информации при помощи квантовых состояний в реальном времени, что связано прежде всего с тем, что упомянутые теоремы кодирования формулируются как протоколы обмена в пространстве состояний квантовой системы (гильбертовом пространстве), без явного введения в задачу пространства-времени и, соответственно, без явного учета пространственно-временной структуры квантовых состояний. Без явного учета этих обстоятельств невозможно получить ограничения, диктуемые как квантовой природой состояний, так и наличием предельной скорости распространения.

Теоремы кодирования, определяющие пропускные способности при передаче классической информации при помощи квантовых состояний, по аналогии с классическим случаем формулируются в терминах квантовых статистических ансамблей [3–7]. Классическому алфавиту $\{x_i\}$ сопоставляется квантовый алфавит, описываемый матрицами плотности $\{\rho_i\}$, которые источник приготавливает с априорными вероятностями $\{p_i\}$. Пространством состояний отдельного квантового носителя является гильбертово пространство состояний $\mathcal{H}$, в котором действует оператор матрицы плотности. Сообщение длины n описывается тензорным произведением отдельных символов квантового алфавита (матриц плотности) в отдельных посылках

$$\rho_{\mathbf{i}}^{(n)} = \rho_{i_1} \otimes \rho_{i_2} \otimes \ldots \otimes \rho_{i_n}, \quad \mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n). \quad (5)$$

Пространством состояний сообщений длины n является тензорное произведение

$$\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}. \quad (6)$$

Сам квантовый канал связи описывается преобразованием (отображением) входных операторов матриц плотности в выходные операторы матриц плотности. Согласно теореме представления Крауса [8], допустимые законами квантовой механики преобразования матриц плотности ρ в матрицы плотности ρ' даются отображением

$$\rho' = \mathcal{T}[\rho], \quad (7)$$

которое обладает свойствами линейности, сохраняет след и является полностью положительным. Любое такое преобразование дается представлением

$$\mathcal{T}[\ldots] = \sum_k V_k[\ldots]V_k^+, \quad (8)$$

где операторы V_k реализуют разбиение единицы в $\mathcal{H}$:

$$\sum_k V_k^+ V_k = I. \quad (9)$$

Такое отображение операторов в операторы называют либо инструментом (по терминологии [8]), либо супероператором. Задание супероператора является полным описанием квантового канала связи аналогично тому, как описание канала в классическом случае дается заданием переходных вероятностей.

Соответственно, частичное сообщение длины n на выходе канала (5) будет описываться следующим образом:

$$\mathcal{T}[\rho^{(n)}] = \mathcal{T}[\rho_{i_1}] \otimes \mathcal{T}[\rho_{i_2}] \otimes \ldots \otimes \mathcal{T}[\rho_{i_n}]. \quad (10)$$

Извлечение классической информации из квантовых состояний на приемном конце осуществляется посредством измерений над выходной матрицей плотности $\mathcal{T}[\rho^{(n)}]$. Любое измерение описывается некоторым разбиением единицы в $\mathcal{H}^{\otimes n}$:

$$I^{(n)} = I^{\otimes n} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{M}_{\mathbf{k}}^{(n)}, \qquad (11)$$

индекс $\mathbf{k}$ нумерует исходы измерений. Обратим внимание на то, что не предполагается, что измерения делаются над состоянием в каждой посылке, а производятся сразу над сообщениями длины n как целыми (так называемые коллективные измерения). Именно на таких измерениях достигается максимум взаимной информации между входом и выходом. Отметим, что в классических дискретных каналах связи без памяти ничего подобного нет (достаточно производить измерения над каждой отдельной посылкой) (см. [5–7]).

Величина взаимной информации между выходом и входом для ансамбля сообщений длины n дается выражением

$$I_n(p, \mathcal{M}) = \sum_{\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{i}} P_{\mathbf{i}} P(\mathbf{j}|\mathbf{i}) \log \frac{P(\mathbf{j}|\mathbf{i})}{\sum\limits_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}} P(\mathbf{j}|\mathbf{k})}, \qquad (12)$$

где

$$P(\mathbf{j}|\mathbf{i}) = \mathrm{Tr}\{\rho_{\mathbf{i}}^{(n)'} \mathcal{M}_{\mathbf{j}}^{(n)}\} \qquad (13)$$

есть вероятность того, что частичное сообщение $\mathbf{i}$ длины n на передающем конце будет интерпретировано как сообщение $\mathbf{j}$ на приемном конце. Величина взаимной информации между входом и выходом канала связи зависит от того, какие измерения используются при извлечении классической информации из квантового ансамбля.

Пропускная способность (количество бит) на одну посылку определяется как

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \max_{\{p_i, \mathcal{M}^{(n)}\}} \left(\frac{1}{n} I_n(p, \mathcal{M}) \right), \qquad (14)$$

максимум взаимной информации по всевозможным входным априорным вероятностям и измерениям на приемном конце (сами состояния носителей ρ_i считаются фиксированными). Величина C представляет собой количество классической информации в битах (≤ 1) в пересчете на одну посылку (на один символ квантового алфавита ρ_i), которое может быть передано через канал связи в пределе длинных последовательностей со сколь угодно малой вероятностью ошибки.

Нужно отметить, что запись сообщений (5), (10) в виде тензорного произведения матриц плотности автоматически подразумевает, что квантовые состояния в каждой посылке направляются в канал связи независимо от других. Однако максимум взаимной информации достигается при коллективных измерениях на приемном конце, когда измеряются не состояния в каждой отдельной посылке, а состояние целых отдельных сообщений как единого составного квантового объекта. В этом месте возникает принципиальное отличие квантовых каналов от классических.

Тот факт, что источник посылает квантовые состояния, которые описываются матрицами плотности ρ_i и выбираются источником в соответствии с априорными вероятностями p_i, означает, что состояние источника также описывается матрицей плотности

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i. \qquad (15)$$

Соответственно, состояние на выходе канала есть результат действия супероператора на матрицу плотности источника ρ (15). Тогда имеем

$$\rho' = \mathcal{T}[\rho] = \sum_i p_i \rho_i' = \sum_i p_i \mathcal{T}[\rho_i]. \qquad (16)$$

Величина классической информации (в битах), которая может быть извлечена из квантового ансамбля на выходе канала в результате измерений, принципиально ограничена величиной, диктуемой фундаментальным неравенством, доказанным Холево [3],

$$\chi \le H\left(\sum_i p_i \rho_i'\right) - \sum_i p_i H(\rho_i'), \qquad (17)$$

равенство достигается тогда и только тогда, когда матрицы плотности в ансамбле коммутируют, $[\rho_i', \rho_j'] = 0$ $(i \ne j)$. Здесь $H(\rho)$ есть энтропия фон Неймана, которая является квантовым аналогом энтропии Шеннона:

$$H(\rho) = -\,\mathrm{Tr}\{\rho \log \rho\}. \qquad (18)$$

Если матрицы плотности ρ_i' отвечают чистым состояниям, $\rho_i' = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$, то данное условие коммутативности матриц плотности означает ортогональность состояний. Ортогональные квантовые состояния являются достоверно различимыми и в этом смысле аналогичны классическим состояниям. При этом энтропия фон Неймана переходит в энтропию Шеннона

$$\chi \le H(p) = -\sum_i p_i \log p_i. \qquad (19)$$

Замечательным результатом является то, что фундаментальная граница Холево достижима и представляет собой пропускную способность квантового канала связи [3, 5–7],

$$C = \max_{\{p_i\}} \left\{ H\left(\sum_i p_i \mathcal{T}[\rho_i]\right) - \sum_i p_i H\left(\mathcal{T}[\rho_i]\right) \right\}. \quad (20)$$

До сих пор не конкретизировался тип объекта, которому предписывались квантовые состояния ρ_i. Кроме того, в задаче никак не фигурируют ни время, ни пространство. Поэтому невозможно ничего сказать о скорости передачи информации в реальном времени, в смысле [бит/посылка·с]. В нерелятивистской квантовой механике такой подход в принципе не является внутренне противоречивым. Хотя время в задаче никак не фигурирует, тем не менее подразумевается (однако часто явно не оговаривается), что из-за того что нет никаких принципиальных ограничений на время приготовления квантовых состояний (даже протяженных в пространстве) и, соответственно, на время их измерения, скорость передачи во времени будет ограничена лишь частотой посылок состояний в канал связи. Последняя может быть в принципе сколь угодно большой.

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ КВАНТОВЫЕ КАНАЛЫ СВЯЗИ С ТОЖДЕСТВЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Совсем иная ситуация имеет место в релятивистском случае. Поскольку фотоны являются единственно приемлемыми носителями информации при передаче информации на большие расстояния и из-за безмассовости являются принципиально релятивистскими частицами, без явного введения в задачу пространства-времени Минковского невозможно получить ответ о скорости передачи классической информации при помощи квантовых состояний.

Любая реальная передача информации происходит во времени и пространстве. Более того, сам факт существования пространства-времени приводит к тому, что существуют лишь определенные типы элементарных квантовых систем (частиц). Это означает, что базисным векторам неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре, действующих в гильбертовом пространстве состояний, ставятся в соответствие различные типы частиц (электроны, позитроны, фотоны, нейтрино и т. д.). Базисные векторы, отвечающие различным неприводимым представлениям (разным типам частиц), имеют различные трансформационные свойства при преобразованиях пространства-времени Минковского [9–11].

Далее мы будем рассматривать одномерную ситуацию. Такое приближение физически оправдано, поскольку оптоволоконные системы, которые играют роль квантовых каналов связи, являются квазиодномерными системами. Фотонное квантованное поле имеет поперечный характер, для дальнейшего нам будет более существен факт безмассовости фотонного поля. Мы будем игнорировать поляризационные степени свободы, поскольку нас будет интересовать кодирование в форму квантованного состояния фотонного поля. Ранее была рассмотрена ситуация квантового бинарного канала связи, когда кодирование проводилось в поляризационные степени свободы [12] однофотонного состояния. Рассматриваемый ниже случай кодирования в непрерывные степени свободы (не обязательно однофотонного) является более сложным.

Символам классического алфавита (конечного или бесконечного) $\{x_i\}$ ставятся в соответствие чистые состояния квантованного поля. Символу классического алфавита ставится в соответствие амплитуда φ_i (форма, сглаживающая функция) n_i-фотонного состояния $|\varphi_i\rangle$. Состояние квантованного поля представляется в виде (число фотонов n_i в состоянии определяется числом операторов рождения $\varphi^+(\hat{x}_k)$)

$$|\varphi_i\rangle = \int \ldots \int d\hat{x}_1 \ldots d\hat{x}_{n_i} \times \\ \times \varphi_i(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n_i}) \varphi^+(\hat{x}_1) \ldots \varphi^+(\hat{x}_{n_i})|0\rangle, \quad (21)$$

где полевые операторы (точнее, обобщенные функции с операторными значениями) для безмассового поля имеют вид

$$\varphi^+(\hat{x}) = \int d\hat{k}\, e^{i\hat{k}\hat{x}} a^+(\hat{k}) \theta(k_0) \delta(\hat{k}^2), \\ \hat{x} = (x, t), \quad \hat{k} = (k, k_0). \quad (22)$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям

$$[a^-(\hat{k}), a^+(\hat{k}')] = k_0 \delta(k - k'). \quad (23)$$

Обобщенные функции с операторными значениями $\varphi^+(\hat{x})$ нельзя считать просто операторами, действующими в $\mathcal{H}$, пусть даже неограниченными. Если $\varphi^+(\hat{x})$ считать просто операторами, то, как было показано Джаффе [13], требование лоренц-инвариантности скалярного произведения в $\mathcal{H}$ приводит к тому, что матричный элемент $\langle 0|\varphi^-(\hat{x}')\varphi^+(\hat{x})|0\rangle$, интерпретируемый как амплитуда рождения частицы в $\hat{x}=(x,t)$, распространение ее в пространстве-времени и уничтожение в $\hat{x}'=(x',t')$, $t'>t$, равен константе и не зависит от $\hat{x}$, $\hat{x}'$, что противоречит принципу релятивистской причинности.

Обобщенные базисные векторы (точнее, непрерывные линейные функционалы в $\mathcal{H}$) имеют вид

$$a^+(\hat{k})|0\rangle = |k\rangle, \quad \langle k|k'\rangle = k_0\delta(k-k'), \qquad \varphi^+(\hat{x})|0\rangle = |\hat{x}\rangle, \tag{24}$$

где $|\hat{x}\rangle$, $|k\rangle \in \Omega^*$ (пространству, сопряженному пространству основных функций $\varphi\in\Omega$). Физические состояния (нормированные векторы в $\mathcal{H}$) получаются как результат сглаживания базисных векторов с основными функциями (амплитудами) из Ω — пространства бесконечно дифференцируемых функций, спадающих на бесконечности быстрее обратной степени любого полинома. Для n_i-фотонного состояния, отвечающего символу i алфавита, имеем

$$|\varphi_i\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_1\ldots dk_{n_i}}{k_{01}\ldots k_{0n_i}}\times \varphi(k_1,k_{01}=|k_1|,\ldots,k_{0n_i},k_{0n_i}= =|k_{n_i}|)|k_1,\ldots,k_{n_i}\rangle. \tag{25}$$

Амплитуда $\varphi(k_1,\ldots)$ задается значениями на массовой поверхности $k_0=|k|$. Обобщенные базисные векторы $|k_1,\ldots\rangle\in\Omega^*$, $\varphi\in\Omega$, $|\varphi\rangle\in\mathcal{H}$. Конструкцию $\Omega\subset\mathcal{H}\subset\Omega^*$ называют оснащенным гильбертовым пространством (тройкой Гельфанда) [11, 14].

Далее будем рассматривать состояния, распространяющиеся в одном направлении $k>0$, именно такие состояния переносят информацию между пространственно удаленными пользователями. В этом случае амплитуда состояния принимает вид

$$|\varphi_i\rangle = \int\limits_{0}^{\infty}\ldots\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dk_1\ldots dk_{n_i}}{k_1\ldots k_{n_i}}\times \tilde{\varphi}_i(k_1,\ldots,k_{n_i})|k_1,\ldots,k_{n_i}\rangle, \tag{26}$$

где

$$\tilde{\varphi}_i(k_1,\ldots,k_{n_i}) = \varphi(k_1,k_{01}=k_1,\ldots,k_{n_i},k_{0n_i}=k_{n_i}).$$

Для дальнейшего нам потребуется представление состояния в координатно-временном представлении. В этом представлении состояние принимает вид

$$|\varphi_i\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} d(x_1-t_1)\ldots d(x_{n_i}-t_{n_i})\times \varphi_i(x_1-t_1,\ldots,x_{n_i}-t_{n_i})|x_1-t_1,\ldots,x_{n_i}-t_{n_i}\rangle = = |\varphi_i\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau_1\ldots d\tau_{n_i}\times \varphi_i(\tau_1,\ldots,\tau_{n_i})|\tau_1,\ldots,\tau_{n_i}\rangle. \tag{27}$$

Для состояний, распространяющихся в одном направлении, амплитуда состояния зависит лишь от разности $\tau_l = x_l - t_l$ $(l_1,\ldots,n_i)$. Физические состояния в $\mathcal{H}$ определяются значениями амплитуды на массовой поверхности. Зависимость амплитуды состояний, распространяющихся в одном направлении, от разности $\tau = x-t$ отражает тот факт, что если результат измерения имел место в момент t в окрестности точки $(x, x+dx)$, то такой же результат может быть получен в момент t' в окрестности точки $(x', x'-x+t+dx)$. Далее имеем

$$\varphi_i(\tau_1,\ldots,\tau_{n_i}) = \frac{1}{(2\pi)^{n_i}}\int\limits_{0}^{\infty}\ldots\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dk_1\ldots dk_{n_i}}{\sqrt{k_1\ldots k_{n_i}}}\times \exp(i(k_1\tau_1+\ldots+k_{n_i}\tau_{n_i}))\varphi_i(k_1,\ldots,k_{n_i}), \tag{28}$$

$$|\tau_1,\ldots,\tau_{n_i}\rangle = \int\limits_{0}^{\infty}\ldots\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dk_1\ldots dk_{n_i}}{\sqrt{k_1\ldots k_{n_i}}}\times \exp(-i(k_1\tau_1+\ldots+k_{n_i}\tau_{n_i}))|k_1,\ldots,k_{n_i}\rangle. \tag{29}$$

Поскольку фотоны являются бозонами, амплитуда состояния должна быть симметричной по перестановкам частиц. Это автоматически достигается, если сами обобщенные базисные векторы (точнее, непрерывные линейные функционалы) $|k_1,\ldots,k_{n_i}\rangle$ будут симметричными. По определению имеем [10–12]

$$|k_1,\ldots,k_{n_i}\rangle = a^+(\hat{k}_1)\ldots a^+(\hat{k}_{n_i})|0\rangle = = \sqrt{\frac{k_1\ldots k_{n_i}}{n_i!}}\sum_{\{j\}}\delta(k_i-q_{j_1})\ldots\delta(k_{n_i}-q_{j_{n_i}}), \tag{30}$$

где символ $\{j\}$ под знаком суммы означает всевозможные перестановки по индексам. Соответственно, скалярное произведение обобщенных базисных векторов есть

$$\langle k_1'\ldots k_m'|k_1\ldots k_n\rangle = = \delta_{n,m}k_1\ldots k_n\sum_{\{j\}}\delta(k_1-k_{j_i}')\ldots\delta(k_n-k_{j_n}'). \tag{31}$$

Данные соотношения являются определением обобщенных базисных векторов (непрерывных линейных функционалов — обобщенных функций). Данное соотношение ортогональности означает, что базисные векторы с разным числом частиц ортогональны.

Рассмотрим теперь передачу классической информации при помощи квантовых состояний. Разным символам классического алфавита $\{x_i\}$ ставятся в соответствие состояния квантованного поля (не обязательно однофотонного) с разными амплитудами (формами многофотонных пакетов) $|\varphi_i\rangle$. Вычислим пропускную способность в смысле [бит/посылка · с] для канала с конечной полосой пропускания Δk (используем систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$).

Будем использовать метод случайного кодирования (случайного выбора кодовых слов) аналогично [1, 3–7], который сводится к следующему. Случайным образом N раз выбираются с вероятностями p_i символы алфавита $|\varphi_i\rangle$. Генерируется M таких случайных векторов состояний длины N каждый. При этом возникает принципиальное отличие от квантовых каналов в нерелятивистском случае, когда считается, что состояния различимы и сообщение длины N описывается вектором состояний в виде тензорного произведения

$$|\varphi_{i_1}\rangle \otimes |\varphi_{i_2}\rangle \otimes \ldots \otimes |\varphi_{i_N}\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes N}. \qquad (32)$$

На словах такая запись означает, что квантовые состояния в каждой отдельной посылке направляются в канал связи независимо от предыдущих и последующих.

В релятивистском случае ситуация принципиально иная по двум причинам. Из-за принципиальной нелокализуемости амплитуд состояний, заданных на массовой поверхности, необходим учет тождественности частиц. Из-за тождественности частиц состояния в отдельных посылках не могут считаться независимыми. Нелокализуемость в квантовой теории поля означает, что амплитуда состояния (сглаживающая функция) отлична от нуля во всем пространстве и не может быть строго равна нулю вне любой компактной области пространства. Более того, на бесконечности амплитуда не может даже убывать экспоненциально. Условие квадратичной интегрируемости (нормировки) $\varphi(k)$ приводит к ограничениям на допустимую степень убывания $\varphi(\tau)$ на бесконечности ($\tau \to \infty$). Ответ дается теоремой Винера–Пэли [15]. Для квадратично-интегрируемой функции $\varphi(k)$, равной нулю на полуоси $k < 0$, но не равной нулю тождественно, должен сходиться следующий интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\varphi(\tau)|}{1+\tau^2} d\tau < \infty.$$

Отсюда следует, что амплитуда $\varphi(\tau)$ на «световом конусе» не может уменьшаться экспоненциально, но может уменьшаться по закону сколь угодно близкому к экспоненциальному:

$$|\varphi(\tau)| \propto \exp\left\{-\alpha|\tau| / \ln(\ln(\ln \ldots \ln|\tau|))\right\},$$

где α — любое положительное число, т. е. состояния нелокализуемы (отличны от нуля вне любого компакта). Принципиальной причиной подобной нелокализуемости является тот факт, что физические состояния определяются значениями амплитуды на массовой поверхности. Кроме того, возможность строгой локализации амплитуды, как было показано Хегерфельдом [16], противоречила бы релятивистской причинности.

Известно также, что свойство нелокализуемости тесно связано с причинностью в квантовой релятивистской области. Как отмечалось в работе [16], если бы можно было строго локализовать амплитуду состояния в конечной области в начальный момент, то в последующие моменты времени амплитуда состояния оказалась бы отличной от нуля в областях, отделенных от исходной пространственно-подобным интервалом, что приводило бы к возможности передавать классическую информацию быстрее скорости света.

Таким образом, из-за того что состояния квантованного поля нелокализуемы, амплитуды состояний в различных посылках неизбежно перекрываются. При этом автоматически приходится говорить лишь об общем векторе состояния всего сообщения длины N и учитывать тождественность частиц. Именно данное обстоятельство накладывает фундаментальные ограничения на скорость передачи информации во времени по квантовым каналам связи. В нерелятивистском описании (которое для фотонов, строго говоря, неприменимо) данные ограничения (особенно тождественность частиц) до сих пор не учитывались. Отметим, что учет тождественности частиц также является принципиальным в процессах телепортации [17], а также при реализации квантовых алгоритмов в реальных физических системах [18, 19].

Состояния в отдельных посылках можно сделать различимыми, если увеличить раздвижку во времени между последовательными посылками на большую величину (в принципе до бесконечности). Однако в этом случае скорость передачи информации во времени будет стремиться к нулю. Поэтому для выяснения вопроса о пропускной способности квантового канала связи (скорости передачи информации в реальном времени), вообще говоря, нельзя пользоваться формулами, которые получены без учета тождественности частиц, поскольку последние будут справедливы лишь при бесконечной раздвижке по времени между посылками, что отвечало бы бесконечно медленной передаче информации в единицу времени. В этом смысле формулы для пропускной способности для различимых частиц имеют асимптотический характер. Уменьшение расстояния во времени между отдельными посылками приводит к неизбежному учету тождественности частиц.

Нашей задачей как раз и будет выяснение вопроса о скорости передачи классической информации во времени при помощи квантовых состояний в зависимости от их формы, от раздвижки между отдельными посылками, от частотной полосы пропускания канала и величины временного окна наблюдения на приемном конце.

Распространение состояний к приемному концу определяется действием унитарного оператора, описывающего трансляцию. Чтобы не загромождать выкладки, явный вид оператора трансляций мы выписывать не будем, но будем подразумевать, что измерения на приемном конце проводятся над транслированными в пространстве-времени состояниями.

Вектор состояния, отвечающий кодовому слову длины N из случайного набора M кодовых слов, имеет вид

$$\begin{gathered}|\varphi_{i_1};\varphi_{i_2};\dots;\varphi_{i_N}\rangle = \\ = \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty d\mathbf{k}_{i_1}\dots d\mathbf{k}_{i_N} \exp(i\mathbf{k}_{i_1}\cdot\boldsymbol{\tau}_{0i_1}) \times \\ \times \varphi_{i_1}(\mathbf{k}_{i_1})\dots\exp(i\mathbf{k}_{i_N}\cdot\boldsymbol{\tau}_{0i_N})\varphi_{i_N}(\mathbf{k}_{i_N})|\mathbf{k}_{i_1}\dots\mathbf{k}_{i_N}\rangle = \\ = \int\limits_{-\infty}^\infty \dots \int\limits_{-\infty}^\infty d\boldsymbol{\tau}_{i_1}\dots d\boldsymbol{\tau}_{i_N}\varphi_{i_1}(\boldsymbol{\tau}_{i_1}-\boldsymbol{\tau}_{0i_1})\dots \\ \dots\varphi_{i_N}(\boldsymbol{\tau}_{i_N}-\boldsymbol{\tau}_{0i_N})|\boldsymbol{\tau}_{i_1}\dots\boldsymbol{\tau}_{i_N}\rangle \in \operatorname{Sym}\mathcal{H}^{\otimes N}, \end{gathered} \tag{33}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{i_m} &= (k_1, k_2, \dots, k_{n_{i_m}}), \\ \boldsymbol{\tau}_{i_m} &= (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n_{i_m}}), \\ \boldsymbol{\tau}_{0i_m} &= (\tau_{0i_1}, \tau_{0i_2}, \dots, \tau_{0i_m}), \\ \varphi_{i_1}(\mathbf{k}_{i_1}) &= \varphi_{i_1}(k_{1,i_1}, k_{2,i_1}, \dots, k_{2,i_{n_i}}).\end{aligned} \tag{34}$$

Амплитуды состояний $\varphi_{i_m}(\mathbf{k}_{i_m})$ в «отдельных» двух соседних посылках представляют собой сдвинутые на $\tau_{0i_{m-1}}$ и $\tau_{0i_{m+1}}$ амплитуды (пакеты в «отдельных посылках»).

Тот факт, что не существует независимых состояний в отдельных посылках, следует из принципа тождественности частиц. Более формально, состояния во всех посылках порождаются из общего вакуумного вектора $|0\rangle$, описывающего пустой канал связи. Вектор состояний целого сообщения представляет собой симметризованный вектор, пространством состояний которого является не тензорное произведение $\mathcal{H}^{\otimes N}$, а симметризованное тензорное произведение $\operatorname{Sym}\mathcal{H}^{\otimes N}$.

Еще раз отметим, что состояние целого сообщения можно представить в виде тензорного произведения отдельных независимых друг от друга посылок лишь при достаточно большой раздвижке (формально при бесконечно большой) во времени между отдельными посылками ($\tau_{0i}\to\infty$).

Матрица плотности, отвечающая кодовому слову из случайного набора, имеет вид

$$\begin{gathered}\rho_{\mathbf{i}}^{(N)} = |\varphi_{i_1};\varphi_{i_2};\dots;\varphi_{i_N}\rangle\langle\varphi_{i_1};\varphi_{i_2};\dots;\varphi_{i_N}|, \\ \mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N),\end{gathered} \tag{35}$$

которая при усреднении $\mathbf{E}$ по всевозможным случайным наборам кодовых слов дает полную матрицу плотности всевозможных сообщений длины N:

$$\begin{gathered}\rho^{(N)} = \mathbf{E}(\rho_{\mathbf{i}}^{(N)}) = \\ = \sum_{\mathbf{i}} P_{\mathbf{i}}|\varphi_{i_1};\varphi_{i_2};\dots;\varphi_{i_N}\rangle,\langle\varphi_{i_1};\varphi_{i_2};\dots;\varphi_{i_N}|, \\ P_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i}} p_{i_1}\dots p_{i_N},\end{gathered} \tag{36}$$

где $P_{\mathbf{i}}$ — вероятность появления частичного сообщения, которому отвечает вектор состояния $|\varphi_{i_1};\varphi_{i_2};\dots;\varphi_{i_N}\rangle$.

Если бы время измерений на приемном конце было неограниченно, то количество классической информации, которую можно извлечь из ансамбля сообщений длины N (36), давалось бы величиной, следующей из неравенства Холево [3]:

$$H(\rho^{(N)}) - \sum_{\mathbf{i}} P_{\mathbf{i}} H(\rho_{\mathbf{i}}^{(N)}). \tag{37}$$

Однако реально все измерения неизбежно привязаны и имеют место в конечной (пусть даже сколь угодно большой) пространственно-временной области. Из-за того что состояния безмассового поля фотонов зависят лишь от разности $\tau = x - t$, можно проводить измерения либо в фиксированный момент времени в некоторой пространственной области, либо в окрестности некоторой пространственной точки, но в течение конечного времени, дожидаясь, пока состояние целиком достигнет данной точки. Более точно в первой ситуации измерения будут проводиться распределенным в пространстве прибором, так что взаимодействие между ним и состоянием «включается» во всех точках области в момент t. Во втором случае, когда измерение реализуется в ограниченной области пространства, состояние поля унитарным образом преобразуется в состояние локализованной атомной системы (детектора), причем унитарное преобразование длится некоторое конечное время, необходимое для того, чтобы состояние по мере распространения достигло локального прибора.

Далее для краткости мы будем говорить, что измерения имеют место внутри временного окна, которое мы обозначим как T, причем под T надо понимать пространственно-временную область (в упомянутом выше смысле $T = \Delta(x-t)$).

Обе ситуации формально описываются одинаково, и согласно общей теории квантовомеханических измерений отвечают введению измеряющих операторов, которые реализуют разбиение единицы. Это означает, что каждой пространственно-временной области приписывается измеряющий оператор, так что сумма операторов, приписанных всему пространству, равна единице.

Применительно к нашей ситуации возникают две области (два временных окна):

$$T + \overline{T} = (-\infty, \infty).$$

Информацию наблюдатель извлекает во временном окне измерения T.

Измерения в конечном временном окне отвечают введению некоторого супероператора, который дает матрицу плотности, которую видит наблюдатель на приемном конце внутри временного окна T. Введение такого супероператора позволяет при вычислении пропускной способности воспользоваться формулой (37). Нас будет интересовать предел, когда длина частичного сообщения стремится к бесконечности (предел длинных последовательностей $N \to \infty$). При этом временное окно T_N, необходимое для измерения, также растет с ростом N. Нас будет интересовать предел отношения величины извлекаемой классической информации из сообщения длины N к величине временного окна T_N. Данный предел как раз и будет пропускной способностью канала связи в смысле числа классических бит на одну посылку в единицу времени — [бит/посылка·с].

Далее нам потребуется инструмент, который преобразует состояние, заданное в бесконечном временном окне, в состояние, которое будет эффективно видеть наблюдатель в конечном временном окне. Несложно построить операторнозначную меру, описывающую измерения в конечном временном окне. Любое измерение описывается разбиением единицы. Полный единичный оператор есть прямая сумма симметризованных единичных операторов в подпространствах с различным числом фотонов $m = 0, 1, \ldots, \infty$:

$$I = \bigoplus_{m=0}^{\infty} I^{(m)}, \tag{38}$$

где

$$I^{(m)} = \\ = \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \frac{dk_1 \ldots dk_m}{k_1 \ldots k_n} |k_1, \ldots, k_n\rangle\langle k_1, \ldots, k_m|. \tag{39}$$

Если измерения проводятся в конечном временном окне T, то разбиение единицы, описывающее такое измерение, есть

$$\begin{gathered} I^{(m)} = \mathcal{M}^{(m)}(T) + \mathcal{M}^{(m)}(\overline{T}), \\ T + \overline{T} = (-\infty, \infty), \end{gathered} \tag{40}$$

где

$$\begin{gathered} \mathcal{M}^{(m)}(T) = \int_{-T}^{T} \ldots \int_{-T}^{T} \frac{d\tau_1 \ldots d\tau_m}{(2\pi)^m} \times \\ \times \left(\int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \frac{dk_1 \ldots dk_m}{\sqrt{k_1 \ldots k_m}} \times \right. \\ \left. \times \; \exp(i(k_1\tau_1 + \ldots + k_m\tau_m)) |k_1, \ldots, k_m\rangle \right) \times \\ \times \left(\int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \frac{dk'_1 \ldots dk'_m}{\sqrt{k'_1 \ldots k'_m}} \times \right. \\ \left. \times \; \exp(-i(k'_1\tau_1 + \ldots + k'_m\tau_m)) \langle k'_1, \ldots, k'_m| \right). \end{gathered} \tag{41}$$

Само́й операторнозначной меры (40), (41) достаточно, чтобы получить вероятности исходов измерений в конечном временном окне. Однако для вычисления пропускной способности нужна сама матрица плотности ансамбля сообщений, которую видит наблюдатель в конечном временном окне $(-T, T)$, в котором он проводит измерения. Для этих целей недостаточно только операторнозначной меры, а необходим сам инструмент (супероператор), который приводит к этой мере. Любой супероператор, согласно теореме Крауса [8], может быть представлен в виде

$$\mathcal{T}[\ldots] = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{T}^{(m)} = \\ = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \sum_{j} V(T)_j^{(m)}[\ldots]V(T)_j^{(m)+} + \\ + \bigoplus_{m=0}^{\infty} \sum_{j} V(\overline{T})_j^{(m)}[\ldots]V(\overline{T})_j^{(m)+}, \quad (42)$$

где операторы $V(T)_j^{(m)}$ и $V(\overline{T})_j^{(m)}$ должны удовлетворять соотношению

$$\sum_j V(T)_j^{(m)+}V(T)_j^{(m)} + \\ + \sum_j V(\overline{T})_j^{(m)+}V(\overline{T})_j^{(m)} = I^{(m)}. \quad (43)$$

Операторнозначная мера, порождаемая супероператором, выражается через операторы $V(T)_j^{(m)}$ в (42), (43) следующим образом:

$$\mathcal{M}^{(m)}(T) = V(T)_j^{(m)+}V(T)_j^{(m)}. \quad (44)$$

В качестве операторов $V_j^{(m)}[\ldots]$ могут быть выбраны следующие:

$$\mathcal{T}^{(m)}[\ldots] = \sqrt{\mathcal{M}^{(m)}(T)}[\ldots]\sqrt{\mathcal{M}^{(m)+}(T)} + \\ + V(\overline{T})_j^{(m)}[\ldots]V(\overline{T})_j^{(m)+}. \quad (45)$$

Матрица плотности ансамбля сообщений, которую видит наблюдатель в конечном временном окне $(-T,T)$, получается действием супероператора и имеет вид

$$\mathcal{T}[\rho^{(N)}] = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \sqrt{\mathcal{M}^{(m)}(T)}[\rho^{(N)}]\sqrt{\mathcal{M}^{(m)+}(T)} + \\ + \bigoplus_{m=0}^{\infty} V(\overline{T})_j^{(m)}[\rho^{(N)}]V(\overline{T})_j^{(m)+}. \quad (46)$$

Теперь необходимо определить явный вид операторов, входящих в (42), (43), последнее требует конкретизации свойств квантового канала связи, поскольку операторы в (42), (43) являются формализованным описанием свойств квантового канала связи.

Пока мы не накладывали никаких ограничений на частотную полосу пропускания квантового канала связи. В любой реальной ситуации полоса пропускания не бывает бесконечной. Для дальнейшего будем считать, что полоса пропускания имеет конечную величину, равную Δk (эта величина является свободным параметром, описывающим канал, и может быть любой, даже сколь угодно большой). В этом случае все интегрирования в (39)–(41) по каждому k_i должны проводиться не в пределах $(0,\infty)$, а по конечному интервалу Δk. В окончательных ответах мы можем устремлять величину полосы пропускания к бесконечному пределу, если необходимо выяснить свойства канала с бесконечной полосой пропускания.

Теперь наша задача будет сводиться к извлечению корня из операторов $\mathcal{M}$. Такой оператор существует и является единственным:

$$\sqrt{\mathcal{M}^{(m)}(T)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \frac{\mathcal{M}^{(m)}(T)}{(\xi I^{(m)}(\Delta k) + \mathcal{M}^{(m)}(T))} = \\ = \sum_{\mathbf{j}=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_{\mathbf{j}}^{(m)}}|u_{\mathbf{j}}^{(m)}\rangle\langle u_{\mathbf{j}}^{(m)}|, \quad (47)$$

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_m), \quad j_k = 0, 1 \ldots, \infty$$

$$\lambda_{\mathbf{j}}^{(m)} = \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_m}.$$

Векторы $|u_{\mathbf{j}}^{(m)}\rangle$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$\lambda_{\mathbf{j}}^{(m)}|u_{\mathbf{j}}^{(m)}\rangle = \hat{\mathcal{K}}^{(m)}(T)|u_{\mathbf{j}}^{(m)}\rangle, \quad (48)$$

где интегральный оператор имеет вид

$$\hat{\mathcal{K}}^{(m)}(T) = \int_{\Delta k} \ldots \int_{\Delta k} dk_1 \ldots dk_m dk_1' \ldots dk_m' \times \\ \times \mathcal{K}(T; k_1 - k_1') \ldots \mathcal{K}(T; k_m - k_m') \times \\ \times |k_1 \ldots k_m\rangle\langle k_1' \ldots k_m'|, \quad (49)$$

где

$$\mathcal{K}(T; q - q') = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(q - q')T}{q - q'}. \quad (50)$$

Собственные векторы интегрального оператора имеют вид

$$|u_{\mathbf{j}}^{(m)}\rangle = \int_{\Delta k} \ldots \int_{\Delta k} \frac{dq_1 \ldots dq_m}{\sqrt{q_1 \cdots q_m}} \times \\ \times u_{j_1}(q_1) \ldots u_{j_m}(q_m)|q_1, \ldots, q_m\rangle, \quad (51)$$

причем функции, входящие в (47), (48), (51), удовлетворяют следующему интегральному уравнению:

$$\lambda_n u_n(q) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta k} dq' \frac{\sin(q-q')T}{q-q'} u_n(q'). \qquad (52)$$

Максимальное собственное число соответствует максимуму функционала, а собственная функция этого собственного числа дает оптимальную форму состояния. Данное уравнение исследовалось ранее в работах [20, 21], собственные числа уравнения положительны и образуют убывающую последовательность с ростом номера n ($1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > 0$, $n = 0, 1, \ldots, \infty$). Собственные числа являются функцией параметра $\Delta k \cdot T$, несколько первых собственных чисел при разных значениях параметра $\Delta k \cdot T$ найдены численно в работе [20] (при больших значениях параметра $\Delta k \cdot T$ они быстро стремятся к 1, например, $\lambda_0 = 0.99589$ при $\Delta k \cdot T = 4$). Известна также асимптотика при фиксированном номере n от параметра $\Delta k \cdot T \gg 1$:

$$\lambda_n(\zeta) \approx 1 - \frac{4\sqrt{\pi}8^n}{n!}\zeta^{n+1/2}e^{-2\zeta}, \quad \zeta = \Delta k \cdot T, \qquad (53)$$

т. е. собственные числа экспоненциально близки к единице. Собственные числа дают максимально возможную степень локализации состояний в пространстве-времени в заданной частотной полосе канала Δk. Напомним, что $T = \Delta(x-t)$ — расстояние на «световом конусе».

Матрица плотности, доступная наблюдателю в конечном временном окне, состоит из двух слагаемых (46). Первое слагаемое является эффективной матрицей плотности, которую наблюдатель видит в окне $(-T, T)$. Второе слагаемое представляет собой матрицу плотности, но оно отвечает за исходы измерений вне временного окна наблюдения. Другими словами, данное слагаемое устроено так, что отвечает за исходы вне временного окна наблюдения $(-T, T)$. При измерении в конечном окне любой исход измерений будет иметь место либо в этом окне, либо вне этого окна. Исходы измерений вне окна для наблюдателя выглядят как отсутствие факта регистрации его аппаратурой в окне $(-T, T)$. Поэтому отсутствию исхода в окне наблюдения (формально исход имел место вне окна, но недоступен наблюдателю) наблюдатель должен приписать неопределенный результат. В силу этого матрица плотности в (46) может быть представлена в виде

$$\mathcal{T}[\rho^{(N)}] = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \sqrt{\mathcal{M}^{(m)}(T)}[\rho^{(N)}]\sqrt{\mathcal{M}^{(m)+}(T)} +$$
$$+ \bigoplus_{m=0}^{\infty} \int\limits_{\overline{T}} d\tau |?\rangle\langle\Psi^{(m)}(\tau)|[\rho^{(N)}]|\Psi^{(m)}(\tau)\rangle\langle ?|, \qquad (54)$$

где

$$|\Psi^{(m)}(\tau)\rangle = \int\limits_0^{\infty} \ldots \int\limits_0^{\infty} \frac{dk_1 \ldots dk_m}{\sqrt{k_1 \ldots k_m}} \times$$
$$\times \exp(i(k_1\tau_1 + \ldots + k_m\tau_m))|k_1, \ldots, k_m\rangle. \qquad (55)$$

Здесь введено формальное состояние $|?\rangle$, описывающее исходы вне окна. Данное состояние ортогонально всем состояниям. Его смысл сводится к тому, что результат любого измерения имеет место либо в $(-T, T)$, либо вне его. Результат любого измерения внутри окна $(-T, T)$ может быть представлен через разбиение единицы в этом окне. Такой единицей является $\mathcal{M}(T)$, а векторы $|u_{\mathbf{j}}^{(m)}\rangle$ образуют полный ортогональный базис (ортогональное разбиение единицы) внутри временного окна наблюдения. Поэтому любые измерения (ортогональные или неортогональные) внутри окна сводятся к измерениям над матрицей плотности, описываемой первым слагаемым в (54). Второе слагаемое в (54) отвечает только за вероятность отсутствия исхода внутри окна (или за вероятность исхода вне окна), которую можно выразить через состояние, ортогональное любому другому состоянию в первом слагаемом. Вероятность таких исходов определяется следующим образом:

$$|?\rangle\left(\bigoplus_{m=0}^{\infty}\int\limits_{\overline{T}} d\tau \langle\Psi^{(m)}(\tau)|[\rho^{(N)}]|\Psi^{(m)}(\tau)\rangle\right)\langle ?| =$$
$$= |?\rangle\left(\bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\{\mathcal{M}^{(m)}(\overline{T})\rho^{(N)}\}\right)\langle ?|, \qquad (56)$$

как и предписывается действием второй части супероператора. Причем суммирование по j здесь заменено интегрированием по $d\tau$.

Все описанные сложности построения ортогонального базиса в конечном временном окне возникают из-за неортогональности исходного базиса в τ-представлении (обобщенные базисные векторы $|\tau\rangle$ при разных τ неортогональны даже при бесконечной полосе пропускания). Если бы обобщенные базисные векторы были ортогональны, то эффективная матрица плотности в конечной временной области получалась бы просто ее проектированием на эту область. В нашем случае приходится прибегать к несколько более сложной процедуре вычисления.

Если мы имеем матрицу плотности, с которой оперирует наблюдатель, проводящий измерения в конечном временном окне, то далее можно воспользоваться формулой Холево. Используя метод дважды типичных последовательностей (см. детали в [3, 6]) можно получить для средней ошибки при декодировании на приемном конце $\overline{P}_{err}(N,M)$ для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что

$$\overline{P}_{err}(N,M) \le \varepsilon + Me^{-(\chi^{(N)}-\delta)}, \qquad (57)$$

где

$$\chi^{(N)} = H\left(\mathcal{T}[\rho^{(N)}]\right) - \\ - H\left(\sqrt{\mathcal{M}^{(m)}(T)}[\rho^{(N)}]\sqrt{\mathcal{M}^{(m)+}(T)}\right) - \\ - H\left(|?\rangle\langle ?|\left(\bigoplus_{m=0}^{\infty}\mathrm{Tr}\{\mathcal{M}^{(m)}(\overline{T})\rho^{(N)}\}\right)\right). \qquad (58)$$

Ошибка при декодировании на приемном конце стремится к нулю, если число кодовых слов M (которые с вероятностью единица однозначно идентифицируются) для ансамбля сообщений длины N не превышает величины

$$M = e^{NR^{(N)}}, \\ R^{(N)} < \frac{\chi^{(N)}}{N} - \delta', \quad \delta' = \frac{\delta}{N} \to 0. \qquad (59)$$

Важен предел $\chi^{(N)}/N$ при $N \to \infty$. Этот предел всегда меньше, чем $\chi^{(1)N}$, поскольку перекрытие отдельных пакетов из-за тождественности частиц уменьшает различимость кодовых слов. Например, если используются ортогональные состояния отдельных пакетов и их пространственные носители не перекрываются (пакеты отдельных посылок раздвинуты на большое расстояние, формально бесконечное), то величина

$$H^{(1)N} = NH(p) = -N\sum_i p_i \log p_i$$

стремится к классическому пределу. В случае же перекрывающихся пространственных амплитуд (такое перекрытие всегда неизбежно существует из-за принципиальной нелокализуемости амплитуд состояний) отдельные кодовые слова, даже построенные из ортогональных пакетов по отдельности, перестают быть ортогональными, т. е. достоверно различимыми. Даже в случае сколь угодно сильно локализованных носителей имеем

$$H^{(N)} \to NH(p) = -N\sum_i p_i \log p_i$$

лишь при бесконечной раздвижке состояний, $\tau_0 = \infty$.

Величина

$$\chi^{(N)} \to N\chi^{(1)} = -N\,\mathrm{Tr}\{\rho^{(1)}\log\rho^{(1)}\}, \quad \tau_0 = \infty,$$

стремится к пределу различимых частиц, что достигается в пределе бесконечно медленной скорости передачи.

Величина $\chi^{(N)}/N$ является убывающей функцией N при фиксированных раздвижке τ_0 и форме амплитуды. При $\tau_0 = 0$ имеем $\chi^{(N)} = 0$, поскольку все состояния из типичного подпространства становятся одинаковыми. Пусть один крайний пакет по времени сдвинут на бесконечность ($\tau_0 = \infty$). В этом случае матрица плотности задается формулой

$$\rho^{(N)} = \rho^{(N-1)} \otimes \rho^{(1)}$$

и

$$\frac{\chi^{(N)}}{N} \le \frac{\chi^{(N-1)}}{N} + \frac{\chi^{(1)}}{N} \le \frac{\chi^{(N-1)}}{N-1}. \qquad (60)$$

Последовательность $\chi^{(N)}/N$ убывает и ограничена снизу, поэтому предел существует и равен

$$\chi_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{\chi^{(N)}}{N}. \qquad (61)$$

Величина χ_∞ является пропускной способностью и определяет «скорость» передачи информации как число бит на одну посылку на один фотон, однако не является скоростью в смысле бит/с, поскольку требует доступа ко всей ветви «светового конуса». Пропускную способность χ_∞ не удается вычислить в аналитическом виде, но она может быть найдена численно при заданных форме пакета и раздвижке τ_0 между посылками:

$$\chi^{(N)} = H\left(\bigoplus_{m,m'=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{j},\mathbf{j}'=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_{\mathbf{j}}^{(m)}\lambda_{\mathbf{j}'}^{(m')}}|u_{\mathbf{j}'}^{(m')}\rangle\langle u_{\mathbf{j}}^{(m)}| \times \right. \\ \times \left(\sum_{\mathbf{i}} P_{\mathbf{i}}\rho_{\mathbf{i}}^{(N)}\right)|u_{\mathbf{j}}^{(m)}\rangle\langle u_{\mathbf{j}'}^{(m')}| + \\ \left. +|?\rangle\left(\bigoplus_{m=0}^{\infty}\mathrm{Tr}\{\mathcal{M}^{(m)}(\overline{T})\rho^{(N)}\}\right)\langle ?|,\right) - \\ -\sum_{\mathbf{i}} P_{\mathbf{i}} H\left(\bigoplus_{m,m'=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{j},\mathbf{j}'=0}^{\infty}\sqrt{\lambda_{\mathbf{j}}^{(m)}\lambda_{\mathbf{j}'}^{(m')}}|u_{\mathbf{j}'}^{(m')}\rangle \times \right. \\ \left. \times\ \langle u_{\mathbf{j}}^{(m)}|\rho_{\mathbf{i}}^{(N)}|u_{\mathbf{j}}^{(m)}\rangle\langle u_{\mathbf{j}'}^{(m')}|\right). \qquad (62)$$

Пусть время, затраченное на посылку сообщения длины N, выбрано равным

$$T_N = N \cdot T = \sum_i^N \tau_{0i} \tag{63}$$

(здесь T — время на «одну посылку»). Напомним, что τ_{0i} — величины раздвижки между «отдельными посылками», т. е. амплитуды состояний (пакетов) имеют вид

$$\varphi_i(k_{1_i}, \ldots, k_{n_i}) \exp(-i(k_{1_i}\tau_{0i} + \ldots + k_{n_i}\tau_{0_i})).$$

В пространственно-временном представлении это отвечает сдвигу на величину τ_{0i} для двух последовательных посылок i и $i+1$.

Пропускная способность канала с конечной частотной полосой пропускания Δk в единицу времени равна

$$C(\Delta k, T) = \lim_{N\to\infty} \max_{p_i} \left\{ \frac{\chi^{(N)}}{NT} \right\} \left[\frac{\text{бит}}{\text{посылка} \cdot \text{с}} \right], \tag{64}$$

что представляет собой число бит на одну посылку и в единицу времени. Формулы (62)–(64) в замкнутом виде дают выражение для пропускной способности последовательного квантового канала связи в зависимости от частотной полосы канала (Δk), формы пакетов (ρ_i) и раздвижки между «отдельными посылками» (τ_{0i}), а также временным окном наблюдения на приемном конце. Напомним, что временное окно $T = \Delta(x-ct)$ представляет для фотонного поля «длину» на световом конусе.

При данной частотной полосе канала Δk предельно допустимая степень локализации в пространстве-времени диктуется решениями интегрального уравнения (52) и его собственными числами (53). При заданной полосе пропускания Δk величина временного окна T, вне которого набирается лишь экспоненциально малая величина нормировки пакетов, определяется формулой (53). При этом последовательные посылки можно считать независимыми и пренебречь перекрытием пакетов и тождественностью частиц. Полностью перекрытие исчезает лишь формально при бесконечно большой раздвижке между посылками. В этом пределе можно пользоваться формулами для пропускной способности, описывающей величину информации на одну посылку, для нерелятивистских квантовых каналов связи с различимыми состояниями. В смысле же скорости передачи информации в единицу времени пропускная способность будет стремиться к нулю.

Если раздвижка между последовательными посылками не бесконечна, то тождественностью частиц пренебречь нельзя. В этом случае нужно пользоваться формулами (62), (63). Порядок величины для пропускной способности в единицу времени дается оценкой

$$C(\Delta k, T) \le \frac{H(\rho)}{T}, \quad \rho = \sum_i^n p_i \rho_i,$$

где матрица плотности ρ_i построена из чистых состояний (27), выбираемых с априорными вероятностями p_i. Величина T, при которой можно считать посылки независимыми (перекрывающимися), определяется формулой (53), $T > 1/\Delta k$. Для оптимальных состояний (наиболее коротких в пространстве-времени при данной частотной полосе) величину T можно выбрать в несколько раз большую $1/\Delta k$ из-за экспоненциально быстрого выхода в (53) на единицу доли нормировки состояния во временном окне T. Уменьшение временного окна увеличивает перекрытие и, соответственно, уменьшает различимость состояний в «отдельных посылках», поэтому приведенная выше оценка пропускной способности является оценкой сверху. Точная величина пропускной способности во времени дается формулами (62), (64) и не превосходит данной оценки.

4. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КВАНТОВОГО КАНАЛА ВО ВРЕМЕНИ С ОДНОФОТОННЫМИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ВХОДНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Формулы, полученные в предыдущем разделе, описывают общую ситуацию для канала связи, который можно условно назвать параллельным каналом. В такой ситуации состояния физически посылаются в канал связи последовательно во времени.

Возможна другая предельная ситуация, когда состояния посылаются в одно временно́е окно и во всю частотную полосу канала все сразу. Такой способ передачи имеет место в так называемом мультиплексном режиме, когда каждому состоянию (соответственно, символу алфавита) в посылке в данном временном окне отвечает своя частотная полоса. Если частотные полосы для отдельных состояний не перекрываются, то пространством состояний сообщений будет тензорное произведение гильбертовых пространств состояний для каждой частотной полосы, а не симметризованное тензорное произведение, как в случае последовательного канала связи. В этом случае удается получить окончательные аналитические формулы для ортогональных входных состояний с определенной пространственно-временной формой. Подобные состояния являются квантовым аналогом отсчетных функций [2].

Для прояснения общих формул и их связи с классическим случаем, когда алфавит кодируется во временную форму сигнала, приведем пример вычисления пропускной способности канала связи с конечной полосой пропускания, когда входными сигнальными состояниями являются однофотонные состояния. Символам классического алфавита $\{x_i\}$ отвечают чистые однофотонные состояния с различной формой пакетов (амплитуды).

Вернемся на время к классическому случаю и рассмотрим кодирование источника на конечном временном промежутке $(-T, T)$ для случая непрерывного входного классического сигнала, заданного в конечной частотной полосе Δk.

Классический сигнал задается функцией времени

$$u(t) = \sum_i \sqrt{p_i} u_i(t), \qquad (65)$$

где индекс i пробегает $2\Delta k T$ значений, отвечающих независимым степеням свободы сигнала, откуда мы получаем ортогональный набор функций, описывающий независимые степени свободы сигнала:

$$u_i(t) = \sqrt{\Delta k} \frac{\sin 2\pi\Delta k[t - i/(2\Delta k)]}{2\pi\Delta k[t - i/(2\Delta k)]}. \qquad (66)$$

Данные функции часто называют также отсчетными функциями [2]. Величины $\sqrt{p_i}$ описывают амплитуду, а p_i^2 имеют смысл мощности сигнала на отдельной «гармонике» $u_i(t)$.

Амплитуды $\sqrt{p_i}$ являются случайными величинами с некоторыми априорными входными вероятностями, причем распределения вероятностей для каждой отсчетной базисной функции являются независимыми. В этом случае задача сводится к кодированию $2\Delta k T$ независимых источников. Формально каждая величина p_i описывает априорное распределение входных вероятностей в одном из независимых (параллельных) каналов. На физическом уровне такая ситуация реализуется подачей на вход канала с конечной частотной полосой Δk узких импульсов с интенсивностью p_i через равные отсчетные моменты времени $[t - i/(2\Delta k)]$.

В квантовом случае нет прямой аналогии с рассмотренным выше классическим случаем. Рассмотрим пример кодирования квантового источника в канале с конечной частотной полосой пропускания Δk, который имеет наиболее близкую аналогию с классическим случаем. В качестве входных сигнальных состояний источника выберем состояния, являющиеся ортогональными в конечном временном окне T, которое считается фиксированным на приемном конце. Такими состояниями являются состояния, удовлетворяющие интегральному уравнению (52), они представляют собой аналоги ортогональных базисных отсчетных функций, заданных в конечном временном окне и имеющих конечную частотную полосу. Такие состояния зависят лишь от произведения $\Delta k \cdot T$:

$$\begin{gathered} |u_i(\Delta k \cdot T)\rangle = \int\limits_{\Delta k} \frac{dk}{\sqrt{k}} u_i(T, k)|k\rangle, \\ \langle u_i(\Delta k \cdot T)|u_{i'}(\Delta k \cdot T)\rangle = \delta_{i,i'}. \end{gathered} \qquad (67)$$

Априорные вероятности, с которыми выбираются состояния, есть $\{p_i\}$. Число символов в алфавите будем считать ограниченным некоторым числом N_{max}. В классическом случае такое ограничение отвечает тому, что интенсивность сигнала для каждой отсчетной функции ограничена некоторой величиной (интенсивность каждой отсчетной «гармоники»).

Существенное отличие квантового случая от классического возникает при физической реализации. В классическом случае можно было подавать на вход канала с конечной частотной полосой узкие импульсы в отсчетные моменты, которые в канале складываются в полный непрерывный от времени сигнал (65), на приемном конце измеряется амплитуда сигнала (65) в равноотстоящие моменты времени $[t - i/(2\Delta k)]$ и извлекаются величины p_i, в которые кодируется информация. При этом в силу классической природы сигнала такой процесс непрерывен во времени, а сам сигнал при измерениях не разрушается. Поэтому при формальных математических рассуждениях можно считать, что величины p_i передаются по независимым параллельным каналам в силу ортогональности отсчетных «гармоник».

В «ультраквантовом» случае, когда входные состояния однофотонные, такая реализация заведомо невозможна. Рассуждения, проводимые по аналогии с классическим случаем, сразу упираются в следующие препятствия. Пусть на вход канала через равные отсчетные промежутки времени подаются сильно локализованные состояния, которые можно считать независимыми и описывать такую последовательность тензорным произведением отдельных посылок, а не симметризованным тензорным произведением. Состояния являются сильно локализованными настолько, что можно пренебречь перекрытием соседних состояний. Хотя квантовое состояние фотонного поля не может быть строго локализованным, его можно сделать сколь угодно сильно сильно локализованным. При этом на выходе канала состояния существенно перекрываются. Общее состояние на выходе уже принципиально не может (из-за тождественности частиц) быть описано как тензорное произведение отдельных состояний вида (5), а должно описываться единым вектором состояний, как это делалось в разд. 3 для последовательного канала связи. Существует интересный вопрос о переходе классического случая в квантовый. Такой переход осуществляется посредством уменьшения интенсивности (числа фотонов) в каждой отсчетной функции. Ниже рассмотрен случай, когда число фотонов снижено до предела, а именно, до однофотонного уровня.

Для того чтобы максимально приблизиться в рассуждениях к классическому случаю, рассмотрим следующий способ кодирования. Для сохранения структуры независимости состояний в каждой посылке и, соответственно, сохранения структуры тензорного произведения, воспользуемся следующими рассуждениями. Любой вывод теорем кодирования и величины пропускной способности подразумевает использование длинных типичных последовательностей, длина которых в окончательных формулах стремится к бесконечности. Поскольку выбранные ортогональные состояния в конечном временно́м окне T зависят лишь от произведения полосы пропускания канала на временно́е окно, для образования последовательности сообщений длины n (где n произвольно и стремится к бесконечности) разобьем частотную полосу канала на n одинаковых неперекрывающихся частотных полос шириной $\Delta k/n$, каждая из которых будет отвечать одному из параллельных каналов. Квантовые состояния в параллельных каналах с неперекрывающимися частотными полосами могут быть описаны в виде тензорного произведения.

Уменьшение частотной полосы в n раз приведет к эффективному увеличению временно́го окна наблюдения в nT раз. Такое масштабирование временно́го окна требуется для того, чтобы входные состояния, отвечающие символам алфавита в последовательностях разной длины, не изменялись (не зависели от n). Однако сами сигнальные входные состояния в полосе $\Delta k/n$ и временно́м окне nT, из-за того что амплитуда зависит лишь от произведения $(\Delta k/n)\cdot nT$, как векторы в $\mathcal{H}$, останутся неизменными (67).

Физическая реализация кодирования сводится к следующему. Выбирается число n, канал разбивается на n независимых параллельных каналов, в каждый частотный канал в соответствии с априорными вероятностями p_i одновременно (параллельно) посылаются квантовые состояния (68). Общее входное состояние по всем параллельным каналам описывается тензорным произведением состояний в отдельных независимых каналах. На приемном конце проводится коллективное измерение во временном окне nT над тензорным произведением выходных матриц плотности во всех каналах. Пропускная способность в единицу времени вычисляется как предел C_n/nT.

С учетом сказанного, имеем

$$\rho_{i_k} = \left| u_{i_k}\left(\frac{\Delta k}{n}nT\right)\right\rangle \left\langle u_{i_k}\left(\frac{\Delta k}{n}nT\right)\right| \tag{68}$$

и априорные вероятности $\{p_i\}$ в n параллельных независимых каналах. Индекс «i_k» относится к состояниям в k-м параллельном канале. Вводить этот индекс в аргумент $u_{i_k}((\Delta k/n)nT)$ нет необходимости. На приемном конце измерения над n состояниями проводятся во временном окне nT. Матрица плотности частичного сообщения длины n теперь представляется в виде тензорного произведения

$$\rho^{(n)} = \rho_{i_1}\otimes\rho_{i_2}\otimes\ldots\otimes\rho_{i_n}, \tag{69}$$

состояние ρ_{i_k} посылается в k-й канал с вероятностью p_i. Сказанное означает, что поскольку аргумент состояния не зависит от n, матрицу плотности каждого канала можно представить в виде

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_i p_i\rho_i = \\ &= \sum_i p_i \left| u_i\left(\frac{\Delta k}{n}nT\right)\right\rangle \left\langle u_i\left(\frac{\Delta k}{n}nT\right)\right| = \\ &= \sum_i p_i |u_i(\Delta kT)\rangle\langle u_i(\Delta kT)|. \end{aligned}\tag{70}$$

Супероператор, переводящий матрицу плотности входа (70) в матрицу плотности на выходе в конечном временном окне nT, действует следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[\rho] &= \sqrt{\mathcal{M}(nT)}[\rho]\sqrt{\mathcal{M}(nT)^+} + \\ &+ |?\rangle\langle ?|\,\mathrm{Tr}\left\{\left(I\left(\frac{\Delta k}{n}\right) - \mathcal{M}(nT)\right)\rho\right\},\end{aligned}\tag{71}$$

где

$$I\left(\frac{\Delta k}{n}\right) = \int\limits_{\frac{\Delta k}{n}} \frac{dk}{k}|k\rangle\langle k|. \tag{72}$$

Первое слагаемое матрицы плотности в (71) ответственно за исходы измерений в доступном для наблюдения временном окне T. Второе — за исходы вне области T. Для наблюдателя такие исходы фактически означают стирание состояния (отсутствие срабатывания детектора во временном окне T). Формальное состояние $|?\rangle$ ортогонально всем состояниям. Для «глухого» (dummy) состояния $|?\rangle$ достаточно сохранить только диагональное слагаемое по новому индексу «?» для сохранения общего единичного следа матрицы плотности.

Строго говоря, в операторной единице в (72) следует ввести индекс, нумерующий параллельный канал. Но из-за того что все они одинаковы и результаты не зависят от положения полосы пропускания, индекс опущен. Далее имеем

$$\mathcal{M}(nT) = \sum_j^{\infty} \lambda_j \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right) \times \\ \times \left| u_j \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right)\right\rangle \left\langle u_j \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right)\right|, \quad (73)$$

$$\sqrt{\mathcal{M}(nT)} = \sum_j^{\infty} \sqrt{\lambda_j \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right)} \times \\ \times \left| u_j \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right)\right\rangle \left\langle u_j \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right)\right|. \quad (74)$$

Пропускная способность вычисляется как предел при $n \to \infty$, когда число каналов стремится к бесконечности, соответственно, временное окно $nT \to \infty$ (при фиксированном исходном T), имеем скорость передачи в единицу времени

$$C(\Delta k \cdot T) = \\ = \lim_{n\to\infty} \max_{p_i} \left\{ \frac{nH\left(\sum_i p_i \mathcal{T}[\rho_i]\right) - n\sum_i p_i \mathcal{T}[\rho_i]}{nT} \right\} \\ \left[\frac{\text{бит}}{\text{посылка}\cdot\text{с}}\right]. \quad (75)$$

Используя (71)–(74) и свойство ортогональности функций u_i, получаем

$$\mathcal{T}[\rho_i]\left(\frac{\Delta k}{n} nT\right) = \\ = \lambda_i \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right) \left| u_i \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right)\right\rangle \left\langle u_i \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right)\right| + \\ + \left(1 - \lambda_i \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right)\right) |?\rangle\langle ?|. \quad (76)$$

Далее

$$H\left(\sum_i^{N_{max}} p_i \mathcal{T}[\rho_i]\right) = \\ = -\sum_i^{N_{max}} \mu_i \log \mu_i - \mu_\perp \log \mu_\perp, \quad (77)$$

где

$$\mu_i(\Delta k \cdot T) = p_i \lambda_i \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right) = p_i \lambda_i(\Delta k \cdot T), \quad (78)$$

$$\mu_\perp(\Delta k \cdot T) = \sum_i^{N_{max}} \mu_{i\perp}, \quad (79)$$

$$\mu_{i\perp} = p_i \left(1 - \lambda_i \left(\frac{\Delta k}{n} nT\right)\right) = \\ = p_i \left(1 - \lambda_i(\Delta k \cdot T)\right), \quad (80)$$

$$\sum_i^{N_{max}} p_i H(\rho_i) = \\ = -\sum_i^{N_{max}} \left(p_i \lambda_i \log \lambda_i + p_i(1-\lambda_i)\log(1-\lambda_i)\right). \quad (81)$$

Окончательно для пропускной способности в смысле числа бит на одну посылку (на символ алфавита) и в единицу времени с учетом (75)–(81) имеем

$$C(\Delta k \cdot T) = \\ = \max_{\{p_i\}} \left\{ \left[-\left(\sum_i^{N_{max}} \mu_i \log \mu_i + \mu_\perp \log \mu_\perp\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_i^{N_{max}} \mu_i \log \lambda_i + \mu_{i\perp} \log(1-\lambda_i) \right] T^{-1} \right\} \\ \left[\frac{\text{бит}}{\text{посылка}\cdot\text{с}}\right]. \quad (82)$$

Проанализируем полученное выражение. Первое слагаемое в числителе описывает энтропию источника с ортогональными (различимыми) сигналами, которым отвечают априорные вероятности $\mu_i, \mu_\perp$ ($i = 1, \ldots, N_{max}$). Второе слагаемое аналогично условной энтропии между входом и выходом и описывает уменьшение энтропии источника за счет конечного окна наблюдения. При заданной полосе пропускания канала Δk и стремлении временного окна наблюдения к бесконечности, $T \to \infty$, величины $\mu_i \to p_i$, $\mu_\perp \to 0$, а величина в числителе стремится к пропускной способности идеального (без шума) классического канала с априорными вероятностями p_i:

$$C = -\sum_{i}^{N_{max}} p_i \log p_i. \tag{83}$$

Данная величина есть «скорость» передачи информации в смысле [бит/посылка], однако в смысле скорости передачи во времени [бит/посылка· с] имеем

$$C(\Delta k \cdot T) = \frac{C}{T} \to 0, \quad T \to \infty. \tag{84}$$

Это связано с тем, что для ортогональных в конечном временном окне входных состояний $|u_i\rangle$ (67) величины $\lambda_i(\Delta k \cdot T)$ экспоненциально быстро по параметру $\Delta k \cdot T$ (53) при не слишком больших i стремятся к единице. Поэтому в реальной ситуации можно выбрать временное окно T в несколько раз больше обратной частотной полосы канала $T \geq 1/\Delta k$. В этом случае состояния с экспоненциальной точностью по этому параметру «вмешаются» в данное временное окно. Всегда (при заданной частотной полосе канала) можно выбрать временное окно T так, чтобы «хвосты» состояний вне этого окна были экспоненциально малы, меньше любого осмысленного физического уровня (например, e^{-80}), при этом $T \approx 40/\Delta k$. Напомним, что число атомов в видимой части Вселенной оценивается как 10^{77}. Сказанное означает, что при данной полосе канала в «ультраквантовом» пределе однофотонных входных состояний достаточно разнести последовательные посылки по времени на величину $T \approx 10/\Delta k$, чтобы можно было считать посылки независимыми. Каждая посылка (в пределе длинных последовательностей) несет C бит, а расстояние между посылками по времени есть T.

В этой ситуации безразлично как посылать состояния в канал связи, последовательно или параллельно, поскольку их перекрытием при последовательной посылке через интервал T можно будет пренебречь. Соответственно тождественностью частиц также можно пренебречь и можно пользоваться формулами для пропускных способностей для каналов связи с различимыми (не тождественными) частицами [3–7], полученными ранее. При этом нужно только иметь в виду, что скорость передачи во времени будет C/T (T выбирается с учетом сказанного выше), т.е. интервал во времени между последовательными посылками состояний не может быть меньше T. Иногда бывает удобно пользоваться безразмерной пропускной способностью

$$\tilde{C}(\Delta k \cdot T) = \frac{C}{\Delta k \cdot T}. \tag{85}$$

Данная величина есть скорость передачи информации на одну посылку в единицу частотной полосы и в единицу времени.

Если полоса пропускания канала неограничена ($\Delta k \to \infty$, хотя в реальных ситуациях такого не бывает), то состояния могут посылаться в канал с любой частотой (поскольку временно́е окно может быть выбрано как $T \approx 1/\Delta k \to 0$), при этом для пропускных способностей можно пользоваться формулами для каналов, где квантовые состояния в каждых посылках считаются независимыми (не перекрываются) и, соответственно, описываются тензорным произведением, а не симметризованным тензорным произведением.

Отметим в заключение, что безразмерная пропускная способность (85) является лоренц-инвариантной величиной, не изменяется, если наблюдение на приемном конце происходит в движущейся системе отсчета по отношению к системе отсчета источника. То есть измерения в подвижной системе отсчета оставляют пропускную способность неизменной. Данный результат интуитивно понятен, поскольку переход в движущуюся систему отсчета из-за эффекта Доплера приводит к эффективному сжатию частотного спектра состояния

$$\Delta k \to \Delta k \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

(если наблюдатель движется в ту же сторону, что и состояние) и, соответственно, к эффективному пространственному растяжению состояния. Последнее обстоятельство требует большего времени

$$T \to T \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

чтобы обеспечить ту же долю состояния во временном окне. Но поскольку ответ зависит лишь от произведения $\Delta k \cdot T$, результат остается неизменным и также не зависит от направления движения наблюдателя (знака $\beta = v/c$). Этот вывод можно пояснить следующим образом. Поскольку величина скалярного произведения $\hat{k} \cdot \hat{x}$ является лоренц-инвариантом, а для фотона, распространяющегося в одном направлении, $k = k_0$, и пространственно-временные переменные входят лишь в комбинации $\tau = x - t$, величина $k\tau$, от которой зависит ответ, также будет лоренц-инвариантом (см., например, [22]).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы показали, что нелокализуемость состояний в квантовой теории поля приводит к тому, что отдельные посылки, вообще говоря, не могут быть описаны как независимые из-за неизбежности их перекрытия, что требует учета тождественности частиц. Данное обстоятельство с учетом конечности предельной скорости приводит к тому, что формулы для пропускной способности нерелятивистских каналов связи имеют асимптотический характер (т. е. они формально справедливы лишь при бесконечной раздвижке между посылками, когда тождественностью частиц можно пренебречь). Формулы (62), (82) дают величину пропускной способности в единицу времени в зависимости от параметров канала связи и вида сигнальных состояний.

Автор выражает благодарность С. С. Назину за полезные обсуждения и критические замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-16289), а также Минпромнауки (проекты №№ 40.020.1.1.1170, 37.029.1.1.0031).

ЛИТЕРАТУРА

1. C. E. Shannon, Bell Syst. Tech. J. **27**, 397, 623 (1948).
2. В. А. Котельников, в сб. *Всесоюзн. энергетическая комиссия, материалы к первому всесоюзн. съезду по вопросам реконстр. дела связи и развития слаботочной промышленности* (1933).
3. А. С. Холево, Проблемы передачи информации **8**, 63 (1972); **15**, 3 (1979); УМН **53**, 193 (1998).
4. R. Jozsa and B. Schumacher, J. Mod. Opt. **41**, 2343 (1994).
5. P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher, M. Westmoreland, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 1869 (1996).
6. B. Schumacher and M. D. Westmoreland, Phys. Rev. A **56**, 131 (1997).
7. А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, сер. *Современная математическая физика*, вып. 5, МЦНМО, Москва (2002).
8. K. Kraus, *States, Effects and Operations*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
9. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1973).
10. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля*, Наука, Москва (1969).
11. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, Москва (1987).
12. С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **76**, 683 (2002); **77**, 51 (2003).
13. A. M. Jaffe, Phys. Rev. **158**, 1454 (1967).
14. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Обобщенные функции*, вып. 4, Физматгиз, Москва (1961).
15. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, Москва (1964). [N. Wiener and R. Paley, *Fourier Transform in the Complex Domain*, New-York (1934).]
16. G. C. Hegerfeldt, Phys. Rev. D **10**, 3320 (1974); G. C. Hegerfeldt and S. N. M. Ruijsenaar, Phys. Rev. D **22**, 377 (1980).
17. R. Laiho, S. N. Molotkov, and S. S. Nazin, Phys. Lett. A **275**, 36 (2000); Phys. Lett. A **278**, 9 (2000).
18. S. B. Bravyi and A. Yu. Kitaev, Ann. Phys. **208**, 210 (2002).
19. Ю. И. Ожигов, Письма в ЖЭТФ **76**, 675 (2002); E-print archives quant-ph/0205038.
20. D. Slepian and H. O. Pollak, Bell Syst. Tech. J. **XL**, 40 (1961).
21. W. H. Fuchs, J. Math. Anal. Appl. **9**, 317 (1964).
22. С. Н. Молотков, Письма в ЖЭТФ **74**, 477 (2001).