

# КИНЕТИКА АТОМОВ В ПОЛЕ, ОБРАЗОВАННОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ВОЛНАМИ

*О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин\**

*Новосибирский государственный университет,  
Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 31 июля 2003 г.

В квазиклассическом приближении рассматривается кинетика атомов с вырожденными энергетическими уровнями в поле, образованном эллиптически поляризованными волнами. Для оптического перехода  $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$  в приближении медленных атомов найдены аналитические выражения для силы, действующей на атом, и коэффициента диффузии в импульсном пространстве. Эти выражения пригодны для произвольной одномерной конфигурации светового поля и для произвольной интенсивности. Детально исследованы особенности кинетики атомов, связанные с эллиптичностью световых волн, которые отсутствуют в ранее рассмотренных частных конфигурациях, образованных циркулярно или линейно поляризованными волнами.

PACS: 32.80.Pj, 42.50.Vk

## 1. ВВЕДЕНИЕ

На начальном этапе (до 1988 г.) механическое действие резонансного излучения на атомы и, в частности, движение атомов в световом поле было достаточно полно изучено в рамках простейшей модели двухуровневого атома [1, 2]. Данное описание позволило понять физические механизмы и природу сил, действующих на атом в световом поле, и предсказать минимальную температуру лазерного охлаждения атомов (доплеровский предел)  $k_B T_D \sim \hbar \gamma$ , где  $\gamma$  — естественная ширина возбужденного уровня. Экспериментальное наблюдение температур ниже  $T_D$  [3, 4] стимулировало дальнейшее развитие теории. Детальный анализ показал, что субдоплеровское охлаждение связано с вырожденностью основного атомного состояния по проекции углового момента. Следует отметить, что, несмотря на большое число работ по теории субдоплеровского охлаждения [5, 6], в них рассматривался ограниченный класс конфигураций лазерного поля, образованных линейно или циркулярно поляризованными волнами. Тем не менее эти простые примеры позволили выделить два основных механизма трения,

приводящих к субдоплеровскому охлаждению. В случае встречных линейно поляризованных волн — это сизифовский механизм трения, связанный с действием сил вынужденного светового давления, а в случае встречных волн круговой поляризации ( $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурация) механизм является ориентационным и связан с действием сил спонтанного светового давления [7]. Однако вследствие нелинейного характера взаимодействия атомов с резонансным полем рассмотрение этих частных случаев не является исчерпывающим и не дает представления о движении частиц в поле более общей конфигурации. Таким образом, задача о кинетике атомов в поле, образованном эллиптически поляризованными волнами представляет собой самостоятельный интерес. Например, как было показано в нашей работе [8], даже в простейшем случае однородно поляризованного поля эллиптичность приводит к качественно отличию кинетики от результатов двухуровневой модели.

В настоящей работе теоретически исследуется движение атомов в поле одномерной конфигурации, образованной волнами с произвольными эллиптическими поляризациями. В рамках квазиклассического подхода кинетика атомов описывается уравнением Фоккера–Планка. В приближении

\*E-mail: llf@admin.nsu.ru

медленных атомов для оптического перехода  $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$  (где  $J_g, J_e$  — полные угловые моменты основного ( $g$ ) и возбужденного ( $e$ ) состояний) получены аналитические выражения для силы, действующей на атом, и коэффициентов трения и диффузии. Эти выражения проанализированы для ряда конкретных полевых конфигураций и в каждом случае выделены и исследованы новые члены, обусловленные эллиптичностью волн. Дается качественная интерпретация физических механизмов, приводящих к этим новым вкладам.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение атомов с оптическим переходом  $J_g \rightarrow J_e$  в резонансном монохроматическом поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

Пространственно-неоднородную векторную амплитуду запишем в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})\mathbf{e}(\mathbf{r})e^{i\Phi(\mathbf{r})}, \quad (1)$$

где  $E(\mathbf{r})$  — вещественная амплитуда, а  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  — единичный комплексный вектор поляризации. Фаза поля  $\Phi(\mathbf{r})$  задается таким образом, что величина  $\mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \cos(2\varepsilon(\mathbf{r}))$  является вещественной и определяет локальную эллиптичность светового поля, ( $\varepsilon(\mathbf{r})$  — параметр эллиптичности,  $|\text{tg}\varepsilon|$  равен отношению длин малой полуоси эллипса поляризации к большой). Гамильтониан свободного атома во вращающемся (в пространстве энергетического псевдоспина) базисе имеет вид

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} - \hbar\delta\hat{\Pi}_e, \quad (2)$$

где  $\delta = \omega - \omega_0$  — отстройка частоты поля от частоты атомного перехода  $\omega_0$ ,  $M$  — масса атома, проекционный оператор

$$\hat{\Pi}_e = \sum_{\mu_e} |J_e, \mu_e\rangle\langle J_e, \mu_e| \quad (3)$$

построен из волновых функций зеемановских подуровней возбужденного состояния  $|J_e, \mu_e\rangle$ . В дипольном приближении оператор резонансного взаимодействия с полем (1) записывается следующим образом:

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \hbar\Omega(\mathbf{r}) \sum_{q=0,\pm 1} \hat{D}_q e^{iq}(\mathbf{r}) + \text{H.c.}, \quad (4)$$

где  $\Omega = -dE/\hbar$  — частота Раби,  $d$  — приведенный матричный элемент,  $e^q(\mathbf{r})$  — контрвариантные компоненты вектора поляризации в циклическом базисе

$$\{\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_{\pm 1} = \mp(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}\}.$$

Оператор  $\hat{D}_q$  выражается через  $3jm$ -символы:

$$\hat{D}_q = \sum_{\mu_e, \mu_g} |J_e, \mu_e\rangle (-1)^{J_e - \mu_e} \times \begin{pmatrix} J_e & 1 & J_g \\ -\mu_e & q & \mu_g \end{pmatrix} \langle J_g, \mu_g|. \quad (5)$$

Состояние атомного ансамбля описывается одночастичной матрицей плотности  $\hat{\rho}$ , квантовое кинетическое уравнение для которой имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_0, \hat{\rho}] - \frac{i}{\hbar} [\hat{V}(\hat{\mathbf{r}}), \hat{\rho}] - \hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\}, \quad (6)$$

где  $\hat{\Gamma}\{\hat{\rho}\}$  — оператор радиационной релаксации. Межатомными взаимодействиями пренебрегаем. Поскольку уравнение (6) описывает эволюцию как внутренних, так и внешних (поступательных) степеней свободы атома, его решение является весьма сложной задачей. Однако в квазиклассическом приближении можно разделить быстрые процессы упорядочения по внутренним степеням свободы и медленные процессы, связанные с поступательным движением атома, при выполнении следующих основных условий:

1) дисперсия атомного импульса  $\Delta p$  значительно превышает импульс отдачи фотона  $\hbar k$ :

$$\frac{\hbar k}{\Delta p} \ll 1; \quad (7)$$

2) время взаимодействия атома с полем должно превышать характерное время эволюции внутренних степеней свободы атома:

$$t \gg \tau = \max\{\gamma^{-1}, (\gamma G)^{-1}\}, \quad (8)$$

где

$$G = \frac{|\Omega|^2}{3(\gamma^2/4 + \delta^2)}$$

— параметр насыщения;

3) энергия отдачи  $\hbar^2 k^2/2M$  много меньше  $\hbar\tau^{-1}$ :

$$\frac{\hbar k^2}{M} \ll \tau^{-1}. \quad (9)$$

В этих условиях, как показано в работах [1, 2, 9, 10], уравнение (6) может быть сведено к уравнению для функции распределения атомов в фазовом пространстве  $\mathcal{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \text{Tr}\{\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\}$  (след берется по внутренним состояниям матрицы плотности в вигнеровском представлении):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \frac{p_i}{M} \nabla_i \right) \mathcal{W} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \mathcal{W} + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \mathcal{W}. \quad (10)$$

Кинетические коэффициенты  $F_i(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  и  $D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  есть компоненты силы и тензора диффузии в декартовом базисе.

### 3. КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ МЕДЛЕННЫХ АТОМОВ

Кинетические коэффициенты уравнения Фоккера–Планка определяются из уравнений, получаемых в процессе редукции уравнения (6) к (10), и зависят от распределения атомов по внутренним состояниям. Для их нахождения часто используют приближение медленных атомов, которые за время релаксации внутренних степеней свободы смещаются на расстояние, значительно меньшее длины волны света, т. е.  $v\tau \ll \lambda$  или

$$kv \ll \gamma, \gamma G. \quad (11)$$

В этом случае для корректного учета диссипативных процессов достаточно ограничиться для силы линейным приближением по скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/M$ :

$$F_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \approx F_i(\mathbf{r}) + \sum_j \xi_{ij}(\mathbf{r})v_j, \quad (12)$$

а для диффузии — нулевым:

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{v})_{ij} \approx D(\mathbf{r})_{ij}. \quad (13)$$

Величина  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  является силой светового давления на неподвижный атом. Антисимметричная часть тензора  $\xi_{ij}$  соответствует эффективной силе Лоренца, а его симметричная часть определяет трение.

Общая процедура вывода уравнения Фоккера–Планка путем квазиклассического разложения по малому параметру  $\hbar k/\Delta p$  достаточно полно описана в работах [1, 2, 9, 10]. Однако определение явного вида кинетических коэффициентов для атомов с вырожденными по проекции углового момента уровнями в поле наиболее общего вида является довольно сложной математической задачей даже для небольших значений угловых моментов  $J_g$  и  $J_e$ . Так, например, в работе [9] для поиска коэффициентов трения и диффузии необходимо вычислять и интегрировать матричную экспоненту. Сложность таких вычислений быстро возрастает с ростом углового момента атомных уровней. Возможно, по этой причине анализ кинетики атомов был рассмотрен только лишь для нескольких частных конфигураций светового поля, образованных линейно либо циркулярно поляризованными бегущими волнами.

В работе [8] был предложен (без вывода) альтернативный метод нахождения кинетических коэффициентов, согласующийся с известными ранее. Данный метод, на наш взгляд, является более удобным, поскольку поиск коэффициентов трения и диффузии сведен к решению одного алгебраического уравнения для вспомогательной матрицы  $\hat{\phi}$ . В настоящей работе мы будем использовать эти результаты, вывод которых приведен в Приложении А.

Градиентная сила, действующая на неподвижный атом, является квантовомеханическим средним от оператора силы  $\hat{F}$ :

$$F_i(\mathbf{r}) = \text{Tr} \left\{ \hat{F}_i(\mathbf{r}) \hat{\sigma}(\mathbf{r}) \right\}, \quad \hat{F}_i(\mathbf{r}) = -\nabla_i \hat{V}(\mathbf{r}), \quad (14)$$

где матрица плотности  $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$  является решением оптического уравнения Блоха:

$$\left[ \left( \frac{\gamma}{2} - i\delta \right) \hat{\Pi}_e \hat{\sigma} + \left( \frac{\gamma}{2} + i\delta \right) \hat{\sigma} \hat{\Pi}_e \right] + \frac{i}{\hbar} [\hat{V}, \hat{\sigma}] - \gamma(2J_e + 1) \sum_q \hat{D}_q^\dagger \hat{\sigma} \hat{D}_q = 0 \quad (15)$$

с условием нормировки  $\text{Tr} \{ \hat{\sigma} \} = 1$  и описывает стационарное распределение атомов по магнитным подуровням в нулевом приближении по параметру отдачи и скорости атомов. Отметим, что явный аналитический вид  $\hat{\sigma}$  для всех дипольных переходов был найден в работах [11, 12].

Коэффициент трения пропорционален пространственному градиенту  $\hat{\sigma}$ :

$$\xi_{ij}(\mathbf{r}) = -\hbar k \text{Tr} \{ \hat{\phi}_i \nabla_j \hat{\sigma} \}. \quad (16)$$

Коэффициент диффузии можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = D_{ij}^{(s)}(\mathbf{r}) + D_{ij}^{(i)}(\mathbf{r}), \quad (17)$$

первое из которых,

$$D_{ij}^{(s)}(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{5} (\hbar k)^2 \times \text{Tr} \left\{ \left( \delta_{ij} \hat{\Pi}_e - \frac{2J_e + 1}{4} (\hat{D}_i \hat{D}_j^\dagger + \hat{D}_j \hat{D}_i^\dagger) \right) \hat{\sigma} \right\}, \quad (18)$$

обусловлено эффектом отдачи при спонтанном излучении, а второе слагаемое,

$$D_{ij}^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar k}{4} \times \text{Tr} \left\{ \hat{\phi}_i (\hat{\sigma} \widehat{\delta F}_j + \widehat{\delta F}_j \hat{\sigma}) + (\hat{\sigma} \widehat{\delta F}_i + \widehat{\delta F}_i \hat{\sigma}) \hat{\phi}_j \right\}, \quad (19)$$

определяется оператором флуктуации силы:

$$\widehat{\delta F}(\mathbf{r}) = \hat{F}(\mathbf{r}) - F(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Матрица  $\hat{\phi}$ , используемая в формулах (16), (19), удовлетворяет уравнению (см. Приложение А)

$$\left[ \left( \frac{\gamma}{2} + i\delta \right) \hat{\Pi}_e \hat{\phi}_i + \left( \frac{\gamma}{2} - i\delta \right) \hat{\phi}_i \hat{\Pi}_e \right] - \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{V}, \hat{\phi}_i \right] - \gamma(2J_e + 1) \sum_q \hat{D}_q \hat{\phi}_i \hat{D}_q^\dagger = \frac{\delta \hat{F}_i}{\hbar k} \quad (21)$$

и позволяет единым образом записать выражения для коэффициентов трения и диффузии.

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ПЕРЕХОДА $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$

Ниже мы будем рассматривать одномерные конфигурации светового поля, когда векторная амплитуда зависит только от одной координаты  $z$ . В общем случае такое поле образуется двумя встречными бегущими плоскими волнами с произвольными интенсивностями и эллиптическими поляризациями. В этом случае локальную векторную амплитуду поля (1) можно характеризовать четырьмя вещественными величинами: вещественной амплитудой, фазой, эллиптичностью и углом ориентации эллипса поляризации. В системе координат, где ось  $z$  ортогональна плоскости поляризации, вектор  $\mathbf{e}(z)$  в циклическом базисе записывается через локальную эллиптичность светового поля  $\varepsilon(z)$  и угол поворота эллипса поляризации  $\phi(z)$  следующим образом:

$$\mathbf{e}(z) = \cos\left(\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\phi} \mathbf{e}_{-1} - \cos\left(\varepsilon - \frac{\pi}{4}\right) e^{-i\phi} \mathbf{e}_{+1}. \quad (22)$$

Далее, для простоты, будем рассматривать одномерную задачу. Следует отметить, что в общем случае кинетическая задача может быть сведена к одномерной лишь приближенно, поскольку в результате процессов отдачи при спонтанном переизлучении фотонов поля возникает связь между поступательными степенями свободы атома по всем трем направлениям. Связью в продольном и поперечных направлениях по отношению к оси  $z$  можно пренебречь, когда ширина импульсного распределения в поперечном направлении,  $\Delta p_\perp$ , значительно превышает ширину импульсного распределения в продольном направлении,  $\Delta p_z$ , ( $\Delta p_\perp \gg \Delta p_z$ ) и эффект отдачи в поперечном направлении не приводит к существенному изменению импульсного распределения. Такая модель применима, например, для задачи о взаимодействии атомного пучка с поперечным ему световым полем. Далее будем полагать, что сила и тензор диффузии

являются функциями одной координаты  $z$  и соответствующей компоненты скорости, которую будем обозначать  $v$ . В принятых обозначениях кинетические коэффициенты удобно выразить через градиенты параметров светового поля:  $\nabla_z \Phi$ ,  $\nabla_z \phi$ ,  $\nabla_z \varepsilon$  — градиенты фазы, угла поворота эллипса поляризации, эллиптичности, а также  $\nabla_z \Lambda$  ( $\Lambda = \ln E$ ) — градиент от логарифма вещественной амплитуды поля.

#### 4.1. Сила

Используя явный вид для матрицы  $\hat{\sigma}$  (15), получим выражение для силы в нулевом порядке по скорости:

$$F_z = \frac{\hbar G_\varepsilon}{1 + G_\varepsilon} \left[ \delta (\text{tg}(2\varepsilon) \nabla_z \varepsilon - \nabla_z \Lambda) + \frac{\gamma}{2} \nabla_z \Phi \right]. \quad (23)$$

Здесь для удобства введен эффективный параметр насыщения  $G_\varepsilon = G \cos^2(2\varepsilon)$ . Первое слагаемое, пропорциональное  $\delta$ , является силой вынужденного светового давления и возникает от градиентов эллиптичности и амплитуды светового поля, а градиент фазы дает вклад в силу спонтанного светового давления, обусловленную процессами спонтанного перерассеяния фотонов. Отметим, что в выражении (23) отсутствует вклад от градиента ориентации эллипса поляризации  $\nabla_z \phi$ . Это связано со спецификой матрицы  $\hat{\sigma}$  для оптических переходов  $J_g = J \rightarrow J_e = J$  ( $J$  — полуцелое) [12, 13], для которой магнитные подуровни возбужденного состояния заселены равномерно (изотропно).

#### 4.2. Коэффициенты трения и диффузии

Коэффициенты трения  $\xi = \xi_{zz}$  и вынужденной диффузии  $D^{(i)} = D_{zz}^{(i)}$  могут быть записаны в общем виде:

$$\xi = \hbar \sum_{\beta\beta'} \chi_{\beta\beta'} \nabla_z \beta \nabla_z \beta', \quad (24)$$

$$D^{(i)} = \hbar^2 \sum_{\beta\beta'} \mathcal{D}_{\beta\beta'} \nabla_z \beta \nabla_z \beta', \quad (25)$$

где индексы суммирования  $\beta, \beta'$  соответствуют  $\{\Lambda, \varepsilon, \Phi, \phi\}$ , а компоненты  $\chi_{\beta\beta'}$  и  $\mathcal{D}_{\beta\beta'}$  выражаются через параметры светового поля. Поскольку в рассматриваемой задаче имеются лишь градиенты вдоль оси  $z$ , коэффициенты трения и вынужденной диффузии содержат только симметричные комбинации от недиагональных ( $\beta \neq \beta'$ ) членов:  $\chi_{\beta\beta'} + \chi_{\beta'\beta}$  и  $\mathcal{D}_{\beta\beta'} + \mathcal{D}_{\beta'\beta}$ . Заметим, что выражения

$\chi_{\beta\beta'}$ ,  $\mathcal{D}_{\beta\beta'}$  применимы и для трехмерной постановки задачи. В этом случае для поиска тензоров трения и диффузии остается лишь вычислить необходимые градиенты параметров светового поля. Отметим, что в наиболее общей трехмерной постановке задачи, кроме имеющихся градиентов от  $\{\Lambda, \varepsilon, \Phi, \phi\}$ , необходимо учитывать дополнительно еще два угла, описывающие поворот, выводящий из плоскости эллипса поляризации. Однако в трехмерных задачах, где плоскость эллипса поляризации остается неизменной, достаточно ограничиться приведенными здесь результатами. Выражения для компонент коэффициентов трения  $\chi_{\beta\beta'}$  и диффузии  $\mathcal{D}_{\beta\beta'}$  приведены в Приложении В.

Коэффициент спонтанной диффузии  $D^{(s)} = D_{zz}^{(s)}$  пропорционален полной населенности возбужденного уровня и не зависит от градиентов внешнего поля:

$$D^{(s)} = \frac{\gamma(\hbar k)^2}{12} \frac{G_\varepsilon}{1 + G_\varepsilon}. \quad (26)$$

Полученные нами выражения для силы, коэффициентов трения и диффузии позволяют описывать кинетику медленных атомов с оптическим переходом  $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$ , являющимся простой моделью атомов с вырожденными по проекции углового момента уровнями. Отметим, что существуют простые конфигурации светового поля, характеризующиеся лишь градиентом одного из параметров. Например, стоячая однородно поляризованная волна характеризуется градиентом интенсивности  $\nabla_z \Lambda$ , бегущая однородно поляризованная волна характеризуется градиентом фазы  $\nabla_z \Phi$ , поле  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации характеризуется градиентом ориентации вектора поляризации  $\nabla_z \phi$ , а поле конфигурации  $lin \perp lin$  характеризуется градиентом эллиптичности  $\nabla_z \varepsilon$ . Для этих конфигураций коэффициенты трения и диффузии определяются соответствующими диагональными элементами  $\chi_{\beta\beta}$  и  $\mathcal{D}_{\beta\beta}$ .

## 5. ОДНОРОДНО ПОЛЯРИЗОВАННОЕ ПОЛЕ

В однородно поляризованном поле эллиптичность и ориентация эллипса поляризации не зависят от координаты, т. е. в таком поле могут присутствовать только градиенты фазы и интенсивности. С другой стороны, именно эти градиенты возникают при описании кинетики атомов в невырожденной двухуровневой модели атома [1, 2]. Поэтому представляет особый интерес рассмотреть этот тип световых полей отдельно и сопоставить полученные вы-

ражения для кинетических коэффициентов (силы, коэффициентов трения и диффузии) с известными результатами для двухуровневой модели атома. Это позволит определить различия, связанные с вырожденностью атомных уровней по проекции углового момента, и выделить эффекты, к которым приводит эллиптичность светового поля.

### 5.1. Эллиптически поляризованная бегущая волна

Простейшим примером однородно поляризованной конфигурации светового поля является бегущая плоская монохроматическая волна,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \mathbf{e} e^{ikz} e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (27)$$

Амплитуда светового поля  $E_0$  и вектор поляризации  $\mathbf{e}$  являются пространственно однородными, в то время как фаза  $\Phi = kz$  зависит от координаты. Сила, действующая на атом в этом поле, пропорциональна градиенту фазы (23) и по своей природе является силой спонтанного светового давления. Выражения для коэффициента трения (В.3), так же как и для силы, по форме совпадают с результатами для двухуровневого атома с эффективным параметром насыщения  $G_\varepsilon$ . Наиболее заметное отличие от модели двухуровневого атома возникает в выражении для коэффициента диффузии (В.19),

$$D^{(i)} = \hbar^2 k^2 \frac{\gamma}{4} \frac{G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^3} \times \left[ (1 + G_\varepsilon)^2 + 3 \sin^2(2\varepsilon) + G_\varepsilon \left( 1 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \right) \right], \quad (28)$$

а именно, появляется дополнительное слагаемое, пропорциональное  $\sin^2(2\varepsilon)$ , которое является существенным в поле малой интенсивности,  $G_\varepsilon \ll 1$ . Как хорошо известно, вынужденная диффузия атомов в бегущей волне связана с флуктуацией числа фотонов, рассеянных на атоме [1, 14]. Эта величина зависит от статистики числа рассеянных фотонов и для двухуровневого атома в поле малой интенсивности ( $G \ll 1$ ) распределение является пуассоновским. Наличие дополнительного слагаемого в (28) свидетельствует об отклонении от пуассоновского распределения в статистике числа рассеянных фотонов в поле малой интенсивности. Эти отклонения связаны с корреляцией процессов излучения фотонов  $\sigma_+$ - и  $\sigma_-$ -поляризации в эллиптически поляризованном

поле. Действительно, вероятность рассеяния  $\sigma_{\pm}$  циркулярно поляризованного кванта внешнего поля в малом интервале  $\Delta t$ ,

$$p_{\pm} = \gamma G \frac{1 \pm \sin(2\varepsilon)}{2} \pi_{\mp} \Delta t,$$

зависит от степени эллиптичности и вероятности  $\pi_{\pm}$  обнаружить атом в основном состоянии с проекцией углового момента  $\mu_g = \pm 1/2$  ( $\pi_+ + \pi_- = 1$ ). Пусть, например, в некотором интервале был рассеян  $\sigma_+$ -фотон, тогда для последующего интервала  $\pi_+ = 1/3$  и  $\pi_- = 2/3$  в соответствии с относительными вероятностями спонтанного распада по каналам  $|\mu_e = 1/2\rangle \rightarrow |\mu_g = 1/2\rangle$  и  $|\mu_e = 1/2\rangle \rightarrow |\mu_g = -1/2\rangle$ . После рассеяния  $\sigma_-$ -фотона, наоборот,  $\pi_+ = 2/3$  и  $\pi_- = 1/3$ . Поэтому при  $\varepsilon \neq 0$  вероятность рассеяния фотона (какого-либо сорта),

$$p_+ + p_- = \gamma \frac{G}{2} [1 - (\pi_+ - \pi_-) \sin(2\varepsilon)] \Delta t,$$

зависит от поляризации кванта, рассеянного перед этим, т. е. схема независимых испытаний нарушена. Среднее число рассеянных квантов определяется средними значениями

$$\bar{\pi}_{\pm} = \frac{1 \pm \sin(2\varepsilon)}{2}.$$

Следовательно, статистика числа фотонов не является более пуассоновской и из (28) можно заключить, что она носит надпуассоновский характер.

### 5.2. Однородно поляризованная стоячая волна

В однородно поляризованной стоячей волне вещественная амплитуда (1) является периодической функцией координаты  $E(z) = E_0 \cos(kz)$ , а вектор поляризации  $\mathbf{e}$  является пространственно-однородным. В таком поле отличен от нуля лишь градиент интенсивности  $\Lambda$  и, соответственно, сила, действующая на неподвижный атом,

$$F(z) = -\frac{\hbar \delta G_{\varepsilon} \nabla_z \Lambda}{1 + G_{\varepsilon}}, \quad (29)$$

является силой вынужденного светового давления. Коэффициенты трения и вынужденной диффузии имеют вид

$$\xi(z) = \hbar \chi_{\Lambda\Lambda} (\nabla_z \Lambda)^2, \quad (30)$$

$$D^{(i)}(z) = \hbar^2 \mathcal{D}_{\Lambda\Lambda} (\nabla_z \Lambda)^2. \quad (31)$$

Случай однородно поляризованной стоячей волны произвольной эллиптичности  $\varepsilon$  был рассмотрен нами в работе [8]. Поэтому далее мы остановимся лишь на некоторых интересных особенностях в кинетике, которые не были рассмотрены ранее. В частности, на основе пространственно усредненных выражений для коэффициентов трения и диффузии определим отличия наших результатов от результатов невырожденной модели атома.

Усредненная по пространственному периоду светового поля градиентная сила исчезает,  $\langle F(z) \rangle = 0$ , а коэффициент трения можно разбить на сумму двух вкладов:

$$\langle \xi \rangle = \langle \xi_1 \rangle + \langle \xi_2 \rangle. \quad (32)$$

Первое слагаемое

$$\langle \xi_1 \rangle = \frac{\hbar k^2}{4} \left[ \frac{\delta \gamma S_{\varepsilon} (2 + S_{\varepsilon})}{(1 + S_{\varepsilon})^{3/2} (\delta^2 + \gamma^2/4)} - \frac{\delta (8 + 3S_{\varepsilon}^3 + 15S_{\varepsilon}^2 + 20S_{\varepsilon} - 8(1 + S_{\varepsilon})^{5/2})}{\gamma (1 + S_{\varepsilon})^{5/2}} \right] \quad (33)$$

соответствует выражению для двухуровневой модели атома [1] с эффективным параметром насыщения

$$S_{\varepsilon} = \frac{|E_0 d|^2 \cos^2(2\varepsilon)}{\hbar^2 3 (\delta^2 + \gamma^2/4)}. \quad (34)$$

Второе слагаемое

$$\langle \xi_2 \rangle = \hbar k^2 \left[ \frac{3\delta \sin^2(2\varepsilon) S_{\varepsilon} (4 + 3S_{\varepsilon})}{4\gamma (1 + S_{\varepsilon})^{3/2}} \right] \quad (35)$$

является дополнительным вкладом в трение и может быть интерпретировано в терминах вероятностей переходов между одетыми состояниями атома (эффект Сизифа) [8, 15]. При малых параметрах насыщения,  $S_{\varepsilon} < 1$ , основной вклад в этот эффект дают переходы между одетыми состояниями, соответствующие зеемановским подуровням основного состояния, что и приводит к дополнительному вкладу в трение.

В пределе малой интенсивности светового поля,  $S_{\varepsilon} \ll 1$ , коэффициенты  $\langle \xi_1 \rangle$  и  $\langle \xi_2 \rangle$  имеют вид

$$\langle \xi_1 \rangle = \frac{\hbar k^2}{2} \frac{\delta \gamma S_{\varepsilon}}{\delta^2 + \gamma^2/4}, \quad (36)$$

$$\langle \xi_2 \rangle = \hbar k^2 3 \sin^2(2\varepsilon) \frac{\delta S_{\varepsilon}}{\gamma}. \quad (37)$$

Вклад  $\langle \xi_1 \rangle$  соответствует известному доплеровскому механизму трения [1, 2]. При больших отстройках ( $\delta \gg \gamma$ ) имеет место соотношение

$$\frac{\langle \xi_2 \rangle}{\langle \xi_1 \rangle} \approx 6 \sin^2(2\varepsilon) \frac{\delta^2}{\gamma^2},$$

из которого видно, что в эллиптически поляризованном поле,  $\varepsilon \neq 0$ , дополнительный вклад может на несколько порядков превышать результат для двухуровневой модели.

В интенсивных полях,  $S_\varepsilon \gg 1$ , выражения для коэффициентов принимают вид

$$\langle \xi_1 \rangle = \hbar k^2 \frac{\delta}{4\gamma} \frac{(\gamma^2 - 12\delta^2)\sqrt{S_\varepsilon}}{4\delta^2 + \gamma^2}, \quad (38)$$

$$\langle \xi_2 \rangle = \hbar k^2 \frac{9 \sin^2(2\varepsilon)\delta\sqrt{S_\varepsilon}}{4\gamma}. \quad (39)$$

Отметим, что для двухуровневой модели атома в интенсивном поле знак коэффициента трения определяется не только знаком отстройки, но и ее величиной (38). Учет вырожденности атомных уровней приводит к следующему интересному эффекту: при эллиптичности поля  $\sin^2(2\varepsilon) > 1/3$  благодаря дополнительному вкладу (39) знак суммарного коэффициента трения (32) определяется только знаком отстройки: при  $\delta > 0$  — нагрев, при  $\delta < 0$  — охлаждение.

Усредненный коэффициент вынужденной диффузии так же, как и коэффициент трения, можно разбить на две части:

$$\langle D^{(i)} \rangle = \langle D_1^{(i)} \rangle + \langle D_2^{(i)} \rangle. \quad (40)$$

Первый член представляет собой уже известный результат [1] для двухуровневого атома с новым параметром  $S_\varepsilon$ :

$$\langle D_1^{(i)} \rangle = \frac{\hbar^2 k^2 \gamma S_\varepsilon}{8} + \frac{\hbar^2 k^2 \delta^2}{\gamma} \left[ 3 + \frac{S_\varepsilon}{2} - \frac{15S_\varepsilon^2 + 40S_\varepsilon + 24 + \gamma^2 S_\varepsilon^2 (\delta^2 + \gamma^2/4)^{-1}}{8(1 + S_\varepsilon)^{3/2}} \right]. \quad (41)$$

Второе слагаемое

$$\langle D_2^{(i)} \rangle = \frac{\hbar^2 k^2 \sin^2(2\varepsilon)}{\gamma} \left[ \frac{3\delta^2 S_\varepsilon (4 + 3S_\varepsilon)}{8(1 + S_\varepsilon)^{3/2}} + \left( \delta^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \frac{1 + S_\varepsilon/2 - \sqrt{1 + S_\varepsilon}}{3 \cos^2(2\varepsilon)} \right] \quad (42)$$

является дополнительным по сравнению с двухуровневой моделью атома и описывает вклады диффузионных процессов, обусловленных зеемановской вырожденностью энергетических уровней.

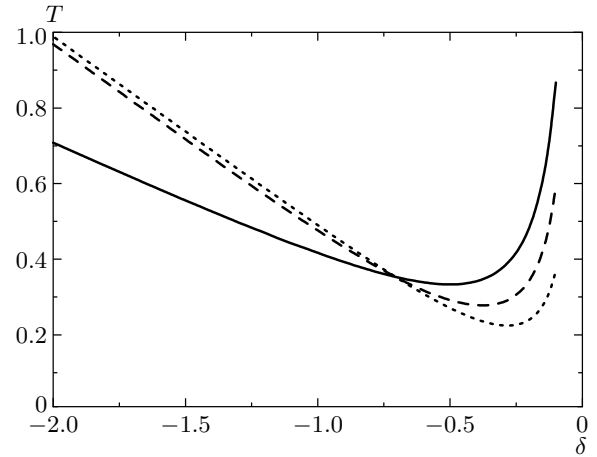


Рис. 1. Температура в единицах  $\hbar\gamma/k_B$  как функция отстройки при различных эллиптичностях светового поля: сплошная линия — линейная поляризация поля, штриховая — эллиптичность поля  $\sin^2(2\varepsilon) = 1/3$ , пунктирная — формальный предел при круговой поляризации поля

Приведенные нами выражения для усредненных по пространственному периоду коэффициентов трения и диффузии согласно [1] позволяют оценить температуру атомного ансамбля,  $k_B T = -\langle D \rangle / \langle \xi \rangle$ , без учета локализации в зависимости от эллиптичности поля. В слабом поле ( $S_\varepsilon \ll 1$ ) получим

$$k_B T = -\frac{\hbar}{\delta} \frac{(9 \sin^2(2\varepsilon)\delta^2 + \gamma^2)(4\delta^2 + \gamma^2)}{6(12 \sin^2(2\varepsilon)\delta^2 + 3 \sin^2(2\varepsilon)\gamma^2 + 2\gamma^2)}. \quad (43)$$

Коэффициент диффузии является положительным, поэтому стационарное распределение атомов возможно только при  $\langle \xi \rangle < 0$ , и выражение для температуры имеет смысл для  $\delta < 0$ . Для линейной поляризации поля результат сводится к известному выражению для доплеровской температуры лазерного охлаждения в модели двухуровневого атома:

$$k_B T(\varepsilon = 0) = -\frac{\hbar(4\delta^2 + \gamma^2)}{12\delta}, \quad (44)$$

минимум которой достигается при  $\delta = -\gamma/2$  и составляет  $k_B T_D = \hbar\gamma/3$ . В общем случае учет поляризации поля приводит к несколько иной зависимости температуры от отстройки (рис. 1). Видно, что температура может принимать значения меньше, чем для линейной поляризации поля. Можно убедиться, что наименьшее значение температуры достигается при эллиптичности поля  $|\varepsilon| \rightarrow \pi/4$ , (т. е. для случая круговой поляризации).

В другом предельном случае интенсивного светового поля,  $S_\epsilon \gg 1$ , оценка для температуры атомов имеет следующую зависимость:

$$k_B T = -\frac{\hbar}{\delta} \frac{(3 \cos^2(2\epsilon) + \sin^2(2\epsilon))(4\delta^2 + \gamma^2)^2 \sqrt{S_\epsilon}}{6 \cos^2(2\epsilon)(36 \sin^2(2\epsilon)\delta^2 + 9 \sin^2(2\epsilon)\gamma^2 + \gamma^2 - 12\delta^2)}. \quad (45)$$

Здесь можно выделить два различных случая. В первом случае, когда эллиптичность светового поля  $\sin^2(2\epsilon) \geq 1/3$ , направление кинетического процесса определяется лишь знаком  $\delta$  (охлаждение при  $\delta < 0$ ). При эллиптичности поля  $\sin^2(2\epsilon) < 1/3$  охлаждение имеет место для отстроек, лежащих в двух интервалах:

$$-\gamma \frac{\sqrt{(3 - 9 \sin^2(2\epsilon))(9 \sin^2(2\epsilon) + 1)}}{6 - 18 \sin^2(2\epsilon)} < \delta < 0, \quad (46)$$

$$\delta > \gamma \frac{\sqrt{(3 - 9 \sin^2(2\epsilon))(9 \sin^2(2\epsilon) + 1)}}{6 - 18 \sin^2(2\epsilon)}.$$

В частности, для линейной поляризации поля выражение для температуры принимает известный вид [1]:

$$k_B T(\epsilon = 0) = \frac{\hbar}{2\delta} \frac{(4\delta^2 + \gamma^2)^2 \sqrt{S_\epsilon}}{12\delta^2 - \gamma^2}. \quad (47)$$

Зависимость температуры от отстройки светового поля при эллиптичностях светового поля  $\sin^2(2\epsilon) < 1/3$  приведена на рис. 2.

Еще раз подчеркнем, что оценка для температуры есть отношение коэффициентов трения и диффузии, т. е. основана на приближении медленных атомов (11). Однако, как известно [1], даже в двухуровневой модели атома в стоячей волне из-за наличия узлов светового поля применимость данного приближения ограничена довольно жесткими условиями. В случае ненулевой эллиптичности светового поля этот вопрос требует дополнительных исследований, которые в данной работе проводиться не будут.

### 5.3. Однородно поляризованное поле «смешанного» типа

Однородно поляризованное поле в общем случае может содержать одновременно градиент амплитуды и градиент фазы. Такая ситуация возникает, например, в поле, образованном встречными волнами с одинаковыми эллипсами поляризации, но с различными амплитудами. Коэффициенты трения и диффузии в таком поле содержат, кроме диагональных

по градиентам вкладов, также и перекрестные  $\chi_{\Lambda\Phi}$  и  $\mathcal{D}_{\Lambda\Phi}$ . Заметим, что дополнительный вклад в коэффициент трения имеет четную зависимость от отстройки  $\delta$ , а дополнительный вклад в коэффициент диффузии — нечетную зависимость от  $\delta$ . Таким образом, в поле «смешанного» типа возникает «аномальная» зависимость от отстройки для коэффициентов трения и диффузии и, в частности, коэффициент трения не исчезает в случае точного резонанса,  $\delta = 0$ , благодаря дополнительному вкладу  $\chi_{\Lambda\Phi}$  и  $\chi_{\Phi\Lambda}$  (см. Приложение В).

## 6. НЕОДНОРОДНО ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ПОЛЯ

Как хорошо известно, субдоплеровское охлаждение атомов возможно в полях с неоднородной поляризацией. Простейшими примерами такого поля являются поля с градиентом эллиптичности ( $lin \perp lin$ -конфигурация поля) и с градиентом ориентации ( $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурация поля). В первом случае поле является суперпозицией встречных плоских волн с линейными поляризациями, ориентированными под прямым углом друг к другу:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0(\mathbf{e}_x e^{ikz} + \mathbf{e}_y e^{-ikz}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (48)$$

Здесь  $E_0$  — амплитуда каждой из волн, а векторы  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  описывают линейную поляризацию встречных волн, соответственно, вдоль осей  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Это выражение можно привести к виду (1) с параметрами  $E(z) = 2E_0$  и эллиптичностью  $\epsilon(z) = kz$ . Фаза и угол ориентации не зависят от координаты  $z$ .

Поле  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации является суперпозицией встречных волн с циркулярными, противоположными по вращению поляризациями:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0(\mathbf{e}_{+1} e^{ikz} + \mathbf{e}_{-1} e^{-ikz}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (49)$$

что при переходе к форме (1) даст  $E(z) = 2E_0$ ,  $\epsilon(z) = 0$ ,  $\Phi(z) = 0$ ,  $\phi(z) = kz$ . Здесь по мере движения вдоль оси  $z$  изменяется лишь ориентация вектора поляризации светового поля.



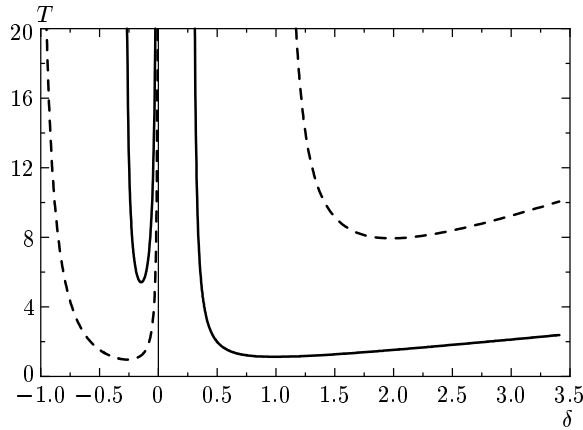


Рис. 2. Температура в единицах  $\hbar\gamma S^{1/2}/k_B$  как функция отстройки при различных эллиптичностях светового поля: сплошная кривая — линейная поляризация поля, штриховая — эллиптичность поля  $\varepsilon = \pi/12$

Напомним, что выражения для кинетических коэффициентов для этих конфигураций определяются диагональными по градиентам  $(\nabla\varepsilon)^2$  и  $(\nabla\phi)^2$  вкладками, соответственно,  $\chi_{\varepsilon\varepsilon}$  (В.2) и  $\mathcal{D}_{\varepsilon\varepsilon}$  (В.18) для  $lin \perp lin$ -конфигурации и  $\chi_{\phi\phi}$  (В.4) и  $\mathcal{D}_{\phi\phi}$  (В.20) для  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации. «Простые» конфигурации неоднородно поляризованного поля несомненно удобны для анализа кинетики атомов и позволили понять основные механизмы субдоплеровского охлаждения в полях малой интенсивности [7]. Однако этими механизмами не исчерпывается кинетика атомов в полях неоднородной поляризации, поскольку, как видно из общих результатов для коэффициентов трения и диффузии, наличие в поле одновременно нескольких градиентов приводит к новым интересным эффектам и новым механизмам субдоплеровского охлаждения, которые мы рассмотрим подробнее.

### 6.1. $\varepsilon - \theta - \bar{\varepsilon}$ -конфигурация поля

Простым примером поля, в котором присутствуют все градиенты (интенсивности, эллиптичности, ориентации и фазы) является поле, образованное встречными плоскими волнами одинаковой интенсивности с равной по модулю эллиптичностью, но с противоположными направлениями вращения:

$$\mathbf{E}(z) = E_0 \mathcal{E}(z) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (50)$$

Здесь  $E_0$  — амплитуда каждой из встречных волн, а вектор  $\mathcal{E}(z) = a_+ \mathbf{e}_{+1} + a_- \mathbf{e}_{-1}$  с циклическими компо-

нентами  $a_+(z)$  и  $a_-(z)$  определяет локальный эллипс поляризации, амплитуду и фазу поля:

$$\begin{aligned} a_+ &= -\cos\left(\varepsilon_0 - \frac{\pi}{4}\right) e^{ikz} - \\ &\quad - \cos\left(\varepsilon_0 + \frac{\pi}{4}\right) e^{-ikz} e^{-i\theta}, \\ a_- &= \cos\left(\varepsilon_0 + \frac{\pi}{4}\right) e^{ikz} + \\ &\quad + \cos\left(\varepsilon_0 - \frac{\pi}{4}\right) e^{-ikz} e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (51)$$

где  $\theta$  — угол между главными полуосями эллипсов поляризаций встречных волн (рис. 3), а параметр  $\varepsilon_0$  характеризует степень эллиптичности встречных волн. Для конфигурации поля (51) будем использовать обозначение  $\varepsilon - \theta - \bar{\varepsilon}$ . Отметим, что известные конфигурации  $lin \perp lin$  ( $\varepsilon_0 = 0, \theta = \pi/2$ ) и  $\sigma_+ - \sigma_-$  ( $\varepsilon_0 = \pi/4$ ) являются частными случаями данной конфигурации поля.

#### 6.1.1. Градиентная сила

Для малых интенсивностей поля,  $G \ll 1$ , кинетические коэффициенты принимают простой вид. Так, градиентная сила разбивается на сумму двух вкладов:

$$\begin{aligned} F(z) &= F^{(i)}(z) + F^{(s)}(z), \\ F^{(i)}(z) &= 2\hbar k \delta S_0 [\cos(2\varepsilon_0) \sin(2kz) \times \\ &\quad \times (\cos\theta + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz))] \times \\ &\quad \times (1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos\theta \cos(2kz))^{-1}, \\ F^{(s)}(z) &= \frac{\hbar k \gamma S_0}{2} \frac{\sin(4\varepsilon_0) \sin(2kz) \sin\theta}{1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos\theta \cos(2kz)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь параметр насыщения равен

$$S_0 = \frac{|\Omega_0|^2}{3(\delta^2 + \gamma^2/4)}, \quad (53)$$

где  $\Omega_0 = -E_0 d/\hbar$ ,  $E_0$  — амплитуда встречных волн. Первое слагаемое  $F^{(i)}$  является силой вынужденного светового давления (дипольная сила), а второе  $F^{(s)}$  — силой спонтанного светового давления. Как видно, в данном случае сила спонтанного светового давления создает периодический оптический потенциал, если эллиптичности световых волн отличны от линейных и круговых ( $\varepsilon_0 \neq 0, \pi/4$ ), а

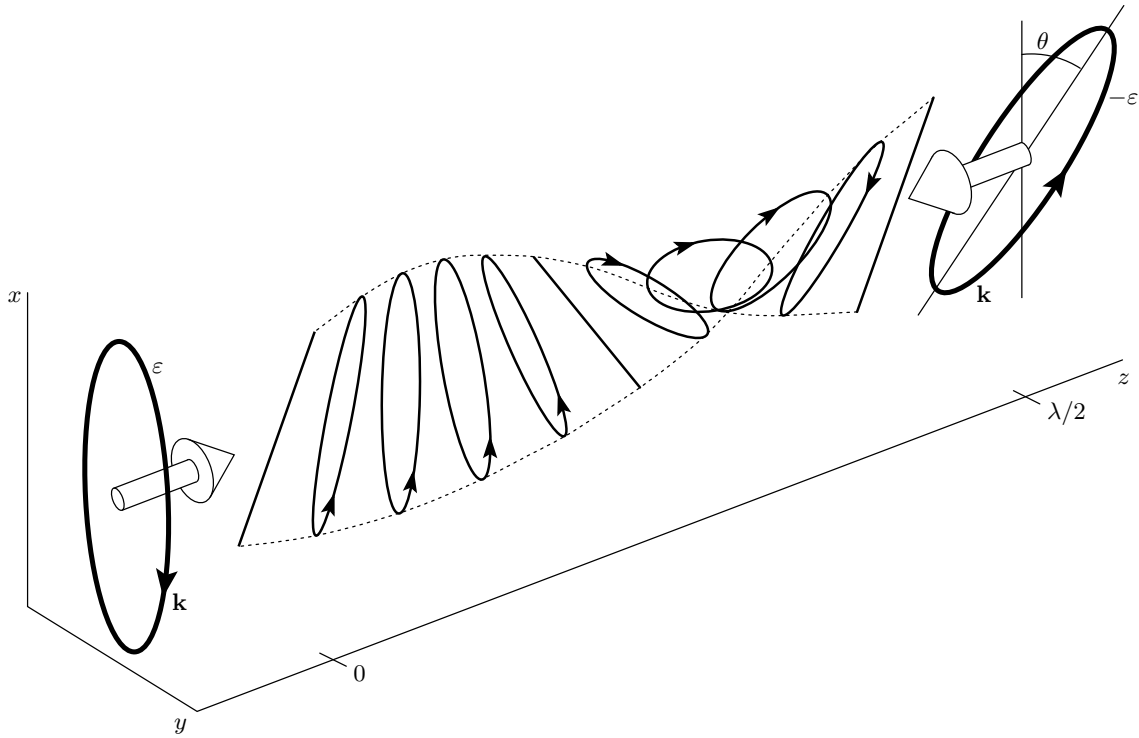


Рис. 3. Пространственная конфигурация  $\varepsilon$ - $\theta$ - $\bar{\varepsilon}$  светового поля. Поле образовано встречными волнами эллиптической поляризации с параметрами эллиптичности  $\varepsilon$  и  $-\varepsilon$

также если угол  $\theta \neq 0$ , т. е. потенциал отсутствует для известных конфигураций, образованных волнами с линейными либо циркулярными поляризациями. Механизм формирования силы спонтанного светового давления здесь следующий: неоднородно поляризованным полем создается пространственно неоднородная анизотропия атомов, вследствие которой атомы с разной вероятностью перерассеивают фотоны встречных волн, что приводит к дисбалансу сил спонтанного светового давления. Следует особо отметить, что спонтанная сила в данном поле приводит к периодическому оптическому потенциалу, исчезающему в случае точного резонанса ( $\delta = 0$ ). Добавим также, что  $F^{(i)}$  является нечетной функцией отстройки  $\delta$  и четной по поляризационным параметрам  $\varepsilon_0$  и  $\theta$ , в то время как  $F^{(s)}$ , наоборот, является четной по  $\delta$  и нечетной по  $\varepsilon_0$  и  $\theta$ .

### 6.1.2. Коэффициент трения

Коэффициент трения, так же как и градиентная сила, разбивается на слагаемые, различные по своей природе:

$$\xi(z) = \xi^{(i)}(z) + \xi^{(s)}(z),$$

$$\begin{aligned} \xi^{(i)}(z) &= -\frac{6\hbar k^2 \delta}{\gamma} \sin^2 \theta \cos^2(2\varepsilon_0) \times \\ &\times \cos(2kz) [\cos(2kz) + \cos \theta \cos(2\varepsilon_0)] \times \\ &\times [1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta]^{-3}, \\ \xi^{(s)}(z) &= -\frac{3\hbar k^2}{2} \sin \theta \sin(4\varepsilon_0) \times \\ &\times [\cos(2kz) + \cos \theta \cos(2\varepsilon_0)] \times \\ &\times [1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta]^{-3}. \end{aligned} \tag{54}$$

После усреднения по пространственному периоду имеем

$$\begin{aligned} \langle \xi^{(i)} \rangle &= -\frac{3\hbar k^2 \delta}{\gamma} \frac{\sin^2 \theta \cos^2(2\varepsilon_0)}{(1 - \cos^2(2\varepsilon_0) \cos^2 \theta)^{3/2}}, \\ \langle \xi^{(s)} \rangle &= \frac{3\hbar k^2}{8} \frac{\sin(2\theta) \cos(2\varepsilon_0) \sin(4\varepsilon_0)}{(1 - \cos^2(2\varepsilon_0) \cos^2 \theta)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{55}$$

Следует отметить неаналитичность средних коэффициентов трения  $\langle \xi^{(i)} \rangle$  и  $\langle \xi^{(s)} \rangle$  в точке  $\theta = 0, \varepsilon_0 = 0$ , вблизи которой

$$\langle \xi^{(i)} \rangle \sim \frac{\theta^2}{(\theta^2 + 4\varepsilon_0^2)^{3/2}}$$

и

$$\langle \xi^{(s)} \rangle \sim \frac{\theta \varepsilon_0}{(\theta^2 + 4\varepsilon_0^2)^{3/2}}.$$

Как отмечалось в работе [16] на примере *lin- $\theta$ -lin*-конфигурации поля, такое поведение коэффициента трения связано с неприменимостью приближения медленных атомов вблизи узлов поля, где, с одной стороны, локальный параметр насыщения мал, а с другой, возникают значительные градиенты поляризации поля (т.е. поляризация поля резко изменяется на размерах, много меньших длины волны

$\lambda$ ). Для анализа ситуаций в этих областях необходимы более точные выражения для силы трения, учитывающие все порядки по скорости атомов.

### 6.1.3. Коэффициент диффузии

Коэффициент спонтанной диффузии имеет вид

$$D^{(s)} = \frac{\gamma \hbar^2 k^2 S_0}{6} \left[ 1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta - \frac{\cos^2(2\varepsilon_0) \sin^2 \theta \sin^2(2kz)}{1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta} \right]. \quad (56)$$

Коэффициент вынужденной диффузии удобно разбить на слагаемые по степеням отстройки:  $D^{(i)} = D_0 + D_1 + D_2$ , где  $D_0$  — независящее от отстройки слагаемое:

$$D_0(z) = \frac{\gamma \hbar^2 k^2 S_0}{2} \frac{1 - \cos^2(2\varepsilon_0) (\cos^2(2kz) \cos^2 \theta - \sin^2(2kz) \sin^2 \theta) + \sin^2(2\varepsilon_0)}{1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta} - \frac{3\gamma \hbar^2 k^2 S_0}{8} \frac{\sin^2(4\varepsilon_0) \sin^2 \theta \sin^2(2kz)}{(1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta)^3}. \quad (57)$$

Слагаемое с аномальной зависимостью от отстройки имеет вид

$$D_1(z) = \frac{\delta \hbar^2 k^2 S_0 \sin(4\varepsilon_0) \sin \theta \cos(2kz)}{1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta} \left[ 2 - \frac{3 \cos^2(2\varepsilon_0) \sin^2 \theta \sin^2(2kz)}{(1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta)^2} \right]. \quad (58)$$

Квадратичная по отстройке часть коэффициента диффузии равна

$$D_2(z) = \frac{6\delta^2 \hbar^2 k^2 S_0 \cos^2(2\varepsilon_0) \sin^2 \theta \cos^2(2kz)}{\gamma (1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta)} \left[ 1 - \frac{\cos^2(2\varepsilon_0) \sin^2 \theta \sin^2(2kz)}{(1 + \cos(2\varepsilon_0) \cos(2kz) \cos \theta)^2} \right]. \quad (59)$$

После усреднения по пространственному периоду получим следующие выражения для коэффициента диффузии. Средний коэффициент спонтанной диффузии:

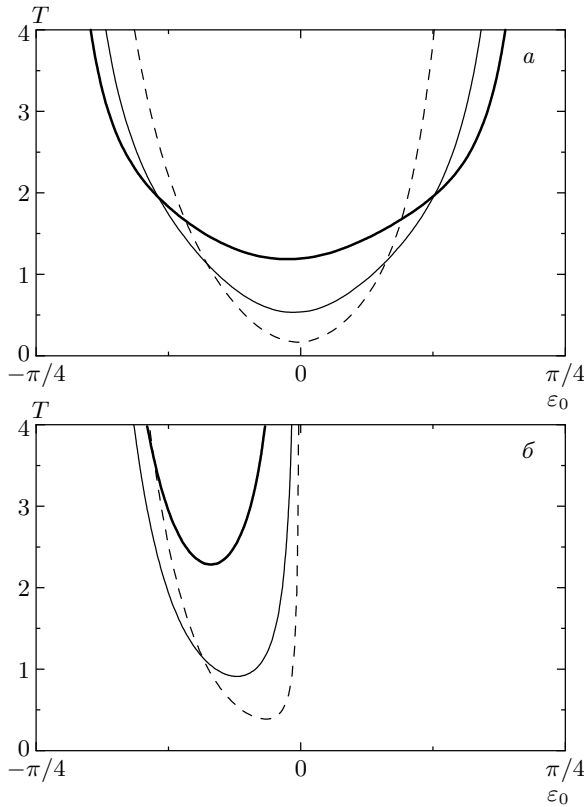
$$\langle D^{(s)} \rangle = \frac{\hbar^2 k \gamma S_0}{6} \frac{Q \sin^2 \theta + \cos(2\theta)}{\cos^2 \theta}. \quad (60)$$

Средний коэффициент индуцированной диффузии  $\langle D^{(i)} \rangle = \langle D_0 \rangle + \langle D_1 \rangle + \langle D_2 \rangle$ , где

$$\begin{aligned} \langle D_0 \rangle &= \frac{\hbar^2 k \gamma S_0}{4} \left[ \frac{2(1 - Q \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2(2\varepsilon_0) (3 \sin^2(2\varepsilon_0) + \cos^2(2\varepsilon_0) \cos^2 \theta - 1)}{Q^3} \right], \\ \langle D_1 \rangle &= \frac{\hbar^2 k \delta S_0 \sin \theta \sin(2\varepsilon_0) (Q - 1) [2Q^2 (2 + \sin^2 \theta) - 3(Q + 1) \sin^2 \theta]}{Q^3 \cos^3 \theta}, \\ \langle D_2 \rangle &= \frac{3\hbar^2 k S_0 \delta^2}{\gamma} \frac{(Q - 1) \sin^2 \theta}{Q^3 \cos^4 \theta} (2Q^3 \sin^2 \theta - 2Q^2 (\sin^2 \theta + 1) + (Q + 1) \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$Q = \sqrt{1 - \cos^2(2\varepsilon_0) \cos^2 \theta}.$$



**Рис. 4.** Температура в единицах  $\hbar\gamma S_0/k_B$  как функция эллиптичности световых волн  $\varepsilon_0$  при различных углах:  $\theta = \pi/3$  (жирная линия),  $\pi/5$  (тонкая линия),  $\pi/10$  (штриховая), отстройка светового поля  $\delta = 2\gamma$  (а), 0 (б)

Отметим, что коэффициенты трения и диффузии в  $\varepsilon-\theta-\bar{\varepsilon}$ -конфигурации поля содержат аномальные по отстройке вклады  $\xi^{(s)}$  и  $D_1$ , что приводит, например, к возможности охлаждения в случае точного резонанса. При этом направление кинетического процесса (нагрев или охлаждение) зависит от знака эллиптичности встречных световых волн,  $\varepsilon_0$ , и взаимной ориентации эллипсов поляризации,  $\theta$ . Аномальный вклад в трение также остается существенным и при отличных от нуля отстройках. Это приводит к тому, что выбором эллиптичности встречных волн и углом  $\theta$  можно менять нагрев на охлаждение и наоборот. Температура в областях охлаждения является функцией эллиптичности световых волн  $\varepsilon_0$  и угла  $\theta$ . На рис. 4 приведена зависимость температуры атомов от эллиптичности световых волн при некоторых углах  $\theta$ . Из приведенных графиков видно, что форма кривой несимметрична по параметру эллиптичности  $\varepsilon_0$ , однако при больших отстройках этот эффект становится менее заметен и минимум

температуры достигается при эллиптичностях волн близких к линейной. Характерный рост температуры при близких к круговой эллиптичностях световых волн связан со спецификой оптического перехода  $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$ , где в предельном случае  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации светового поля коэффициент трения равен нулю, а следовательно, охлаждения нет. Отметим, что для оптических переходов с большими значениями угловых моментов трение присутствует и в  $\sigma_+ - \sigma_-$ -конфигурации, например, переход  $J_g = 1 \rightarrow J_e = 2$  [7].

### 6.2. $\varepsilon-\theta-\varepsilon$ -конфигурация светового поля

В этом разделе рассмотрим пример конфигурации светового поля, образованного эллиптически поляризованными волнами равной эллиптичности, имеющими одинаковые направления вращения векторов поляризации. В отличие от предыдущего случая, в поле  $\varepsilon-\theta-\varepsilon$ -конфигурации имеются лишь градиенты интенсивности и эллиптичности светового поля (рис. 5). В частных случаях, когда угол между главными осями эллипсов  $\theta = 0$  мы возвращаемся к случаю однородно поляризованной стоячей волны, а для  $\theta = \pm\pi/2$ ,  $\varepsilon_0 = 0$  имеем поле  $lin \perp lin$ -конфигурации, в котором отличен от нуля лишь градиент эллиптичности.

В первом порядке по интенсивности явная зависимость силы от поляризационных параметров  $\varepsilon_0$  и  $\theta$  имеет вид

$$F(z) = 2\hbar k \delta S_0 \times \frac{\sin(2kz) \cos^2(2\varepsilon_0)(\cos\theta + \cos(2kz))}{1 + \cos(2kz) \cos\theta - \sin(2\varepsilon_0) \sin\theta \sin(2kz)}, \quad (62)$$

где параметр насыщения  $S_0$  определен через амплитуду встречных волн (53). Отсюда находим, что средняя по пространственному периоду сила отлична от нуля (эффект выпрямления дипольной силы):

$$\langle F \rangle = \hbar k \delta S_0 \times \frac{\cos^2(2\varepsilon_0) \sin(2\varepsilon_0) \sin(2\theta) (1 - |\sin\theta| \cos(2\varepsilon_0))^2}{(\cos^2\theta + \sin^2(2\varepsilon_0) \sin^2\theta)^2}. \quad (63)$$

Кроме того что средняя сила представляет собой нечетную зависимость от отстройки светового поля, она является нечетной функцией угла  $\theta$  и эллиптичности световых волн  $\varepsilon_0$ , что справедливо и в общем случае произвольной интенсивности поля. Из общих соотношений симметрии для оптических

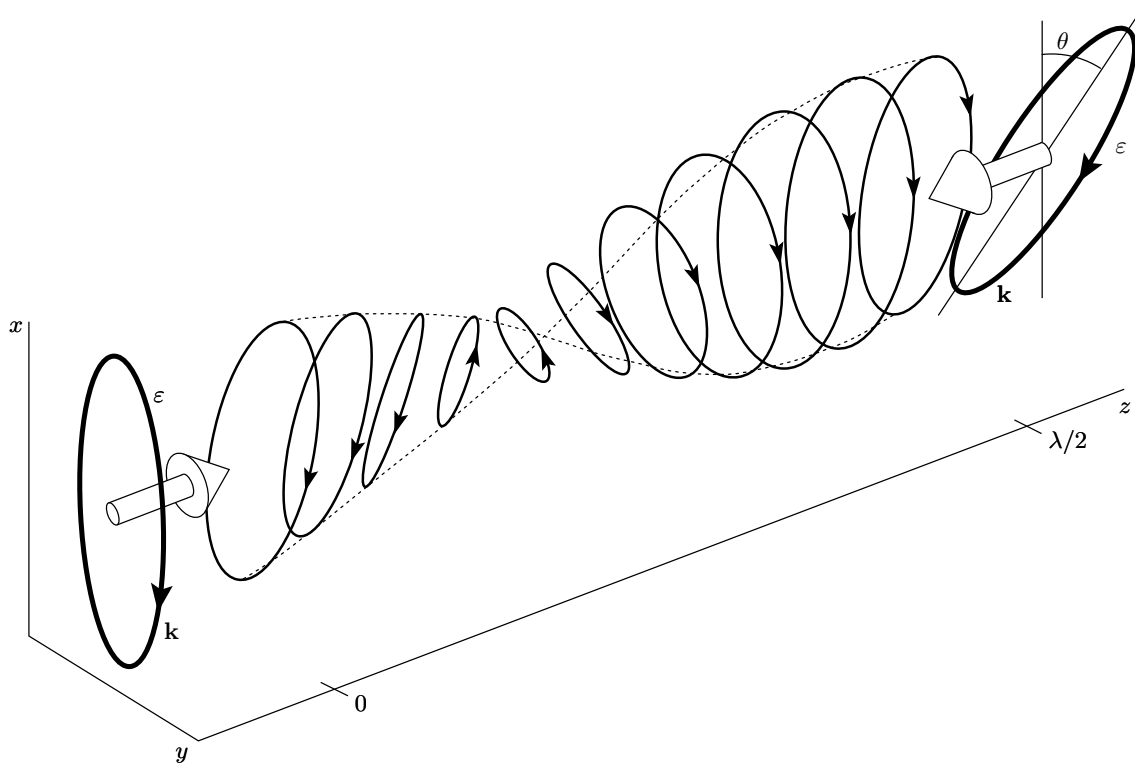


Рис. 5. Пространственная конфигурация светового поля  $\varepsilon\text{-}\theta\text{-}\varepsilon$ . Поле образовано встречными волнами с равной эллиптичностью

уравнений Блоха можно строго показать, что подобный характер зависимости силы от параметров  $\delta$ ,  $\varepsilon_0$  и  $\theta$  в полевой конфигурации  $\varepsilon\text{-}\theta\text{-}\varepsilon$  имеет место для произвольных оптических переходов  $J_g \rightarrow J_e$ . Отметим, что выпрямленная сила исчезает в случае линейных и циркулярных поляризаций  $\varepsilon_0 = 0, \pm\pi/4$  для любого  $\theta$ , а также если угол  $\theta = 0, \pm\pi/2$  при произвольном  $\varepsilon_0$ . Этот факт становится очевидным, если воспользоваться соотношениями симметрии для силы, действующей на неподвижный атом. Отражение в плоскости  $xy$  дает для силы следующее соотношение:

$$\langle F \rangle(\varepsilon_0, \theta) = -\langle F \rangle(\varepsilon_0, -\theta). \tag{64}$$

Из него видно, что при использовании волн круговой поляризации,  $\varepsilon_0 = \pm\pi/4$ , либо если угол  $\theta = 0, \pm\pi/2$ , после отражения в плоскости  $xy$  получим исходную конфигурацию светового поля и, следовательно,  $\langle F \rangle = 0$ . Другое соотношение симметрии для силы получим, используя два последовательных отражения в плоскостях  $xy$  и  $xz$ :

$$\langle F \rangle(\varepsilon_0, \theta) = -\langle F \rangle(-\varepsilon_0, \theta). \tag{65}$$

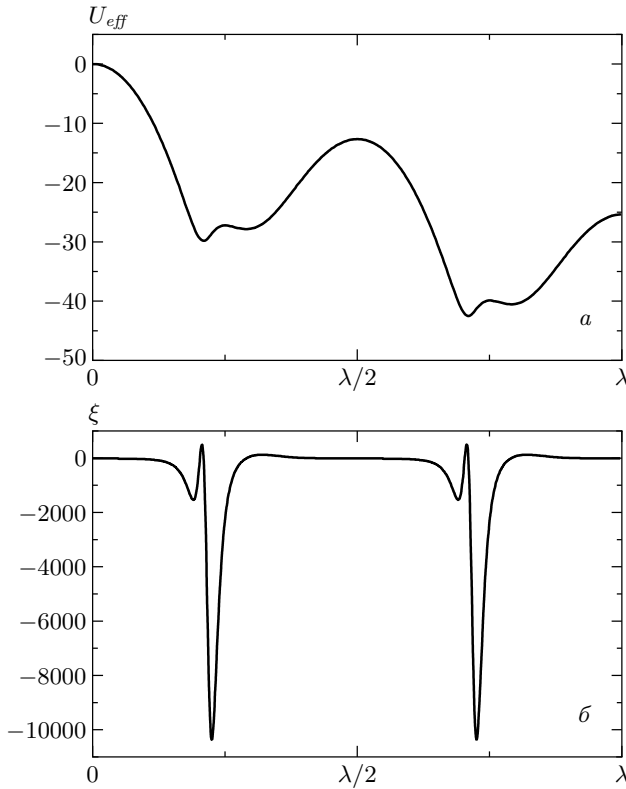
Если поле создано волнами с линейной поляризацией,  $\varepsilon_0 = 0$ , то после указанных пространственных отражений мы возвращаемся к исходной конфигурации светового поля, т. е.  $\langle F \rangle(\varepsilon_0 = 0, \theta) = 0$  для любых  $\theta$ .

Эффект выпрямления дипольной силы и механизм его возникновения детально рассмотрен нами в работе [17]. Отметим лишь, что механизм возникновения постоянной составляющей дипольной силы в  $\varepsilon\text{-}\theta\text{-}\varepsilon$ -поле связан с пространственно-неоднородной оптической накачкой и присутствием градиентов интенсивности и эллиптичности светового поля.

Линейная поправка по скорости силы (62) определяется через коэффициент трения, который в случае малой интенсивности светового поля,  $S_0 \ll 1$ , имеет вид

$$\xi(z) = -\frac{6\hbar k^2 \delta}{\gamma} \sin \theta \cos^2(2\varepsilon_0) (\cos(kz) + \cos \theta) \times \\ \times (\cos(kz) \sin \theta + \cos \theta \sin(2\varepsilon_0) \sin(kz)) \times \\ \times [1 + \cos \theta \cos(kz) - \sin \theta \sin(2\varepsilon_0) \sin(kz)]^{-3}. \tag{66}$$

Усредненный по пространственному периоду коэф-



**Рис. 6.** Пространственная зависимость эффективного потенциала  $U_{eff}$  в единицах  $\hbar\gamma$  (а) и коэффициента трения  $\xi$  в единицах  $\hbar k^2$  (б) при  $\Omega_0 = 100\gamma$  и оптимальных для выпрямления параметров:  $\varepsilon_0 = 0.46$ ,  $\theta = 0.51$ ,  $\delta = 62\gamma$

эффициент трения при  $\theta \neq 0, \pi$  и отличных от круговых поляризациях поля,  $\varepsilon_0 \neq \pm\pi/4$ ,

$$\langle \xi \rangle = -\frac{3\hbar k^2 \delta}{\gamma |\sin \theta \cos(2\varepsilon_0)|}, \quad (67)$$

определяет добавку к силе для атомов, совершающих надбарьерное движение в потенциале, создаваемого силой (62). Из рис. 6 видно, что выпрямленная сила создает оптический потенциал, в котором могут локализовываться холодные атомы. Важно, что выбором знака отстройки  $\delta$  можно добиться, чтобы сила трения вблизи минимумов потенциала  $U_{eff}$  охлаждала атомы. Последнее обстоятельство играет важную роль для стабильной локализации атомов.

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены аналитические выражения для кинетических коэффициентов уравнения Фоккера–Планка (силы, действующей на неподвижный

атом, коэффициентов трения и диффузии) для атомов с оптическим переходом  $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$  в поле произвольного вида и произвольной интенсивности. Данные выражения проанализированы для полей, образованных эллиптически поляризованными волнами. Нами были рассмотрены два важных типа световых полей:

- 1) поля однородной поляризации, в которых градиенты эллиптичности и пространственной ориентации эллипса поляризации равны нулю,
- 2) неоднородно поляризованные поля, созданные эллиптически поляризованными волнами.

В первом случае показано, что в отсутствие градиентов поляризации светового поля кинетика атомов схожа с результатами для двухуровневой модели атомов, в частности, при линейной эллиптичности светового поля совпадает с ними. Кроме того, обнаружены отличия от модели двухуровневого атома, к которым приводит не совпадающая с линейной однородная поляризация светового поля. Во втором типе световых полей продемонстрированы эффекты, к которым приводит эллиптичность бегущих волн, образующих поле. Выделены две наиболее интересные конфигурации:  $\varepsilon-\theta-\bar{\varepsilon}$ -поле, созданное встречными волнами с противоположными эллиптичностью, и  $\varepsilon-\theta-\varepsilon$ -поле, созданное встречными волнами с одинаковыми эллиптичностью ( $\theta$  — угол взаимной ориентации эллипсов поляризации встречных волн). Так, например, в  $\varepsilon-\theta-\bar{\varepsilon}$ -поле эллиптичность бегущих волн приводит к возможности субдоплеровского охлаждения атомов даже в случае точного резонанса,  $\delta = 0$ , а также возникают аномальные (к обычному субдоплеровскому охлаждению) области нагрева и охлаждения. В поле  $\varepsilon-\theta-\varepsilon$ -конфигурации показано, что эллиптичность бегущих волн приводит к эффекту выпрямления дипольной силы. Отметим, что выбранный нами для анализа оптический переход  $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$  является простейшим примером перехода с энергетическими уровнями, вырожденными по проекции углового момента. Добавим, что для переходов с большими значениями угловых моментов  $J_g, J_e$  также присутствуют эффекты, описанные в разд. 6.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 01-02-17036, 01-02-17744, 03-02-06047-мас, 04-02-16488), Министерства образования РФ (грант УР.01.01.060), а также Федеральной целевой научно-технической программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники» на 2002–2006 г.г. (государственный контракт 01-40-01-06-05).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Процедура редукции квантового  
кинетического уравнения для матрицы  
плотности к уравнению Фоккера–Планка  
для медленных атомов

Разложение кинетического уравнения для матрицы плотности по параметру отдачи  $\hbar k/\Delta p$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = & \hat{L}^{(0)}\{\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\} + \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \hat{L}_i^{(1)}\{\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\} + \\ & + (\hbar k)^2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \hat{L}_{ij}^{(2)}\{\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\} + \dots, \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

где  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  — координаты точки в фазовом пространстве. В нулевом порядке по эффектам отдачи эволюция матрицы плотности определяется оператором

$$\begin{aligned} \hat{L}^{(0)}\{\hat{\rho}\} = & - \left[ \left( \frac{\gamma}{2} - i\delta \right) \hat{\Pi}_e \hat{\rho} + \left( \frac{\gamma}{2} + i\delta \right) \hat{\rho} \hat{\Pi}_e \right] - \\ & - \frac{i}{\hbar} [\hat{V}(\mathbf{r}), \hat{\rho}] + \gamma(2J_e + 1) \sum_q \hat{D}_q^\dagger \hat{\rho} \hat{D}_q, \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

который соответствует оптическому уравнению Блоха (15). Члены первого порядка,

$$\hat{L}_i^{(1)}\{\hat{\rho}\} = -\frac{1}{2\hbar k} (\hat{F}_i(\mathbf{r})\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{F}_i(\mathbf{r})), \quad (\text{A.3})$$

выражаются через оператор силы (14). Поправки второго порядка содержат как индуцированные члены, пропорциональные второй производной оператора  $\hat{V}(\mathbf{r})$  по координате, так и слагаемое, обусловленное эффектом отдачи при спонтанном излучении:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{ij}^{(2)}\{\hat{\rho}\} = & -\frac{i}{8\hbar k^2} [\nabla_i \hat{F}_j(\mathbf{r}), \hat{\rho}] + \frac{\gamma(2J_e + 1)}{5} \times \\ & \times \sum_{m,n=1,2,3} \left( \delta_{ij} \delta_{mn} - \frac{1}{4} (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn}) \right) \times \\ & \times \hat{D}_m^\dagger \hat{\rho} \hat{D}_n. \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Для вывода уравнения (10) воспользуемся наличием характерного времени  $\tau$ . На временах  $t \leq \tau$  существенным является только изменение внутренних степеней свободы атома, значительно зависящих от начальных условий, а времена  $t \gg \tau$  отвечают кинетическому этапу эволюции, и, соответственно, изменение внутренних состояний атома согласовано с

изменением функции распределения  $\mathcal{W}$  [2]. Поэтому на кинетическом этапе эволюции матрица плотности является линейным функционалом функции распределения и ее можно представить в виде

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\mathcal{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \hat{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (\text{A.5})$$

Здесь  $\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  — редуцированная матрица плотности, описывающая стационарное состояние внутренних степеней свободы атома, движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = & \hat{L}^{(0)}\{\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = & 0. \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

С условием нормировки  $\text{Tr}\{\hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\} = 1$ . Для замкнутых оптических переходов имеет место свойство  $\text{Tr}\{\hat{L}^{(0)}\{\hat{\rho}\}\} = 0$ , которое означает сохранение населенности и, следовательно, в нулевом порядке по отдаче

$$\frac{d}{dt}\text{Tr}\{\hat{\rho}\} = \frac{d}{dt}\mathcal{W} = \text{Tr}\{\hat{L}^{(0)}\{\hat{\rho}\}\} = 0, \quad (\text{A.7})$$

т. е. производная функции распределения имеет малость по крайней мере первого порядка по отдаче, а нулевой порядок  $\hat{\rho}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  может быть записан в виде

$$\hat{\rho}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \hat{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})\mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (\text{A.8})$$

Таким образом,  $\hat{\sigma}\mathcal{F}$  есть адиабатически следящая за движением часть матрицы плотности, а  $\hat{\chi}$  — малая неадиабатическая добавка. Действительно, в нулевом порядке по параметру отдачи уравнение для матрицы плотности имеет вид

$$\frac{d}{dt}\hat{\sigma}\mathcal{W}^{(0)} + \frac{d}{dt}\hat{\chi}^{(0)} = \hat{L}^{(0)}\{\hat{\sigma}\}\mathcal{W} + \hat{L}^{(0)}\{\hat{\chi}^{(0)}\}, \quad (\text{A.9})$$

и согласно (A.6) и (A.7) получим, что в нулевом порядке по отдаче  $\hat{\chi}^{(0)}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\hat{\chi}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \hat{L}^{(0)}\{\hat{\chi}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\} \quad (\text{A.10})$$

с условием нормировки  $\text{Tr}\{\hat{\chi}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\} = 0$ . Решением этого уравнения на временах  $t$ , отвечающих кинетическому этапу эволюции, является  $\hat{\chi}^{(0)} = 0$ , и, следовательно, неадиабатическая добавка  $\hat{\chi}$  содержит члены, начиная лишь с первого порядка по отдаче.

Взяв след выражения (A.1) и удерживая в нем члены до второго порядка по отдаче, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{W} &= \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{L}_i^{(1)} \{ \hat{\sigma} \} \} \mathcal{W} + \\ &+ (\hbar k)^2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \text{Tr} \{ \hat{L}_{ij}^{(2)} \{ \hat{\sigma} \} \} \mathcal{W} + \\ &+ \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{L}_i^{(1)} \{ \hat{\chi} \} \}. \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое имеет малость по крайней мере второго порядка по отдаче и дает вклад в коэффициент диффузии. Далее мы не будем искать эти неадиабатические поправки к матрице плотности, как это делалось обычно, например, в [15]. Воспользуемся альтернативным подходом. Для этого добавим к уравнению (A.11) следующую линейную комбинацию уравнения (A.1):

$$\begin{aligned} \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \left\{ \hat{\varphi}_i \frac{d}{dt} \hat{\rho} \right\} &= \\ &= \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \hat{L}^{(0)} \{ \hat{\rho} \} \} + \\ &+ (\hbar k)^2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \hat{L}_j^{(1)} \{ \hat{\rho} \} \} + \dots, \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

где  $\hat{\varphi}_i$  — матрица размерности  $(2J_e + 1) + (2J_g + 1)$ . Левая часть этого равенства имеет вид

$$\begin{aligned} \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \left\{ \hat{\varphi}_i \frac{d}{dt} \hat{\rho} \right\} &= \\ &= \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \left\{ \hat{\varphi}_i \frac{d}{dt} \hat{\sigma} \right\} \mathcal{W} + \\ &+ \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \hat{\sigma} \} \frac{d}{dt} \mathcal{W} + \\ &+ \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \left\{ \hat{\varphi}_i \frac{d}{dt} \hat{\chi} \right\}. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое содержит второй порядок по отдаче. На временах  $t \gg \tau$ , отвечающих кинетическому этапу эволюции,  $d\hat{\chi}/dt = \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \hat{\chi}$ , и, поскольку для медленных атомов в коэффициенте диффузии удерживаются лишь члены нулевого порядка по скорости, вкладом этого слагаемого в коэффициент диффузии можно пренебречь. В итоге, вычитая из (A.12) выражение (A.11) и удерживая члены до второго порядка по отдаче, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{W} &- \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\sigma} \} \mathcal{W} - \\ &- \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \hat{\sigma} \} \frac{d}{dt} \mathcal{W} = \\ &= \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{L}_i^{(1)} \{ \hat{\sigma} \} \} \mathcal{W} - \\ &- \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \hat{L}^{(0)} \{ \hat{\sigma} \} \} \mathcal{W} + \\ &+ (\hbar k)^2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \text{Tr} \{ \hat{L}_{ij}^{(2)} \{ \hat{\sigma} \} \} \mathcal{W} - \\ &- (\hbar k)^2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \hat{L}_j^{(1)} \{ \hat{\sigma} \} \} \mathcal{W} + \\ &+ \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{L}_i^{(1)} \{ \hat{\chi} \} \} - \\ &- \hbar k \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \hat{L}^{(0)} \{ \hat{\chi} \} \}. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

Заметим, что выбором матрицы  $\hat{\varphi}_i$  можно добиться, чтобы вклады, содержащие неадиабатическую добавку  $\hat{\chi}$ , компенсировали друг друга, т. е.

$$\text{Tr} \{ \hat{\varphi}_i \hat{L}^{(0)} \{ \hat{\chi} \} \} = \text{Tr} \{ \hat{L}_i^{(1)} \{ \hat{\chi} \} \}. \quad (\text{A.15})$$

Из этого условия получим уравнение для матрицы  $\hat{\varphi}_i$  (21). Матрица  $\hat{\varphi}$  является решением неоднородного линейного уравнения (21), источником в котором является флуктуация оператора силы (20). Поскольку силу, действующую на атом, необходимо определить в нулевом и первом порядках по скорости, а коэффициент диффузии — в нулевом, в выражении (A.14) достаточно ограничиться нулевым порядком по скорости матрицы  $\hat{\sigma}(\mathbf{v} = 0, \mathbf{r})$ , удовлетворяющей оптическому уравнению Блоха (15) для стационарной матрицы плотности  $L^{(0)} \{ \hat{\sigma} \} = 0$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Компоненты коэффициентов трения и диффузии

Диагональные элементы компонент коэффициента трения зависят только от нечетных степеней отстройки  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \chi_{\Lambda\Lambda} &= \frac{2\delta}{\gamma} \frac{G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^3} \times \\ &\times \left( \frac{\gamma^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \frac{1 - G_\varepsilon}{2} - G_\varepsilon^2 + 3 \sin^2(2\varepsilon) \right), \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$



$$\chi_{\varepsilon\varepsilon} = -\frac{2\delta}{\gamma} \frac{1}{(1+G_\varepsilon)^3} \left\{ 3 \cos^2(2\varepsilon) + G_\varepsilon \left[ 10 - 3 \cos^2(2\varepsilon) - \frac{\gamma^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \operatorname{tg}^2(2\varepsilon) \right] + \right. \\ \left. + G_\varepsilon^2 \left[ \frac{6 - \cos^2(2\varepsilon)}{\cos^2(2\varepsilon)} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \operatorname{tg}^2(2\varepsilon) \right] + G_\varepsilon^3 \frac{2 - \cos^2(2\varepsilon)}{\cos^2(2\varepsilon)} \right\}, \quad (\text{B.2})$$

$$\chi_{\Phi\Phi} = \frac{\delta\gamma}{\gamma^2/4 + \delta^2} \frac{G_\varepsilon}{(1+G_\varepsilon)^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$\chi_{\phi\phi} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Запишем недиагональные элементы, связанные с корреляциями градиентов амплитуды и фазы:

$$\chi_{\Lambda\Phi} = \frac{G_\varepsilon}{(1+G_\varepsilon)^2} \left( G_\varepsilon + \frac{\gamma^2/4 - \delta^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \right), \quad (\text{B.5})$$

$$\chi_{\Phi\Lambda} = \frac{G_\varepsilon}{(1+G_\varepsilon)^3} \left( \frac{\delta^2 - \gamma^2/4}{\gamma^2/4 + \delta^2} + \frac{G_\varepsilon\gamma^2/2}{\gamma^2/4 + \delta^2} - 3 \sin^2(2\varepsilon) \right), \quad (\text{B.6})$$

эллиптичности и фазы:

$$\chi_{\varepsilon\Phi} = \frac{G_\varepsilon \operatorname{tg}(2\varepsilon)}{(1+G_\varepsilon)^2} \left( \frac{\delta^2 - \gamma^2/4}{\delta^2 + \gamma^2/4} - G_\varepsilon \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\chi_{\Phi\varepsilon} = \frac{\operatorname{tg}(2\varepsilon)}{(1+G_\varepsilon)^3} \left\{ 3 + G_\varepsilon + (1 - G_\varepsilon) \left[ \frac{\gamma^2 G_\varepsilon}{\gamma^2/4 + \delta^2} - 3 \sin^2(2\varepsilon) \right] \right\}, \quad (\text{B.8})$$

эллиптичности и угла:

$$\chi_{\varepsilon\phi} = \frac{G_\varepsilon}{\cos(2\varepsilon)(1+G_\varepsilon)^2} \left( 2 \sin^2(2\varepsilon) \frac{\delta^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} - 1 - G_\varepsilon \right), \quad (\text{B.9})$$

$$\chi_{\phi\varepsilon} = 3 \frac{\cos(2\varepsilon)}{(1+G_\varepsilon)^2} \left( G_\varepsilon - 1 - \frac{2G_\varepsilon}{\cos^2(2\varepsilon)} \right), \quad (\text{B.10})$$

эллиптичности и амплитуды:

$$\chi_{\varepsilon\Lambda} = \frac{2\delta G_\varepsilon \operatorname{tg}(2\varepsilon)}{\gamma(1+G_\varepsilon)^3} \left( 3 \cos^2(2\varepsilon) + G_\varepsilon^2 + \frac{3\delta^2 G_\varepsilon + (5G_\varepsilon - 2)\gamma^2/4}{\gamma^2/4 + \delta^2} \right), \quad (\text{B.11})$$

$$\chi_{\Lambda\varepsilon} = \frac{2\delta \operatorname{tg}(2\varepsilon)}{\gamma(1+G_\varepsilon)^3} \left( G_\varepsilon^3 - 3 \cos^2(2\varepsilon)(1 - G_\varepsilon) + \frac{2G_\varepsilon^2(\gamma^2/4 - \delta^2) - G_\varepsilon(7\delta^2 + 11\gamma^2/4)}{\gamma^2/4 + \delta^2} \right), \quad (\text{B.12})$$

амплитуды и угла:

$$\chi_{\Lambda\phi} = -2 \frac{\sin(2\varepsilon) G_\varepsilon}{(1+G_\varepsilon)^2} \frac{\delta^2}{(\gamma^2/4 + \delta^2)}, \quad (\text{B.13})$$

$$\chi_{\phi\Lambda} = 3 \frac{\sin(2\varepsilon) G_\varepsilon}{(1+G_\varepsilon)^2} \quad (\text{B.14})$$

фазы и угла:

$$\chi_{\Phi\phi} = \frac{\sin(2\varepsilon) G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^2} \frac{\delta \gamma}{\gamma^2/4 + \delta^2}, \quad (\text{B.15})$$

$$\chi_{\phi\Phi} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Диагональные элементы компонент коэффициента диффузии  $\mathcal{D}_{\beta\beta'}$ , имеющие четную зависимость от  $\delta$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\Lambda\Lambda} = \frac{1}{4\gamma} \frac{G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^3} \left\{ \gamma^2 + 12\delta^2 \sin^2(2\varepsilon) + G_\varepsilon \left[ -\gamma^2 + \frac{\gamma^4}{\gamma^2/4 + \delta^2} + (4\delta^2 + \gamma^2) \text{tg}^2(2\varepsilon) \right] + \right. \\ \left. + G_\varepsilon^2 [3\gamma^2 + 2(4\delta^2 + \gamma^2) \text{tg}^2(2\varepsilon)] + G_\varepsilon^3 \frac{(4\delta^2 + \gamma^2)}{\cos^2(2\varepsilon)} \right\}, \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1}{4\gamma} \frac{G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^3} \left\{ \gamma^2 \frac{2 - \cos^2(2\varepsilon)}{\cos^2(2\varepsilon)} + 12\delta^2 \cos^2(2\varepsilon) + \right. \\ \left. + G_\varepsilon \left[ 7(4\delta^2 + \gamma^2) + \gamma^2 \frac{1 - 5 \cos^2(2\varepsilon)}{\cos^2(2\varepsilon)} + \frac{\gamma^4}{\gamma^2/4 + \delta^2} \text{tg}^2(2\varepsilon) \right] + \right. \\ \left. + G_\varepsilon^2 \left[ (4\delta^2 + \gamma^2) \frac{3 + 2 \cos^2(2\varepsilon)}{\cos^2(2\varepsilon)} + \gamma^2 \frac{1 - 3 \cos^2(2\varepsilon)}{\cos^2(2\varepsilon)} \right] + G_\varepsilon^3 \frac{4\delta^2 + \gamma^2}{\cos^2(2\varepsilon)} \right\}, \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{\Phi\Phi} = \frac{\gamma}{4} \frac{G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^3} \left[ (1 + G_\varepsilon)^2 + 3 \sin^2(2\varepsilon) + G_\varepsilon \left( 1 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \right) \right], \quad (\text{B.19})$$

$$\mathcal{D}_{\phi\phi} = \frac{\gamma}{2} \frac{G_\varepsilon}{1 + G_\varepsilon}. \quad (\text{B.20})$$

Как отмечалось выше, компоненты  $\mathcal{D}_{\beta\beta'}$  симметричны по индексам  $\beta\beta'$ , и, следовательно, в выражение для коэффициента диффузии (25) будут входить только симметричные суммы  $\mathcal{D}_{\beta\beta'} + \mathcal{D}_{\beta'\beta}$ . Это два нормальных недиагональных элемента, четных по отстройке:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\varepsilon\Lambda} + \mathcal{D}_{\Lambda\varepsilon} = \frac{\sin(4\varepsilon)}{4\gamma} \frac{G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^3} \times \\ \times \left[ 12\delta^2 - \frac{\gamma^2}{\cos^2(2\varepsilon)} + G_\varepsilon \frac{2}{\cos^2(2\varepsilon)} \left( 8\delta^2 + \gamma^2 - \frac{\gamma^4/2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \right) + G_\varepsilon^2 \frac{8\delta^2 - \gamma^2}{\cos^2(2\varepsilon)} \right], \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{\Phi\phi} + \mathcal{D}_{\phi\Phi} = -\frac{\gamma \sin(2\varepsilon) G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^2}. \quad (\text{B.22})$$

И, наконец, запишем четыре аномальных недиагональных элемента, приводящих к асимметрии зависимости коэффициента диффузии от  $\delta$ :

$$\mathcal{D}_{\Phi\Lambda} + \mathcal{D}_{\Lambda\Phi} = \frac{\delta G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^3} \left( -3 \sin^2(2\varepsilon) + G_\varepsilon \frac{\gamma^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} + G_\varepsilon^2 \right), \quad (\text{B.23})$$

$$\mathcal{D}_{\phi\Lambda} + \mathcal{D}_{\Lambda\phi} = \frac{2\delta \sin(2\varepsilon) G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^2}, \quad (\text{B.24})$$

$$\mathcal{D}_{\Phi\varepsilon} + \mathcal{D}_{\varepsilon\Phi} = \frac{-\delta \text{tg}(2\varepsilon) G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^3} \left[ 3 \cos^2(2\varepsilon) + G_\varepsilon \left( 3 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2/4 + \delta^2} \right) + G_\varepsilon^2 \right], \quad (\text{B.25})$$

$$\mathcal{D}_{\phi\varepsilon} + \mathcal{D}_{\varepsilon\phi} = \frac{2\delta G_\varepsilon}{(1 + G_\varepsilon)^2} \frac{\cos^2(2\varepsilon) + G_\varepsilon}{\cos(2\varepsilon)}. \quad (\text{B.26})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, Наука, Москва (1991).
2. В. Г. Миногин, В. С. Летохов, *Давление лазерного излучения на атомы*, Наука, Москва (1986).
3. P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould, and H. J. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169 (1988).
4. A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988).
5. Special Issue *Laser Cooling and Trapping of Atoms*, *J. Opt. Soc. Amer. B* **6**, 11 (1989).
6. Special Issue *Laser cooling and trapping*, *Laser Phys.* **4**, 5 (1994).
7. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Amer. B* **6**, 2023 (1989).
8. О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **115**, 791 (1999).
9. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. B* **18**, 1661 (1985).
10. J. Javanainen, *Phys. Rev. A* **44**, 5857 (1991).
11. В. С. Смирнов, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **96**, 1613 (1989); А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **110**, 1727 (1996); G. Nienhuis, A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, and V. I. Yudin, *Europhys. Lett.* **44**, 20 (1998); А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **118**, 77 (2000).
12. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, Г. Ниенхаус, *ЖЭТФ* **108**, 415 (1995).
13. A. V. Bezverbyni, G. Nienhuis, and A. M. Tumaikin, *Opt. Comm.* **148**, 151, (1998).
14. А. Ю. Пусеп, *ЖЭТФ* **70**, 851 (1976).
15. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Amer. B* **2**, 1707 (1985).
16. V. Finkelstein, P. R. Berman, and J. Guo, *Phys. Rev. A* **45**, 1829 (1991).
17. О. Н. Прудников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **120**, 76 (2001).