

# ОБ ИЗЛУЧЕНИИ НА УДВОЕННОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ЧАСТОТЕ ИЗ ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КОРОТКИХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

*Л. М. Горбунов<sup>a</sup>, А. А. Фролов<sup>\*b</sup>*

*<sup>a</sup> Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

*<sup>b</sup> Институт теплофизики экстремальных состояний  
Объединенного института высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 12 сентября 2003 г.

Исследовано электромагнитное излучение на удвоенной плазменной частоте, возникающее при взаимодействии двух одинаковых распространяющихся навстречу друг другу коротких лазерных импульсов в разреженной плазме и обусловленное возбуждением в области перекрытия импульсов мелкомасштабных стоячих плазменных волн. Изучены энергетические, спектральные и угловые характеристики излучения и проанализирована зависимость этих характеристик от параметров лазерных импульсов. Обсуждается возможность использования рассмотренного эффекта для диагностики локализованных плазменных колебаний.

PACS: 52.35.Mw, 52.38.-r

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В нашей предыдущей статье [1] обсуждалась возможность «ударного» возбуждения встречными короткими лазерными импульсами локализованных когерентных мелкомасштабных плазменных колебаний в разреженной плазме. Эти колебания могли бы явиться весьма привлекательным объектом для исследования как лазерных импульсов, так и тех процессов, которые определяют эволюцию плазменных колебаний (разрушение когерентности колебаний, опрокидывание волн, развитие ленгмюровской турбулентности). В этой статье мы рассмотрим возможный метод диагностики локализованных плазменных волн по создаваемому ими излучению в окрестности удвоенной плазменной частоты  $2\omega_p$ .

Излучение на частоте  $2\omega_p$  широко обсуждается, начиная с пятидесятих годов в связи с солнечными вспышками [2]. На возможный физический механизм, ответственный за это излучение, который теперь принято называть слиянием двух плазмонов, было указано впервые в работе [3]. В конце шести-

десятих годов этот эффект начал привлекать внимание также в связи с общими проблемами сильной ленгмюровской турбулентности (см., например, [4]). С процессом двухплазмонного слияния связывают также некоторые наблюдаемые особенности в спектре излучения, отраженного от неоднородной лазерной плазмы, в окрестности удвоенной лазерной частоты  $2\omega_0$  [5].

В основе обсуждаемого нами эффекта также лежит элементарный нелинейный процесс слияния двух плазмонов с образованием фотонов. При этом реальные наблюдаемые характеристики излучения на удвоенной плазменной частоте (интенсивность, диаграмма направленности, поляризация, ширина линии) определяются суперпозицией полей поперечных волн (фотонов), возникающих во множестве элементарных процессов, и зависят от свойств плазменных волн (их пространственной структуры, затухания, степени когерентности, способа возбуждения).

В этой статье мы рассмотрим излучение на удвоенной плазменной частоте применительно к локализованным мелкомасштабным стоячим плазменным волнам, которые возбуждаются в плазме при взаи-

\*E-mail: frolov@ihed.ras.ru

модействии коротких лазерных импульсов. Как было показано в работе [1], при «столкновении» таких импульсов в плазме в области перекрытия импульсов возникает на короткое время стоячая электромагнитная волна, пондеромоторные силы в которой изменяются периодически в пространстве с волновым числом  $2k_0$ , где  $k_0$  — волновое число лазерного излучения. Под действием этих сил в плазме образуются мелкомасштабные когерентные плазменные возмущения. Их поведение во времени зависит от длительности импульсов. Если длительность импульсов  $\tau$  больше обратной плазменной частоты  $\omega_p^{-1}$ , то эти возмущения существуют только в течение процесса взаимодействия импульсов и исчезают после его окончания. Если длительность импульсов порядка или меньше плазменного периода, то такие плазменные возмущения сохраняются и после окончания процесса взаимодействия между импульсами в форме локализованной когерентной стоячей плазменной волны. Как будет показано ниже, именно при таком «ударном» возбуждении возможно электромагнитное излучение на удвоенной плазменной частоте из области локализации плазменных колебаний. Интенсивность этого излучения и его диаграмма направленности существенно определяются параметрами взаимодействующих импульсов и несут информацию как об импульсах, распространяющихся в плазме, так и о ленгмюровских волнах, которые остаются в области их взаимодействия.

Заметим, что рассматриваемый нами эффект излучения на удвоенной плазменной частоте от локализованной стоячей ленгмюровской волны в определенном смысле аналогичен известному в твердом теле эффекту генерации излучения на второй гармонике от встречных поверхностных поляритонов [6].

## 2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Вопрос о возбуждении мелкомасштабных плазменных колебаний при взаимодействии двух идентичных коротких лазерных импульсов изучался нами ранее в гидродинамическом бездиссипативном приближении [1]. Возникающее в такой модели бесконечное время жизни колебаний приводит к сингулярности в спектральной плотности излучаемой энергии. Чтобы избежать этой проблемы необходимо учесть затухание плазменных колебаний, что возможно только в рамках кинетической теории. Поэтому в этом разделе, а также в Приложении, мы

разовьем кинетический подход для описания взаимодействия коротких лазерных импульсов.

Рассмотрим два одинаковых лазерных импульса, распространяющихся в плазме навстречу друг другу вдоль оси  $z$ . Возьмем электрическое поле импульсов  $\mathbf{E}_L$  в виде

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \times \times \{ \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t) \}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\omega_0$  — частота лазерного излучения,  $\mathbf{E}_0$  — комплексная амплитуда, медленно изменяющаяся со временем на масштабе  $\omega_0^{-1}$  и зависящая от координат следующим образом:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) \exp(ik_0 z) + \mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) \exp(-ik_0 z), \quad (2.2)$$

где  $k_0$  — продольное волновое число, связанное с частотой  $\omega_0$  дисперсионным соотношением  $k_0 c = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2}$ , где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_{0e}/m}$  — плазменная частота, которая предполагается малой по сравнению с  $\omega_0$ ;  $e$ ,  $m$ ,  $N_{0e}$  — соответственно, заряд, масса и концентрация электронов плазмы;  $\mathbf{E}_\pm(\mathbf{r}, t)$  — амплитуды лазерных импульсов, распространяющихся слева направо (знак «+») и справа налево (знак «-»), которые мало изменяются в пространстве на масштабе  $k_0^{-1}$ .

В процессе взаимодействия импульсы создают стоячую электромагнитную волну, с которой связаны квазистатические мелкомасштабные пондеромоторные силы. Под действием этих сил в плазме возникают периодические возмущения плотности электронов (с волновым числом  $2k_0$ ) и мелкомасштабные квазистатические электрические поля. Подставляя формулу (2.2) в определение высокочастотного потенциала (П.23) и выделяя слагаемые, пропорциональные  $\exp(\pm 2ik_0 z)$ , найдем

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2}{4m\omega_0^2} \{ \exp(2ik_0 z) (\mathbf{E}_+ \cdot \mathbf{E}_-) + \exp(-2ik_0 z) (\mathbf{E}_- \cdot \mathbf{E}_+) \}. \quad (2.3)$$

Будем считать, что в области взаимодействия амплитуда электрического поля лазерных импульсов имеет аксиально симметричную гауссовскую форму:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_+ E_{0L} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2L^2} - \frac{\rho^2}{2R^2}\right), \\ \mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_- E_{0L} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2L^2} - \frac{\rho^2}{2R^2}\right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\xi = z - V_g t$ ,  $\eta = z + V_g t$  — продольные координаты в сопутствующих импульсам системах,  $V_g = c^2 k_0 / \omega_0$  — групповая скорость импульсов,  $L$  — продольный размер импульса, связанный с его длительностью соотношением  $\tau = L / V_g$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  — поперечная координата,  $R$  — ширина импульсов,  $E_{0L}$  — максимальное значение амплитуды электрического поля, векторы  $\mathbf{e}_+$  и  $\mathbf{e}_-$  определяют поляризацию лазерных импульсов.

Компонента Фурье электрического поля плазменных возмущений выражается через соответствующую компоненту пондеромоторного потенциала с помощью формулы (П.27) (см. Приложение). Согласно выражению (2.4), последняя имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(\omega, \mathbf{k}) = & \frac{mV_E^2 \pi^2 R^2 L \tau (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)}{4} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{4} - \frac{k_{\perp}^2 R^2}{4}\right) \times \\ & \times \left[ \exp\left(-\frac{(k_z - 2k_0)^2 L^2}{4}\right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{(k_z + 2k_0)^2 L^2}{4}\right) \right], \quad (2.5) \end{aligned}$$

где  $V_E = eE_{0L} / m\omega_0$ .

Имея в виду короткие лазерные импульсы длительностью  $\tau$  порядка  $\omega_p^{-1}$ , будем интересоваться плазменными колебаниями, остающимися в области перекрытия импульсов после окончания процесса их взаимодействия. Поскольку в этом случае пондеромоторные силы отсутствуют, в плазме могут существовать только свободные плазменные колебания, для которых частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  связаны дисперсионным соотношением [7]:

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \delta\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (2.6)$$

Для максвелловской функции распределения  $F$  при условии, что тепловая скорость движения электронов  $V_T = \sqrt{T/m}$  ( $T$  — температура электронов) меньше фазовой скорости плазменных волн ( $\omega/k$ ), из выражения (П.28) следует [7]

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = & -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + 3\frac{k^2 V_T^2}{\omega^2}\right) + \\ & + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_p^2}{k^3 V_T^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 V_T^2}\right). \quad (2.7) \end{aligned}$$

Имея в виду малость отношения тепловой скорости электронов к фазовой скорости плазменной волны, чему в рассматриваемом случае отвечает неравенство  $2V_T/c < \omega_p/\omega_0$ , представим фурье-компоненту плазменных волн (П.27) в виде

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}_2(\omega, \mathbf{k}) \rangle = & -\frac{i\mathbf{k}}{2e} \phi(\omega_L, \mathbf{k}) \omega_L \times \\ & \times \left( \frac{1}{\omega - \omega_L + i\gamma_L} - \frac{1}{\omega + \omega_L + i\gamma_L} \right), \quad (2.8) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_L(k) = & \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_D^2\right), \\ \gamma_L(k) = & \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{k^3 r_D^3} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2k^2 r_D^2}\right), \quad (2.9) \end{aligned}$$

а  $r_D = V_T/\omega_p$  — дебаевский радиус электронов.

В отличие от гидродинамического результата [1], выражение (2.8) учитывает тепловую поправку в законе дисперсии ленгмюровских волн, а также затухание Ландау. Хотя в рассматриваемом приближении оба эти эффекта малы, последовательный учет затухания играет принципиальную роль, ограничивая время жизни возбужденных плазменных волн и устраняя сингулярность в частотном спектре излучения на удвоенной плазменной частоте.

Формула (2.8) при учете выражения (2.5) определяет электрическое поле стоячей мелкомасштабной плазменной волны, возбуждаемой импульсами в области их перекрытия. Время жизни такой волны характеризуется декрементом  $\gamma_L(2k_0)$ , а интервал волновых векторов в поперечном и продольном направлениях — соответственно, поперечным и продольным размерами импульсов,  $R$  и  $L$ . Имея в виду малость лазерной длины волны по сравнению с размерами импульса, в формулах (2.9) в дальнейшем будем считать  $k = 2k_0$ .

### 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В результате взаимодействия между плазменными волнами возникает нелинейный ток. В квадратичном относительно полей волн приближении фурье-компонента плотности тока  $\mathbf{j}_2$  в общем виде записывается как [8]

$$\begin{aligned} j_i(\omega, \mathbf{k}) = & -\frac{i\omega}{8\pi} \int \frac{d\omega' d\mathbf{k}'}{(2\pi)^4} \times \\ & \times S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') E_j(\omega'', \mathbf{k}'') E_s(\omega', \mathbf{k}'), \quad (3.1) \end{aligned}$$

где  $\omega'' = \omega - \omega'$ ,  $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = \langle \mathbf{E}_2(\omega, \mathbf{k}) \rangle$ . В интересующем нас случае фазовых скоростей взаимодействующих волн, больших по сравнению с тепловой скоростью электронов ( $\omega > kV_T$ ,  $\omega' > k'V_T$ ,  $\omega'' > k''V_T$ ), тензор  $S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}')$  имеет вид [8]

$$S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}, \omega', \mathbf{k}') = -\frac{4\pi i e^3 N_{0e}}{m^2 \omega \omega' \omega''} \times \left[ \frac{k_i}{\omega} \delta_{js} + \frac{k_j''}{\omega''} \delta_{is} + \frac{k_s'}{\omega'} \delta_{ij} \right]. \quad (3.2)$$

Используя формулу (2.8), находим нелинейный ток (3.1) стоячей плазменной волны:

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_p^2}{32\pi e m} \int \frac{d\omega' d\mathbf{k}'}{(2\pi)^4} \frac{\omega_L^2 \phi(\omega_L, \mathbf{k}') \phi(\omega_L, \mathbf{k}'')}{\omega' \omega''} \times \left[ \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'') + \frac{\mathbf{k}'}{\omega''} k''^2 + \frac{\mathbf{k}''}{\omega'} k'^2 \right] \times \left( \frac{1}{\omega' - \omega_L + i\gamma_L} - \frac{1}{\omega' + \omega_L + i\gamma_L} \right) \times \left( \frac{1}{\omega'' - \omega_L + i\gamma_L} - \frac{1}{\omega'' + \omega_L + i\gamma_L} \right). \quad (3.3)$$

Ток (3.3) пропорционален квадрату напряженности поля плазменной волны или четвертой степени лазерного поля.

За генерацию поля излучения ответственна только вихревая часть тока (3.3). Отделяя эту часть, из уравнений Максвелла находим спектральную плотность вихревого электрического поля  $\mathbf{E}^{tr}(\omega, \mathbf{r})$ :

$$\mathbf{E}^{tr}(\omega, \mathbf{r}) = -4\pi i \omega \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2 T(\omega, k)} \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}), \quad (3.4)$$

где  $T(\omega, k) = \omega^2 \varepsilon(\omega) - c^2 k^2$ ,  $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$  — поперечная диэлектрическая проницаемость плазмы. Соотношения (3.3), (3.4) определяют низкочастотное электромагнитное поле, возникающее в разреженной плазме после столкновения двух коротких лазерных импульсов.

Подставляя (3.3) в (3.4), после интегрирования по частотам  $\omega'$  и волновым векторам  $\mathbf{k}'$  и в пренебрежении малыми слагаемыми, пропорциональными  $\exp(-k_0^2 L^2)$ , находим

$$\mathbf{E}^{tr}(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{i\omega\omega_p}{em} \frac{\pi^{5/2} m^2 V_E^4 k_0^2 R^2 L \tau^2}{16\sqrt{2}} (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^2 \times \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{8}\right) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 T(\omega, k)} \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{k_z^2 L^2}{8} - \frac{k_\perp^2 R^2}{8}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{i(\omega - 2\omega_L)\tau}{\sqrt{8}}\right)}{\omega - 2\omega_L + 2i\gamma_L} \exp\left[-\frac{(\omega - 2\omega_L)^2 \tau^2}{8}\right] - \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{i(\omega + 2\omega_L)\tau}{\sqrt{8}}\right)}{\omega + 2\omega_L + 2i\gamma_L} \times \exp\left[-\frac{(\omega + 2\omega_L)^2 \tau^2}{8}\right] \right\}, \quad (3.5)$$

где

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt \exp(-t^2)$$

— интеграл вероятности от комплексного аргумента,  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ ,  $\omega_L = \omega_p(1 + 6k_0^2 r_D^2)$  — частота плазменных колебаний с учетом пространственной дисперсии,

$$\gamma_L = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{8k_0^3 r_D^3} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{8k_0^2 r_D^2}\right).$$

Естественно интересоваться полем излучения в волновой зоне на больших расстояниях от области локализации плазменных колебаний ( $r \gg R, L$ ). В этом случае для вычисления интеграла по волновым векторам в выражении (3.5) можно воспользоваться методом перевала. Учитывая вклад полюса,  $k = \sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega/c$ , получим следующее выражение для спектральной плотности электрического поля низкочастотного электромагнитного излучения:

$$\mathbf{E}^{tr}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{\pi^{3/2} \omega^2 \tau^2}{8\sqrt{2}} \frac{\omega_p}{\omega_0} \frac{V_E^3}{8c^3} E_{0L} \times \frac{k_0^2 R^2 L}{r} (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^2 \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sin\theta \cos\theta \mathbf{e}_\theta \times \exp\left(i\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} r - \frac{\omega^2 \tau^2}{8} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \frac{L^2 \cos^2\theta + R^2 \sin^2\theta}{8}\right) \times \left\{ \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{i(\omega - 2\omega_L)\tau}{\sqrt{8}}\right)}{\omega - 2\omega_L + 2i\gamma_L} \exp\left(-\frac{(\omega - 2\omega_L)^2 \tau^2}{8}\right) - \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{i(\omega + 2\omega_L)\tau}{\sqrt{8}}\right)}{\omega + 2\omega_L + 2i\gamma_L} \times \exp\left(-\frac{(\omega + 2\omega_L)^2 \tau^2}{8}\right) \right\}, \quad (3.6)$$

где  $\theta$  — угол между осью  $z$  и направлением радиуса вектора  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  — единичный вектор в меридиональном направлении.

Для нахождения пространственно-временной зависимости низкочастотного электрического поля в волновой зоне сделаем обратное преобразование Фурье по времени. Тогда, учитывая вклад полюсов  $\omega = \pm 2\omega_L - 2i\gamma_L$ , из (3.6) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{tr}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{\sqrt{3}\pi^{3/2}\omega_p^2\tau^2}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_p}{\omega_0} \frac{V_E^3}{8c^3} E_{0L} \times \\ & \times \frac{k_0^2 R^2 L}{r} (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^2 \sin\theta \cos\theta \mathbf{e}_\theta \times \\ & \times \exp \left\{ -2\gamma_L \left( t - \frac{2}{3} \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega_L^2 \tau^2}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{8} k_p^2 (L^2 \cos^2\theta + R^2 \sin^2\theta) \right\} \times \\ & \times \sin \left\{ 2\omega_L \left[ t - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{r}{c} (1 + 2k_0^2 r_D^2) \right] \right\}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Соотношение (3.7) описывает расходящуюся электромагнитную сферическую волну с удвоенной плазменной частотой, поляризованную в меридиональном направлении. Отметим, что выражение (3.7) пригодно только вдали от области локализации мелкомасштабных стоячих плазменных колебаний ( $r \gg R, L$ ). Помимо того, оно становится справедливым только спустя некоторое время после прохождения переднего фронта излучения через данную точку (при  $t - r/c \gg \omega_p \tau^2, \omega_p R^2/c^2$ ).

#### 4. УГЛОВЫЕ, СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Энергия, излучаемая в единичном интервале частот  $d\omega$  в элементарный телесный угол  $do$ , связана со спектральной плотностью электрического поля (3.6) следующим соотношением [9]:

$$\frac{dW}{d\omega do} = \frac{c\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{4\pi^2} r^2 |\mathbf{E}^{tr}(\omega, \mathbf{r})|^2, \quad (4.1)$$

где частота  $\omega$  считается положительной.

Используя соотношение (3.6), представим выражение для энергии низкочастотного излучения (4.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega do} = & \frac{\sqrt{\pi}\omega_p^2\tau^2\omega^4\tau^3}{64} (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^4 k_0^2 R^2 \varepsilon^{3/2}(\omega) \times \\ & \times \left( \frac{V_E^2}{4c^2} \right)^3 W_L \sin^2\theta \cos^2\theta \times \\ & \times \exp \left( -\frac{\omega^2\tau^2}{4} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \frac{L^2 \cos^2\theta + R^2 \sin^2\theta}{4} \right) \times \\ & \times \left| \frac{1 + \operatorname{erf} \left( \frac{i(\omega - 2\omega_L)\tau}{\sqrt{8}} \right)}{\omega - 2\omega_L + 2i\gamma_L} \exp \left( -\frac{(\omega - 2\omega_L)^2\tau^2}{8} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1 + \operatorname{erf} \left( \frac{i(\omega + 2\omega_L)\tau}{\sqrt{8}} \right)}{\omega + 2\omega_L + 2i\gamma_L} \times \right. \\ & \left. \times \exp \left( -\frac{(\omega + 2\omega_L)^2\tau^2}{8} \right) \right|^2, \quad (4.2) \end{aligned}$$

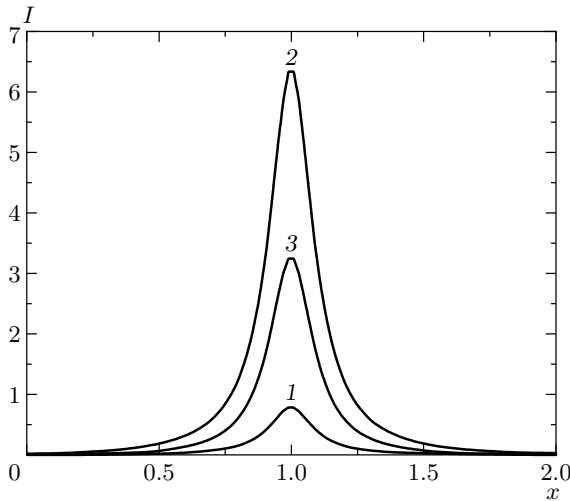
где

$$W_L = \frac{E_{0L}^2 \pi^{3/2} R^2 L}{8\pi}$$

— энергия одного лазерного импульса. Для слабозатухающих плазменных колебаний ( $\omega_p \gg \gamma_L$ ) выражение (4.2) вблизи частоты  $\omega = 2\omega_L$  имеет резкий максимум, соответствующий излучению электромагнитных волн на удвоенной плазменной частоте. Вблизи резонанса  $\omega = 2\omega_L$  формула (4.2) заметно упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega do} = & \frac{3\sqrt{3}\pi\omega_p^6\tau^5 k_0^2 R^2}{32} (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^4 \times \\ & \times \left( \frac{V_E^2}{4c^2} \right)^3 W_L \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta}{(\omega - 2\omega_L)^2 + 4\gamma_L^2} \times \\ & \times \exp \left\{ -\omega_L^2 \tau^2 - \frac{3}{4} k_p^2 (L^2 \cos^2\theta + R^2 \sin^2\theta) - \right. \\ & \left. - \frac{(\omega - 2\omega_L)^2\tau^2}{8} \right\}. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Из формулы (4.3) следует, что при фиксированном угле как интенсивность, так и ширина линии излучения зависит не только от скорости затухания плазменных колебаний, но и от длительности импульсов  $\tau$ . Причина такой зависимости связана с тем, что длительность импульсов определяет не только эффективность возбуждения плазменных волн, но и продольный размер области их взаимодействия. С этим размером связан разброс продольных компонент волновых векторов возбужденных плазменных колебаний и возможность удовлетворения условия слияния двух плазменных волн с образованием поперечной электромагнитной волны.



**Рис. 1.** Зависимость безразмерного энергетического спектра излучения  $I$  под углами  $45^\circ$  и  $135^\circ$  от безразмерной частоты  $x = \omega/2\omega_L$  при  $\gamma_L/\omega_L = 0.1$  и при фиксированных интенсивности и радиусе лазерных импульсов для трех значений параметра  $\beta = (\omega_L \tau)^2/2$ , характеризующего длительность импульсов,  $\beta = 0.25$  (1), 1 (2), 2 (3)

На рис. 1 показана зависимость безразмерного энергетического спектра излучения,

$$I = \frac{dW}{d\omega d\Omega} \frac{512\omega_L^2}{3\sqrt{3}\pi k_0^2 R^2 (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^4 (V_E^2/4c^2)^3 cE_{0L}^2 R^2} \times \exp\left(\frac{3}{8}k_p^2 R^2\right) = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{2\omega_L} - 1\right)^2 + \frac{\gamma_L^2}{\omega_L^2}} \times \left(\frac{\omega_L^2 \tau^2}{2}\right)^3 \exp\left\{-\frac{\omega_L^2 \tau^2}{2} \left[\left(\frac{\omega}{2\omega_L} - 1\right)^2 + \frac{11}{4}\right]\right\},$$

под углами  $\theta = 45^\circ$  и  $\theta = 135^\circ$  для трех значений параметра  $\omega_L^2 \tau^2/2$ , характеризующего длительность импульсов, при фиксированных интенсивности и радиусе последних. В основном длительность импульса влияет на эффективность возбуждения плазменных волн и, как следствие, на интенсивность излучения. Помимо этого имеется относительно слабое влияние длительности импульса на ширину линии излучения. Чем короче импульсы, тем более широкий разброс по продольным компонентам волновых векторов имеют возбуждаемые ими плазменные волны и тем большее число элементарных процессов слияния плазмонов оказывается возможным. Напомним, что слияние двух плазмонов с противоположно направленными волновыми векторами возможно

только в том случае, когда по абсолютной величине эти векторы отличаются на величину порядка  $\omega_L/c$ .

Проинтегрировав выражение (4.3) по частоте, найдем угловое распределение энергии излучения:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{(3\pi)^{3/2} \omega_p^5 \tau^5 k_0^2 R^2}{32} (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^4 \times \left(\frac{V_E^2}{4c^2}\right)^3 W_L \frac{\omega_p}{2\gamma_L} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \times \exp\left\{-\omega_L^2 \tau^2 - \frac{3}{4}k_p^2 (L^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)\right\}. \quad (4.4)$$

Проанализируем зависимость диаграммы направленности низкочастотного электромагнитного излучения от соотношения между продольными и поперечными размерами лазерных импульсов. Уравнение для оптимального угла  $\theta_{max}$ , отвечающего максимуму энергии излучения, следует из (4.4) и имеет вид

$$\sin^4 \theta_{max} - \sin^2 \theta_{max} \left[1 + \frac{8}{3k_p^2 (R^2 - L^2)}\right] + \frac{4}{3k_p^2 (R^2 - L^2)} = 0. \quad (4.5)$$

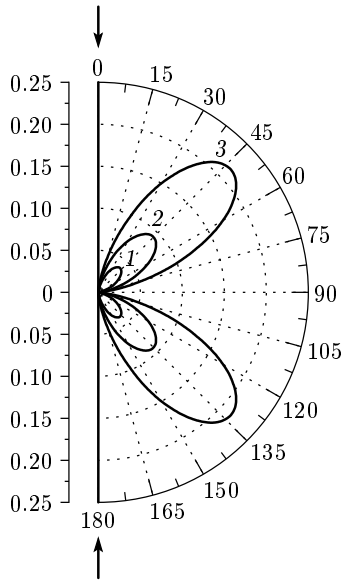
Если импульсы имеют одинаковые или почти одинаковые продольные и поперечные размеры, такие что  $k_p^2 (R^2 - L^2) \ll 1$ , то из (4.5) находим  $\sin^2 \theta_{max} = 0.5$ , что соответствует значениям углов

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}. \quad (4.6)$$

Излучение сосредоточено в узких конусах с углами  $45^\circ$  и  $135^\circ$  относительно оси распространения импульсов. Этот результат совпадает с полученным в работах [10, 11] при рассмотрении излучения от солнечных вспышек в приближении, таком что в пространстве волновых векторов спектр ленгмюровских шумов сосредоточен в малой окрестности двух противоположно направленных достаточно больших волновых векторов.

При столкновении импульсов, поперечные размеры которых значительно превосходят их продольные размеры,  $R \gg L$ , угловая направленность низкочастотного излучения существенно зависит от величины параметра  $k_p R$ . Для узких импульсов,  $k_p R \ll 1$ , излучение максимально для углов, определяемых соотношением (4.6). Если же импульсы имеют большие поперечные размеры, то из уравнения (4.5) находим

$$\theta_{max} = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{k_p R}, \quad \pi - \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{k_p R}. \quad (4.7)$$



**Рис. 2.** Угловая зависимость безразмерной энергии излучения на удвоенной плазменной частоте,  $g$ , для коротких лазерных импульсов ( $\omega_p \tau = \sqrt{4/3}$ ) в зависимости от параметра  $\alpha = (R/L)^2$ , характеризующего ширину импульсов,  $\alpha = \sqrt{2}$  (1), 1 (2),  $1/\sqrt{2}$  (3)

В этом случае излучение происходит под малыми углами по отношению к направлению движения импульсов. Однако интенсивность излучения в соответствии с (4.4) невелика.

Если продольные размеры сталкивающихся импульсов превышают их поперечные размеры,  $L \gg R$ , то при условии  $\omega_p \tau \ll 1$  энергия излучения максимальна для углов (4.6). При выполнении противоположного неравенства,  $\omega_p \tau > 1$ , из уравнения (4.5) находим

$$\theta_{max} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{\omega_p \tau}. \quad (4.8)$$

В этом случае излучение происходит в направлении, перпендикулярном направлению движения импульсов, но величина излучаемой энергии экспоненциально мала.

На рис. 2 показаны угловые зависимости безразмерной энергии излучения на удвоенной плазменной частоте для трех значений параметра  $(R/L)^2$ , характеризующего радиусы лазерных импульсов, при фиксированной их энергии и длительности:

$$g = \frac{dW}{do} \frac{L^2 \exp(\omega_L^2 \tau^2)}{24\sqrt{3} k_p^5 k_0^2 (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^4 W_L^4} \times \left( \frac{4m^2 c^2 \omega_0^2}{e^2} \right)^3 \frac{\gamma_L}{\omega_L} = \left( \frac{L}{R} \right)^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \times \exp \left\{ -\frac{3}{4} \omega_L^2 \tau^2 \left( \cos^2 \theta + \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \theta \right) \right\}.$$

Видно, что с увеличением радиуса импульса энергия излучения снижается, а диаграмма направленности сужается. Эти эффекты связаны с тем, что с ростом радиуса импульса сужается угловой разброс волновых векторов возбуждаемых плазменных волн и уменьшается число элементарных актов их слияния (сравни с [10, 11]). Кроме того, в соответствии с результатами (4.7), происходит уменьшение оптимального угла  $\theta_{max}$  при увеличении поперечного размера лазерного импульса.

Полную энергию низкочастотного электромагнитного излучения находим из (4.4) интегрированием по телесному углу  $do$ . Для импульсов с одинаковыми пространственными размерами  $L = R$  интегрирование выполняется аналитически и полная энергия имеет вид

$$W = \frac{\sqrt{3} (\pi)^{5/2} \omega_p^5 \tau^5 k_0^2 R^2}{20} (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^4 \left( \frac{V_E^2}{4c^2} \right)^3 W_L \times \frac{\omega_p}{2\gamma_L} \exp \left( -\frac{7}{4} \omega_p^2 \tau^2 \right). \quad (4.9)$$

Энергия низкочастотного излучения (4.9) достигает максимума,

$$W_{max} = \frac{\sqrt{6} k_0^2 R^2}{5} (\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-)^4 \left( \frac{5\pi}{7e} \right)^{5/2} \times \left( \frac{V_E^2}{4c^2} \right)^3 \frac{\omega_p}{2\gamma_L} W_L, \quad (4.10)$$

при столкновении лазерных импульсов с длительностью равной

$$\omega_p \tau = \sqrt{\frac{10}{7}}. \quad (4.11)$$

Величина энергии (4.10), хотя и содержит произведение двух больших параметров  $k_0^2 R^2 \gg 1$  и  $\omega_p / \gamma_L \gg 1$ , должна быть мала по сравнению с энергией мелкомасштабной стоячей плазменной волны [1]:

$$W_p = \frac{\pi \omega_p^2 \tau^2}{\sqrt{2}} \frac{V_E^2}{4c^2} W_L \exp \left( -\frac{\omega_p^2 \tau^2}{2} \right). \quad (4.12)$$

Сравнивая выражение (4.12) с формулой (4.10), на-

ходим, что наше рассмотрение справедливо при выполнении условия

$$k_0^2 R^2 \left( \frac{V_E^2}{4c^2} \right)^2 \ll \frac{\gamma_L}{\omega_p}. \quad (4.13)$$

Еще одно ограничение на параметры плазмы связано с условием малости затухания Ландау мелкомасштабных плазменных колебаний,  $\gamma_L \ll \omega_L$ . Для значений параметра  $k_0 r_D < 0.2$  величина отношения  $\gamma_L/\omega_L$  не превышает 0.1 и плазменные колебания являются слабозатухающими. Например, при  $k_0 r_D = 0.2$  декремент затухания составляет величину  $\gamma_L = 0.1\omega_L$ , а частота плазменных колебаний с учетом пространственной дисперсии  $\omega_L$  равна  $1.24\omega_p$ .

Оценим величину энергии, излучаемой при столкновении в разреженной плазме с плотностью  $N_{0e} = 1.7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  и температурой  $T_e = 20 \text{ эВ}$  двух коротких лазерных импульсов с интенсивностью  $I_L = 10^{16} \text{ Вт/см}^2$ , длиной волны  $\lambda_0 = 0.8 \text{ мкм}$  ( $\omega_0 = 2.4 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ), длительностью  $\tau = 27 \text{ фс}$  и диаметром фокального пятна  $2R = 16 \text{ мкм}$ . При таких параметрах энергия лазерных импульсов составляет величину  $W_L = 0.96 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$ , а энергия мелкомасштабной стоячей плазменной волны —  $W_p = 1.4 \cdot 10^{-3} W_L$ . В этом случае мелкомасштабные плазменные колебания слабо затухают с декрементом  $\gamma_L = 0.1\omega_L$ , а излучаемая энергия с частотой  $\omega = 2\omega_L = 1.7 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ , почти в 15 раз меньшей несущей лазерной частоты, направлена под углами  $45^\circ$  и  $135^\circ$  и имеет величину  $W = 2.8 \cdot 10^{-6} W_L = 2 \cdot 10^{-3} W_p = 2.7 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}$ . Подчеркнем еще раз, что при таких параметрах плазмы частота ленгмюровских волн с учетом пространственной дисперсии  $\omega_L$  равна  $1.24\omega_p$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Излучение на удвоенной плазменной частоте может нести определенную информацию об эволюции свободных (не поддерживаемых внешними источниками) мелкомасштабных локализованных плазменных колебаний в условиях лазерных экспериментов. Рассмотренная нами модель предполагает линейность плазменных волн и, в частности, их диссипацию из-за затухания Ландау. Именно для таких условий нами рассмотрены энергетические характеристики излучения, его спектр и диаграмма направленности. Отличие результатов измерений от результатов расчетов может указывать на важность и характер не учитываемых в нашей модели нелинейных процессов при эволюции плазменных волн.

Так, эффекты, связанные с подвижностью ионов (индуцированное рассеяние на ионах, распад плазменной волны на плазменную и звуковую волны), ведут к изотропизации спектра плазменных волн и, следовательно, диаграммы направленности излучения на удвоенной плазменной частоте. Нелинейные механизмы диссипации влияют на форму спектра излучения и на его интенсивность.

Линейное приближение при рассмотрении плазменных волн ограничено достаточно умеренными интенсивностями лазерных импульсов  $10^{15}$ – $10^{16} \text{ Вт/см}^2$ , в то время как современная лазерная техника позволяет иметь импульсы значительно более высокой интенсивности  $10^{18}$ – $10^{20} \text{ Вт/см}^2$ , при которой возбуждаемые плазменные волны могут быть нелинейными и содержать много пространственных гармоник, кратных  $2k_0$ . Можно думать, что в этом случае процессы слияния ленгмюровских волн более высокого порядка приведут к электромагнитному излучению не только на удвоенной частоте, но и на более высоких частотах, кратных ленгмюровской частоте.

Тем не менее, располагая такими высокоинтенсивными лазерными импульсами, можно реализовать и рассмотренный нами предельный случай возбуждения линейных плазменных волн. Действительно, из полученных результатов вытекает, что эффективность возбуждения плазменных волн зависит от параметра  $e_+ \cdot e_-$ . Наиболее эффективно плазменные волны возбуждаются при параллельных векторах поляризации лазерных импульсов и, наоборот, для ортогональных поляризаций эффект возбуждения ленгмюровских волн исчезает. Изменяя угол между векторами поляризации, можно влиять на амплитуды возбуждаемых плазменных волн и, следовательно, на спектр и интенсивность низкочастотного излучения.

Заметим, что эффекты излучения, аналогичные рассмотренному в этой статье, могут иметь место и в других средах [6], а также в плазме для других типов волн. Так, в статье [12] исследовалось излучение на удвоенной частоте, возникающее при слиянии двух поверхностных волн.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 01-02-16723, 02-02-16110).

## 6. ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим квадратичный по высокочастотному полю квазистатический отклик плазмы, используя кинетическое уравнение Власова [7]. Функцию рас-



пределения электронов  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  будем искать в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon_E$ , равного отношению осцилляторной скорости электронов  $V_E$  к фазовой скорости электромагнитного излучения и пропорционального напряженности высокочастотного электрического поля  $\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t)$

$$f = F + f_1 + f_2 + \dots,$$

где  $F$  — функция распределения электронов в отсутствие лазерного импульса,  $f_n$  — возмущение функции распределения  $n$ -го порядка по параметру  $\varepsilon_E$ .

В линейном приближении ( $n = 1$ ) уравнение для  $f_1$  имеет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}_L + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_L \right) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (\text{П.1})$$

где  $\mathbf{B}_L$  — высокочастотное магнитное лазерное поле, связанное с электрическим полем уравнением

$$\text{rot } \mathbf{E}_L = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_L}{\partial t}.$$

Имея в виду еще один малый параметр  $\varepsilon_T$ , равный фактически отношению тепловой скорости электронов  $V_T$  к фазовой скорости электромагнитного излучения, решение уравнения (П.1) представим в виде ряда по степеням электронной скорости:

$$f_1 = \frac{\partial F}{\partial \nu_j} \left( -A_j + \nu_i \frac{\partial C_i}{\partial x_j} - \nu_i \nu_l \frac{\partial^2 G_l}{\partial x_l \partial x_j} + \dots \right), \quad (\text{П.2})$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t')$$

— высокочастотная скорость электрона,

$$\mathbf{C} = \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{A}(\mathbf{r}, t')$$

— смещение электрона в высокочастотном поле,

$$\mathbf{G} = \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{C}(\mathbf{r}, t').$$

При получении формулы (П.2) предполагалось, что при  $t \rightarrow -\infty$  лазерный импульс в данной точке  $\mathbf{r}$  отсутствовал. В предположении, что  $F$  — максвелловская функция распределения, выражение, подобное (П.2), обсуждалось в работе [13].

В квадратичном по  $\varepsilon_E$  приближении уравнение для  $f_2$  имеет вид

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}_2 + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_2 \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = -I, \quad (\text{П.3})$$

где стоящая справа величина  $I$  выражается через функции, определяемые линейным приближением:

$$I = \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}_L + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_L \right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}. \quad (\text{П.4})$$

Используя формулу (П.2), представим выражение (П.4) в виде

$$I = R_j \frac{\partial F}{\partial \nu_j} + D_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial \nu_i \partial \nu_j}. \quad (\text{П.5})$$

Здесь коэффициенты  $R_j$  и  $D_{ij}$  пропорциональны квадрату высокочастотного поля и являются степенными функциями компонент вектора скорости электрона:

$$R_j = R_j^0 + \nu_l S_{lj} + \dots, \quad (\text{П.6})$$

$$D_{ij} = D_{ij}^0 + \nu_l Q_{lij} + \nu_l \nu_m P_{lmij} + \dots, \quad (\text{П.7})$$

где

$$R_j^0 = \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{\partial C_i}{\partial x_j}, \quad (\text{П.8})$$

$$S_{lj} = \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \right) \frac{\partial C_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial G_i}{\partial x_l} + \frac{\partial G_l}{\partial x_i} \right), \quad (\text{П.9})$$

$$D_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (A_i A_j), \quad (\text{П.10})$$

$$Q_{lij} = \frac{1}{2} \left( A_i \frac{\partial}{\partial x_j} + A_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) A_l - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_l} (A_i A_j) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) C_l, \quad (\text{П.11})$$

$$P_{lmij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) C_m - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{\partial G_m}{\partial x_l} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial A_l}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) C_m. \quad (\text{П.12})$$

При получении тензора  $D_{ij}$  учтена его симметрия относительно перестановки индексов  $i$  и  $j$ .

До сих пор мы не использовали в явном виде выражение для лазерного поля. Поэтому формулы (П.5)–(П.12) справедливы при произвольной зависимости  $\mathbf{E}_L$  от координат и времени.

Зададим зависимость лазерного поля от времени в виде (2.1), оставив координатную зависимость амплитуды произвольной. Подставляя формулу (2.1)

в определении величин **A**, **C**, **G** и выполняя интегрирование по времени, ограничимся везде, кроме (П.10), членами первого порядка по производным от медленно изменяющейся амплитуды **E**<sub>0</sub>. В выражении для  $D_{ij}^0$  учтем также члены второго порядка по малому параметру  $\varepsilon_t = (1/\omega_0)(\partial/\partial t)$ . В результате найдем, что коэффициенты  $R_j$  и  $D_{ij}^0$  в формуле (П.5) наряду со слагаемыми, изменяющимися на удвоенной частоте, содержат медленно изменяющиеся со временем слагаемые. В соответствии с этим представим функцию распределения  $f_2$ , а также поля **E**<sub>2</sub> и **B**<sub>2</sub> в виде суммы быстропеременных и медленных слагаемых, обозначив последние скобками  $\langle \dots \rangle$ . В результате из уравнения (П.3) получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \langle f_2 \rangle + \frac{e}{m} \left( \langle \mathbf{E}_2 \rangle + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \langle \mathbf{B}_2 \rangle \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = -\langle I \rangle, \quad (\text{П.13})$$

где, согласно (П.5),

$$\langle I \rangle = \langle R_j \rangle \frac{\partial F}{\partial \nu_j} + \langle D_{ij} \rangle \frac{\partial^2 F}{\partial \nu_i \partial \nu_j}. \quad (\text{П.14})$$

Коэффициенты в формуле (П.14) имеют вид

$$\langle R_j \rangle = \langle R_j^0 \rangle + \nu_l \langle S_{lj} \rangle + \dots, \quad (\text{П.15})$$

$$\langle R_j^0 \rangle = -\frac{e^2}{4m^2\omega_0^2} \left[ \frac{\partial |E_0|^2}{\partial x_j} + 2 \frac{i}{\omega_0} \left( E_{0i} \frac{\partial^2 E_{0i}^*}{\partial t \partial x_j} - E_{0i}^* \frac{\partial^2 E_{0i}}{\partial t \partial x_j} \right) \right], \quad (\text{П.16})$$

$$\langle S_{lj} \rangle = -\frac{ie^2}{4m^2\omega_0^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( E_{0i} \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial x_i} - E_{0i}^* \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left( E_{0i} \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial x_j} - E_{0i}^* \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_j} \right) + \frac{i}{\omega_0} \times \right. \\ \times \left[ 2 \frac{\partial^2 E_{0i}}{\partial t \partial x_j} \left( \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial x_l} - \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_l} \right) - \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial x_l} - \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_l} \right) + \right. \\ \left. \left. + 3E_{0i} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} \left( \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial x_l} + \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_l} \right) + \text{c.c.} \right] \right\}, \quad (\text{П.17})$$

$$\langle D_{ij} \rangle = \langle D_{ij}^0 \rangle + \nu_l \langle Q_{lij} \rangle + \nu_l \nu_m \langle P_{lmij} \rangle, \quad (\text{П.18})$$

$$\langle D_{ij}^0 \rangle = \frac{ie^2}{8m^2\omega_0} \left\{ \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (E_{0j} E_{0i}^* + E_{0i} E_{0j}^*) + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( E_{0j} \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial t} + E_{0i} \frac{\partial E_{0j}^*}{\partial t} - \text{c.c.} \right) \right\}, \quad (\text{П.19})$$

$$\langle Q_{lij} \rangle = -\frac{e^2}{8m^2\omega_0^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l} (E_{0i}^* E_{0j} + \text{c.c.}) + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( E_{0i} \frac{\partial E_{0l}^*}{\partial x_j} + E_{0j} \frac{\partial E_{0l}^*}{\partial x_i} - \text{c.c.} \right) + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( E_{0j} \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial t} + E_{0i} \frac{\partial E_{0j}^*}{\partial t} - \text{c.c.} \right) \right\}, \quad (\text{П.20})$$

$$\langle P_{lmij} \rangle = \frac{ie^2}{8m^2\omega_0^3} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l} \left( E_{0i}^* \frac{\partial E_{0m}}{\partial x_j} + E_{0j}^* \frac{\partial E_{0m}}{\partial x_i} - \text{c.c.} \right) + \frac{i}{\omega_0} \left( -3E_{0i} \frac{\partial^3 E_{0m}^*}{\partial t \partial x_l \partial x_j} - 3E_{0j} \frac{\partial^3 E_{0m}^*}{\partial t \partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial^2 E_{0i}}{\partial t \partial x_l} \frac{\partial E_{0m}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 E_{0j}}{\partial t \partial x_l} \frac{\partial E_{0m}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial E_{0l}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 E_{0m}^*}{\partial t \partial x_j} + \frac{\partial E_{0l}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 E_{0m}^*}{\partial t \partial x_i} - 2 \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 E_{0m}^*}{\partial t \partial x_j} - 2 \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 E_{0m}^*}{\partial t \partial x_i} + \text{c.c.} \right) \right\}. \quad (\text{П.21})$$

Выражения (П.13)–(П.21) позволяют рассмотреть в квадратичном по высокочастотному полю приближении разнообразные эффекты с различной степенью точности по малым параметрам  $\varepsilon_T$  (малость тепловой скорости частиц по сравнению с фазовой скоростью волн) и  $\varepsilon_t$  (малость изменения амплитуды за период высокочастотного поля). В частности, с помощью этих соотношений можно проанализировать вопрос о так называемых нестационарных пондеромоторных силах, который обсуждается в течение долгих лет в основном в рамках гидродинамического описания плазмы (см. обзорную статью [14]).

Учитывая наибольшие члены в выражении (П.14) по параметрам  $\varepsilon_t$  и  $\varepsilon_E$ , запишем уравнение (П.13) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \langle f_2 \rangle + \frac{e}{m} \left( \langle \mathbf{E}_2 \rangle + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \langle \mathbf{B}_2 \rangle \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \phi_{ij} \right] \times \frac{\partial^2 F}{\partial \nu_i \partial \nu_j}, \quad (\text{П.22})$$

где

$$\begin{aligned}\phi_{ij} &= \frac{e^2}{8m\omega_0^2}(E_{0j}E_{0i}^* + E_{0j}^*E_{0i}), \\ \phi &= \delta_{ij}\phi_{ij} = \frac{e^2}{4m\omega_0^2}|E_0|^2.\end{aligned}\quad (\text{П.23})$$

Величину  $\phi$  обычно называют высокочастотным потенциалом.

Проведя фурье-преобразование в уравнении (П.22) по координатам и времени, для  $\langle f_2(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v}) \rangle$ , получим

$$\begin{aligned}\langle f_2(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v}) \rangle &= \frac{1}{i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \times \\ &\times \left\{ -\frac{e}{m} \left( \langle \mathbf{E}_2 \rangle + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \langle \mathbf{B}_2 \rangle \right) + \frac{1}{m} i \mathbf{k} \phi(\omega, \mathbf{k}) \right\} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} + \\ &+ \frac{1}{m} \phi_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j}.\end{aligned}\quad (\text{П.24})$$

Используя выражение (П.24), найдем фурье-компоненту плотности тока электронов:

$$\begin{aligned}\langle j_i(\omega, \mathbf{k}) \rangle &= e \int d\mathbf{v} \nu_i \langle f_2(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v}) \rangle = \\ &= -\frac{i\omega}{4\pi} \delta\varepsilon_{ij} \left( \langle E_{2j} \rangle - \frac{i}{e} k_j \phi \right),\end{aligned}\quad (\text{П.25})$$

где принято, что функция распределения  $F$  является изотропной, и введено стандартное обозначение [7]:

$$\delta\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int d\mathbf{v} \frac{\nu_i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial F}{\partial \nu_j}.\quad (\text{П.26})$$

Отметим, что в уравнении (П.22) высокочастотное поле учитывается через два слагаемых, стоящих в правой части. Вклад в плотность тока (П.25) вносит в низшем приближении по малым параметрам  $\varepsilon_l$  и  $\varepsilon_T$  только одно слагаемое, пропорциональное поперемоторному потенциалу.

Ограничившись потенциальными квазистатическими полями, с помощью выражения (П.25) найдем фурье-компоненту напряженности электрического поля:

$$\langle \mathbf{E}_2 \rangle = \frac{i\mathbf{k}}{e} \phi(\omega, \mathbf{k}) \frac{\delta\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})},\quad (\text{П.27})$$

где  $\delta\varepsilon^l$  — парциальный вклад электронов в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы,

$$\delta\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left( \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \right).\quad (\text{П.28})$$

Подчеркнем, что развитый в этом Приложении подход к описанию квазистатического отклика плазмы на высокочастотное поле может быть использован для рассмотрения более широкого круга вопросов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Горбунов, А. А. Фролов, ЖЭТФ **120**, 583 (2001).
2. В. В. Железняков, *Радиоизлучение Солнца и планет*, Наука, Москва (1964); Дж. Бекефи, *Радиационные процессы в плазме*, Мир, Москва (1971), с. 180; С. А. Каплан, С. Б. Пикельнер, В. Н. Цытович, *Физика плазмы солнечной атмосферы*, Наука, Москва (1977), с. 191.
3. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, ЖЭТФ **35**, 699 (1958).
4. В. Н. Цытович, *Теория турбулентной плазмы*, Атомиздат, Москва (1971), с. 316; Е. Н. Кручина, Р. З. Сагдеев, В. Д. Шапиро, Письма в ЖЭТФ **32**, 443 (1980).
5. M. V. Goldman, D. L. Newman, D. Russel et al., Phys. Plasmas **2**, 1947 (1995).
6. G. Blau, J. L. Coutaz, and R. Reinisch, Opt. Lett. **18**, 1352 (1993); Е. В. Алиева, Г. Н. Жижин, В. А. Сычугов и др., Письма в ЖЭТФ **62**, 794 (1995).
7. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред*, Госатомиздат, Москва (1961), с. 81, 89; Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979), с. 145.
8. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, Труды ФИАН **61**, 109 (1972).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1982), с. 229.
10. I. H. Cairns, J. Plasma Phys. **38**, 179 (1987).
11. A. J. Willes, P. A. Robinson, and D. V. Melrose, Phys. Plasmas **3**, 149 (1996).
12. R. Dragila and S. Vukovic, Phys. Rev. A **34**, 407 (1986).
13. P. Mora and R. Pellat, Phys. Fluids **22**, 2408 (1979).
14. G. W. Kentwill and D. A. Jones, Phys. Rep. **145**, 320 (1987).