ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 3, стр. 673–683

СВОЙСТВА БЫСТРОГО ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ВИХРЯ

А. С. Малишевский**, В. П. Силин, С. А. Урюпин

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 мая 2003 г.

Сформулирована модель аналитического описания вихрей в системе, состоящей из протяженного джозефсоновского перехода и магнитосвязанного с ним волновода. Использование этой модели позволило установить разрешенные для движения вихря области скоростей. Установлено, что свободный вихрь может двигаться со скоростями, значительно превышающими скорость Свихарта джозефсоновского перехода. Такой вихрь назван быстрым. Изучено влияние волновода на вынужденное движение вихрей. Показано, что возбуждение быстрых вихрей возможно при сравнительно небольших значениях тока.

PACS: 74.50.+r, 74.25.Qt

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания свойств джозефсоновских вихрей часто используются модельные уравнения для разности значений фазы конденсатной волновой функции по разные стороны джозефсоновского перехода (ДП) (см., например, [1–6]). При модельных подходах основное упрощение теории состоит в замене синусной нелинейности на сравнительно простые кусочно-линейные функции. Продуктивность использования модельных подходов продемонстрирована как при описании вихрей, несущих один квант магнитного потока [7], так и при описании более сложных мультивихревых образований [8, 9]. До сих пор модельное описание использовалось при изучении вихрей в изолированном ДП, либо в двух магнитосвязанных ДП [10]. Поскольку использование модельных подходов продуктивно в теории простейших джозефсоновских структур, представляется целесообразным использовать модельный подход и в теории вихрей в такой структуре как ДП, связанный с волноводом. Постановка такой задачи имеется в работе [11]. В соответствии с этим положением в настоящем сообщении исследуются вихри в ДП, связанном с плоским волноводом. С целью получения аналитических зависимостей используется модель Сакаи–Татено–Педерсена, в которой синус разности фаз моделируется пилообразной функцией вида (2.12), см. ниже. Использование такой модели, с одной стороны, позволяет корректно описывать разрешенные и запрещенные интервалы скоростей свободно движущегося вихря (в теории, не учитывающей диссипативные эффекты и не использующей приближенное представление синуса разности фаз, эти интервалы установлены в [12]), а, с другой стороны, позволяет построить аналитическое решение системы связанных уравнений для разностей фаз в ДП и волноводе и тогда, когда существенны диссипативные эффекты. Последнее представляет интерес для задачи о движении вихря под действием транспортного тока. Замечательным свойством модели Сакаи–Татено–Педерсена является возможность описать роль черенковского эффекта в ДП.

В настоящей работе ставится задача изучения скорости движения джозефсоновского вихря в ДП, к которому подключен магнитосвязанный с ним волновод. Аналитическое рассмотрение такой задачи оказывается возможным благодаря модельному рассмотрению связи ДП и волновода. Показано, что связь с волноводом, имеющим большую скорость Свихарта, позволяет получить джозефсоновский вихрь, движущийся со скоростью, которая может существенно превышать скорость вихря в изолированном ДП. Тем самым открывается возможность реализации быстрых джозефсоновских вихрей.

Результаты модельного подхода излагаются в следующем порядке. Во втором разделе на основе уравнений, описывающих ДП, связанный с волново-

*E-mail: malish@sci.lebedev.ru

дом, дано описание свободного движения элементарного вихря в такой системе. Указана область скоростей, в которой может существовать быстрый джозефсоновский вихрь. Наличие этой области связано с влиянием волновода на ДП. В третьем разделе изучено вынужденное движение этого вихря под действием транспортного тока. Для сравнительно небольших потерь в рамках модели Сакаи–Татено–Педерсена определены разности фаз на ДП и на стенках волновода. Использование модельного описания позволило найти вклады в разности фаз слагаемых, которые изменяются на сравнительно большом масштабе, определяющемся диссипацией. Показано, как проявляется этот масштаб в структуре вихря. Определены вклады диссипации в ДП и в волноводе в связь скорости движения вихря и тока. Показано, что вынужденное движение быстрого джозефсоновского вихря может происходить при сравнительно небольших плотностях транспортного тока. В четвертом разделе излагается материал, описывающий влияние черенковских потерь в ДП, связанном с волноводом, на транспортный ток. Пятый раздел посвящен обсуждению результатов.

2. СВОБОДНЫЙ ВИХРЬ

Рассмотрим слоистую систему типа двойного сэндвича, которая состоит из трех сверхпроводящих слоев S_1, S_2, S_3 и двух несверхпроводящих слоев I и W. Сверхпроводящие слои занимают области $x < -d$, $d < x < d + L$, $x > d + L + 2d_w$ и имеют лондоновские длины соответственно λ_1, λ_2 и λ_3. Вещество в слое I толщиной $2d$, расположенном между слоями S_1 и S_2, имеет диэлектрическую проницаемость ϵ и проводимость σ. Слой W толщиной $2d_w$, разделяющий сверхпроводники S_2 и S_3, имеет диэлектрическую проницаемость ϵ_w и проводимость σ_w. Будем считать, что слой I достаточно тонкий и через него могут туннелировать куперовские пары, создавая джозефсоновский ток, имеющий критическую плотность j_c. Толщину слоя W будем считать настолько большой, что можно пренебречь джозефсоновским током через слой W по сравнению с током смещения и током проводимости. Это позволяет говорить о рассматриваемой системе как о ДП, магнитосвязанном с волноводом.

Пусть φ — разность фаз конденсатных волновых функций сверхпроводников S_1 и S_2 на границах их раздела $x = -d$ и $x = d$ со слоем I, φ_w — разность фаз конденсатных волновых функций сверхпроводников S_2 и S_3 на границах их раздела $x = d + L$ и $x = d + L + 2d_w$ с волноводом W. Считая, что характерные пространственные масштабы изменения φ и φ_w велики по сравнению с лондоновскими длинами, следуя [13, 14], получаем следующую систему уравнений для φ и φ_w (ср. [11, 12]):

$$\omega_j^2 F[\varphi(z,t)] + \frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial t^2} = = V_s^2\frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial z^2} + SV_s^2\frac{\partial^2\varphi_w(z,t)}{\partial z^2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2\varphi_w(z,t)}{\partial t^2} = V_{sw}^2\frac{\partial^2\varphi_w(z,t)}{\partial z^2} + S_w V_{sw}^2\frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial z^2}. \quad (2.2)$$

Здесь

$$V_s^2 \equiv c^2\frac{2d}{\epsilon}\,\frac{\lambda_3 + 2d_w + \lambda_2\mathrm{cth}(L/\lambda_2)}{\Delta} \quad (2.3)$$

и

$$V_{sw}^2 \equiv c^2\frac{2d_w}{\epsilon_w}\,\frac{\lambda_1 + 2d + \lambda_2\mathrm{cth}(L/\lambda_2)}{\Delta} \quad (2.4)$$

— скорости Свихарта в ДП и волноводе,

$$\Delta \equiv \left(\lambda_1 + 2d + \lambda_2\,\mathrm{cth}\,\frac{L}{\lambda_2}\right)\times \times\left(\lambda_3 + 2d_w + \lambda_2\mathrm{cth}\frac{L}{\lambda_2}\right) - \lambda_2^2\mathrm{cosech}^2\frac{L}{\lambda_2} > 0,$$

входящие в правые части (2.1) и (2.2) константы связи ДП и волновода имеют следующий вид:

$$S \equiv \frac{\lambda_2\mathrm{cosech}(L/\lambda_2)}{\lambda_3 + 2d_w + \lambda_2\mathrm{cth}(L/\lambda_2)}, \quad (2.5)$$

$$S_w \equiv \frac{\lambda_2\mathrm{cosech}(L/\lambda_2)}{\lambda_1 + 2d + \lambda_2\,\mathrm{cth}(L/\lambda_2)}, \quad (2.6)$$

ω_j — джозефсоновская частота ДП, $F[\varphi]$ — плотность тока Джозефсона, нормированная на j_c. Подчеркнем, что в выражения для V_s и V_{sw} входит толщина L сверхпроводящего слоя S_2, через который осуществляется взаимодействие ДП и волновода. Это означает, что V_s и V_{sw} определяют скорости Свихарта с учетом такого взаимодействия. В пределе $L \to \infty$ из (2.3) и (2.4) получаем

$$V_s \to v_s \equiv c\sqrt{\frac{1}{\epsilon}\,\frac{2d}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2d}},$$

$$V_{sw} \to v_{sw} \equiv c\sqrt{\frac{1}{\epsilon_w}\,\frac{2d_w}{\lambda_2 + \lambda_3 + 2d_w}}.$$

Величины v_s и v_{sw} представляют собой скорости Свихарта соответственно не взаимодействующих уединенных ДП и волновода.

Для вихревых образований, бегущих с постоянной скоростью v, когда $\varphi(z,t) = \psi(\zeta)$, $\varphi_w(z,t) = \psi_w(\zeta)$, $\zeta \equiv z - vt$, из (2.1) и (2.2) получаем

$$\omega_j^2 F[\psi(\zeta)] - (V_s^2 - v^2)\psi''(\zeta) = SV_s^2\psi_w''(\zeta), \quad (2.7)$$

$$-(V_{sw}^2 - v^2)\psi_w''(\zeta) = S_w V_{sw}^2 \psi''(\zeta). \quad (2.8)$$

Полагая $\psi(-\infty) = \psi_w(-\infty) = 0$, $\psi'(-\infty) = \psi_w'(-\infty) = 0$, из (2.8) находим

$$\psi_w(\zeta) = -S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2}\psi(\zeta). \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.7), получаем следующее уравнение для разности фаз ψ на ДП:

$$\omega_j^2 F[\psi(\zeta)] = \frac{(v_1^2 - v^2)(v_2^2 - v^2)}{V_{sw}^2 - v^2}\psi''(\zeta), \quad (2.10)$$

где скорости v_1 и v_2 определены следующим образом:

$$v_m \equiv \sqrt{\frac{V_s^2+V_{sw}^2}{2}+(-1)^m\sqrt{\frac{(V_s^2-V_{sw}^2)^2}{4}+SS_wV_s^2V_{sw}^2}} > 0, \quad m = 1,2. \quad (2.11)$$

В дальнейшем в основном тексте статьи будем использовать модель Сакаи–Татено–Педерсена [1–3], в которой используется функция $F[\psi]$, имеющая следующий пилообразный вид:

$$F[\psi] = F_{STP}[\psi] = \begin{cases} (2/\pi)\psi, & -\pi/2 < \psi < \pi/2, \\ (2/\pi)(\pi - \psi), & \pi/2 < \psi < 3\pi/2, \\ (2/\pi)(\psi - 2\pi), & 3\pi/2 < \psi < 5\pi/2. \end{cases} \quad (2.12)$$

Согласно (2.12) и уравнениям (2.7) и (2.8), волновые числа малых возмущений разности фаз, которые имеют координатную зависимость вида $\exp(ik\zeta)$, определяются уравнением

$$\pm\frac{2}{\pi}\omega_j^2 + \frac{(v_1^2 - v^2)(v_2^2 - v^2)}{V_{sw}^2 - v^2}k^2 = 0, \quad (2.13)$$

где знак «$+$» отвечает возмущениям ψ вблизи $\psi = 0$ или 2π, а знак «$-$» отвечает возмущениям ψ вблизи $\psi = \pi$. Уравнение (2.13) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\left[\pm\frac{2}{\pi}\omega_j^2 + (V_s^2 - v^2)k^2\right](V_{sw}^2 - v^2) = SS_wV_s^2V_{sw}^2k^2. \quad (2.14)$$

Это уравнение отвечает связи обычной (в случае знака «$+$») и необычной (в случае знака «$-$») волн Свихарта ДП с электромагнитной волной волновода.

В случае знака «$+$» из (2.13) находим $k = \pm ik_j(v)$, а в случае знака «$-$» — $k = \pm k_j(v)$, где

$$k_j(v) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega_j\sqrt{\frac{V_{sw}^2 - v^2}{(v_1^2 - v^2)(v_2^2 - v^2)}}. \quad (2.15)$$

Используя величину $k_j(v)$, запишем уравнение (2.10) для $\psi(\zeta)$ в следующем виде:

$$F_{STP}[\psi(\zeta)] = \frac{2}{\pi}k_j^{-2}(v)\psi''(\zeta). \quad (2.16)$$

Формальное сходство этого уравнения с уравнением, отвечающим изолированному ДП [7], позволяет записать следующее решение уравнения (2.16), описывающее элементарный вихрь (2π-кинк):

$$\psi(\zeta) = \frac{\pi}{2}\exp\left[k_j(v)\zeta + \frac{\pi}{4}\right], \quad \zeta < -\frac{\pi}{4k_j(v)}, \quad (2.17)$$

$$\psi(\zeta) = \pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin[k_j(v)\zeta], \quad -\frac{\pi}{4k_j(v)} < \zeta < \frac{\pi}{4k_j(v)}, \quad (2.18)$$

$$\psi(\zeta) = 2\pi - \frac{\pi}{2}\exp\left[-k_j(v)\zeta + \frac{\pi}{4}\right], \quad \zeta > \frac{\pi}{4k_j(v)}. \quad (2.19)$$

Отвечающая такому вихрю разность фаз ψ_w на стенках волновода находится из (2.9) и имеет следующий вид:

$$\psi_w(\zeta) = -\frac{\pi}{2}\frac{S_wV_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2}\exp\left[k_j(v)\zeta + \frac{\pi}{4}\right], \quad \zeta < -\frac{\pi}{4k_j(v)},$$

$$\psi_w(\zeta) = -\pi\frac{S_wV_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{S_wV_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2}\sin[k_j(v)\zeta], \quad -\frac{\pi}{4k_j(v)} < \zeta < \frac{\pi}{4k_j(v)},$$

$$\psi_w(\zeta) = -2\pi\frac{S_wV_{sw}^2}{V_{sw}^2-v^2} + \frac{\pi}{2}\frac{S_wV_{sw}^2}{V_{sw}^2-v^2}\exp\left[-k_j(v)\zeta + \frac{\pi}{4}\right], \quad \zeta > \frac{\pi}{4k_j(v)}.$$

Для того чтобы решение (2.17)–(2.19) описывало уединенный вихрь, т. е. для того чтобы выполнялись условия $\psi(-\infty) = 0$, $\psi(\infty) = 2\pi$, необходимо, чтобы величина $k_j(v)$ (2.15) была действительной. Это требование приводит к тому, что скорость вихря может принимать только значения, входящие в две разрешенные зоны:

$$0 < v < v_1, \tag{2.20}$$

$$V_{sw} < v < v_2. \tag{2.21}$$

Напротив, в интервале (v_1, V_{sw}) и при $v > v_2$ величина $k_j(v)$ чисто мнимая, что не отвечает движению уединенного вихря. Напомним, что в изолированном ДП вихрь может двигаться с любыми скоростями, меньшими скорости Свихарта v_s. Расщепление области допустимых скоростей движения вихря и появление запрещенной зоны $[v_1, V_{sw}]$ связано с влиянием волновода на ДП.

Выражения для скоростей v_1 и v_2, которые определяют правые границы разрешенных областей, выглядят особенно просто в случае слабого взаимодействия ДП и волновода, когда константы связи S и S_w малы. Когда $V_{sw} < V_s$, имеем

$$v_1 \approx \left(1 - \frac{1}{2} S S_w \frac{V_s^2}{V_s^2 - V_{sw}^2}\right) V_{sw}, \tag{2.22}$$

$$v_2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} S S_w \frac{V_{sw}^2}{V_s^2 - V_{sw}^2}\right) V_s. \tag{2.23}$$

В частности, при $V_{sw} \ll V_s$ отсюда следует, что разрешенная область (2.20) простирается от нуля и почти до скорости Свихарта волновода, затем идет сравнительно узкая запрещенная зона $(V_{sw} - v_1 \approx S S_w V_{sw}/2)$, которая сменяется широкой второй разрешенной областью (2.21), простирающейся от скорости Свихарта волновода до скорости немного большей скорости Свихарта ДП. Иными словами, в том случае, когда свихартовская скорость волновода мала по сравнению со свихартовской скоростью ДП, влияние волновода приводит к малому увеличению предельной скорости движения вихря по сравнению с V_s и к появлению узкой (по сравнению как с V_s, так и с V_{sw}) запрещенной зоны скоростей.

В том случае, когда $V_{sw} = V_s$ и связь ДП и волновода слабая, имеем

$$v_1 \approx \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{S S_w}\right) V_s,$$

$$v_2 \approx \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{S S_w}\right) V_s.$$

Эти формулы показывают, что ширина первой разрешенной области близка к V_s, а запрещенная зона и вторая разрешенная область сравнительно узкие: $V_{sw} - v_1 \approx v_2 - V_{sw} \approx \sqrt{S S_w} V_s/2$. Это означает, что и в этом случае влияние волновода привело к тому, что, во-первых, предельная скорость движения вихря стала несколько больше V_s и, во-вторых, появилась узкая по сравнению с V_s запрещенная зона скоростей.

Наконец, когда $V_{sw} > V_s$ и связь ДП и волновода по-прежнему слаба, из (2.11) находим

$$v_1 \approx \left(1 - \frac{1}{2} S S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - V_s^2}\right) V_s, \tag{2.24}$$

$$v_2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} S S_w \frac{V_s^2}{V_{sw}^2 - V_s^2}\right) V_{sw}. \tag{2.25}$$

В частности, для наиболее интересного случая, когда $V_{sw} \gg V_s$, первая разрешенная зона простирается от нуля и почти до скорости Свихарта ДП, затем идет сравнительно широкая запрещенная зона $(1 - S S_w/2) V_s \le v \le V_{sw}$, которая сменяется второй разрешенной областью

$$V_{sw} < v < v_2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} S S_w \frac{V_s^2}{V_{sw}^2}\right) V_{sw}. \tag{2.26}$$

Ширина этой области мала как по сравнению с V_{sw}, так и по сравнению с V_s. Поскольку эта область расположена вблизи скорости Свихарта волновода, которая предполагалась большой по сравнению со скоростью Свихарта ДП, ее можно называть областью существования быстрого джозефсоновского вихря.

Как уже отмечалось выше, в изолированном ДП вихрь может двигаться со скоростями, меньшими скорости Свихарта v_s ДП. Когда ДП подключен к волноводу, возникает новое явление — быстрый джозефсоновский вихрь. Этот вихрь движется со скоростью, значительно превышающей скорость Свихарта ДП. Такое увеличение скорости движения вихря привлекательно, потому что скорость Свихарта волновода может быть близкой к скорости света $c/\sqrt{\varepsilon_w}$ в веществе, заполняющем волновод. Тем самым формула (2.26) указывает на следующий интересный факт: джозефсоновский вихрь может двигаться с весьма большими скоростями, близкими к скорости света в диэлектрике, которым заполнен волновод.

Итак, в том случае, когда свихартовская скорость волновода велика по сравнению со свихартовской скоростью ДП, влияние волновода приводит к тому, что, во-первых, правая граница первой разрешенной области немного уменьшается по сравнению с V_s, во-вторых, запрещенная зона, которая простирается почти от V_s до V_{sw}, шире обеих разрешенных областей, в-третьих, возникает область быстрого вихря, движущегося со скоростями, близкими к скорости Свихарта волновода.

Подчеркнем, что расщепление области скоростей, в которых может существовать джозефсоновский 2π-кинк, и появление запрещенной для движения области скоростей не связаны с выбором нелинейности Сакаи–Татено–Педерсена, а являются следствием влияния волновода на ДП и возникают также, например, в обычно используемой модели с синусной нелинейностью (см. Приложение 1).

3. ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИХРЯ

В этом разделе мы рассмотрим вынужденное движение вихря под действием протекающего через ДП постоянного транспортного тока плотностью j. Как и в предыдущем разделе, будем обсуждать равномерно движущийся вихрь, когда ускоряющее влияние транспортного тока компенсируется диссипативными потерями.

Характеризуя потери в ДП и в волноводе соответственно величинами $\beta \equiv 4\pi\sigma/\epsilon$ и $\beta_w \equiv 4\pi\sigma_w/\epsilon_w$ вместо (2.1) и (2.2) имеем (ср. [11])

$$\omega_j^2 F[\varphi(z,t)] + \frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial t^2} + \omega_j^2\frac{j}{j_c} + \beta\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t} = = V_s^2\frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial z^2} + SV_s^2\frac{\partial^2\varphi_w(z,t)}{\partial z^2}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2\varphi_w(z,t)}{\partial t^2} + \beta_w\frac{\partial\varphi_w(z,t)}{\partial t} = = V_{sw}^2\frac{\partial^2\varphi_w(z,t)}{\partial z^2} + S_wV_{sw}^2\frac{\partial^2\varphi(z,t)}{\partial z^2}. \quad (3.2)$$

В случае стационарного движения с постоянной скоростью v из (3.1) и (3.2) находим

$$\omega_j^2 F[\psi(\zeta)] - (V_s^2 - v^2)\psi''(\zeta) + \omega_j^2\frac{j}{j_c} - \beta v\psi'(\zeta) = = SV_s^2 f'(\zeta), \quad (3.3)$$

$$-(V_{sw}^2 - v^2)f'(\zeta) - \beta_w v f(\zeta) = S_wV_{sw}^2\psi''(\zeta), \quad (3.4)$$

где $f(\zeta) \equiv \psi_w'(\zeta)$.

В том случае, когда $F[\psi]$ отвечает зависимости (2.12) модели Сакаи–Татено–Педерсена, волновые векторы малых возмущений ψ и f находятся из уравнения

$$\left[\pm\frac{2}{\pi}\omega_j^2 + (V_s^2 - v^2)k^2 - i\beta vk\right] \times \times\left[(V_{sw}^2 - v^2)k - i\beta_w v\right] = SS_wV_s^2V_{sw}^2k^3, \quad (3.5)$$

в котором смысл знаков «+» и «−» такой же, как и в уравнениях (2.13) и (2.14). В отличие от бездиссипативного случая, уравнение (3.5) имеет 3 решения. Запишем эти решения в предположении малой диссипации.

Тогда, когда в левой части уравнения (3.5) стоит знак «+», два корня $k = \pm ik_j(v) + i\alpha k_j(v)$ этого уравнения, где

$$\alpha \equiv \frac{\pi}{4}\frac{vk_j(v)\beta(v)}{\omega_j^2} \ll 1, \quad (3.6)$$

$$\beta(v) \equiv \beta + SS_w\frac{V_s^2V_{sw}^2}{(V_{sw}^2 - v^2)^2}\beta_w, \quad (3.7)$$

отличаются от корней $k = \pm ik_j(v)$ бездиссипативного уравнения (2.14) малой диссипативной частью $i\alpha k_j(v)$. Третий корень уравнения (3.5) в случае знака «+» в левой части, связанный с наличием диссипации, равен $k = i(1-\alpha_w)k_w$, где

$$k_w \equiv \frac{v\beta_w}{V_{sw}^2 - v^2}, \quad (3.8)$$

$$\alpha_w \equiv \frac{\pi}{2}SS_w\frac{V_s^2V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2}\frac{k_w^2}{\omega_j^2} \ll 1. \quad (3.9)$$

В том случае, когда в левой части уравнения (3.5) стоит знак «−», оно в пределе малых потерь имеет следующие решения: $k = \pm k_j(v) + i\alpha k_j(v)$, $i(1+\alpha_w)k_w$.

Условия (3.6) и (3.9) малости величин α и α_w отражают наше предположение о малости диссипации.

Запишем решение системы уравнений (3.3) и (3.4), описывающее джозефсоновский 2π-кинк и сопутствующее ему поле в волноводе в первой области (2.20) допустимых скоростей, когда $k_w > 0$. Примем, что $\psi(\zeta)$ принимает значения $\pi/2$ и $3\pi/2$ соответственно в точках $\zeta = -\zeta_0$ и $\zeta = \zeta_0$.

Решение системы (3.3), (3.4) будем искать в виде суперпозиции констант и слагаемых вида $\exp(ik\zeta)$, где k — решения уравнения (3.5). Тогда, требуя, чтобы решение не содержало экспоненциально нарастающих при $|\zeta| \to \infty$ слагаемых, имеем

$$\psi(\zeta) = -\frac{\pi}{2}\frac{j}{j_c} + + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{j}{j_c}\right)\exp\left[(1-\alpha)k_j(v)\,(\zeta+\zeta_0)\right], \quad (3.10)$$

$$\psi_w'(\zeta) = A_w\exp\left[(1-\alpha)k_j(v)\,(\zeta+\zeta_0)\right] \quad (3.11)$$

в хвосте вихря ($\zeta < -\zeta_0$), где $-\pi j/2j_c < \psi < \pi/2$;

$$\psi(\zeta) = \pi + \frac{\pi}{2}\frac{j}{j_c} + \{B\sin[k_j(v)\zeta] + C\cos[k_j(v)\zeta]\} \times \times\exp[-\alpha k_j(v)\zeta] + D\exp[-(1+\alpha_w)k_w\zeta], \quad (3.12)$$

$$\psi'_w(\zeta) = \{B_w \sin[k_j(v)\zeta] + C_w \cos[k_j(v)\zeta]\} \times \\ \times \exp[-\alpha k_j(v)\zeta] + D_w \exp[-(1+\alpha_w)k_w\zeta] \quad (3.13)$$

в срединной части вихря ($-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$), где $-\pi/2 < \psi < 3\pi/2$;

$$\psi(\zeta) = 2\pi - \frac{\pi}{2}\frac{j}{j_c} - \left(1 - \frac{j}{j_c}\right) \times \\ \times E \exp[-(1+\alpha)k_j(v)(\zeta - \zeta_0)] + \left(1 - \frac{j}{j_c}\right) \times \\ \times \left(E - \frac{\pi}{2}\right) \exp[-(1-\alpha_w)k_w(\zeta - \zeta_0)], \quad (3.14)$$

$$\psi'_w(\zeta) = E_w \exp[-(1+\alpha)k_j(v)(\zeta - \zeta_0)] + \\ + F_w \exp[-(1-\alpha_w)k_w(\zeta - \zeta_0)] \quad (3.15)$$

в голове вихря ($\zeta > \zeta_0$), где $3\pi/2 < \psi < 2\pi - (\pi j/2j_c)$.

При написании формул (3.10) и (3.14) учтено, что $\psi(-\zeta_0 - 0) = \pi/2$, $\psi(\zeta_0 + 0) = 3\pi/2$.

Записывая условия непрерывности функций $\psi(\zeta)$, $\psi'(\zeta)$ и $\psi'_w(\zeta)$ при $\zeta = \pm\zeta_0$, а также соотношения между величинами B, C, D, E, A_w, B_w, C_w, D_w, E_w, F_w, возникающие при подстановке формул (3.10)–(3.15) в любое из уравнений системы (3.3), (3.4), получаем систему двенадцати уравнений, из которой можно определить размер срединной области $2\zeta_0$, связь плотности тока j со скоростью движения вихревой структуры и коэффициенты перед экспонентами и тригонометрическими функциями, входящими в (3.10)–(3.15). Из этой системы уравнений в линейном приближении по диссипации находим

$$\frac{j(v)}{j_c} = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\frac{v k_j(v)\beta(v)}{\omega_j^2} = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\frac{v}{\omega_j}\sqrt{\frac{V_{sw}^2 - v^2}{(v_1^2 - v^2)(v_2^2 - v^2)}} \times \\ \times \left[\beta + SS_w \frac{V_s^2 V_{sw}^2}{(V_{sw}^2 - v^2)^2}\beta_w\right], \quad (3.16)$$

$$\zeta_0 = \frac{\pi}{4k_j(v)} + O\left(\beta^2, \beta_w^2, \beta\beta_w\right). \quad (3.17)$$

Также в предположении малости величин α и α_w имеем для коэффициентов, определяющих функции $\psi(\zeta)$ и $\psi'_w(\zeta)$, выражения, приведенные в Приложении 2.

Подставляя (3.17) и соответствующие выражения Приложения 2 в (3.10)–(3.15), получаем для джозефсоновского 2π-кинка и сопутствующего ему поля в волноводе в области (2.20) допустимых скоростей в низшем порядке по малой диссипации

$$\psi(\zeta) \approx -\frac{\pi}{2}\frac{j}{j_c} + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{j}{j_c}\right) \times \\ \times \exp\left\{(1-\alpha)k_j(v)\left[\zeta + \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\}, \quad (3.18)$$

$$\psi'_w(\zeta) \approx -\frac{\pi}{2}S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2}k_j(v)\left[1 + \frac{\pi\alpha}{4} - \frac{k_w}{k_j(v)}\right] \times \\ \times \exp\left\{(1-\alpha)k_j(v)\left[\zeta + \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\} \quad (3.19)$$

в хвосте вихря ($\zeta < -\pi/4k_j(v)$), где $-\pi j/2j_c < \psi < \pi/2$;

$$\psi(\zeta) \approx \pi + \frac{\pi}{2}\frac{j}{j_c} + \\ + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\{\sin[k_j(v)\zeta] - \alpha\cos[k_j(v)\zeta]\}\exp[-\alpha k_j(v)\zeta] + \\ + \frac{\pi^2}{2}\frac{SS_w V_s^2 V_{sw}^2}{\omega_j^2(V_{sw}^2 - v^2)}k_w^2 \exp[-(1+\alpha_w)k_w\zeta], \quad (3.20)$$

$$\psi'_w(\zeta) \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}}S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2} \times \\ \times \{k_w \sin[k_j(v)\zeta] - k_j(v)\cos[k_j(v)\zeta]\}\exp[-\alpha k_j(v)\zeta] + \\ + \pi S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2}k_w \exp[-(1+\alpha_w)k_w\zeta] \quad (3.21)$$

в срединной части вихря ($-\pi/4k_j(v) < \zeta < \pi/4k_j(v)$), где $-\pi/2 < \psi < 3\pi/2$;

$$\psi(\zeta) \approx 2\pi - \frac{\pi}{2}\frac{j}{j_c} - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{j}{j_c}\right) \times \\ \times \exp\left\{-(1+\alpha)k_j(v)\left[\zeta - \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\} - \\ - \pi^2 SS_w \frac{V_s^2 V_{sw}^2}{\omega_j^2(V_{sw}^2 - v^2)}k_w^2 \times \\ \times \exp\left\{-(1-\alpha_w)k_w\left[\zeta - \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\}, \quad (3.22)$$

$$\psi'_w(\zeta) \approx -\frac{\pi}{2}S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2}k_j(v)\left[1 - \frac{\pi\alpha}{4} + \frac{k_w}{k_j(v)}\right] \times \\ \times \exp\left\{-(1+\alpha)k_j(v)\left[\zeta - \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\} + \\ + 2\pi S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2}k_w \times \\ \times \exp\left\{-(1-\alpha_w)k_w\left[\zeta - \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\} \quad (3.23)$$

в голове вихря ($\zeta > \pi/4k_j(v)$), где $3\pi/2 < \psi < 2\pi - (\pi j/2j_c)$.

Во второй области (2.21) допустимых скоростей движения вихря, когда $k_w < 0$, решение системы уравнений (3.3) и (3.4) ищется в аналогичном равенствам (3.10)–(3.15) виде с тем отличием, что вклады от обусловленных диссипацией третьих корней $i(1 \pm \alpha_w)k_w$ уравнений (3.5) возникают не в середине и голове вихря, а в середине и хвостовой части вихря. Это решение имеет вид аналогичный формулам (3.18)–(3.23) (см. Приложение 3). При этом связь плотности транспортного тока со скоростью движения вихря в линейном по β и β_w приближении по-прежнему дается выражением (3.16).

В заключение этого раздела заметим, что для получения соотношения (3.16) можно воспользоваться способом, связанным с приближенным решением уравнений (3.3) и (3.4) (см. Приложение 4). Этот способ позволяет записать отличающуюся от (3.16) лишь численным коэффициентом зависимость $j(v)$ и в модели с синусной нелинейностью (см. Приложение 4)

$$\frac{j(v)}{j_c} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\,\frac{v k_j(v)\beta(v)}{\omega_j^2}. \tag{3.24}$$

4. ВЛИЯНИЕ ЧЕРЕНКОВСКИХ ПОТЕРЬ НА ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИХРЯ

Замечательным свойством модельного подхода Сакаи–Татено–Педерсена является то, что он позволяет рассмотреть влияние черенковских потерь на движение вихря. Результаты соответствующего рассмотрения излагаются в этом разделе применительно к условиям, в которых $V_s \ll V_{sw}$ и существует быстрый вихрь. При $V_s \ll V_{sw}$ имеются два интервала скоростей, в каждом из которых существуют движущиеся вихри.

Рассмотрим сначала область малых скоростей, когда можно говорить о движении сравнительно медленного вихря со скоростью $v < v_1 \approx (1 - SS_w)^{1/2}\, V_s$. Для описания черенковских потерь медленного вихря достаточно учесть пространственную дисперсию в ДП. Ограничимся пределом сравнительно слабой пространственной дисперсии ДП, что возможно при скоростях вихря, удовлетворяющих условию

$$1 - (v/v_1)^2 \ll 1. \tag{4.1}$$

Кроме того, рассматривая черенковские потери, будем полностью пренебрегать диссипацией в ДП и в волноводе. Такой подход оправдан в условиях малой диссипации и небольших черенковских потерь, когда их влияние на движение вихря можно учитывать аддитивно. В этих условиях вынужденное движение медленного вихря описывается уравнениями (3.1) и (3.2), в которых $\beta = \beta_w = 0$ и в правую часть формулы (3.1) добавлено учитывающее слабую пространственную дисперсию ДП малое слагаемое вида

$$\frac{1}{2}\omega_j^2\lambda_j^2\lambda_J^2\frac{\partial^4\varphi(z,t)}{\partial z^4}, \tag{4.2}$$

где $\lambda_j \equiv v_s/\omega_j$, $\lambda_J^2 \equiv \left(\lambda_1^3 + \lambda_2^3\right)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2d)^{-1}$. При написании малого слагаемого (4.2) пренебрежено взаимодействием ДП и волновода. Принимая во внимание указанные изменения уравнений (3.1) и (3.2), для описания вынужденного движения медленного вихря используем следующее уравнение:

$$F\left[\psi(\zeta)\right] = \frac{2}{\pi}k_j^{-2}(v)\psi''(\zeta) + \frac{1}{2}\lambda_j^2\lambda_J^2\psi^{IV}(\zeta) - \frac{j}{j_c}, \tag{4.3}$$

где $k_j^2(v) \approx (2/\pi)\,\omega_j^2\left(v_1^2 - v^2\right)^{-1}$. Уравнение (4.3) формально отличается от изученного в работе [7] заменой коэффициентов λ^2 на λ_J^2 и $\left(v_s^2 - v^2\right)\omega_j^{-2}$ на $(2/\pi)\,k_j^{-2}(v)$. Это позволяет воспользоваться математическим результатом работы [7]. В частности, следуя [7], для скоростей медленного вихря, удовлетворяющих условию

$$v_1^2 \gg v_1^2 - v^2 \gg \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\lambda_J}{\lambda_j}v_s^2 \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\lambda_J}{\lambda_j}v_1^2, \tag{4.4}$$

имеем следующее соотношение, связывающее ток и скорость вихря:

$$\frac{j}{j_c} = \frac{\varepsilon^4}{8}\left(\sin\frac{\pi}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2, \tag{4.5}$$

где $\varepsilon \equiv \sqrt{\pi}\lambda_j\lambda_J k_j^2(v) \ll 1$. Соотношение (4.5) дает осцилляционную связь тока со скоростью вихря, которая устанавливается в условиях баланса воздействия тока и черенковских потерь из-за излучения волн вихрем. При этом минимумы функции (4.5) отвечают дискретному набору собственных скоростей v_n свободного движения джозефсоновского вихря, обусловленному внутренней структурой вихря, создаваемой необычными волнами Свихарта, черенковски захваченными вихрем (см. [7]). В случае медленного вихря дискретный набор скоростей v_n имеет вид

$$v_n \approx \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\lambda_J}{\lambda_j}n\right)v_1, \tag{4.6}$$

где, в соответствии с неравенствами (4.4), натуральные числа n лежат в интервале $1 \ll n \ll \lambda_j/\lambda_J$.

Перейдем к рассмотрению области скоростей быстрого вихря, когда $V_{sw} < v < v_2 \approx V_{sw} + (SS_w/2)\left(V_s^2/V_{sw}\right)$. Свойства быстрого вихря в основном определяются волноводом. Это означает, что при рассмотрении черенковских потерь быстрого вихря достаточно учесть лишь пространственную дисперсию волновода. Как и в случае медленного вихря, будем пренебрегать малой диссипацией в ДП и в волноводе. Тогда для описания черенковских потерь быстрого вихря имеем уравнения (3.1) и (3.2), в которых $\beta = \beta_w = 0$ и в правой части уравнения (3.2) добавлено слагаемое

$$\frac{1}{2}v_{sw}^2\lambda_w^2\frac{\partial^4\varphi_w(z,t)}{\partial z^4}, \tag{4.7}$$

где $\lambda_w^2 \equiv \left(\lambda_2^3+\lambda_3^3\right)\left(\lambda_2+\lambda_3+2d_w\right)^{-1}$. Малое слагаемое (4.7) не учитывает взаимодействия ДП и волновода, учет которого в (4.7) не является необходимым. Когда скорость быстрого вихря удовлетворяет условию

$$v_2^2 - v^2 \ll SS_w V_s^2, \tag{4.8}$$

модифицированное уравнение (3.2) позволяет выразить ψ_w через ψ и записать следующее уравнение для разности фаз быстрого вихря:

$$F\left[\psi(\zeta)\right] = \frac{2}{\pi}k_j^{-2}(v)\psi''(\zeta)+\frac{1}{2}\lambda_j^2\lambda_{eff}^2\psi^{IV}(\zeta)-\frac{j}{j_c}, \tag{4.9}$$

где эффективная длина λ_{eff} зависит от скорости вихря:

$$\lambda_{eff} \equiv \lambda_w\frac{\sqrt{SS_w}}{v^2-V_{sw}^2}v_{sw}V_{sw}\frac{V_s}{\lambda_j\omega_j} \approx \approx \sqrt{SS_w}\frac{V_{sw}^2}{v^2-V_{sw}^2}\lambda_w. \tag{4.10}$$

Поскольку $v_2^2 \approx V_{sw}^2 + SS_wV_s^2$, из неравенства (4.8) следует, что $v^2 - v_{sw}^2 \approx SS_wV_s^2$. Для таких скоростей вихря эффективная длина λ_{eff} остается конечной. Однако благодаря условию $V_{sw} \gg V_s$ величина $\lambda_{eff} \approx \lambda_w V_{sw}^2/V_s^2\sqrt{SS_w}$ может значительно превышать λ_J, что и позволяет не учитывать дисперсию ДП при рассмотрении черенковских потерь быстрого вихря. Формальное сходство уравнений (4.3) и (4.9) позволяет утверждать, что и для быстрого вихря связь тока со скоростью описывается соотношением (4.5), в которое теперь входит новый малый параметр

$$\varepsilon \equiv \sqrt{\pi}\lambda_j\lambda_{eff}k_j^2(v) = = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{v_{sw}}{V_{sw}}\frac{\lambda_w}{\lambda_j}\sqrt{SS_w}\frac{v_sV_s}{v_2^2-v^2} \ll 1. \tag{4.11}$$

Принимая $v_{sw} \approx V_{sw}$ и $v_s \approx V_s$, видим, что условия (4.8) и (4.11) совместны, если

$$SS_w \gg \frac{4}{\pi}\left(\frac{\lambda_w}{\lambda_j}\right)^2. \tag{4.12}$$

В случае быстрого вихря минимумы осциллирующей функции (4.5) достигаются при скоростях, близких к собственным скоростям свободно движущихся быстрых вихрей, которые приближенно равны

$$v_n \approx \left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{SS_w}\frac{\lambda_w}{\lambda_j}\frac{V_s^2}{v_2^2}n\right)v_2. \tag{4.13}$$

При этом в соответствии с неравенствами (4.8) и (4.11) диапазон изменения числа n ограничен: $1 \ll n \ll \sqrt{SS_w}\,(\lambda_j/\lambda_w)$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Заметим, что формула (3.16) отличается от зависимости $j(v)$ в случае изолированного ДП [7]

$$\frac{j(v)}{j_c} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{v}{\sqrt{v_s^2-v^2}}\frac{\beta}{\omega_j}$$

видом зависимости от скорости слагаемого, связанного с потерями в ДП, и наличием слагаемого, определяющегося потерями в волноводе. Подчеркнем, что слагаемые в (3.16), содержащие величины β и β_w, характеризующие диссипацию соответственно в ДП и волноводе, имеют разные зависимости от скорости.

Для наиболее интересного случая быстрого джозефсоновского вихря, скорость которого определяется формулой (2.26), зависимость (3.16) можно приближенно представить в виде

$$\frac{j(v)}{j_c} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\omega_j}\times \times\left[\beta+\frac{1}{4}SS_w\frac{V_s^2}{(v-V_{sw})^2}\beta_w\right]\sqrt{\frac{v-V_{sw}}{v_2-v}},$$

$$V_{sw} < v < \left(1+\frac{1}{2}SS_w\frac{V_s^2}{V_{sw}^2}\right)V_{sw}.$$

При выполнении условия

$$\beta < \frac{V_{sw}^2}{SS_wV_s^2}\beta_w$$

диссипация определяется в основном потерями в волноводе. В этом случае имеем

$$\frac{j(v)}{j_c} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\beta_w}{\omega_j}SS_w\frac{V_s^2}{\sqrt{(v_2-v)(v-V_{sw})^3}}.$$

Стоящая в правой части функция при $v = (V_{sw}+3v_2)/4 \approx \left[1+(3/8)SS_w\left(V_s^2/V_{sw}^2\right)\right]V_{sw}$ принимает минимальное значение, равное

$$\frac{j_{min}}{j_c} \approx \frac{4\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{SS_w}\frac{V_{sw}^2}{V_s^2}\frac{\beta_w}{\omega_j}.$$

Таким образом, при значениях транспортного тока, превышающих j_{min}, может реализовываться движение быстрого джозефсоновского вихря. Это означает, что вынужденное движение быстрого вихря, который возник благодаря связи ДП с волноводом, не требует больших значений тока.

Выражение для $\psi'_w(\zeta)$ и те слагаемые в $\psi(\zeta)$, которые не содержат малую величину k_w в показателях экспонент, записаны в первом порядке по β и β_w. Коэффициенты перед $\exp[(1 \pm \alpha_w)k_w\zeta]$ в выражениях для $\psi(\zeta)$ пропорциональны k_w^2. Учет таких малых вкладов в $\psi(\zeta)$ не является превышением точности, так как позволяет записать правильные выражения для $\psi'_w(\zeta)$. В выражении (3.22) последнее малое (пропорциональное k_w^2) диссипативное слагаемое локализовано на масштабе порядка k_w^{-1}, который значительно превышает масштаб порядка $k_j^{-1}(v)$, на котором локализовано третье слагаемое. Подчеркнем, что, несмотря на то что слагаемые в разностях фаз, отвечающие малым третьим корням уравнений (3.5), локализованы в широкой области пространства, они приводят к малым поправкам к закону (3.16). Для того чтобы увидеть это, запишем энергию системы (на единицу длины оси y):

$$H = \frac{\phi_0^2}{32\pi^3 c^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left\{ \frac{\epsilon\omega_j^2}{d} \int\limits_0^{\psi(\zeta)} d\psi\, F_{STP}[\psi] + \right. \\ + \frac{\epsilon\left(v^2 + V_s^2\right)}{2d}\left[\psi'(\zeta)\right]^2 + \frac{\epsilon_w\left(v^2 + V_{sw}^2\right)}{2d_w}\left[\psi'_w(\zeta)\right]^2 + \\ \left. + \frac{1}{2}\left(S\frac{\epsilon V_s^2}{d} + S_w\frac{\epsilon_w V_{sw}^2}{d_w}\right)\psi(\zeta)\psi'_w(\zeta) \right\}.$$

Поскольку вихрь движется равномерно, его энергия сохраняется. Поэтому, вычисляя с использованием формул (3.3) и (3.4) производную dH/dt и приравнивая ее нулю, получаем следующее соотношение:

$$\frac{\phi_0 j(v) v}{c} = \frac{\phi_0^2 v^2}{32\pi^3 c^2} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \left\{ \frac{\epsilon}{d}\beta\left[\psi'(\zeta)\right]^2 + \frac{\epsilon_w}{d_w}\beta_w\left[\psi'_w(\zeta)\right]^2 \right\}. \quad (5.1)$$

Левая часть уравнения (5.1) представляет собой мощность силы Лоренца, связанной с воздействием транспортного тока на вихрь. В правой части уравнения (5.1) стоит мощность сил трения, связанных с объемными омическими потерями в ДП и в волноводе. Подставляя в правую часть (5.1) те слагаемые из $\psi(\zeta)$ и $\psi'_w(\zeta)$, которые содержат $\exp[(1 \pm \alpha_w)k_w\zeta]$, получим

$$\frac{\phi_0^2}{16\pi c^2}\,\frac{\epsilon_w}{d_w}\,\frac{S_w^2 V_{sw}^4}{(V_{sw}^2 - v^2)^3} v^3 \beta_w^2.$$

Это выражение показывает, что потери энергии вихря в единицу времени, связанные с возбуждением крупномасштабных возмущений, масштаб которых порядка $k_w^{-1} \propto \beta_w^{-1}$ определяется диссипацией, пропорциональны β_w^2. Иными словами, в линейном приближении по диссипации локализованные на больших масштабах диссипативные вклады в разности фаз не существенны для зависимости $j(v)$. Возможность сделать такой вывод является одним из достоинств нашего рассмотрения, появившегося благодаря использованию модельного описания.

Если не интересоваться влиянием диссипации на зависимость разностей фаз от координаты, то соотношение (3.16) может быть получено путем подстановки в (5.1) бездиссипативных выражений (2.9) и (2.17)–(2.19). Таким же способом может быть получена зависимость $j(v)$ в линейном приближении и в случае синусной нелинейности: подставляя (2.9) и (П.1.2) в выражение (5.1), которое не зависит от вида нелинейности $F[\psi]$, получаем выражение (3.24).

Наконец, в модели Сакаи–Татено–Педерсена установлено влияние черенковского эффекта на транспортный ток, которое проявляется как при скоростях вихря, меньших скорости Свихарта ДП, так и при скоростях быстрого вихря. И в том, и в другом случае проявляется осциллирующая зависимость $j(v)$, ранее установленная для простого случая одиночного ДП. Минимумы $j(v)$ отвечают значениям скорости свободного движения как медленного (ср. [7]), так и быстрого джозефсоновского вихря. В условиях малой диссипации и небольших черенковских потерь осциллирующая часть $j(v)$ аддитивно добавляется к монотонной части $j(v)$, связанной с диссипацией в ДП и в волноводе.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, сформулирована теория влияния магнитосвязанного волновода на вихрь джозефсоновского перехода. Установлены свойства быстрого джозефсоновского вихря, скорость движения которого существенно превышает скорость Свихарта ДП.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ по поддержке молодых российских ученых (МК-1809.2003.02) и ведущих научных школ РФ (НШ-1385.2003.2), а также в рамках государственного контракта с Минпромнауки РФ N40.012.11.1357.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Материал разд. 2 может быть изложен и для случая стандартной синусной нелинейности, когда плотность тока Джозефсона зависит от φ по закону $j_c \sin\varphi(z,t)$ и вместо уравнения (2.16) имеем следующее уравнение:

$$\sin\psi(\zeta) = \frac{2}{\pi} k_j^{-2}(v)\psi''(\zeta). \qquad (\Pi.1.1)$$

Это уравнение отличается от общеизвестного уравнения синус-Гордон зависимостью коэффициента перед второй производной от скорости. Решение (П.1.1), отвечающее 2π-кинку, имеет вид

$$\psi(\zeta) = 4\mathrm{arctg}\left\{\exp\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} k_j(v)\zeta\right]\right\}. \qquad (\Pi.1.2)$$

Для того чтобы решение (П.1.2) описывало вихрь, необходима действительность величины $k_j(v)$, что эквивалентно тому, что скорость вихря может принимать значения только внутри двух разрешенных областей (2.20) и (2.21). Последнее означает, что и в модели с синусной нелинейностью область разрешенных скоростей движения 2π-кинка в ДП, связанном с волноводом, расщепляется на две области, отделенные запрещенной зоной. Таким образом, возникновение запрещенной зоны скоростей движения вихря не связано с выбранной нами в основном тексте нелинейностью Сакаи–Татено–Педерсена, а определяется связью собственной электромагнитной моды волновода и свихартовской волны ДП.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Коэффициенты, входящие в выражения (3.11)–(3.15) для разностей фаз, имеют следующий вид:

$$A_w \approx -\frac{\pi}{2} S_w(v)\left[1 + \frac{\pi\alpha}{4} - \frac{k_w}{k_j(v)}\right] k_j(v),$$

$$B = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + O(\beta^2, \beta_w^2, \beta\beta_w),$$

$$C \approx -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\alpha, \quad D \approx \frac{\pi^2}{2}\frac{SS_w(v)V_s^2}{\omega_j^2} k_w^2,$$

$$B_w \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} S_w(v) k_w,$$

$$C_w = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} S_w(v) k_j(v) + O(\beta^2, \beta_w^2, \beta\beta_w),$$

$$D_w \approx \pi S_w(v) k_w, \quad E \approx \frac{\pi}{2} - \pi^2 \frac{SS_w(v)V_s^2}{\omega_j^2} k_w^2,$$

$$E_w \approx -\frac{\pi}{2} S_w(v) k_j(v)\left[1 - \frac{\pi\alpha}{4} + \frac{k_w}{k_j(v)}\right],$$

$$F_w \approx 2\pi S_w(v) k_w,$$

где $S_w(v) \equiv S_w V_{sw}^2 / \left(V_{sw}^2 - v^2\right)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

При малой диссипации решение уравнений (3.3) и (3.4), отвечающее движению элементарного вихря в ДП со скоростями $V_{sw} < v < v_2$, имеет вид

$$\psi(\zeta) \approx -\frac{\pi}{2}\frac{j}{j_c} + \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{j}{j_c}\right) \times \\ \times \exp\left\{(1-\alpha)k_j(v)\left[\zeta + \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\} + \\ + \pi^2 SS_w \frac{V_s^2 V_{sw}^2}{\omega_j^2 (V_{sw}^2 - v^2)} k_w^2 \times \\ \times \exp\left\{-(1-\alpha_w)k_w\left[\zeta + \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\},$$

$$\psi_w'(\zeta) \approx -\frac{\pi}{2} S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2} k_j(v)\left[1 + \frac{\pi\alpha}{4} - \frac{k_w}{k_j(v)}\right] \times \\ \times \exp\left\{(1-\alpha)k_j(v)\left[\zeta + \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\} - \\ -2\pi S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2} k_w \exp\left\{-(1-\alpha_w)k_w\left[\zeta + \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\}$$

в хвосте вихря ($\zeta < -\pi/4k_j(v)$);

$$\psi(\zeta) \approx 2\pi - \frac{\pi}{2}\frac{j}{j_c} - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{j}{j_c}\right) \times \\ \times \exp\left\{-(1+\alpha)k_j(v)\left[\zeta - \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\},$$

$$\psi_w'(\zeta) \approx -\frac{\pi}{2} S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2} k_j(v)\left[1 - \frac{\pi\alpha}{4} + \frac{k_w}{k_j(v)}\right] \times \\ \times \exp\left\{-(1+\alpha)k_j(v)\left[\zeta - \frac{\pi}{4k_j(v)}\right]\right\}$$

в голове вихря ($\zeta > \pi/4k_j(v)$); в срединной части вихря решение во второй разрешенной области скоростей получается из (3.20) и (3.21) изменением знака перед последними слагаемыми.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Если диссипация достаточно мала, то из уравнения (3.4) можно приближенно выразить $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) \approx -S_w \frac{V_{sw}^2}{V_{sw}^2 - v^2} \left[\psi'(\zeta) - k_w \psi(\zeta)\right]. \qquad (\text{П}.4.1)$$

Подставляя (П.4.1) в (3.3), получаем аналогично бездиссипативному случаю уравнение для $\psi(\zeta)$:

$$F[\psi] - \frac{2}{\pi} k_j^{-2}(v) \psi''(\zeta) = \frac{j}{j_c} + \frac{v\beta(v)}{\omega_j^2} \psi'(\zeta). \qquad (\text{П}.4.2)$$

В том случае, когда $F[\psi]$ отвечает нелинейности модели Сакаи–Татено–Педерсена, уравнение (П.4.2) отличается от рассмотренного в [7] лишь зависимостью коэффициентов $k_j(v)$ и $\beta(v)$ от скорости. Сходство уравнения (П.4.2) с уравнением (2.1) работы [7] позволяет воспользоваться результатом работы [7] и записать зависимость (3.16) $j(v)$ в линейном приближении по диссипации.

Если же $F[\psi] = \sin\psi$, то формальное сходство формулы (П.4.2) с уравнением (2.5) работы [15] позволяет воспользоваться результатом [15] и записать зависимость (3.24).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Sakai and H. Tateno, Jpn. J. Appl. Phys. **22**, 1374 (1983).
2. S. Sakai and N. F. Pedersen, Phys. Rev. B **34**, 3506 (1986).
3. S. Sakai, Phys. Rev. B **36**, 812 (1987).
4. A. F. Volkov, Phys. C **183**, 177 (1991).
5. A. F. Volkov, Phys. C **192**, 306 (1992).
6. В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, ЖЭТФ **119**, 971 (2001).
7. В. П. Силин, А. В. Студенов, ЖЭТФ **117**, 1230 (2000).
8. A. S. Malishevskii, V. P. Silin, and S. A. Uryupin, Phys. Lett. A **253**, 333 (1999).
9. А. С. Малишевский, В. П. Силин, С. А. Урюпин, ЖЭТФ **117**, 771 (2000).
10. А. С. Малишевский, В. П. Силин, А. В. Студенов, КСФ ФИАН № 12, 3 (2000).
11. V. V. Kurin and A. V. Yulin, Phys. Rev. B **55**, 11659 (1997).
12. A. S. Malishevskii, V. P. Silin, and S. A. Uryupin, Phys. Lett. A **306**, 153 (2002).
13. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987), с. 475.
14. В. П. Силин, С. А. Урюпин, ЖЭТФ **108**, 2163 (1995).
15. D. W. McLaughlin and A. C. Scott, Phys. Rev. B **18**, 1652 (1978).