ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 4, стр. 707–716 © 2004

ОБЩЕЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА–ДИРАКА С КОСМОЛОГИЧЕСКИМ ЧЛЕНОМ В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. А. Желнорович *

Институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
119192, Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 мая 2003 г.

Получено общее точное решение системы уравнений Дирака и уравнений Эйнштейна с космологическим членом в однородном римановом пространстве первого типа по классификации Бианки.

PACS: 04.40.Nr, 04.20.Jb

1. ВВЕДЕНИЕ

При интегрировании уравнений Эйнштейна–Дирака приходится сталкиваться с двумя трудностями.

Первая — чисто техническая трудность — связана с тем, что уравнения Эйнштейна–Дирака представляют собой сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для 24 неизвестных функций. Некоторые частные точные решения [1–6] уравнений Эйнштейна–Дирака в однородных пространствах ранее удавалось получить только для диагональных метрик риманова пространства событий.

Вторая трудность носит принципиальный характер и связана с тем, что спинорные полевые функции ψ в римановом пространстве событий можно определить только в некоторых неголономных ортонормированных базисах (тетрадах), которые должны быть заданы, или, как говорят, необходима калибровка тетрад. Таких калибровок известно очень много и разные авторы предлагали различные калибровки. Все эти калибровки или неинвариантны относительно преобразования переменных системы координат наблюдателя, или записываются в виде дифференциальных уравнений, что приводит к усложнению исходной системы уравнений.

С физической точки зрения все калибровки равносильны, так как уравнения Эйнштейна–Дирака инвариантны относительно выбора тетрад. С математической же точки зрения использование плохой калибровки (т. е. добавочных уравнений, замыкающих уравнения Эйнштейна–Дирака) может сильно усложнить уравнения, а использование хорошей калибровки может дать существенное упрощение уравнений.

С трудностью разумной калибровки тетрад во многом связано то обстоятельство, что в предыдущих работах решения уравнений Эйнштейна–Дирака были получены только для диагональных метрик — для таких метрик векторы базиса голономной системы координат ортогональны и поэтому возможен естественный выбор тетрад, связанных с ортогональным голономным базисом риманова пространства.

В этой работе используется новая калибровка [7] тетрад, которая является алгебраической и в то же время формулируется инвариантным образом. Использование этой калибровки позволяет уменьшить число неизвестных функций в уравнениях Эйнштейна–Дирака на шесть единиц, сохраняя инвариантность уравнений относительно преобразования системы координат наблюдателя.

С используемой здесь калибровкой тетрад все уравнения записываются в виде уравнений первого порядка только для двух инвариантов спинорного поля и символов вращения Риччи собственных векторных базисов, определяемых спинорным полем. Уравнения Дирака превращаются после калибровки тетрад в уравнения для символов вращения Риччи и для инвариантов спинорного поля, причем в уравне-

* E-mail: zhelnor@imec.msu.ru

ния Дирака символы вращения Риччи входят линейно и без производных. Поэтому оказывается, что в однородном римановом пространстве уравнения Дирака замыкают систему уравнений Эйнштейна для символов вращения Риччи без использования дополнительных уравнений. В этом случае можно сначала интегрировать уравнения первого порядка для символов вращения Риччи и инвариантов спинорного поля, а затем интегрировать уравнения тоже первого порядка для тетрадных коэффициентов (коэффициентов Ламе).

С этими двумя обстоятельствами — уменьшением числа неизвестных функций на шесть единиц и возможностью интегрировать уравнения второго порядка в два этапа — связано существенное упрощение уравнений Эйнштейна–Дирака, благодаря чему оказывается возможным получать новые точные решения этих уравнений.

Общее точное решение уравнений Эйнштейна–Дирака в однородном римановом пространстве первого типа по классификации Бианки получено в работах [7–9]. В последнее время появились новые работы, в которых обсуждаются модели, описываемые уравнениями Эйнштейна с космологическим членом (в том числе и со спинорными полями). В связи с растущим интересом к изучению роли космологического члена в настоящей работе получено общее точное решение системы уравнений Дирака и уравнений Эйнштейна с космологическим членом в однородном римановом пространстве.

2. СПИНОРНЫЕ ПОЛЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть V — четырехмерное риманово пространство с сигнатурой метрики $(+,+,+,-)$, отнесенное к системе координат с переменными x^i и с голономным векторным базисом $\mathbf{Э}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Метрический тензор пространства V зададим в базисе $\mathbf{Э}_i$ ковариантными компонентами g_{ij}, связность определяется символами Кристоффеля Γ^s_{ij}. В пространстве V введем гладкое поле ортонормированных базисов (тетрад) $\mathbf{e}_a(x^i)$ $(a = 1, 2, 3, 4)$ в виде

$$\mathbf{e}_a = h^i{}_a \mathbf{Э}_i, \quad \mathbf{Э}_i = h_i{}^a \mathbf{e}_a, \tag{1}$$

где $h_i{}^a$, $h^i{}_a$ — коэффициенты Ламе. Индексы компонент тензоров, вычисляемых в базисе $\mathbf{Э}_i$, будем обозначать далее латинскими буквами $i, j, k, \ldots$, а индексы компонент тензоров, вычисляемых в ортонормированных базисах $\mathbf{e}_a$, — первыми буквами латинского алфавита a, b, c, d, e, f.

Дифференциал векторов ортонормированного базиса $\mathbf{e}_a(x^i)$ определяется символами вращения Риччи $d\mathbf{e}_a = \Delta_{i,a}{}^b \mathbf{e}_b dx^i$, которые выражаются через коэффициенты Ламе

$$\Delta_{i,ac} = \frac{1}{2}\big[h^j{}_c\big(\partial_i h_{ja} - \partial_j h_{ia}\big) - h^j{}_a\big(\partial_i h_{jc} - \partial_j h_{ic}\big) + \\ + h_i{}^b h^j{}_a h^s{}_c\big(\partial_j h_{sb} - \partial_s h_{jb}\big)\big]. \tag{2}$$

Здесь $\partial_i = \partial/\partial x^i$.

Определим в римановом пространстве V спинорное поле первого ранга $\boldsymbol{\psi}(x^i)$, заданное контравариантными компонентами $\psi^A(x^i)$ $(A = 1, 2, 3, 4)$ в ортонормированных базисах $\mathbf{e}_a(x^i)$. Жонглирование спинорными индексами проводится по формулам $\psi^A = e^{AB}\psi_B$, $\psi_A = e_{AB}\psi^B$, в которых $E = \|e_{AB}\|$, $E^{-1} = \|e^{AB}\|$ — ковариантные и контравариантные компоненты метрического спинора, определяемые уравнениями

$$\gamma_a^T = -E\gamma_a E^{-1}, \quad E^T = -E. \tag{3}$$

Здесь T — символ транспонирования, γ_a — четырехмерные матрицы Дирака, по определению удовлетворяющие уравнению

$$\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2g_{ab}I,$$

где I — единичная четырехмерная матрица, $\|g_{ab}\| = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$ — ковариантные компоненты метрического тензора в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_a$.

Определим также сопряженное спинорное поле ковариантными компонентами $\psi^+ = \|\psi^+_A\|$ с помощью соотношения $\psi^+ = \dot{\psi}^T\beta$, в котором точка над буквой означает комплексное сопряжение; инвариантный спинор второго ранга β определяется уравнениями

$$\dot{\gamma}_a^T = -\beta\gamma_a\beta^{-1}, \quad \dot{\beta}^T = \beta. \tag{4}$$

Четырехкомпонентное спинорное поле ψ в общем случае имеет два вещественных инварианта ρ, η, которые можно определить с помощью уравнения

$$\rho\exp(i\eta) = \psi^+\psi + i\psi^+\gamma^5\psi, \tag{5}$$

где

$$\gamma^5 = \frac{1}{24}\varepsilon^{abcd}\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d,$$

ε^{abcd} — компоненты четырехмерного псевдотензора Леви–Чивита $\varepsilon^{1234} = -1$. При помощи спинорного поля ψ и сопряженного спинорного поля ψ^+ в римановом пространстве V можно определить собственный ортонормированный векторный базис $\breve{\mathbf{e}}_a$ спинорного поля:

$$\breve{\mathbf{e}}_1 = \pi^i \mathbf{Э}_i, \quad \breve{\mathbf{e}}_2 = \xi^i \mathbf{Э}_i, \quad \breve{\mathbf{e}}_3 = \sigma^i \mathbf{Э}_i, \quad \breve{\mathbf{e}}_4 = u^i \mathbf{Э}_i.$$

Компоненты векторов π^i, ξ^i, σ^i, u^i задаются соотношениями [7, 10]

$$\begin{aligned} &\rho\pi^i = \mathrm{Im}(\psi^T E \gamma^i \psi), \quad \rho\xi^i = \mathrm{Re}(\psi^T E \gamma^i \psi), \\ &\rho\sigma^i = \psi^+ \gamma^i \gamma^5 \psi, \quad \rho u^i = i\psi^+ \gamma^i \psi, \end{aligned} \tag{6}$$

в которых спинтензоры $\gamma^i = h^i{}_a \gamma^a$ удовлетворяют уравнению

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 2g^{ij} I.$$

Очевидно, что коэффициенты Ламе $\breve{h}^i_a$, соответствующие собственному базису $\breve{\mathbf{e}}_a$, определяются матрицей

$$\breve{h}^i_a = \begin{Vmatrix} \pi^1 & \xi^1 & \sigma^1 & u^1 \\ \pi^2 & \xi^2 & \sigma^2 & u^2 \\ \pi^3 & \xi^3 & \sigma^3 & u^3 \\ \pi^4 & \xi^4 & \sigma^4 & u^4 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Если спинтензоры γ_a, E, β задать в виде

$$\gamma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\gamma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

$$E = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \beta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

то компоненты спинора $\boldsymbol{\psi}$, вычисляемые в собственном базисе $\breve{\mathbf{e}}_a$, определяются инвариантами ρ, η следующим образом [7, 10]:

$$\begin{aligned} &\breve{\psi}^1 = 0, \quad \breve{\psi}^2 = i\sqrt{\frac{1}{2}\rho}\, \exp\left(\frac{i}{2}\eta\right), \\ &\breve{\psi}^3 = 0, \quad \breve{\psi}^4 = i\sqrt{\frac{1}{2}\rho}\, \exp\left(-\frac{i}{2}\eta\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Как известно, ковариантные производные спинорных полей ψ, ψ^+ в римановом пространстве определяются соотношениями [11]

$$\begin{aligned} &\nabla_s \psi = \partial_s \psi - \frac{1}{4}\Delta_{s,ij} \gamma^i \gamma^j \psi, \\ &\nabla_s \psi^+ = \partial_s \psi^+ + \frac{1}{4}\psi^+ \Delta_{s,ij} \gamma^i \gamma^j. \end{aligned} \tag{10}$$

Для ковариантных производных спинорных полей ψ, ψ^+ справедливы уравнения

$$\begin{aligned} &\nabla_s \psi = \left(\frac{1}{2} I \partial_s \ln\rho - \frac{1}{2}\gamma^5 \partial_s \eta - \frac{1}{4}\breve{\Delta}_{s,ij} \gamma^i \gamma^j\right)\psi, \\ &\nabla_s \psi^+ = \psi^+ \left(\frac{1}{2} I \partial_s \ln\rho - \frac{1}{2}\gamma^5 \partial_s \eta + \frac{1}{4}\breve{\Delta}_{s,ij} \gamma^i \gamma^j\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь инварианты спинорного поля определены уравнением (5), символы вращения Риччи, $\breve{\Delta}_{i,jk} = \breve{h}^b_j \breve{h}^c_k \breve{\Delta}_{i,bc}$, соответствуют собственным базисам спинорного поля и вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \breve{\Delta}_{s,ij} = \frac{1}{2}\big(&\pi_i \nabla_s \pi_j - \pi_j \nabla_s \pi_i + \xi_i \nabla_s \xi_j - \xi_j \nabla_s \xi_i + \\ &+ \sigma_i \nabla_s \sigma_j - \sigma_j \nabla_s \sigma_i - u_i \nabla_s u_j + u_j \nabla_s u_i\big). \end{aligned} \tag{12}$$

Соотношения (11) в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве получены в работах [7, 12]. Соотношения (11) в римановом пространстве получаются из соответствующих соотношений в псевдоевклидовом пространстве заменой частных производных на ковариантные. Соотношения (11) выполняются тождественно в силу определений величин ρ, η, $\breve{\Delta}_{s,ij}$.

3. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА–ДИРАКА С КОСМОЛОГИЧЕСКИМ ЧЛЕНОМ

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\gamma^a \nabla_a \psi + m\psi = 0, \\ &R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \lambda g_{ab} = \varkappa T_{ab}, \\ &T_{ab} = \frac{1}{4}[\psi^+ \gamma_a \nabla_b \psi - (\nabla_b \psi^+)\gamma_a \psi + \\ &\quad + \psi^+ \gamma_b \nabla_a \psi - (\nabla_a \psi^+)\gamma_b \psi]. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь ψ — четырехкомпонентное спинорное поле в четырехмерном римановом пространстве событий V, заданное в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_a$; m, λ, $\varkappa$ — постоянные; $R = g^{ab} R_{ab}$ — скалярная кривизна пространства V, R^{ab} — компоненты тензора Риччи, вычисляемые в базисе $\mathbf{e}_a$; $g^{ab} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$; T_{ab} — компоненты тензора энергии–импульса спинорного поля в базисе $\mathbf{e}_a$.

Уравнения (13) инвариантны относительно произвольного псевдортогонального преобразования тетрад $\mathbf{e}_a$, поэтому для замыкания уравнений (13) необходимо добавить уравнения, определяющие тетраду $\mathbf{e}_a$. Такие добавочные уравнения обычно называют калибровочными условиями. В качестве условий калибровки тетрад $\mathbf{e}_a$ примем, что произвольная тетрада $\mathbf{e}_a$ в уравнениях (13) совпадает с собственной тетрадой спинорного поля ψ, т. е. $\mathbf{e}_a = \breve{\mathbf{e}}_a$. При такой калибровке коэффициенты Ламе h_a^i в уравнениях (13) совпадают с коэффициентами $\breve{h}_a^i$, определенными матрицей (7).

Уравнения Дирака в этом случае записываются в виде уравнений для символов вращения Риччи $\breve{\Delta}_{a,bc}$ и инвариантов спинорного поля [7, 10]:

$$\begin{aligned} &\breve{\partial}_a \ln\rho + \breve{\Delta}^b_{b,a} = 2m\breve{\sigma}_a \sin\eta, \\ &\breve{\partial}^a \eta + \frac{1}{2}\varepsilon^{abcd}\breve{\Delta}_{b,cd} = 2m\breve{\sigma}^a \cos\eta. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$\breve{\partial}_a = \breve{h}_a^i \partial_i = \{\pi^i\partial_i, \xi^i\partial_i, \sigma^i\partial_i, u^i\partial_i\}$$

— оператор дифференцирования по направлению векторов собственного базиса; $\breve{\sigma}_a = \breve{\sigma}^a = (0,0,1,0)$ — компоненты вектора $\breve{\mathbf{e}}_3$ в собственном базисе.

Символы $\breve{\Delta}_{a,bc}$ в уравнениях (14) связаны с коэффициентами Ламе $\breve{h}_a^i$ соотношением

$$\begin{aligned} \breve{\Delta}_{a,bc} = \frac{1}{2}\big[&\breve{h}^j_a(\breve{\partial}_b\breve{h}_{jc} - \breve{\partial}_c\breve{h}_{jb}) + \breve{h}^j_c(\breve{\partial}_a\breve{h}_{jb} + \breve{\partial}_b\breve{h}_{ja}) - \\ &- \breve{h}^j_b(\breve{\partial}_a\breve{h}_{jc} + \breve{\partial}_c\breve{h}_{ja})\big]. \end{aligned} \tag{15}$$

Уравнения (14) представляют собой тождественную запись уравнений Дирака в собственном базисе $\breve{\mathbf{e}}_a$. Эти уравнения можно получить также из уравнений Дирака в системе (13) с помощью замены в них производных по формуле (11) и последующих алгебраических преобразований.

Замена в уравнениях (14) символов $\breve{\Delta}_{a,bc}$ на $\breve{h}_a^i$ приводит к следующей системе инвариантных тензорных уравнений [7, 10]:

$$\begin{aligned} &\nabla_i \rho\pi^i = 0, \quad \nabla_i\rho\xi^i = 0, \\ &\nabla_i\rho\sigma^i = 2m\rho\sin\eta, \quad \nabla_i\rho u^i = 0, \\ &\nabla^i\eta - \frac{1}{2}\varepsilon^{ijms}(\pi_j\nabla_m\pi_s + \xi_j\nabla_m\xi_s + \\ &+ \sigma_j\nabla_m\sigma_s - u_j\nabla_m u_s) = 2m\sigma^i\cos\eta. \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнения Эйнштейна в собственном базисе $\breve{\mathbf{e}}_a$ удобно записать в виде

$$\breve{R}_{ab} = \varkappa\breve{T}_{ab} + \left(\frac{1}{2}\varkappa m\rho\cos\eta + \lambda\right) g_{ab}. \tag{17}$$

Для преобразования уравнений Эйнштейна к виду (17) следует учесть, что в силу (13) выполняется уравнение

$$R = -\varkappa T^a_a + 4\lambda = \varkappa m\rho\cos\eta + 4\lambda. \tag{18}$$

Выражение тетрадных компонент тензора энергии–импульса в калибровке $\mathbf{e}_a = \breve{\mathbf{e}}_a$ получено в работе [10]:

$$\begin{aligned} \breve{T}_{ab} = \frac{1}{4}\rho\Big[&-\breve{\sigma}_b\breve{\partial}_a\eta - \breve{\sigma}_a\breve{\partial}_b\eta + \\ &+ \frac{1}{2}\breve{\sigma}_e\left(\breve{\Delta}_{a,cd}\varepsilon_b{}^{cde} + \breve{\Delta}_{b,cd}\varepsilon_a{}^{cde}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{19}$$

Компоненты тензора $\breve{R}_{ab}$ выражаются через символы вращения Риччи следующим образом:

$$\begin{aligned} \breve{R}_{ab} = &\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j\left[\sqrt{-g}\left(\breve{h}^j{}_c\breve{\Delta}_{b,a}{}^c - \breve{h}^j{}_b\breve{\Delta}_{c,a}{}^c\right)\right] - \\ &- \breve{\Delta}_{f,b}{}^c\breve{\Delta}_{c,a}{}^f + \breve{\Delta}_{c,a}{}^c\breve{\Delta}_{f,b}{}^f, \end{aligned} \tag{20}$$

где $g = \det\|g_{ij}\|$.

Уравнения (14)–(20) в заданной системе координат x^i представляют собой замкнутую систему уравнений для функций $\pi_i(x^j)$, $\xi_i(x^j)$, $\sigma_i(x^j)$, $u_i(x^j)$, $\rho(x^j)$, $\eta(x^j)$. Компоненты метрического тензора риманова пространства связаны с функциями $\pi_i(x^j)$, $\xi_i(x^j)$, $\sigma_i(x^j)$, $u_i(x^j)$ соотношением

$$g^{ij} = \breve{h}^i_a\breve{h}^j_b g^{ab} = \pi^i\pi^j + \xi^i\xi^j + \sigma^i\sigma^j - u^i u^j. \tag{21}$$

4. ОБЩЕЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА–ДИРАКА В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим четырехмерное риманово пространство, отнесенное к синхронной системе координат с переменными x^i, в которой по определению выполняются уравнения

$$g_{44} = g^{44} = -1, \quad g_{4\alpha} = g^{4\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,2,3. \tag{22}$$

Будем искать решение уравнений (14)–(20) в синхронной системе координат в предположении, что все искомые функции зависят только от параметра $x^4 = t$. Таким образом, пространство событий предполагается однородным первого типа по классификации Бианки.

В этом случае уравнения (16) записываются в виде

$$\begin{aligned} &\partial_4(\sqrt{-g}\,\rho\pi^4) = \partial_4(\sqrt{-g}\,\rho\xi^4) = \\ &= \partial_4(\sqrt{-g}\,\rho u^4) = 0, \\ &\partial_4(\sqrt{-g}\,\rho\sigma^4) = 2m\sqrt{-g}\,\rho\sin\eta, \\ &\partial_4\eta = -2m\sigma^4\cos\eta. \end{aligned} \tag{23}$$

Система уравнений (23) и уравнение

$$g^{44} \equiv \pi^4\pi^4 + \xi^4\xi^4 + \sigma^4\sigma^4 - u^4u^4 = -1 \qquad (24)$$

образуют полную систему для определения функций π^4, ξ^4, σ^4, u^4, η, $\rho\sqrt{-g}$. Общее решение уравнений (23), (24) имеет вид [8, 9]

$$\begin{gathered} \frac{C_\rho}{\rho\sqrt{-g}} = \frac{\pi^4}{C_\pi} = \frac{\xi^4}{C_\xi} = \frac{u^4}{C_u} = \\ = \frac{1}{\sqrt{1 + C_\sigma^2\cos^2(2mt+\varphi)}}, \\ \sigma^4 = \frac{\varepsilon C_\sigma \sin(2mt+\varphi)}{\sqrt{1 + C_\sigma^2\cos^2(2mt+\varphi)}}, \\ \exp(i\eta) = \varepsilon\frac{1 + iC_\sigma\cos(2mt+\varphi)}{\sqrt{1 + C_\sigma^2\cos^2(2mt+\varphi)}}, \end{gathered} \qquad (25)$$

где φ, C_π, C_ξ, C_σ, $C_u \geqslant 1$, $C_\rho > 0$ — постоянные интегрирования; коэффициент ε может принимать любое из двух значений: $+1$ или -1. В силу условия синхронности (24) постоянные C связаны соотношением

$$C_\pi^2 + C_\xi^2 + C_\sigma^2 - C_u^2 = -1. \qquad (26)$$

Введем обозначение $h_a = \breve{h}_a^4 = (\pi^4, \xi^4, \sigma^4, u^4)$. Из решения (25) находим

$$\{h_1, h_2, h_4\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{1 + C_\sigma^2\cos^2(2mt+\varphi)}}\{C_\pi, C_\xi, C_u\}. \qquad (27)$$

Отсюда видно, что в силу решения (25) направление трехмерного вектора с компонентами h_1, h_2, h_4 не зависит от параметра t.

Из определения (15) следует, что символы вращения Риччи, $\Delta_{a,bc}$, можно представить в виде

$$\breve{\Delta}_{a,bc} = \frac{1}{2}(h_b s_{ac} - h_c s_{ab} - h_a a_{bc}), \qquad (28)$$

где по определению

$$\begin{gathered} s_{ab} = s_{ba} = \breve{h}_a^i \partial_4 \breve{h}_{ib} + \breve{h}_b^i \partial_4 \breve{h}_{ia}, \\ a_{ab} = -a_{ba} = \breve{h}_a^i \partial_4 \breve{h}_{ib} - \breve{h}_b^i \partial_4 \breve{h}_{ia}. \end{gathered} \qquad (29)$$

Величины h_a в формуле (28) определяются решением (25) как функции параметра t, поэтому соотношение (28) выражает 24 зависимые функции $\breve{\Delta}_{a,bc}$ только через 16 функций s_{ab}, a_{ab}.

Из уравнений (14) следует, что антисимметрические величины a_{ab} определяются равенством

$$a_{ab} = 4m\left[(\breve{\sigma}_a h_b - \breve{\sigma}_b h_a)\sin\eta - \varepsilon_{abcd}\breve{\sigma}^c h^d \cos\eta\right]. \qquad (30)$$

Пользуясь уравнениями (30) и определениями (19), (20) для $\breve{T}_{ab}$, $\breve{R}_{ab}$, уравнения Эйнштейна (17) можно записать в виде эквивалентной системы уравнений

$$\begin{gathered} \partial_4(\sqrt{-g}\, s_{ab}) - 2m\sqrt{-g}\left(h_a s_{bc} + h_b s_{ac}\right)\breve{\sigma}^c \sin\eta - \\ -2\sqrt{-g}\left(m\cos\eta + \frac{1}{8}\varkappa\rho\right) \times \\ \times \left(\varepsilon_{cefa} s_b{}^f + \varepsilon_{cefb} s_a{}^f\right) h^c \breve{\sigma}^e = \\ = \left(\varkappa m\rho\sqrt{-g}\,\cos\eta + 2\lambda\sqrt{-g}\right)(g_{ab} + h_a h_b), \\ (s_a{}^a)^2 - s_{ab}s^{ab} = 8(\varkappa\rho m\cos\eta + \lambda). \end{gathered} \qquad (31)$$

Величина $\rho\sqrt{-g}\cos\eta$ в правой части первого уравнения (31) в силу решения (25) является постоянной:

$$\rho\sqrt{-g}\cos\eta = \varepsilon C_\rho. \qquad (32)$$

Первое уравнение системы (31) получается сверткой уравнений Эйнштейна (17) с компонентами тензора $\delta_c^a + h_c h^a$ по индексу a. Второе уравнение в (31) получается сверткой уравнений Эйнштейна (17) с компонентами тензора $g^{ab} + 2h^a h^b$ по индексам a, b.

Свертка первого уравнения системы (31) с g^{ab} по индексам a, b дает уравнение

$$\partial_4\partial_4\sqrt{-g} = \frac{3}{2}\varkappa m\varepsilon C_\rho + 3\lambda\sqrt{-g}, \qquad (33)$$

определяющее величину $\sqrt{-g}$.

Если космологическая постоянная $\lambda > 0$, решение уравнения (33) имеет вид

$$\sqrt{-g} = \frac{\varepsilon\varkappa m}{2\lambda}C_\rho\left[-1 + f_1\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{3\lambda}\,t\right) + \\ + f_2\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{3\lambda}\,t\right)\right], \qquad (34)$$

где f_1, f_2 — произвольные постоянные.

При $\lambda < 0$ для $\sqrt{-g}$ получаем

$$\sqrt{-g} = \frac{\varepsilon\varkappa m}{2\lambda}C_\rho\left\{-1 + f\sin\left[\sqrt{-3\lambda}(t - t_0)\right]\right\}, \qquad (35)$$

где f, t_0 — постоянные интегрирования. Случай $\lambda = 0$ рассмотрен в работах [7–9].

Направление трехмерного вектора с компонентами h_1, h_2, h_4 не зависит от параметра t, поэтому постоянным преобразованием Лоренца векторов базиса $\breve{\mathbf{e}}_1$, $\breve{\mathbf{e}}_2$, $\breve{\mathbf{e}}_4$ компоненты h_1, h_2 можно обратить в нуль. Нетрудно видеть, что исходная система уравнений (14)–(20) инвариантна относительно произвольного преобразования Лоренца векторов базиса $\breve{\mathbf{e}}_1$, $\breve{\mathbf{e}}_2$, $\breve{\mathbf{e}}_4$, не зависящего от переменных x^i. Поэтому достаточно рассмотреть решение уравнений (14)–(20) только при $h_1 = h_2 = 0$. При этом условии первое уравнение системы (31) в развернутой записи имеет вид

$$\begin{aligned}
&\partial_4\left(s_{33}\sqrt{-g}\right) - 4m\sigma^4\sin\eta s_{33}\sqrt{-g} = \\
&\quad = \left(\varepsilon\varkappa mC_\rho + 2\lambda\sqrt{-g}\right)\left(u^4\right)^2, \\
&\partial_4\left(s_{23}\sqrt{-g}\right) - 2m\sigma^4\sin\eta\, s_{23}\sqrt{-g} - \\
&\quad - \left(2m\cos\eta + \frac{1}{4}\varkappa\rho\right)u^4 s_{13}\sqrt{-g} = 0, \\
&\partial_4\left(s_{13}\sqrt{-g}\right) - 2m\sigma^4\sin\eta\, s_{13}\sqrt{-g} + \\
&\quad + \left(2m\cos\eta + \frac{1}{4}\varkappa\rho\right)u^4 s_{23}\sqrt{-g} = 0, \\
&\partial_4\left(s_{11}\sqrt{-g}\right) + 2\left(2m\cos\eta + \frac{1}{4}\varkappa\rho\right)u^4 s_{12}\sqrt{-g} = \\
&\quad = \varepsilon\varkappa mC_\rho + 2\lambda\sqrt{-g}, \\
&\partial_4\left(s_{22}\sqrt{-g}\right) - 2\left(2m\cos\eta + \frac{1}{4}\varkappa\rho\right)u^4 s_{12}\sqrt{-g} = \\
&\quad = \varepsilon\varkappa mC_\rho + 2\lambda\sqrt{-g}, \\
&\partial_4\left(s_{12}\sqrt{-g}\right) - \left(2m\cos\eta + \frac{1}{4}\varkappa\rho\right)\times \\
&\quad \times u^4(s_{11} - s_{22})\sqrt{-g} = 0, \\
&\partial_4\left(s_{14}\sqrt{-g}\right) + \left(2m\cos\eta + \frac{1}{4}\varkappa\rho\right)u^4 s_{24}\sqrt{-g} - \\
&\quad - 2mu^4\sin\eta\, s_{31}\sqrt{-g} = 0, \\
&\partial_4\left(s_{24}\sqrt{-g}\right) - \left(2m\cos\eta + \frac{1}{4}\varkappa\rho\right)u^4 s_{14}\sqrt{-g} - \\
&\quad - 2mu^4\sin\eta\, s_{23}\sqrt{-g} = 0, \\
&\partial_4\left(s_{34}\sqrt{-g}\right) - 2m\sin\eta\left(\sigma^4 s_{34} + u^4 s_{33}\right)\sqrt{-g} = \\
&\quad = \left(\varepsilon\varkappa mC_\rho + 2\lambda\sqrt{-g}\right)\sigma^4 u^4, \\
&\partial_4\left(s_{44}\sqrt{-g}\right) - 4mu^4\sin\eta\, s_{34}\sqrt{-g} = \\
&\quad = \left(\varepsilon\varkappa mC_\rho + 2\lambda\sqrt{-g}\right)\left(\sigma^4\right)^2.
\end{aligned} \tag{36}$$

Общее решение уравнений (36) имеет вид

$$\begin{aligned}
&s_{11} = \rho u^4\left[-\frac{1}{3}N + \frac{2}{3C_\rho C_u}\partial_4\sqrt{-g} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}B\sin(2(\zeta+\beta))\right], \\
&s_{22} = \rho u^4\left[-\frac{1}{3}N + \frac{2}{3C_\rho C_u}\partial_4\sqrt{-g} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2}B\sin(2(\zeta+\beta))\right], \\
&s_{33} = \frac{2}{3}\rho(u^4)^3\left(N + \frac{1}{C_\rho C_u}\partial_4\sqrt{-g}\right), \\
&s_{44} = \frac{2}{3}\rho u^4(\sigma^4)^2\left(N + \frac{1}{C_\rho C_u}\partial_4\sqrt{-g}\right), \\
&s_{12} = -\frac{1}{2}\rho u^4 B\cos(2(\zeta+\beta)), \\
&s_{13} = \frac{1}{2}\rho(u^4)^2 A\cos(\zeta+\alpha), \\
&s_{23} = \frac{1}{2}\rho(u^4)^2 A\sin(\zeta+\alpha), \\
&s_{34} = \frac{2}{3}\rho\sigma^4(u^4)^2\left(N + \frac{1}{C_\rho C_u}\partial_4\sqrt{-g}\right), \\
&s_{14} = \frac{1}{2}\rho u^4\sigma^4 A\cos(\zeta+\alpha), \\
&s_{24} = \frac{1}{2}\rho u^4\sigma^4 A\sin(\zeta+\alpha).
\end{aligned} \tag{37}$$

Здесь A, B, N, α, β — произвольные постоянные, величина $\sqrt{-g}$ в решении (37) определена равенствами (34), (35), величина ζ определяется соотношением

$$\begin{aligned}
\zeta = \int\left(2m\cos\eta + \frac{1}{4}\varkappa\rho\right)u^4\,dt = \\
= \varepsilon\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}(2mt+\varphi)}{\sqrt{1+C_\sigma^2}} + \frac{1}{4}\varkappa\tau.
\end{aligned} \tag{38}$$

Параметр τ в формуле (38) зависит от значения космологической постоянной λ и определяется интегралом $\tau = \int\rho u^4 dt$.

В силу уравнений (18), (32) скалярная кривизна R риманова пространства событий выражается через $\sqrt{-g}$:

$$R = \frac{\varepsilon\varkappa mC_\rho}{\sqrt{-g}} + 4\lambda. \tag{39}$$

Отсюда следует, что точки, в которых $\sqrt{-g}$ обращается в нуль, являются особыми точками тензора кривизны.

Подставляя во второе уравнение системы (31) компоненты s_{ab} из формул (37), найдем связь между постоянными интегрирования A, B, N и f_1, f_2. В случае $\lambda > 0$ получаем следующее соотношение:

$$f_2^2 - f_1^2 = 1 - \frac{\lambda}{\varkappa^2 m^2}C_u^2\left(\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{3}N^2\right) \leqslant 1.$$

Если $f_2^2 \geqslant f_1^2$, то формулу (34) для $\sqrt{-g}$ можно представить в виде

$$\sqrt{-g} = \frac{\varepsilon \varkappa m}{2\lambda} C_\rho \left\{-1 + f \operatorname{ch}\left[\sqrt{3\lambda}\,(t - t_0)\right]\right\}, \qquad (40)$$

где t_0, f — произвольные постоянные, $f^2 = f_2^2 - f_1^2$.

Особые точки решения определяются уравнением

$$f \operatorname{ch}\left[\sqrt{3\lambda}\,(t - t_0)\right] = 1.$$

Решение имеет одну особую точку при $f = 1$ и две особые точки при $0 < f < 1$. Если $f \leqslant 0$ (в этом случае $\varepsilon = -1$), то решение не имеет особых точек.

Если $f_2^2 < f_1^2$, то для $\sqrt{-g}$ справедливо равенство

$$\sqrt{-g} = \frac{\varepsilon \varkappa m}{2\lambda} C_\rho \left\{-1 + f \operatorname{sh}\left[\sqrt{3\lambda}\,(t - t_0)\right]\right\}, \qquad (41)$$

в котором $f^2 = f_1^2 - f_2^2$. В этом случае решение имеет одну особую точку, определяемую уравнением

$$f \operatorname{sh}\left[\sqrt{3\lambda}\,(t - t_0)\right] = 1.$$

Если $f_2 = \pm f_1 = f$, то имеем

$$\sqrt{-g} = \frac{\varepsilon \varkappa m}{2\lambda} C_\rho \left\{-1 + f \exp\left(\pm\sqrt{3\lambda}\,t\right)\right\}. \qquad (42)$$

При $\lambda < 0$ получается следующая формула для постоянной интегрирования f в уравнении (35):

$$f^2 = 1 - \frac{\lambda}{\varkappa^2 m^2} C_u^2 \left(\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{3}N^2\right) \geq 1.$$

В этом случае существует бесконечно много особых точек, в которых $\sqrt{-g}$ обращается в нуль.

Условие положительности, $\sqrt{-g} > 0$, накладывает ограничения на возможные значения постоянных интегрирования и область существования решения.

Пользуясь определением (9) и решением (25) для ρ, η, выпишем решение для компонент спинорного поля в собственном базисе:

$$\breve{\psi} = \pm \left\| \begin{matrix} 0 \\ i\sqrt{\varepsilon C_\rho \dfrac{1 + iC_\sigma \cos(2mt + \varphi)}{2\sqrt{-g}}} \\ 0 \\ i\sqrt{\varepsilon C_\rho \dfrac{1 - iC_\sigma \cos(2mt + \varphi)}{2\sqrt{-g}}} \end{matrix} \right\|, \qquad (43)$$

где величина $\sqrt{-g}$ определена формуло‘й (35) или формулами (40)–(42) в зависимости от знака λ.

Уравнения (25), (30), (37) полностью определяют символы вращения Риччи $\breve{\Delta}_{a,bc}$ по формуле (28) и представляют собой первый интеграл уравнений (14)–(20). Для нахождения общего решения уравнений (14)–(20) теперь достаточно проинтегрировать уравнения (29), из которых следует

$$\partial_4 \breve{h}_{ib} = \frac{1}{2}\left(s_{ab} + a_{ab}\right)\breve{h}_i^a. \qquad (44)$$

С учетом определения (7) величин $\breve{h}_i^a$ и найденных решений (30), (37) для s_{ab}, a_{ab} уравнения (44) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\left(u^4\sigma_j - \sigma^4 u_j\right) = \\
&= \frac{1}{4}A\left[\pi_j \cos(\zeta + \alpha) + \xi_j \sin(\zeta + \alpha)\right] + \\
&+ \left(u^4\sigma_j - \sigma^4 u_j\right)\left(\frac{1}{3\sqrt{-g}}\frac{d}{d\tau}\sqrt{-g} + \frac{1}{3}N\right), \\
&\frac{d}{d\tau}\left(\xi_j + i\pi_j\right) = \left(\xi_j + i\pi_j\right) \times \\
&\times \left(\frac{1}{3\sqrt{-g}}\frac{d}{d\tau}\sqrt{-g} - \frac{1}{6}N - i\frac{2m}{\rho}\cos\eta\right) - \\
&- \frac{i}{4}\left(\xi_j - i\pi_j\right) B \exp\left[-2i(\zeta + \beta)\right] + \\
&+ \frac{i}{4}A\left(u^4\sigma_j - \sigma^4 u_j\right)\exp[-i(\zeta + \alpha)].
\end{aligned} \qquad (45)$$

Система уравнений (45) должна быть дополнена условием синхронности:

$$g_{4\alpha} \equiv \sigma_4\sigma_\alpha - u_4 u_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \qquad (46)$$

Для параметра τ в силу уравнений (25) имеем

$$\tau = \int \rho u^4 dt = C_\rho C_u \int \frac{dt}{\sqrt{-g}}.$$

Если космологическая постоянная положительна, $\lambda > 0$, и $\varkappa m \neq 0$, то при помощи уравнений (40), (41) получаем

$$\tau = \frac{2\lambda C_u}{\varepsilon \varkappa m} \int \frac{dt}{-1 + f \operatorname{sh}\left[\sqrt{3\lambda}\,(t - t_0)\right]} \qquad (47)$$

и

$$\tau = \frac{2\lambda C_u}{\varepsilon \varkappa m} \int \frac{dt}{-1 + f \operatorname{ch}\left[\sqrt{3\lambda}\,(t - t_0)\right]}. \qquad (48)$$

При $\lambda < 0$ ($f^2 > 1$) при помощи (35) находим

$$\tau = \frac{2\lambda C_u}{\varepsilon \varkappa m} \int \frac{dt}{-1 + f \sin\left[\sqrt{-3\lambda}\,(t - t_0)\right]}. \qquad (49)$$

Интегралы (47)–(49) можно найти в справочнике [13].

Проведем теперь в уравнениях (45) замену неизвестных функций $(\pi_\lambda, \xi_\lambda, \sigma_\lambda, u_\lambda) \to (\pi^0_\lambda, \xi^0_\lambda, \theta_\lambda)$:

$$\begin{aligned} \xi_\lambda + i\pi_\lambda &= \left(\xi^0_\lambda + i\pi^0_\lambda\right) (\sqrt{-g})^{1/3} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{6}N\tau - i\zeta\right), \\ \sigma_\lambda &= \theta_\lambda (\sqrt{-g})^{1/3} u^4 \exp\left(-\frac{1}{6}N\tau\right), \\ u_\lambda &= \theta_\lambda (\sqrt{-g})^{1/3} \sigma^4 \exp\left(-\frac{1}{6}N\tau\right), \end{aligned} \tag{50}$$

где величина ζ определена соотношением (38), σ^4, u^4 определены решением (25), величина $\sqrt{-g}$ определена равенствами (35) или (40), (41), (42). В результате условие синхронности (46) выполняется тождественно, а система уравнений (45) переходит в систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(\xi^0_\lambda + i\pi^0_\lambda\right) &= \frac{i}{4}\varkappa\left(\xi^0_\lambda + i\pi^0_\lambda\right) - \\ &- \frac{i}{4}B\exp(-2i\beta)\left(\xi^0_\lambda - i\pi^0_\lambda\right) + \frac{i}{4}A\exp(-i\alpha)\theta_\lambda, \\ \frac{d}{d\tau}\theta_\lambda &= \frac{1}{4}A\left(\pi^0_\lambda\cos\alpha + \xi^0_\lambda\sin\alpha\right) + \frac{1}{2}N\theta_\lambda. \end{aligned} \tag{51}$$

При $j = 4$ уравнения (45) выполняются тождественно в силу условий $h_1 = h_2 = 0$.

Уравнениям (51) для каждого значения индекса $\lambda = 1, 2, 3$ соответствует характеристическое уравнение для собственного значения q:

$$\begin{aligned} 2(N - 2q)(16q^2 + \varkappa^2 - A^2 - B^2) &+ \\ + A^2[2N - B\sin(2(\alpha - \beta))] &= 0. \end{aligned} \tag{52}$$

Решение уравнения (52) в общем случае определяется формулами Кардано. Простое решение этого уравнения получается, например, при $A = 0$ и при $2N = B\sin(2(\alpha - \beta))$. Решение уравнений (51) при $A = 0$ рассмотрено в работах [8, 9].

Рассмотрим случай, когда выполняется уравнение $2N = B\sin(2(\alpha - \beta))$, $A \neq 0$. В этом случае собственные значения имеют вид

$$\frac{1}{2}N, \quad \frac{1}{4}\sqrt{A^2 + B^2 - \varkappa^2}, \quad -\frac{1}{4}\sqrt{A^2 + B^2 - \varkappa^2}.$$

Если $0 < A^2 + B^2 < \varkappa^2$, то решение уравнений (51) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi^0_\lambda + i\pi^0_\lambda &= \exp(-i\alpha)\Big\{-AH_\lambda\exp\left(\frac{1}{2}N\tau\right) + \\ &+ [-[\varkappa + B\exp(2i(\alpha - \beta))]F_\lambda + 4iQG_\lambda] \times \\ &\times \cos(Q\tau) + \\ &+ [-[\varkappa + B\exp(2i(\alpha - \beta))]G_\lambda - 4iQF_\lambda] \times \\ &\times \sin(Q\tau)\Big\}, \\ \theta_\lambda &= [\varkappa - B\cos(2(\alpha - \beta))]H_\lambda\exp\left(\frac{1}{2}N\tau\right) + \\ &+ A[F_\lambda\cos(Q\tau) + G_\lambda\sin(Q\tau)]. \end{aligned} \tag{53}$$

Здесь

$$Q = \frac{1}{4}\sqrt{\varkappa^2 - A^2 - B^2},$$

F_λ, G_λ, H_λ — постоянные интегрирования.

Для пространственных компонент метрического тензора при помощи уравнений (21), (50) получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \\ &= (\sqrt{-g})^{2/3}\exp\left(-\frac{1}{3}N\tau\right)\Big\{H_\alpha H_\beta Z^2\exp(N\tau) + \\ &+ F_\alpha F_\beta[S + M\cos(2Q\tau) + 8QN\sin(2Q\tau)] + \\ &+ G_\alpha G_\beta[S - M\cos(2Q\tau) - 8QN\sin(2Q\tau)] + \\ &+ (F_\alpha G_\beta + F_\beta G_\alpha)[M\sin(2Q\tau) - 8QN\cos(2Q\tau)] + \\ &+ (F_\alpha H_\beta + F_\beta H_\alpha)2\varkappa A\exp\left(\frac{1}{2}N\tau\right)\cos(Q\tau) + \\ &+ (G_\alpha H_\beta + G_\beta H_\alpha)\,2\varkappa A\exp\left(\frac{1}{2}N\tau\right)\sin(Q\tau)\Big\}, \end{aligned} \tag{54}$$

где $2N = B\sin(\alpha - \beta)$ и введены сокращенные обозначения для постоянных:

$$M = A^2 + B^2 + \varkappa B\cos 2(\alpha - \beta),$$

$$S = \varkappa[\varkappa + B\cos(2(\alpha - \beta))],$$

$$Z^2 = A^2 + [\varkappa - B\cos(2(\alpha - \beta))]^2.$$

Величина $\sqrt{-g}$ в правой части равенства (54) определена уравнениями (35) или (40)–(41). Формула (54) определяет колебательный режим приближения к особым точкам решения.

Особенно простой вид метрика имеет в случае, когда фазы α, β удовлетворяют условию $\alpha-\beta=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$:

$$g_{\alpha\beta}=\frac{(\sqrt{-g}\,)^{2/3}}{16Q^2}\times$$
$$\times\left\|\begin{matrix} S+M\cos(2Q\tau) & M\sin(2Q\tau) & 2\varkappa A\cos(Q\tau)\\ M\sin(2Q\tau) & S-M\cos(2Q\tau) & 2\varkappa A\sin(Q\tau)\\ 2\varkappa A\cos(Q\tau) & 2\varkappa A\sin(Q\tau) & Z^2\end{matrix}\right\|.$$

В этом случае $N=0$; A, B произвольны; постоянные F_λ, G_λ, H_λ определены равенствами

$$\begin{aligned} F_\alpha&=\left\{(\varkappa^2-B^2)^{-1/2},0,0\right\},\\ G_\alpha&=\left\{0,(\varkappa^2-B^2)^{-1/2},0\right\},\\ H_\alpha&=\left\{0,0,(\varkappa^2-B^2)^{-1/2}\right\}.\end{aligned}\qquad(55)$$

Если $A^2+B^2>\varkappa^2$, то тригонометрические функции в (54) заменяются гиперболическими.

Диагональной метрике g_{ij} соответствует случай, когда постоянные интегрирования A, B в уравнениях (51) равны нулю, $A=B=0$. В этом случае

$$\begin{aligned} &\xi^0_\lambda+i\pi^0_\lambda=\varkappa(-F_\lambda+iG_\lambda)\exp\left(\frac{i}{4}\varkappa\tau\right),\\ &\theta_\lambda=\varkappa H_\lambda\exp\left(\frac{1}{2}N\tau\right),\\ &g_{\alpha\beta}=\varkappa^2\left(\sqrt{-g}\,\right)^{2/3}\times\\ &\qquad\times\left[\exp\left(-\frac{1}{3}N\tau\right)(F_\alpha F_\beta+G_\alpha G_\beta)+\right.\\ &\qquad\left.+\exp\left(\frac{2}{3}N\tau\right)H_\alpha H_\beta\right].\end{aligned}\qquad(56)$$

Здесь величина $\sqrt{-g}$ имеет вид (35) или (40)–(42).

Если F_λ, G_λ, H_λ определить соотношениями

$$\begin{aligned} F_\alpha=\left\{\varkappa^{-1},0,0,\right\},\quad G_\alpha=\left\{0,\varkappa^{-1},0\right\},\\ H_\alpha=\left\{0,0,\varkappa^{-1}\right\},\end{aligned}\qquad(57)$$

то метрика (56) диагональна:

$$g_{\alpha\beta}=\\ =\left(\sqrt{-g}\,\right)^{2/3}\mathrm{diag}\left\{e^{-N\tau/3},e^{-N\tau/3},e^{2N\tau/3}\right\}.\qquad(58)$$

При $A=B=N=0$ метрика (54) соответствует изотропной Вселенной:

$$g_{\alpha\beta}=\varkappa^2\left(\sqrt{-g}\,\right)^{2/3}(F_\alpha F_\beta+G_\alpha G_\beta+H_\alpha H_\beta).\qquad(59)$$

Здесь $\sqrt{-g}$ при $\lambda>0$ определяется формулой (40), в которой $f^2=1$, при $\lambda<0$ выполняется уравнение (35), в котором $f^2=1$.

Вычисление тензора энергии–импульса спинорного поля для полученных решений приводит к следующему соотношению для его компоненты T_{44} в синхронной системе координат:

$$T_{44}=m\rho\cos\eta=\frac{\varepsilon mC_\rho}{\sqrt{-g}}.\qquad(60)$$

По определению $C_\rho>0$, поэтому полученные выше решения с $\varepsilon=-1$ соответствуют отрицательной плотности энергии, при $\varepsilon=1$ плотность энергии спинорного поля положительна.

Рассмотрим преобразование переменных системы координат наблюдателя $(x^\alpha,t)\to(x^\alpha,\tau)$, определяемое уравнением $d\tau=\rho u^4dt$. Явная зависимость функции $\tau(t)$ задана соотношениями (47), (48) или (49). Вычисление показывает, что в системе координат с переменными x^α, τ выполняется уравнение

$$\left[\partial_j\left(\sqrt{-g}\,g^{ij}\right)\right]'=\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt{-g}\,g^{4i}\right)'=0.\qquad(61)$$

Таким образом, система координат с переменными x^α, τ является гармонической. Нетрудно видеть, что параметры t и τ/C_ρ, где постоянная интегрирования C_ρ определяется решением (25), имеют одинаковую размерность.

При преобразовании $(x^\alpha,t)\to(x^\alpha,\tau)$ пространственная часть метрики не меняется. Следует обратить внимание, что зависимость определителя $\gamma=\det\|g_{\alpha\beta}\|$ из пространственных компонент метрического тензора от времени, определяющая процессы расширения или сжатия Вселенной, в синхронной и в гармонической системах координат существенно различна. Это обусловливает существенное различие сценариев эволюции Вселенной в синхронной и в гармонической системах координат.

В заключение отметим некоторые качественные отличия полученных решений уравнений Эйнштейна с космологическим членом $\lambda\neq0$ в синхронной системе координат от решений этих уравнений без космологического члена.

1. При $\lambda\neq0$ существуют решения без особых точек (решение (40) при $f>1$, $\varepsilon=-1$ и $f<0$, $\varepsilon=-1$).
2. Существуют решения с горизонтальной асимптотой для $\sqrt{-g}$, т.е. Вселенная может расширяться только до некоторого предела, определяемого постоянными интегрирования (решение (42)).
3. Существуют решения с бесконечным числом особых точек. В этом случае Вселенная проходит замкнутый цикл развития (решение (35)).

ЛИТЕРАТУРА

1. C. J. Isham and J. E. Nelson, Phys. Rev. D **10**, 3226 (1974).
2. C. J. Radford and A. N. Klotz J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 317 (1983)
3. P. Wils, J. Math. Phys. **32**, 231 (1991).
4. Ю. П. Рыбаков, Б. Саха, Г. Н. Шикин, Изв. вузов. Физика, вып. 7, 40 (1994).
5. V. G. Bagrov, A. D. Istomin, and V. V. Obuckov, Gravitation and Cosmology **2**, 117 (1996).
6. G. Platania and R. Rosania, Europhys. Lett. **37**, 585 (1997).
7. В. А. Желнорович, *Теория спиноров и ее применения*, Август–Принт, Москва (2001).
8. В. А. Желнорович, ДАН СССР **346**, 21 (1996).
9. V. A. Zhelnorovich, Gravitation and Cosmology **2**, 109 (1996).
10. В. А. Желнорович, ДАН СССР **296**, 571 (1987).
11. V. Fock, Z. Phys. **57**, 216 (1929).
12. В. А. Желнорович, ДАН СССР **311**, 590 (1990).
13. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков , О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, Москва (1981).