

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА МАЛОЙ ЭНЕРГИИ В СИЛЬНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

*А. И. Мильштейн**, *И. С. Терехов*

*Институт ядерной физики им. Г. И. Буджера Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 28 октября 2003 г.

Проведен аналитический анализ сечения рассеяния электронов малой энергии в сильном кулоновском поле. Показано, что в широкой области энергий точное сечение существенно отличается от результатов, полученных в первом борновском приближении и в нерелятивистском приближении.

PACS: 25.20.Dc

1. ВВЕДЕНИЕ

Явное выражение для сечения рассеяния электрона произвольной энергии в сильном кулоновском поле, содержащее бесконечный ряд по полиномам Лежандра, было получено много лет назад в работе [1]. Хотя в ряде работ были развиты методы суммирования этого ряда, численные расчеты сечения все еще являются сложной задачей. Детальный обзор работ, посвященных обсуждаемой проблеме, может быть найден в книге [2]. В работах [3–5] были проведены численные расчеты сечения рассеяния электрона в кулоновском поле для различных углов рассеяния, зарядов ядер Z и энергий электрона выше 0.023 МэВ. При рассмотрении рассеяния назад для $Z = 80$ было показано, что при уменьшении энергии электрона от 1.675 МэВ до 0.023 МэВ отношение точного релятивистского сечения к нерелятивистскому (резерфордскому) сечению увеличивается от 0.15 до 2.35. В связи с таким большим отличием точного результата от полученного в нерелятивистском приближении возникает вопрос о поведении точного сечения рассеяния медленных электронов в сильном кулоновском поле. В настоящей работе мы находим ответ на этот вопрос, вычисляя асимптотику сечения для произвольного Z и малой энергии электрона.

2. СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Волновая функция электрона $\psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ во внешнем поле может быть получена из функции Грина $G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon)$ уравнения Дирака в этом поле. Воспользуемся известным соотношением:

$$\begin{aligned} \lim_{r_1 \rightarrow \infty} G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\varepsilon) &= \\ &= -\frac{\exp(ipr_1)}{4\pi r_1} \sum_{\lambda=1,2} \psi_{\lambda\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r}_2) \bar{u}_{\lambda\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_{\lambda\mathbf{p}} = \sqrt{\varepsilon + m} \begin{pmatrix} \phi_{\lambda} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\varepsilon + m} \phi_{\lambda} \end{pmatrix},$$

где $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, m — масса электрона, $\psi_{\lambda\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r})$ обозначает решение уравнения Дирака, содержащее на бесконечности плоскую волну с импульсом $\mathbf{p} = -p\mathbf{n}_1$ ($\mathbf{n}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,2}/r_{1,2}$) и расходящуюся сферическую волну, $\lambda = \pm 1$ нумерует два независимых спинора ϕ_{λ} , $\hbar = c = 1$. В кулоновском поле правая часть выражения (1) содержит дополнительный множитель $(2pr_1)^{iq}$, где $q = Z\alpha\varepsilon/p$ и $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры. В работе [6] было получено удобное интегральное представление функции Грина электрона в кулоновском поле. Используя равенства (19)–(22) работы [6], получаем

*E-mail: milstein@inp.nsk.su

$$\psi_{\lambda\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r}_2) = \sqrt{\varepsilon + m} \sum_{l=1}^{\infty} \begin{pmatrix} f_1 \\ \frac{p\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2}{\varepsilon + m} f_2 \end{pmatrix},$$

$$f_{1,2} = \left[\left(R_1 A + i \frac{mZ\alpha}{p} R_2 B \right) M_1 \mp i R_2 B M_2 \right] \phi_{\lambda},$$

$$A = l \frac{d}{dy} (P_l(y) + P_{l-1}(y)),$$

$$B = \frac{d}{dy} (P_l(y) - P_{l-1}(y)),$$

$$y = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2, \quad R_{1,2} = 1 \mp (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1),$$

$$M_{1,2} = i \frac{\exp(ipr_2 - i\pi\nu)}{pr_2} \int_0^{\infty} t^{(\mp 1 - 2iq)} \times$$

$$\times \exp(it^2) J_{2\nu}(2t\sqrt{2pr_2}) dt.$$

Здесь $P_l(x)$ — полиномы Лежандра, $J_{2\nu}$ — функции Бесселя, $\nu = \sqrt{l^2 - (Z\alpha)^2}$. Интегралы в функциях $M_{1,2}$ выражаются через вырожденные гипергеометрические функции. Результат (2) согласуется с хорошо известным решением уравнения Дирака в кулоновском поле.

Для нахождения амплитуды рассеяния необходимо вычислить коэффициент W_{λ} при расходящейся сферической волне $\exp[ipr_2 + iq \ln(2pr_2)]/r_2$ в асимптотике функции $\psi_{\lambda\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{r}_2)$ ($r_2 \rightarrow \infty$).

Ненулевой вклад в W_{λ} дает функция M_1 , см. (2), причем необходимая асимптотика этой функции определяется областью интегрирования $t \ll 1$. Имейм

$$W_{\lambda} = \sqrt{\varepsilon + m} \sum_{l=1}^{\infty} \begin{pmatrix} f \\ \frac{p\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2}{\varepsilon + m} f \end{pmatrix},$$

$$f = \frac{i \exp(-i\pi\nu) \Gamma(\nu - iq)}{2p \Gamma(\nu + 1 + iq)} \left[R_1 A + i \frac{mZ\alpha}{p} R_2 B \right] \phi_{\lambda}.$$

Вычисляя поток рассеянных частиц, усредняя его по спинам и деля на плотность падающего тока, получаем сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4p} \sum_{\lambda=1,2} W_{\lambda}^+ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2) W_{\lambda} =$$

$$= \frac{2}{p^2} \left\{ (1+x)|F'|^2 + \left(\frac{mZ\alpha}{p} \right)^2 \frac{|F|^2}{1-x} \right\},$$

$$F = -\frac{i}{2} \sum_{l=1}^{\infty} l \exp[i\pi(l-\nu)] \frac{\Gamma(\nu-iq)}{\Gamma(\nu+1+iq)} \times$$

$$\times [P_l(x) - P_{l-1}(x)],$$

$$F' = \frac{dF}{dx}, \quad x = \cos \vartheta = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2.$$

Этот результат совпадает с полученным ранее в работе [1].

3. СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ В НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

Вычислим сечение рассеяния (4) при $q = Z\alpha\varepsilon/p \gg 1$ и $Z\alpha \sim 1$. Эта область параметров соответствует рассеянию электрона низкой энергии в сильном кулоновском поле. Рассмотрим отношение точного по параметру $Z\alpha$ сечения к сечению

$$\frac{d\sigma_B}{d\Omega} = \frac{q^2}{p^2(1-x)^2} \left[1 - \frac{p^2}{2\varepsilon^2}(1-x) \right],$$

полученному в первом борновском приближении. С помощью асимптотики Γ -функции при больших значениях аргумента выражение для $S = d\sigma/d\sigma_B$ может быть приведено к виду

$$S = 1 + \frac{1-x}{q} \operatorname{Im} \left\{ \exp \left(-iq \ln \frac{1-x}{2} \right) \times \right.$$

$$\times \sum_{l=1}^{\infty} l(-1)^l [P_l(x) - P_{l-1}(x)] [\exp(-2i\pi\nu) - 1] \times$$

$$\left. \times \exp \left(\frac{il^2}{q} \right) \right\}.$$

При $1+x \gg 1/q$ множитель $\exp(il^2/q)$ в выражении (6) может быть заменен на единицу. В результате получаем:

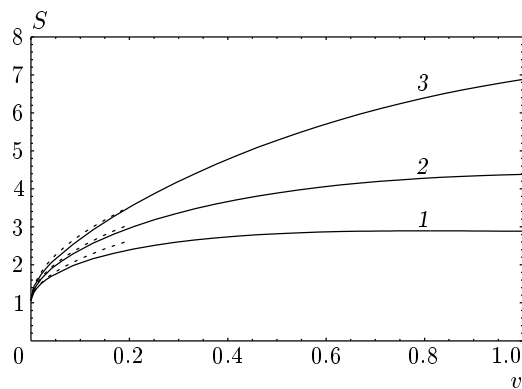


Рис. 1. Зависимость функции S от ν при $x = -1$ и $Z\alpha = 0.6$ (1), 0.7 (2) и 0.8 (3). Сплошная линия — точный результат, пунктирная — асимптотика

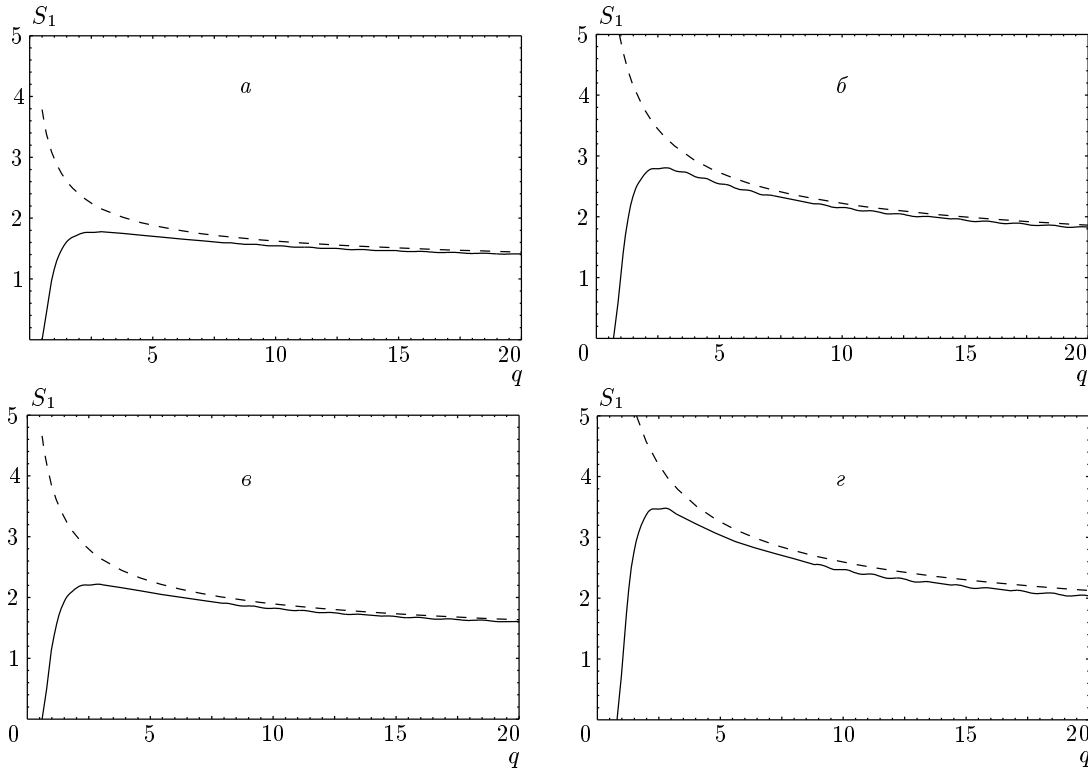


Рис. 2. Зависимость функции S_1 от переменной $q = Z\alpha/v$ при $Z\alpha = 0.5$ (а), 0.6 (б), 0.7 (в), 0.8 (г). Сплошная линия — точный результат, штриховая — асимптотика

$$S = 1 + \frac{1-x}{q} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(-iq \ln \frac{1-x}{2} \right) \times \right. \\ \times \left[\pi(Z\alpha)^2 \left(\sqrt{\frac{2}{1+x}} - 1 \right) - i\pi^2(Z\alpha)^4 \ln \sqrt{\frac{1+x}{2}} - \right. \\ \left. \left. - i \sum_{l=1}^{\infty} l(-1)^l [P_l(x) - P_{l-1}(x)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\exp(-2i\pi\nu) - 1 - \frac{i\pi(Z\alpha)^2}{l} + \frac{\pi^2(Z\alpha)^4}{2l^2} \right) \right] \right\}. \quad (7)$$

Таким образом, при $1+x \gg 1/q$ поправка к функции S пропорциональна $1/q$. Отметим, что сумма по l в выражении (7) сходится очень быстро при произвольном x . Если $1+x \sim 1/q$ (рассеяние назад), главный вклад в сумму (6) дают моменты $l \sim \sqrt{q} \gg 1$. Используя асимптотику полиномов Лежандра при $x \rightarrow -1$ и заменяя суммирование интегрированием, получаем

$$S = 1 + (1-x) \frac{\pi^{3/2}(Z\alpha)^2}{\sqrt{q}} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{q(1+x)}{4} \right) \times \\ \times J_0 \left(\frac{q(1+x)}{4} \right). \quad (8)$$

Видно, что при $1+x \sim 1/q$ поправка к функции S пропорциональна $1/\sqrt{q} \propto \sqrt{p/\varepsilon}$. Поэтому S очень медленно стремится к единице при $v \rightarrow 0$. Даже при сравнительно низких энергиях точное по $Z\alpha$ сечение рассеяния назад существенно отличается от $d\sigma_B/d\Omega$.

При $x = -1$ и произвольных значениях q точное выражение для функции S (см. (4)) имеет простой вид:

$$S = 4 \left| \sum_{l=1}^{\infty} l \exp(-i\pi\nu) \frac{\Gamma(\nu - iq)}{\Gamma(\nu + 1 + iq)} \right|^2. \quad (9)$$

На рис. 1 показана зависимость функции S от $v = p/\varepsilon$ при $x = -1$ и нескольких значениях Z . На этом же рисунке приведена низкоэнергетическая асимптотика (8) при $x = -1$:

$$S = 1 + \sqrt{2} \pi^{3/2} (Z\alpha)^{3/2} \sqrt{v}. \quad (10)$$

Видно, что для рассеяния назад точное по $Z\alpha$ сечение существенно отличается от борновского даже при малых скоростях v , и это различие уменьшается очень медленно ($\propto \sqrt{v}$). На рис. 1 видно, что точный

результат практически не отличается от асимптотики при $v < 0.2$.

Как известно, при $v \ll 1$ борновское сечение переходит в резерфордское:

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{mv^2(1-x)} \right)^2. \quad (11)$$

Интересно рассмотреть отношение точного сечения рассеяния к резерфордскому, $S_1 = d\sigma/d\sigma_R$. На рис. 2 показана зависимость S_1 от $q = Z\alpha/v$ для $x = -1$ и нескольких значений параметра $Z\alpha$. Видно, что отношение сечений S_1 растет при уменьшении энергии, достигает максимума, после чего медленно стремится к единице ($S_1 - 1 \propto 1/\sqrt{q} \propto \sqrt{v}$).

В классической электродинамике при рассеянии с прицельными параметрами ρ , удовлетворяющими соотношению $Z\alpha/mv\rho \gtrsim 1$, частица на минимальных расстояниях от кулоновского центра достигает скоростей $v_{max} \sim 1$, и релятивистские эффекты становятся существенными. В релятивистской классической механике при $\rho < (Z\alpha)/mv$ (по-прежнему рассматриваем случай $v \ll 1$) существует явление падения на центр. Кроме того, сечение рассеяния на углы, близкие к π , является сингулярным. При $1+x \ll v^{4/3} \ll 1$ из формул, приведенных в [7], нетрудно получить, что в этой области

$$\frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{mv} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2v^4} \right)^{1/3} \frac{1}{6\sqrt{2(1+x)}}. \quad (12)$$

Однако в квантовом случае при $Z\alpha \sim 1$ и $v \rightarrow 0$ сечение рассеяния назад (малые ρ) стремится к нерелятивистскому пределу. Это связано с тем, что для данного ρ возникает неопределенность угла рассеяния $\Delta\phi \sim 1/mv\rho$, которая становится порядка единицы при $\rho \lesssim Z\alpha/mv$.

Авторы благодарны Р. Н. Ли и В. М. Страховенко за полезные обсуждения и интерес к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-16510).

ЛИТЕРАТУРА

1. N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. A **124**, 426 (1929).
2. H. Überall, *Electron Scattering From Complex Nuclei*, Academ. Press, New York (1971).
3. J. H. Bartlett and R. E. Watson, Proc. Amer. Acad. Arts Sci **74**, 53 (1940).
4. J. A. Doggett and L. V. Spencer, Phys. Rev. **103**, 1597 (1956).
5. N. Sherman, Phys. Rev. **103**, 1601 (1956).
6. A. I. Milstein and V. M. Strakhovenko, Phys. Lett. A **90**, 447 (1982).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973), с. 127.