ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 4, стр. 805–807

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛУЧЕЙ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. А. Станиславский[*]

Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины
61002, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 8 октября 2003 г.

Рассмотрено интегрально-дифференциальное уравнение для функции распределения лучей по углам в среде со случайными неоднородностями, которые порождают захват лучей из-за локализации волн в случайном месте и в случайные моменты времени. Получены формулы для среднего квадрата отклонения луча от первоначального направления, обобщающие «закон трех вторых».

PACS: 42.25.Dd, 05.40.-a

Флуктуации направления распространения лучей в случайно-неоднородной среде — часто встречающееся явление в природе. Это и случайная рефракция радиоволн в ионосфере и солнечной короне, и дрожание изображения звезд из-за атмосферных неоднородностей и др. Распространение луча (света, радиоволн, звука) в таких средах можно описать как процесс нормальной диффузии [1, 2]. Одним из необычных свойств, предсказанных, а затем обнаруженных в нерегулярных средах, является локализация Андерсона [3]. Она блокирует нормальную диффузию. Применительно к распространению волн в нерегулярной среде локализация Андерсона возникает в результате интерференции волн при многократном рассеянии [4]. При этом две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях вдоль замкнутого пути, встречаются в фазе, что приводит к более вероятному возвращению волны в исходную точку излучения, чем распространение волн по другим направлениям. Изменения свойств статистически-неоднородной среды происходят не только от точки к точки, но и с течением времени, поэтому у процесса локализации волн может появиться случайный характер, т. е. локализация происходит в случайном месте и в случайные моменты времени. Такая «случайная локализация» меняет процесс диффузии распространения лучей в нерегулярной среде. В этой статье мы предлагаем подход к описанию этого эффекта.

Предположим, что в среде нет статистически выделенных положений и направлений. Это допущение приводит к случайным поворотам луча при его распространении в неоднородной среде. Из-за локализации происходит захват луча в некоторой области. Поскольку луч в этой области возвращается в первоначальную точку его захвата, то движение луча как бы «замораживается» на некоторый интервал времени. Затем луч покидает эту область и со случайным поворотом продолжает движение в среде, пока не будет захвачен другой областью (точкой), где процесс локализации повторяется. Вследствие случайных извилин, обусловленных неоднородностями среды, набегает интересующая нас случайная рефракция.

Пусть отклонение угла θ луча от своего первоначального направления описывается плотностью вероятности $W_\alpha(\theta,\sigma)$. Здесь независимая переменная σ определяет путь, который прошел луч. Найдем интегрально-дифференциальное уравнение для этой плотности вероятности. В отличие от вращательного броуновского движения наш анализ рассматривает случайные блуждания, которые имеют случайные отрезки $\Delta\sigma_i$ между скачками случайного отклонения угла луча, $\Delta\theta_i$. Точное знание функций распределения этих двух случайных величин необязательно. Достаточно предположить, что скачки отклонения угла луча являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, которые находятся в области притяжения нормально-

[*]E-mail: alexstan@ira.kharkov.ua

го распределения вероятности. В свою очередь, случайные отрезки $\Delta\sigma_i$ тоже будут независимыми идентично распределенными величинами, но с областью притяжения устойчивого распределения, характеризуемого индексом α. В силу неотрицательности отрезков $\Delta\sigma_i$ последнее из упомянутых распределение вероятности будет полностью асимметричным, а индекс α принимает значения в интервале $0 < \alpha \le 1$. Напомним, что случайная величина, подчиняющаяся такому вероятностному распределению $f(x)$, описывается преобразованием Лапласа вида

$$\phi(s) = \int_0^\infty \exp(-sx)\, df(x) = \exp\{-(Ax)^\alpha\},$$

где $x \ge 0$ для некоторых значений $A > 0$ [5]. Результирующий путь σ представляет собой сумму отрезков $\Delta\sigma_i$. Обе случайные величины, $\Delta\sigma_i$ и $\Delta\theta_i$, являются марковскими, однако первая является направляющей для второй. Это приводит к тому, что результирующий процесс свойство марковости может утратить [6]. Благодаря сходимости по распределению, существует математически корректный предельный переход от дискретной модели к непрерывному пределу [7]. Тогда уравнение диффузии принимает вид

$$W_\alpha(\theta,\sigma) - W_\alpha(\theta,0) = \\ = \int_0^\sigma \frac{D}{\Gamma(\alpha)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial W_\alpha(\theta,\sigma')}{\partial\theta}\right)(\sigma-\sigma')^{\alpha-1}\,d\sigma',$$

где D — константа диффузии, а $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Решение этого уравнения можно выразить через интегральное преобразование от плотности распределения вращательного броуновского движения следующим образом:

$$W_\alpha(\theta,\sigma) = \int_0^\infty F_\alpha(z)\, W_1(\theta,\sigma^\alpha z)\, dz\,,$$

где

$$F_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-z)^k}{k!\Gamma(1-\alpha-k\alpha)}.$$

Из уравнения диффузии сразу имеем среднее:

$$\overline{\cos\theta} = E_\alpha(-2D\sigma^\alpha)\,,$$

где

$$E_\alpha(-x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{\Gamma(1+n\alpha)}$$

— функция Миттаг–Леффлера. При больших σ все направления луча становятся равновероятными. Но в отличие от нормальной диффузии ($\alpha = 1$) для достижения такой цели лучу необходимо пройти больший путь σ. Этот результат чем-то напоминает «сверхмедленную релаксацию».

Следуя методике, представленной в работе [8], найдем средний квадрат расстояния r по прямой от точки входа луча до точки наблюдения, в которую он попадает, пройдя сложный путь σ в среде:

$$\overline{r^2} = \frac{\sigma^\alpha}{D\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{2D^2}\Big[1 - E_\alpha(-2D\sigma^\alpha)\Big]. \qquad (1)$$

При малых $D\sigma$ ($D\sigma \ll 1$) величина $\overline{r^2}$ принимает вид

$$\overline{r^2} \approx 2\sigma^{2\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{2D\sigma^\alpha}{\Gamma(3\alpha+1)}\right]. \qquad (2)$$

Если совместить ось z полярной системы координат с первоначальным направлением луча, то средний квадрат смещения луча в направлении этой оси определяется формулой

$$\overline{z^2} = \frac{1}{3D}\left[\frac{\sigma^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{6D}\Big(1 - E_\alpha(-6D\sigma^\alpha)\Big)\right]. \qquad (3)$$

В случае малых $D\sigma$ он записывается как

$$\overline{z^2} \approx 2\sigma^{2\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{6D\sigma^\alpha}{\Gamma(3\alpha+1)}\right]. \qquad (4)$$

Теперь можно вычислить средний квадрат отклонения луча от его первоначального направления. На основании (1) и (3) получаем

$$\overline{\rho^2} = \overline{r^2} - \overline{z^2} = \frac{2\sigma^\alpha}{3D\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{2D^2}\Big[1 - E_\alpha(-2D\sigma^\alpha)\Big] + \\ + \frac{1}{18D^2}\Big[1 - E_\alpha(-6D\sigma^\alpha)\Big]. \qquad (5)$$

В случае малых $D\sigma$ мы приходим к обобщению «закона трех вторых» [8]:

$$\sqrt{\overline{\rho^2}} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Gamma(3\alpha+1)}} D^{1/2}\sigma^{3\alpha/2}. \qquad (6)$$

Из формул (1), (3) и (5) следует, что при достаточно больших σ средние квадраты смещений растут пропорционально σ^α. При $\alpha = 1$ мы приходим к случаю нормальной диффузии, когда локализация волн отсутствует. Таким образом, рассмотренный подход охватывает и классические результаты, широко известные в литературе [1, 2] из теории распространения лучей в случайно-неоднородной среде.

В заключение следует упомянуть, что заметные экспериментальные отклонения от «закона трех вторых» (вернее сказать, от степени трех вторых в этом законе) были отмечены еще в статье [9]. Однако они не были приняты во внимание, возможно, из-за отсутствия приемлемой интерпретации и были отнесены к систематическим ошибкам измерений. В свете полученных в данной работе результатов этот вопрос может быть пересмотрен. Тем более новые более точные экспериментальные исследования флуктуаций распространения лучей в подходящих случайно-неоднородных средах были бы весьма полезны для проверки предложенной здесь модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, Наука, Москва (1966).

2. Л. А. Чернов, *Волны в случайно-неоднородных средах*, Наука, Москва (1975).

3. P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).

4. D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, Nature **390**, 671 (1997).

5. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва (1983).

6. В. Феллер, *Введение в теорию вероятности и ее приложения*, Мир, Москва (1984).

7. A. A. Stanislavsky, Phys. Scripta **67**, 265 (2003).

8. Л. А. Чернов, ЖЭТФ **24**, 210 (1953).

9. И. Г. Колчинский, Астрон. ж. **29**, 350 (1952).