

# ОПЕРАТОР СТОЛКНОВЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ХОЛОДНОМ ГАЗЕ АТОМАРНЫХ ЧАСТИЦ

Л. П. Бабич\*

Российский федеральный ядерный центр  
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики  
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия

Поступила в редакцию 18 сентября 2003 г.

Проведен последовательный вывод оператора столкновений релятивистских электронов с газом холодных атомарных частиц с учетом упругих взаимодействий, возбуждения электронных оболочек и ионизации. Точно описано рождение вторичных электронов. В области энергий, гораздо больших энергии связи атомных электронов, оператор включает только угловое рассеяние на ядрах и ионизационный интеграл, автоматически учитывающий рассеяние на атомных электронах. Выполнен анализ оператора столкновений, использованного ранее для исследования кинетики лавин релятивистских убегающих электронов. Более точный оператор, полученный в данной работе, формально проще и требует меньших затрат машинного времени при расчетах на ЭВМ.

PACS: 52.25.Dg

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В операторах столкновений кинетического уравнения (КУ), редуцированных к формам, приемлемым для выполнения численных расчетов транспорта релятивистских электронов в веществе, обычно игнорируются редкие события рождения электронов высоких энергий. Такие события, однако, могут изменить ход ионизационного процесса в присутствии электрического поля, приводя, как показали Гуревич, Милих и Руссель-Дюпре, к развитию лавин релятивистских убегающих электронов (ЛРУЭ) и пробоя газов в более слабых полях, чем необходимо для обычного пробоя [1, 2]. Теория пробоя воздуха и механизма восходящих атмосферных разрядов с участием ЛРУЭ развивалась в терминах кинетического уравнения [3, 4]

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \left[ \frac{1 - \mu^2}{p} \frac{\partial}{\partial \mu} f + \mu \frac{\partial}{\partial p} f \right] eE = \text{St}_{fr} + \text{St}_{sc} + \text{St}_{ion} \quad (1.1)$$

со следующими компонентами оператора столкновений электронов с молекулами:

$$\text{St}_{fr} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} [p^2 F(p) f(t, p, \mu)], \quad (1.2)$$

$$\text{St}_{sc} = \frac{(Z_{mol}/2 + 1)F(p)}{4\gamma p} \hat{L}_\mu f(t, p, \mu), \quad (1.3)$$

$$\text{St}_{ion} = N_{mol} \beta c \int_{2\varepsilon + \varepsilon_{ion}}^{\infty} d\varepsilon' \left( \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \right) \times \\ \times \sigma_{ion}(\varepsilon, \varepsilon') \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t, \varepsilon', \mu') d\alpha. \quad (1.4)$$

Операторы (1.2) и (1.3) описывают поток в пространстве импульсов и диффузию по углам вследствие рассеяния на атомных ядрах (компонента (1.3), содержащая множитель  $Z_{mol}/2$ ) и электронах. Рождение электронов высоких энергий описывается ионизационным интегралом (1.4). Здесь  $f(t, p, \mu)$  — функция распределения электронов (ФРЭ) по модулю импульса  $p$  и косинусу угла между  $\mathbf{p}$  и единичным вектором в направлении электрической силы  $\mathbf{e} = -\mathbf{E}/E$ ,  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности поля,  $e$  — элементарный заряд,  $\varepsilon_{ion}$  — порог ионизации,  $N_{mol}$  — концентрация молекул,  $Z_{mol}$  — число электронов в молекуле,  $\alpha$  — азимутальный угол (см. рис. 1),

$$\hat{L}_\mu = \frac{\partial}{\partial \mu} (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu}$$

\*E-mail: babich@expd.vniief.ru, kay@sar.ru

— угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат,  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ,  $\beta = v/c$ ,  $F(p)$  — сила трения, описывающая усредненные потери энергии электрона [5, 6],  $\sigma_{ion}(\varepsilon', \varepsilon)$  — дифференциальное сечение ионизации,  $\varepsilon = (\gamma - 1)mc^2$  — кинетическая энергия. Штрихами обозначены значения величин до актов взаимодействий.

Из численного решения (1.1)–(1.4) в [3, 4] вычислена зависимость характерного времени  $t_e$  усиления ЛРУЭ от  $eE/F_{min}$ . В последующих работах для устранения расхождения со значениями  $t_e$ , полученными методом Монте-Карло [7, 8], уточнялась процедура решения (1.1)–(1.4) [8–12]. Удовлетворительное согласие было достигнуто в работах [10–12], где описание процесса ионизации в КУ велось не на плоскости, как в [3, 4], а в трехмерной геометрии, и КУ (1.1)–(1.4) записано в дивергентном виде. Остаточное расхождение, возможно, связано с приближениями, сделанными в [3, 4] при получении операторов (1.2)–(1.4).

В настоящей работе излагается последовательный вывод оператора столкновений в среде с однородным внешним электрическим полем, задающим выделенное направление, с описанием всех делаемых приближений. Предполагается доминирование взаимодействий с нейтральными атомами (молекулами), которые считаются неподвижными, так что их распределение по энергиям несущественно. Использована процедура, развитая Холстейном в статье [13], где получен точный нерелятивистский оператор, состоящий из строгих балансных компонент, отвечающих за упругие столкновения, возбуждение и ионизацию. В отличие от [13], редуцируя точный оператор к форме, приемлемой для вычислений, мы не будем пользоваться приближением Лоренца, справедливым для слабоанизотропных ФРЭ, а воспользуемся тем, что в области больших энергий доминируют взаимодействия с малыми изменениями направления и модуля импульса. Поэтому части оператора, отвечающие за упругие взаимодействия и возбуждение атомарных частиц, редуцируются к дифференциальной форме. Ионизационный интеграл, описывающий заселение элемента фазового объема, остается нередуцированным с нижним пределом интегрирования равным точной величине  $\varepsilon + \varepsilon_{ion}$ , как в [13], а не  $2\varepsilon + \varepsilon_{ion}$  как в (1.4). В отличие от работы [13], в нем учтена связь угла рассеяния с энергиями электронов и точное соотношение между углами, которые составляют векторы импульсов электронов, участвующих в ионизационном событии, с направлением  $e$ .

Чтобы выявить различия с (1.2)–(1.4), полный

оператор столкновений был приведен к форме, подобной (1.2)–(1.4), для чего ионизационный интеграл разделен на две части, одна из которых описывает «слабые» взаимодействия, а другая — «сильные» с таким изменением энергии налетающего электрона, что оба электрона после акта ионизации оказываются в области больших энергий, в частности, оба могут стать убегающими. Принят тот же, что и в [3, 4], критерий разделения взаимодействий. В [3, 4] существенно используется явная зависимость сечения  $\sigma_{ion}$  от  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon$  и процедура его факторизации, хотя ни в том, ни в другом нет необходимости.

В газе молекул, состоящих из  $n$  атомов одного сорта, молекулярные величины  $N_{mol}$  и  $Z_{mol}$  связаны с атомными  $N_{at}$  и  $Z_{at}$  соотношениями

$$N_{at} = nN_{mol}, \quad Z_{at} = Z_{mol}/n. \quad (1.5)$$

Компоненты оператора, описывающие возбуждение и ионизацию, содержат произведение  $NZ$ , которое, согласно (1.5), одинаково для атомов и молекул. В компоненту, отвечающую за рассеяние на ядре, входит множитель, в котором содержится число  $n$ , если вести расчеты в терминах молекулярных величин (см. разд. 7):

$$N_{at}Z_{at}^2 = N_{mol}Z_{mol}^2/n. \quad (1.6)$$

## 2. ГЕОМЕТРИЯ ПРОЦЕССОВ РАССЕЯНИЯ

На рис. 1 изображена геометрия рассеяния в системе координат, задаваемой ортами

$$\mathbf{i} = \mathbf{p} \times [\mathbf{e} \times \mathbf{p}]/p^2 \sin \theta = (ep^2 - \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e})) / p^2 \sin \theta,$$

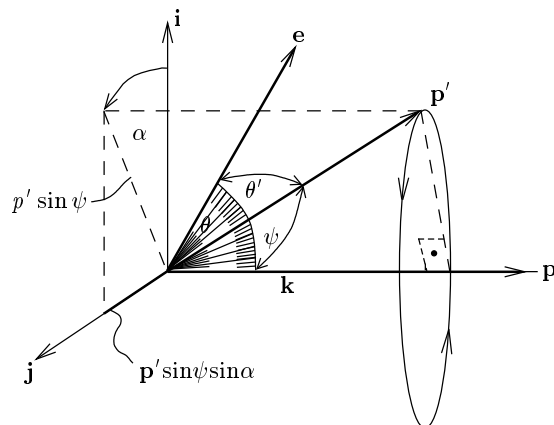


Рис. 1. Геометрия рассеяния:  $e$  — направление электрической силы,  $p'$  и  $p$  — импульсы электрона до и после взаимодействия,  $\psi$  — угол рассеяния

$$\mathbf{j} = [\mathbf{p} \times \mathbf{e}]/p \sin \theta, \quad \mathbf{k} = \mathbf{p}/p,$$

где  $\mathbf{p}(p, \theta, \varphi)$  — вектор импульса электрона после рассеяния [13]. В этой системе  $\mathbf{k}$  — полярная ось, угол рассеяния  $\psi \in [0, \pi]$  становится полярным углом, а угол  $\alpha \in [0, 2\pi]$  между  $\mathbf{j}$  и направлением проекции импульса  $\mathbf{p}'(p', \theta', \varphi')$  до рассеяния на плоскость  $\mathbf{p} = 0$  является азимутальным углом. Формула (19b) из работы [13]

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \psi + \sin \theta \sin \psi \cos \alpha, \quad (2.1)$$

связывающая углы  $\alpha$  и  $\psi$  с углами  $\theta'$  и  $\theta$  между  $\mathbf{e}$  и направлениями импульсов электрона до ( $\mathbf{p}'(p', \theta', \varphi')$ ) и после ( $\mathbf{p}(p, \theta, \varphi)$ ) рассеяния, получена в предположении  $p' = p$ , которое нарушается в неупругих взаимодействиях и которое в действительности является излишним. Если правильное разложение  $\mathbf{p}'$  вдоль ортов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{p}}{p} p' \cos \psi + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{e}}{p \sin \theta} p' \sin \psi \sin \alpha + \frac{\mathbf{p} \times [\mathbf{e} \times \mathbf{p}]}{p^2 \sin \theta} p' \cos \psi \cos \alpha, \quad (2.2)$$

скалярно умножить на  $\mathbf{e}$ , то результат (2.1) получается без предположения  $p' = p$ .

Изменение  $p'$  особенно велико в ионизирующих взаимодействиях, поскольку энергия первичного электрона  $\varepsilon'$  не только уменьшается на  $\varepsilon_{ion}$ , но оставшаяся энергия  $\varepsilon' - \varepsilon_{ion}$  делится между двумя свободными электронами. Учет точной связи между углами  $\theta'$  и  $\theta$  очень важен в задаче о размножении релятивистских убегающих электронов, поскольку энергетический порог убегания зависит от угла, под которым движется электрон относительно направления  $\mathbf{e}$ , и окажутся оба электрона, первичный и вторичный, в режиме убегания или убегающим будет только один из них, определяется этой связью.

### 3. УПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

В приближении симметрии относительно вектора  $\mathbf{e}$  ФРЭ зависит только от модуля импульса  $p$  и угла  $\theta$  между направлениями  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{e}$ . В этом разделе  $\varepsilon$  — полная релятивистская энергия. Вероятность упругого рассеяния электрона в единицу времени из элемента фазового объема  $du' dV$  в элемент  $du dV$ , элемент которого в пространстве импульсов  $du = p^2 dp d\omega$  виден из начала координат под телесным углом  $d\omega$  (рис. 2), определяется выражением

$$T_{el}(p', p, \psi, dp, d\omega) = N_{at} v' (\sigma_{el}(p', \psi)) d\omega \delta(\varphi_{el}(\varepsilon, \varepsilon', \psi)) v dp, \quad (3.1)$$

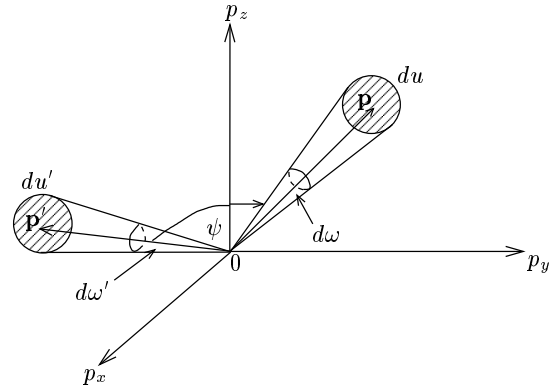


Рис. 2. Геометрия рассеяния:  $du'$  и  $du$  — объемы в пространстве импульсов до и после взаимодействия,  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}$  — импульсы электрона до и после взаимодействия,  $\psi$  — угол рассеяния

где

$$d\sigma_{el} = \sigma_{el}(p', \psi) d\omega'$$

— дифференциальное сечение упругого рассеяния. Посредством дельта-функции  $\delta(\varphi_{el})$  учтен закон сохранения энергии и импульса:

$$\varphi_{el}(\varepsilon, \varepsilon', \psi) = \varepsilon - g_{el}(\varepsilon', \psi) = 0. \quad (3.2)$$

Из формул для рассеяния частицы с массой  $m$  на покоящейся частице с массой  $M$  в лабораторной системе отсчета [14] можно получить точное выражение для энергии, передаваемой второй частице, которое упрощается в случае  $m \ll M$ :

$$\varepsilon' - \varepsilon = p'^2 (1 - \xi) \frac{(1 + \xi)\varepsilon' + M}{(\varepsilon' + M)^2 - \xi^2 p'^2}. \quad (3.3)$$

Здесь  $\xi = \cos \psi$ , а энергия измеряется в единицах энергии покоя электрона  $mc^2$ . Поскольку  $\xi^2 m^2 \ll M^2$ , можно в знаменателе заменить  $p'^2$  на  $\varepsilon'^2$  и упростить (3.3) так, что закон (3.2) в явном виде запишется следующим образом:

$$\varepsilon = g_{el}(\varepsilon', \psi) = \varepsilon' - \frac{(\varepsilon'^2 - 1) \frac{m}{M} (1 - \xi)}{1 + \varepsilon' \frac{m}{M} (1 - \xi)}. \quad (3.4)$$

Полное число переходов в  $du dV$  из всех других элементов  $du' dV$  равно

$$\begin{aligned} & \int f(\mathbf{p}', t) T_{el}(p', p, \psi, dp, d\omega) du' dV = \\ & = dV \int f(p', \mu', t) T_{el}(p', p, \psi, dp, d\omega) \frac{du'}{du} du = \\ & = dV du N_{at} v \int f(p', \mu', t) (\sigma_{el}(p', \psi)) (p'/p)^2 \times \\ & \quad \times \delta(\varphi_{el}(\varepsilon, \varepsilon', \psi)) v' d\omega' dp'. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $\mu' = \cos \theta'$ . Для  $\delta(\varphi_{el})$  справедливо следующее формальное соотношение [14]:

$$\delta(\varphi_{el}(\varepsilon, \varepsilon', \psi)) = \frac{\delta(p' - p_1)}{\left| \frac{\partial g_{el}(\varepsilon', \psi)}{\partial \varepsilon'} \frac{d\varepsilon'}{dp'} \right|_{p'=p_1}} = \frac{\delta(p' - p_1)}{\left| \frac{\partial g_{el}(\varepsilon', \psi)}{\partial \varepsilon'} v' \right|_{p'=p_1}}, \quad (3.6)$$

где  $p_1$  есть решение (3.2). Вычисляя производную  $g_{el}$ , получаем выражение

$$\delta(\varphi_{el}) = \frac{\delta(p' - p_1)}{(p/p')^2 v'}, \quad (3.7)$$

позволяющее выполнить в (3.5) интегрирование по модулю импульса  $p'$ :

$$\begin{aligned} dV du N_{at} v \int f(p', \mu', t) (\sigma_{el}(p', \psi)) (p'/p)^2 \times \\ \times \frac{\delta(p' - p_1)}{(p/p')^2 v'} v' d\omega' dp' = \\ = dV du N_{at} v \int_{\omega'} f(p', \mu', t) (\sigma_{el}(p', \psi)) (p'/p)^4 d\omega', \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $p' = p_1$ . Использование (3.3) приводит к громоздкому выражению для производной  $g_{el}$ . Недостатком (3.4), несущественным, пока  $\varepsilon' \ll M$ , является независимость условия малости переданной энергии

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon' - m} \ll 1$$

от самой энергии:

$$(m/M)(1 - \xi) \ll 1.$$

Вычитая из (3.8) полное число переходов из  $du dV$  в другие элементы, получим следующее выражение для оператора упругих столкновений:

$$St_{el} = N_{at} v \int [f(p', \mu', t) (p'/p)^4 (\sigma_{el}(p', \psi)) - f(p, \mu, t) (\sigma_{el}(p, \psi))] d\omega'. \quad (3.9)$$

Учитывая малость  $\Delta p = p' - p$  по сравнению с  $p'$ , разложим в ряд часть подынтегрального выражения в (3.9), ответственную за заселение элемента  $du dV$ :

$$f(p', \mu', t) (p'/p)^4 (\sigma_{el}(p', \psi)) = f(p, \mu', t) (\sigma_{el}(p, \psi)) + \frac{1}{p^4} \left[ \frac{\partial}{\partial p'} f(p', \mu', t) (p'^4 (\sigma_{el}(p', \psi))) \right]_{p'=p} \Delta p. \quad (3.10)$$

Выразив  $\Delta p$  через  $\Delta \varepsilon(\psi) = v \Delta p$ , а затем, согласно (3.4),  $\Delta \varepsilon(\psi)$  через  $\varepsilon$ ,

$$\Delta \varepsilon(\psi) = \frac{(\varepsilon^2 - m^2 c^4) \frac{m}{M} (1 - \xi)}{m c^2 - \varepsilon \frac{m}{M} (1 - \xi)}, \quad (3.11)$$

преобразуем (3.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} St_{el} = N_{at} v \int_{\omega'} (f(p, \mu', t) - f(p, \mu, t)) (\sigma_{el}(p, \psi)) d\omega' + \\ + \frac{N_{at}}{p^4} \int_{\omega'} \frac{(\varepsilon^2 - m^2 c^4) \frac{m}{M} (1 - \xi)}{m c^2 - \varepsilon \frac{m}{M} (1 - \xi)} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial p} f(p, \mu', t) p^4 (\sigma_{el}(p', \psi)) d\omega'. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В координатах, изображенных на рис. 1, элемент телесного угла равен [13]

$$d\omega' = \sin \psi d\psi d\alpha = -d\xi d\alpha. \quad (3.13)$$

В нерелятивистском пределе (3.12) сводится к формуле (11) работы [13].

Далее использована традиционная процедура, развитая для больших энергий, когда изменение угла  $\theta$  в единичном столкновении мало. Разлагая первую часть оператора (3.12) в ряд по  $\Delta \mu$ , получим для нее диффузионное приближение:

$$\begin{aligned} St_{el(1)} = N_{at} v \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{2\pi} d\alpha \times \\ \times \left[ \frac{\partial f}{\partial \mu} \Delta \mu + \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \frac{(\Delta \mu)^2}{2} \right] \sigma_{el}(p, \psi). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Разлагая в ряд левую часть соотношения (2.1), приведем его к следующему виду:

$$\Delta \mu = -\mu(1 - \xi) + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \xi^2} \cos \alpha. \quad (3.15)$$

Видно, что малые  $\Delta \mu$  реализуются при  $\xi \rightarrow 1$ . Квадратичная форма (3.15) имеет вид

$$\begin{aligned} (\Delta \mu)^2 = \mu^2 (1 - \xi)^2 - 2\mu(1 - \xi) \sqrt{1 - \mu^2} \times \\ \times \sqrt{1 - \xi^2} \cos \alpha + (1 - \mu^2)(1 - \xi^2) \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Так как  $f(\mu, p, t)$  и  $\sigma_{el}(p, \psi)$  не зависят от  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , можно выполнить интегрирование (3.15) и (3.16) по этой переменной:

$$\int_0^{2\pi} \Delta \mu d\alpha = -2\pi \mu(1 - \xi), \quad (3.17)$$

$$\int_0^{2\pi} (\Delta\mu)^2 d\alpha = 2\pi\mu^2(1-\xi^2) + \pi(1-\mu^2)(1-\xi^2) \approx \\ \approx 2\pi [\mu^2(1-\xi)^2 + (1-\mu^2)(1-\xi)]. \quad (3.18)$$

Подставляя (3.17) и (3.18) в оператор (3.14), получим

$$\text{St}_{el(1)} = N_{at} \frac{v}{2} \left[ \sigma_{tr}(p) \hat{L}_\mu f + \sigma(p) \mu^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right], \quad (3.19)$$

где

$$\sigma_{tr}(p) = 2\pi \int_{-1}^1 (1-\xi) \sigma_{el}(p, \xi) d\xi, \quad (3.20)$$

$$\sigma(p) = 2\pi \int_{-1}^1 (1-\xi)^2 \sigma_{el}(p, \xi) d\xi. \quad (3.21)$$

Так как вследствие  $\xi \rightarrow 1$  транспортное сечение (3.20) гораздо больше сечения (3.21), вторым членом в (3.19) можно пренебречь, что позволяет выполнить условие сохранения частиц в упругих столкновениях:

$$\int_{-1}^1 \text{St}_{el(1)} d\mu = 0. \quad (3.22)$$

Продолжим разложение по  $\Delta\mu$  второго слагаемого в (3.12), пренебрегая членами, квадратичными по  $(m/M)(1-\xi)\varepsilon$  по сравнению с  $mc^2$ , и учитывая (3.17):

$$\text{St}_{el(2)} \approx \frac{N_{at}}{p^4} \frac{m}{M} \frac{p^2}{m} \frac{\partial}{\partial p} p^4 \times \\ \times \left[ f(\mu, p, t) \sigma_{tr}(p) - \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \sigma(p) \right]. \quad (3.23)$$

Этот оператор удовлетворяет условию сохранения числа электронов, так как

$$\int_0^\infty \text{St}_{el(2)} p^2 dp = 0 \quad (3.24)$$

вследствие того, что  $f(p, \mu, t) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ . Поскольку доминируют  $\xi \sim 1$ , пренебрегая вторым членом в (3.23), получаем полный оператор упругих столкновений:

$$\text{St}_{el} \approx N_{at} \left[ \frac{v}{2} \sigma_{tr}(p) \hat{L}_\mu f(\mu, p, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{p^4} \frac{m}{M} \frac{p^2}{m} \frac{\partial}{\partial p} p^4 \sigma_{tr}(p) f(\mu, p, t) \right]. \quad (3.25)$$

#### 4. НЕУПРУГИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ (СВЯЗАННО-СВЯЗАННЫЕ ПЕРЕХОДЫ)

Получим оператор  $\text{St}_{ex}$ , отвечающий за возбуждение атомарных частиц в состояние  $(i)$  с энергией возбуждения  $\varepsilon_{ex}^{(i)}$ . Закон сохранения энергии в этом случае записывается как

$$\varphi_{ex}^{(i)}(\varepsilon, \varepsilon', \psi) = \varepsilon - g_{ex}^{(i)}(\varepsilon', \psi) = 0, \quad (4.1)$$

где

$$g_{ex}^{(i)}(\varepsilon', \psi) = \varepsilon' - \varepsilon_{ex}^{(i)}. \quad (4.2)$$

Аналогично (3.1) вероятность рассеяния в единицу времени из  $du'dV$  в  $du dV$  равна

$$T_{ex}^{(i)}(p', p, \psi, dp, d\omega) = \\ = N_{at} v' \sigma_{ex}^{(i)}(p', \psi) d\omega \delta\left(\varphi_{ex}^{(i)}(\varepsilon, \varepsilon', \psi)\right) d\varepsilon, \quad (4.3)$$

где

$$d\sigma_{ex}^{(i)} = \sigma_{ex}^{(i)}(p', \psi) d\omega'$$

— дифференциальное сечение возбуждения состояния  $(i)$ .

Полное число переходов в  $du dV$  из всех других элементов  $du'dV$  равно

$$\sum_i \int f(\mathbf{p}', t) T_{ex}^{(i)} du' dV = \\ = dV \sum_i \int f(\mathbf{p}', t) T_{ex}^{(i)} \frac{du'}{du} du = \\ = dV du N_{at} \sum_i \int f(p', \mu', t) v' \sigma_{ex}^{(i)}(p', \psi) d\omega \times \\ \times \delta\left(\varphi_{ex}^{(i)}(\varepsilon, \varepsilon', \psi)\right) v dp \frac{p'^2 dp' d\omega'}{p^2 dp d\omega}. \quad (4.4)$$

Так как  $\partial g_{ex}^{(i)} / \partial \varepsilon' = 1$ , аналог (3.7) имеет следующий вид:

$$\delta\left(\varphi_{ex}^{(i)}(\varepsilon, \varepsilon', \psi)\right) = \frac{\delta(p' - p_i)}{v'}, \quad (4.5)$$

где  $p_i$  — решение (4.1), а (4.4) сводится к следующему интегралу:

$$dV d\gamma N_{at} v \times \\ \times \sum_i \int f(p', \mu', t) \sigma_{ex}^{(i)}(p', \psi) (p'/p)^2 d\omega', \quad (4.6)$$

в котором  $p' = p_i$ . Вычитая число переходов из  $du dV$  и разлагая в ряд по степеням  $\Delta p = \Delta\varepsilon/v = \varepsilon_{ex}^{(i)}/v$ , получим следующее выражение для  $\text{St}_{ex}$ :

$$\begin{aligned}
 St_{ex} &= N_{at}v \sum_i \int \left[ f(p, \mu', t) \sigma_{ex}^{(i)}(p', \psi) (p'/p)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - f(p, \mu, t) \sigma_{ex}^{(i)}(p, \psi) \right] d\omega' = \\
 &= N_{at}v \sum_i \left\{ \int [f(p, \mu', t) - f(p, \mu, t)] \sigma_{ex}^{(i)}(p, \psi) d\omega' + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta p}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 f(p, \mu', t) \sigma_{ex}^{(i)}(p, \psi) d\omega' \right\}. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Повторяя процедуру (3.14)–(3.18) для первой части  $St_{ex}$ , получаем

$$St_{ex(1)} = N_{at} \frac{v}{2} \sigma_{ex,tr}(p) \hat{L}_\mu f(p, \mu, t), \quad (4.8)$$

где опущено слагаемое, квадратичное по  $(1 - \xi)$ , и использовано обозначение

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ex,tr}(p) &= \sum_i \sigma_{ex,tr}^{(i)}(p) = \\
 &= \sum_i 2\pi \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi) \sigma_{ex}^{(i)}(p, \xi). \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Аналогично (3.23) с учетом того, что

$$v \Delta p = \Delta \varepsilon = \varepsilon_{ex}^{(i)},$$

получаем для второй части  $St_{ex}$ :

$$\begin{aligned}
 St_{ex(2)} &= \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \times \\
 &\times \left[ f(p, \mu, t) F_{ex(1)}(p) - F_{ex(2)}(p) \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} \right]. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Здесь введены силы трения, отвечающие за неупругие соударения (без ионизации):

$$F_{ex(1)} = N_{at} \sum_i \varepsilon_{ex}^{(i)} \sigma_{ex}^{(i)}(p), \quad (4.11)$$

$$\sigma_{ex}^{(i)}(p) = 2\pi \int_{-1}^1 \sigma_{ex}^{(i)}(p, \xi) d\xi, \quad (4.12)$$

$$F_{ex(2)} = N_{at} \sum_i \varepsilon_{ex}^{(i)} \sigma_{ex,tr}^{(i)}(p). \quad (4.13)$$

Операторы (4.8) и (4.10) удовлетворяют условию сохранения числа электронов. Поскольку доминирует рассеяние на малые углы ( $\xi \rightarrow 1$ ), имеем  $\sigma_{ex,tr}^{(i)}(p) \ll \sigma_{ex}^{(i)}(p)$ , и, следовательно, вторым слагаемым в (4.10) можно пренебречь. Слагаемое, пропорциональное  $F_{ex(1)}$ , есть часть члена, описывающего малые изменения импульса электронов (см. разд. 7). В проблеме ЛРУЭ в атмосфере Земли (малые  $Z$ )

$St_{ex}$  является излишним, так как атомные электроны можно считать свободными в силу малости энергий связи (а тем более  $\varepsilon_{ex}^{(i)}$ ) по сравнению с энергией налетающих электронов  $\varepsilon'$ . Связанно-связанные переходы дают некоторую добавку к вкладу соударений, переводящих атомные электроны в непрерывный спектр. Оператор  $St_{ex}$  может быть использован в задачах, где энергия связи сравнима с  $\varepsilon'$ .

### 5. ИОНИЗУЮЩИЕ СОУДАРЕНИЯ

Вероятность того, что электрон в единицу времени в результате соударения с ионизацией оболочки  $(i)$  перейдет из элемента  $du' dV$  в окрестности кинетической энергии  $\varepsilon' = mc^2(\gamma' - 1)$  в элемент  $du dV$  в окрестности  $\varepsilon = mc^2(\gamma - 1)$ , равна

$$\begin{aligned}
 T_{ion}^{(i)}(\varepsilon', \varepsilon, \psi, d\varepsilon, d\omega) &= \\
 &= N_{at}v' (\sigma_{\varepsilon', \omega'}(\varepsilon', \varepsilon, \psi))_{ion}^{(i)} d\omega \delta(\varphi(\varepsilon', \varepsilon, \psi)) d\varepsilon, \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{ion}^{(i)}(\varepsilon', \varepsilon, \psi) &= (\sigma_{\varepsilon', \omega'}(\varepsilon', \varepsilon, \psi))_{ion}^{(i)} d\varepsilon' d\omega' = \\
 &= (\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} (\delta(\varphi)/2\pi) d\varepsilon' d\omega'
 \end{aligned}$$

— дважды дифференциальное (по энергии и углу) сечение ионизации оболочки  $(i)$ ,  $\varepsilon_{ion}^{(i)}$  — порог ионизации оболочки  $(i)$ ,  $(\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)}$  — дифференциальное сечение ионизации, симметричное относительно энергии вторичного электрона  $\varepsilon_s = (\varepsilon' - \varepsilon_{ion}^{(i)})/2$ . Закон сохранения энергии и импульса записывается в виде

$$\varphi(\varepsilon', \varepsilon, \psi) = \cos \psi - \mu_0(\varepsilon', \varepsilon) = 0. \quad (5.2)$$

Для  $\mu_0(\varepsilon', \varepsilon)$  в приближении  $\varepsilon, \varepsilon' \gg \varepsilon_{ion}^{(i)}$  справедлива формула [5, 14]

$$\mu_0^2(\varepsilon', \varepsilon) = \frac{\varepsilon(\varepsilon' + 2mc^2)}{\varepsilon'(\varepsilon + 2mc^2)}. \quad (5.3)$$

Полное число переходов электронов в ионизирующих соударениях, заселяющих в единицу времени элемент фазового объема  $du dV$  в окрестности энергии  $\varepsilon$ , равно

$$\begin{aligned}
 N_{at}dV \sum_i \int f(p', \mu', t) v' (\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} d\omega \times \\
 \times \delta(\varphi) d\varepsilon du' = dV du N_{at}v \times \\
 \times \sum_i \int_{\varepsilon+\varepsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} d\varepsilon' \int_{-1}^1 (\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma^2 - 1} d\xi \times \\
 \times \int_0^{2\pi} f(p', \mu', t) \frac{\delta(\xi - \mu_0)}{2\pi} d\alpha. \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Суммирование ведется по всем оболочкам. После интегрирования по  $\xi$  получается оператор такой же, как (1.4), но с иным нижним пределом интегрирования по  $\varepsilon'$ :

$$\begin{aligned}
 St_{ion(1)} = N_{at}v \sum_i \int_{\varepsilon+\varepsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} d\varepsilon' (\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} \times \\
 \times \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{f(p', \mu', t)}{2\pi}, \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

где, согласно (2.1), (5.2) и (5.3),

$$\mu' = \mu\mu_0 + \sqrt{1 - \mu_0^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \alpha. \quad (5.6)$$

Оператор, описывающий уход электронов из  $du$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 St_{ion(2)} = N_{at}vf(p, \mu, t) \times \\
 \times \sum_i \int_0^{(\varepsilon - \varepsilon_{ion}^{(i)})/2} (\sigma_{\varepsilon}(\varepsilon, \varepsilon'))_{ion}^{(i)} d\varepsilon' = \\
 = N_{at}vf(p, \mu, t) \sum_i \sigma_{tot}^{(i)}(\varepsilon), \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{tot}^{(i)}(\varepsilon) = \int_0^{(\varepsilon - \varepsilon_{ion}^{(i)})/2} (\sigma_{\varepsilon}(\varepsilon, \varepsilon'))_{ion}^{(i)} d\varepsilon' \quad (5.8)$$

— полное сечение ионизации оболочки ( $i$ ). В выражениях (5.5) и (5.7)  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon$  переставлены местами в соответствии с тем, что  $St_{ion(1)}$  отвечает за заселение элемента  $du$ , а  $St_{ion(2)}$  — за уход электронов из  $du$ .

### 6. СЛАБЫЕ ИОНИЗУЮЩИЕ СОУДАРЕНИЯ

Выделим в (5.5) «слабые» взаимодействия, в которых первичный электрон, участвующий в ионизационном событии, сохраняет большую часть энергии, т. е.

$$\varepsilon' \approx \varepsilon. \quad (6.1)$$

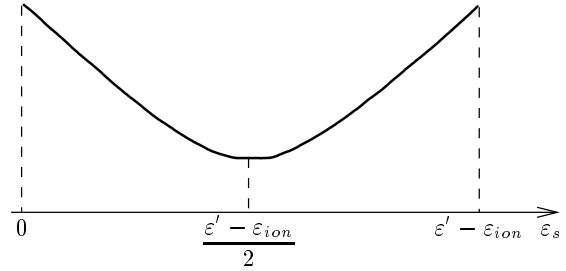


Рис. 3. Иллюстрация зависимости дифференциального сечения ионизации от энергии вторичного электрона

Воспользуемся симметричностью  $(\sigma(\varepsilon', \varepsilon_s))_{ion}^{(i)}$  относительно энергии вторичного электрона  $\varepsilon_s = (\varepsilon' - \varepsilon_{ion})/2$  (рис. 3) [6]. Так как электроны неразличимы, для определенности вторичным считается электрон с меньшей кинетической энергией:

$$\varepsilon_s \leq (\varepsilon' - \varepsilon_{ion})/2. \quad (6.2)$$

Поскольку в  $(\sigma(\varepsilon', \varepsilon_s))_{ion}^{(i)}$  доминирует область энергий  $\varepsilon_s \ll (\varepsilon' - \varepsilon_{ion})/2$ , выражения (6.1) и (6.2) можно считать совместимыми. В силу того, что

$$\varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon_s + \varepsilon_{ion} = \varepsilon + \Delta\varepsilon, \quad (6.3)$$

для «слабых» взаимодействий выполняется неравенство

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_{ion} \leq \frac{\varepsilon' - \varepsilon_{ion}}{2} + \varepsilon_{ion} = \frac{\varepsilon' + \varepsilon_{ion}}{2}. \quad (6.4)$$

Подставляя (6.4) в (6.3), получим для «слабых» взаимодействий формулу (ср. с (1.4))

$$\varepsilon' \leq 2\varepsilon + \varepsilon_{ion}. \quad (6.5)$$

Повторяя процедуру, использованную при выводе оператора упругих столкновений (3.19), с учетом того, что, согласно (5.2),  $\xi = \cos \psi = \mu_0$ , выделяем из (5.5) оператор

$$\begin{aligned}
 St_{ion(1)}^{(weak)} = N_{at}v \sum_i \int_{\varepsilon+\varepsilon_{ion}^{(i)}}^{2\varepsilon+\varepsilon_{ion}^{(i)}} d\varepsilon' (\sigma(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} \left(\frac{p'}{p}\right)^2 \times \\
 \times \left[ f(p', \mu, t) + \frac{1}{2}(1 - \mu_0) \hat{L}_\mu f(p, \mu, t) + \right. \\
 \left. + (1 - \mu_0)^2 \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} \right], \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

где второе и третье слагаемые в квадратных скобках аналогичны членам оператора (3.19) с выполненным интегрированием по  $\xi$  в аналогах (3.20) и (3.21).

Вычислим значение  $1 - \mu_0$  в приближении малых  $\Delta\varepsilon$ , воспользовавшись соотношением (5.3). Здесь впервые учтена малость энергии связи атомных электронов, так как (5.3) получено именно в этом приближении:

$$1 - \mu_0 = 1 - \sqrt{\mu_0^2(\varepsilon', \varepsilon)} \approx \approx 1 - \left(1 + \frac{\partial \mu_0^2 / \partial \varepsilon'}{2\sqrt{\mu_0^2}} \Delta\varepsilon\right)_{\varepsilon'=\varepsilon} = = \frac{2mc^2}{(\varepsilon + 2mc^2)\varepsilon} \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{m\Delta\varepsilon}{p^2}. \quad (6.7)$$

Заменяв  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_s$  в  $(\sigma(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)}$ , разложим подынтегральное выражение в (6.6) по степеням  $\Delta\varepsilon$  и перейдем к интегрированию от  $\varepsilon'$  к  $\varepsilon_s$  с заменой в верхнем пределе интегрирования по  $\varepsilon_s$ , равном (6.2),  $\varepsilon'$  на  $\varepsilon$  в силу (6.1). В результате получается дифференциальное представление оператора слабых ионизирующих соударений

$$\begin{aligned} St_{ion(1)}^{(weak)} = &= N_{at}v \sum_i \left\{ f(p, \mu, t) \int_0^{(\varepsilon - \varepsilon_{ion}^{(i)})/2} (\sigma(\varepsilon, \varepsilon_s))_{ion}^{(i)} d\varepsilon_s + \right. \\ &+ \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} p^2 f(p, \mu, t) \int_0^{(\varepsilon - \varepsilon_{ion}^{(i)})/2} \Delta\varepsilon^{(i)} (\sigma(\varepsilon, \varepsilon_s))_{ion}^{(i)} d\varepsilon_s + \\ &+ \frac{m}{2p^2} \hat{L}_\mu f(p, \mu, t) \times \\ &\left. \times \int_0^{(\varepsilon - \varepsilon_{ion}^{(i)})/2} \Delta\varepsilon^{(i)} (\sigma(\varepsilon, \varepsilon_s))_{ion}^{(i)} d\varepsilon_s \right\}. \quad (6.8) \end{aligned}$$

Используя эффективное торможение  $\kappa$  для «больших» передач импульса [6], введем силу трения, действующую на электроны в результате слабых ионизирующих взаимодействий,

$$F_{ion}(\varepsilon) = N_{at}\kappa = = N_{at} \sum_i \int_0^{(\varepsilon - \varepsilon_{ion}^{(i)})/2} \Delta\varepsilon^{(i)} (\sigma(\varepsilon, \varepsilon_s))_{ion}^{(i)} d\varepsilon_s, \quad (6.9)$$

которая позволяет переписать (6.8) в более компактном виде:

$$\begin{aligned} St_{ion(1)}^{(weak)} = &N_{at}v\sigma_{tot}(\varepsilon)f(p, \mu, t) + \\ &+ \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 F_{ion}(\varepsilon)f(p, \mu, t) + \\ &+ \frac{F_{ion}(\varepsilon)}{2\gamma p} \hat{L}_\mu f(p, \mu, t), \quad (6.10) \end{aligned}$$

где полное сечение ионизации есть сумма

$$\sigma_{tot}(\varepsilon) = \sum_i \sigma_{tot}^{(i)}(\varepsilon). \quad (6.11)$$

Видно, что первое слагаемое в (6.10) полностью компенсируется интегралом (5.7)  $St_{ion(2)}$ , отвечающим за уход электронов из рассматриваемого элемента  $du$ .

Результат (6.10) можно получить, факторизуя в (6.6) сечение ионизации

$$(\sigma(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} = \sigma_{tot}^{(i)}(\varepsilon')\chi^{(i)}(\varepsilon', \varepsilon_s), \quad (6.12)$$

имея в виду его симметрию относительно  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_s$  и учитывая нормировку

$$\int_0^{\varepsilon - \varepsilon_{ion}^{(i)}} \chi^{(i)}(\varepsilon', \varepsilon_s) d\varepsilon_s = 1. \quad (6.13)$$

Строгая процедура редуцирования позволила автоматически выделить из ионизационного интеграла дифференциальную компоненту, отвечающую за угловое рассеяние на атомных электронах. Его отсутствие в [3, 4] обусловлено тем, что процесс рассматривался на плоскости и ФРЭ  $f(p', \mu', t)$  была зафиксирована для двух значений  $\mu'$ , в результате чего упущена возможность разложения в ряд по  $\mu'$ .

За сильные соударения отвечает оператор  $St_{ion(1)}^{(strong)}$ , т.е. часть ионизационного интеграла (5.5), остающаяся после замены в нем нижнего предела интегрирования по энергиям на  $2\varepsilon + \varepsilon_{ion}^{(i)}$ , как в работах [3, 4] (см. формулу (1.4) во Введении).

### 7. ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С АТОМАРНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Операторы, приведенные в предыдущих разделах, имеют довольно широкую область применимости. В этом разделе приводятся аргументы, позволяющие получить более простые и удобные для численных расчетов представления операторов для энергий электронов, намного превышающих энергии ионизации электронных оболочек атомов.



Во избежание ошибок при проведении вычислений уместно следующее замечание. Используя литературные данные для сечений, следует иметь в виду, что зачастую они приводятся в виде, проинтегрированном по углу  $\alpha$ , т. е. содержат множитель  $2\pi$ , тогда как в полученных формулах (см. (3.14), (3.23), (4.7), (5.4)) также выполнено интегрирование по  $\alpha$ .

### 7.1. Упругие взаимодействия

Если использовать формулу Резерфорда с множителем Мотта для  $\sigma_{el}(p, \psi)$  [6, 15], то для транспортного сечения (3.20) получается следующее выражение:

$$\sigma_{tr}(\gamma) = 2\pi \frac{Z_{at}^2 e^4 \gamma^2}{(mc^2)^4 (\gamma^2 - 1)^2} \times \left( 2 \ln \frac{2}{\psi_{min}} - \beta^2 \right). \quad (7.1)$$

Здесь  $\psi_{min} = 0.0153 Z_{at}^{1/3} / \beta \gamma$  согласно модели Томаса-Ферми [15, 16] и выполнено интегрирование по  $\alpha$ . В этом приближении получается следующая зависимость обратной транспортной длины от  $\gamma$  или  $\varepsilon = \gamma mc^2$

$$N_{at} \sigma_{tr}(\gamma) = \frac{4\pi N_{at} Z_{at}^2 e^4 \gamma^2}{(mc^2)^2 (\gamma^2 - 1)^2} \times \left( \ln \frac{131\gamma\beta}{Z_{at}^{1/3}} - \frac{\beta^2}{2} \right). \quad (7.2)$$

Согласно (1.6), в газе молекул, состоящих из двух одинаковых атомов ( $n = 2$ ), (7.2) выражается следующим образом через молекулярные величины:

$$N_{at} Z_{at}^2 = 2 N_{mol} (Z_{mol}/2)^2 = N_{mol} Z_{mol}^2 / 2. \quad (7.3)$$

### 7.2. Ионизация (связанно-свободные переходы)

Если энергии электрона до взаимодействия,  $\varepsilon'$ , и после,  $\varepsilon$ , велики по сравнению с энергией связи атомных электронов, то для сечения ионизации  $(\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)}$  целесообразно, следуя [3, 4], использовать формулу Меллер для сечения рассеяния электрона на первоначально покоящемся свободном электроном [5, 6]. Полное дифференциальное сечение ионизации получается умножением этой формулы на  $Z_{mol}$ :

$$\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon)_{ion} = \frac{2\pi Z_{mol} e^4}{mc^2} \frac{\gamma'^2}{\gamma'^2 - 1} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon' - \varepsilon)} \right] \times \left[ \frac{(2\varepsilon' + mc^2)mc^2}{(\varepsilon' + mc^2)^2} + \frac{1}{(\varepsilon' - \varepsilon)^2} + \frac{1}{(\varepsilon' + mc^2)^2} \right]. \quad (7.4)$$

Выше введена сила  $F_{ex(1)}(p)$ , обусловленная процессами возбуждения (см. (4.11)). В редуцированном операторе (6.10) введена сила  $F_{ion}(p)$ , обусловленная слабыми ионизирующими соударениями. Выразим эти силы через известные формулы квантовой электродинамики. Полные неупругие (исторически принятый термин «ионизационные») удельные потери энергии электронов в среде частиц со средней энергией «ионизации»  $I$  вычисляются через эффективное торможение  $\kappa$ , включая область малых передач импульса, в том числе в результате связанно-связанных переходов, и область больших передач импульса. В области малых передач импульса, определяемой неравенством [6]

$$q^2/m = (p' - p)^2/m \ll mc^2,$$

величина  $\kappa$  вычисляется следующим образом (см., например, формулу (82.20) в книге [6]):

$$\kappa^{(small)} = \frac{2\pi Z_{mol} e^4}{mc^2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \times \ln \left( q \frac{m^2 c^4 (\gamma^2 - 1)}{2.73 I^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right). \quad (7.5)$$

Сюда включены процессы возбуждения и ионизации. Произведение  $N_{mol} \kappa^{(small)}$  дает сумму всей силы  $F_{ex}(p)$  и части  $F_{ion}(p)$ . В области больших передач импульса, определяемой неравенством

$$q^2/m = (p' - p)^2/m \gg I,$$

величина  $\kappa$  вычисляется как интеграл от сечения (7.4), умноженного на энергию  $\varepsilon_s$ , переданную вторичному электрону (см. (6.4), где  $\Delta\varepsilon \approx \varepsilon_s$ ) [6]:

$$\kappa^{(large)} = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon/2} \varepsilon_s (\sigma(\varepsilon, \varepsilon_s))_{ion} d\varepsilon_s, \quad (7.6)$$

где

$$\varepsilon_1 = q_1^2/m, \quad I \ll q_1^2/m \ll mc^2,$$

т. е.  $I$  лежит в области перекрытия.

Входящая в редуцированный оператор (9.1) полная сила трения (см., например, задачу на стр. 383 книги [6])

$$F(p) = \left( \kappa^{(small)} + \kappa^{(large)} \right) N_{mol} = F_{ex}(p) + F_{ion}(p) \quad (7.7)$$

является силой трения Бете  $F(\gamma)$  (см. (1.2)) [5, 6]:

$$F(\gamma) = \frac{2\pi Z_{mol} e^4 N_{mol}}{mc^2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \times \\ \times \left[ \ln \left( \frac{m^2 c^4 (\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)}{2I^2} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{(\gamma - 1)^2}{8\gamma^2} \right]. \quad (7.8)$$

Так как формулы (7.4) и (7.8) выведены в предположении  $\varepsilon', \varepsilon, \varepsilon_s \gg \varepsilon_{ion}$ , при их использовании следует опускать  $\varepsilon_{ion}^{(i)}$  в нижнем пределе ионизационного интеграла и суммирование по индексу  $i$ . Учет  $\varepsilon_{ion}^{(i)}$  приводит к превышению точности, а суммирование фактически выполнено умножением сечения Меллера на  $Z_{mol}$ .

### 7.3. Процессы возбуждения (связанно-связанные переходы)

Эти процессы учитываются посредством силы  $F_{ex(1)}(p)$  и через сечение  $\sigma_{ex,tr}(p)$ . Так как  $\sigma_{el}(p, \psi)$  и

$\sigma_{ex}(p, \psi)$  пропорциональны соответственно  $Z^2$  и  $Z$ , причем в области малых углов оба сечения описываются формулой Резерфорда [15], для достаточно больших  $Z$  величиной  $\sigma_{ex,tr}(p)$  можно пренебречь. Величина  $F_{ex(1)}(p)$  входит в первую компоненту оператора с редуцированным ионизационным интегралом (9.1) и (9.2) через полную силу Бете  $F(p)$  (см. разд. 9). Из выражений (9.3)–(9.6) следует, что составляющая, ответственная за упругие потери энергии, гораздо меньше  $F(p)$ :

$$\frac{m}{M} N_{at} \frac{p^2}{m} \sigma_{tr}(p) / F(\gamma) = \frac{m}{M} \frac{p^2 Z}{m\gamma v p} \Gamma(\gamma) F(\gamma) / F(\gamma) = \\ = \frac{Z_{mol}}{A_{mol}} \frac{m}{m_{nucl}} \Gamma(\gamma) \approx 10^{-4}. \quad (7.9)$$

Здесь отношение числа электронов к числу нуклонов в молекуле  $Z_{mol}/A_{mol} \approx 1/2$ ,  $m/m_{nucl} \approx 1/1840$  есть отношение масс электрона и нуклона и использовано обозначение [16]

$$\Gamma(\gamma) = \frac{\frac{(mc^2)^2 (\gamma - 1)(\gamma^2 - 1)}{2I^2} - \left( \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right)^2}{\ln \left( 131 Z_{at}^{-1/3} \sqrt{\gamma^2 - 1} \right)}. \quad (7.10)$$

Согласно расчетам, выполненным в [16],  $\Gamma$  слабо зависит от  $\gamma$ , увеличиваясь для воздуха от 0.262 до 0.271 при изменении энергии электронов от 51 кэВ до 1.53 МэВ. В множителе перед оператором  $\hat{L}_\mu$  во второй компоненте (9.2) силу  $F_{ion}(p)$  можно заменить полной силой Бете, поскольку для достаточно больших  $Z$  основной вклад в нее дают процессы ионизации (аргументацию см. на стр. 732 книги [15]). Согласно (9.5), во второй компоненте оператора (9.2)

$$N_{at} \frac{v}{2} \sigma_{tr}(p) \gg \frac{F}{2\gamma p}, \quad (7.11)$$

т. е. угловое рассеяние на ядрах доминирует над рассеянием на атомных электронах. В силу (7.11) в полном операторе с нередуцированным ионизационным интегралом (8.2) (см. ниже) первой компонентой пренебрегать нельзя. В кинетике ЛРУЭ эта компонента является важнейшей, увеличивая порог убегающих электронов и уменьшая скорость усиления лавины [7, 8].

Оператор в форме (8.2) с нередуцированным ионизационным интегралом получается из (8.1) бла-

годаря тому, что первым членом, единственным содержащим  $F_{ex(1)}$ , можно пренебречь в области больших энергий, поскольку

$$F_{ex(1)}(p) + \frac{m}{M} N_{at} \frac{p^2}{m} \sigma_{tr}(p) \ll F(p). \quad (7.12)$$

Действительно, как сказано выше, процессы возбуждения дают малый вклад в первую компоненту редуцированного оператора (9.2), включающий полную силу Бете, а поскольку слабые ионизирующие соударения, за которые отвечает эта компонента, содержатся в нередуцированном ионизационном интеграле полного оператора (8.1), то с учетом (7.12) пренебрежение оправдано с высокой точностью.

## 8. ПОЛНЫЙ ОПЕРАТОР СТОЛКНОВЕНИЙ

Объединим части оператора (3.25) для  $St_{el}\{f\}$ , (4.8) и (4.10) для  $St_{ex}\{f\}$  и (5.5) и (5.7) для  $St_{ion}\{f\}$ , пренебрегая членами, квадратичными по  $1 - \xi$ . В результате получим следующее представление полного оператора столкновений:

$$\begin{aligned}
\text{St} \{f(p, \mu, t)\} &= \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \times \\
&\times \left( F_{ex(1)}(p) + \frac{m}{M} N_{at} \frac{p^2}{m} \sigma_{tr}(p) \right) f(p, \mu, t) + \\
&+ \left[ N_{at} \frac{v}{2} (\sigma_{tr}(p) + \sigma_{ex,tr}(p)) \right] \hat{L}_\mu f(p, \mu, t) + \\
&+ N_{at} v \sum_i \int_{\varepsilon + \varepsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} d\varepsilon' (\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} f(p', \mu', t) - N_{at} v \sigma_{tot}(\varepsilon) f(p, \mu, t). \quad (8.1)
\end{aligned}$$

Здесь и ниже  $\sigma_{tot}(\varepsilon)$  есть полное сечение ионизации (6.11);  $\cos \theta' = \mu'(\varepsilon', \varepsilon, \mu, \alpha)$  как функция  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu = \cos \theta$  и  $\alpha$  определяется формулами (5.3) и (5.6), а сечения  $\sigma_{tr}(p)$ ,  $\sigma_{ex,tr}(p)$  и силы  $F_{ex(1)}(p)$ ,  $F_{ion}(p)$  описываются, соответственно, формулами (3.20), (4.9), (4.11) и (6.9).

Ионизационный интеграл в (8.1) получен без каких бы то ни было ограничений кроме тех, которые накладываются законами сохранения. Точность описания определяется дифференциальным сечением и зависимостью  $\mu_0(\varepsilon', \varepsilon)$ . При использовании формулы (5.3) для  $\mu_0(\varepsilon', \varepsilon)$  и формулы Меллер (7.4) для сечения ионизационный интеграл ограничен условием  $\varepsilon', \varepsilon, \varepsilon_s \gg \varepsilon_{ion}^{(i)}$ . Для сохранения строгости в задачах, где требуется учитывать кинетику в области энергий порядка  $\varepsilon_{ion}^{(i)}$ , необходимо использовать соответствующий набор  $(\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)}$  и точную формулу для  $\mu_0(\varepsilon', \varepsilon)$  с учетом связи атомных электронов.

Для описания кинетики электронов больших энергий первая компонента (8.1) не является существенной. Можно также пренебречь  $\sigma_{ex,tr}(p)$  во второй компоненте. Аргументация приведена в разд. 7. В результате полный оператор

$$\begin{aligned}
\text{St} \{f(p, \mu, t)\} &= N_{at} \frac{v}{2} \sigma_{tr}(p) \hat{L}_\mu f(p, \mu, t) + \\
&+ N_{at} v \sum_i \int_{\varepsilon + \varepsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} d\varepsilon' (\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} f(p', \mu', t) - N_{at} v \sigma_{tot}(\varepsilon) f(p, \mu, t) \quad (8.2)
\end{aligned}$$

оказывается проще оператора (1.2)–(1.4). В отличие от (1.2)–(1.4), где угловое рассеяние на ядрах и атомных электронах искусственно объединено посредством множителя  $(Z_{mol}/2 + 1)F(\varepsilon)/4\gamma p$ , в (8.2)

рассеяние на ядрах описывается транспортным сечением, а рассеяние на атомных электронах остается в ионизационном интеграле.

## 9. АНАЛИЗ ПОЛНОГО РЕДУЦИРОВАННОГО ОПЕРАТОРА СТОЛКНОВЕНИЙ

Если использовать редуцированную форму ионизационного оператора с выделенными слабыми взаимодействиями, то полный оператор принимает вид

$$\begin{aligned}
\text{St} \{f(p, \mu, t)\} &= \\
&= \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left( F(p) + \frac{m}{M} N_{at} \frac{p^2}{m} \sigma_{tr}(p) \right) f(p, \mu, t) + \\
&+ \left[ N_{at} \frac{v}{2} (\sigma_{tr}(p) + \sigma_{ex,tr}(p)) + \frac{F_{ion}(p)}{2\gamma p} \right] \hat{L}_\mu f(p, \mu, t) + \\
&+ N_{at} v \sum_i \int_{2\varepsilon + \varepsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} d\varepsilon' (\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} f(p', \mu', t), \quad (9.1)
\end{aligned}$$

в котором после выделения из (5.5) слабых взаимодействий (6.6) нижний предел интегрирования в оставшейся части (5.5), описывающей сильные взаимодействия, равен  $2\varepsilon + \varepsilon_{ion}^{(i)}$  (ср. с (1.4)). Здесь

$$F(p) = F_{ion}(p) + F_{ex(1)}(p)$$

есть сила Бете.

Опуская, согласно аргументации, изложенной в разд. 7, упругие потери энергии в первой компоненте (9.1) и  $\sigma_{ex,tr}(p)$  во второй компоненте, получаем оператор

$$\begin{aligned}
\text{St} \{f(p, \mu, t)\} &= \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 F(p) f(p, \mu, t) + \\
&+ \left( N_{at} \frac{v}{2} \sigma_{tr}(p) + \frac{F_{ion}(p)}{2\gamma p} \right) \hat{L}_\mu f(p, \mu, t) + \\
&+ N_{at} v \sum_i \int_{2\varepsilon + \varepsilon_{ion}^{(i)}}^{\infty} d\varepsilon' (\sigma_{\varepsilon'}(\varepsilon', \varepsilon))_{ion}^{(i)} \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma^2 - 1} \times \\
&\times \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} f(p', \mu', t), \quad (9.2)
\end{aligned}$$

который отличается от (1.2)–(1.4) только второй компонентой, отвечающей за угловое рассеяние. Ту

же функцию выполняет оператор (1.3), объединяющий описание углового рассеяния на ядре и атомных электронах множителем  $(Z_{mol}/2 + 1)F(p)/4\gamma p$ , при выводе которого в работах [3, 4] использованы результаты анализа Лонгмайра и Лонгли [16]. Напомним, что угловое рассеяние содержится также в ионизационном интеграле (1.4), входящем и в (9.2).

Для молекул, состоящих из двух одинаковых атомов (см. (7.3)), величина  $(v/2)N_{at\sigma_{tr}}(\gamma)$  в (9.2) согласно результатам [16] может быть записана через силу Бете  $F(\gamma)$ :

$$\begin{aligned} \frac{v}{2}N_{at\sigma_{tr}}(\gamma) &= \frac{v}{2} \frac{2(Z_{mol}/2)}{mc^2(\gamma^2 - 1)} F(\gamma)\Gamma(\gamma) = \\ &= \frac{Z_{mol}}{2\gamma p} F(\gamma)\Gamma(\gamma). \end{aligned} \quad (9.3)$$

В отчете [16] вклад множителя Мотта отсутствует. По-видимому, в работах [3, 4] принято  $\Gamma = 0.25$ , поскольку там (9.3) имеет следующий вид (см. формулу (1.3) во Введении):

$$\frac{v}{2}N_{at\sigma_{tr}}(\gamma) = \frac{Z_{mol}}{8\gamma p} F(\gamma). \quad (9.4)$$

Если воспользоваться формулой (9.4) и принять  $F(p) = F_{ion}(p)$ , что справедливо для малых  $Z_{mol}$  и  $(\gamma - 1)mc^2 \gg \varepsilon_{ion,max}$ , то величина

$$N_{at}\frac{v}{2}\sigma_{tr}(p) + \frac{F_{ion}(p)}{2\gamma p}$$

в (9.2) сведется к выражению

$$\frac{(Z_{mol}/2 + 2)F(\varepsilon)}{4\gamma p}, \quad (9.5)$$

отличающемся от (1.3) слагаемым «2» в числителе, что, однако, не должно сильно сказываться на результатах решения кинетического уравнения, поскольку обычно  $Z_{mol}/2 \gg 1$ .

Последовательная процедура редуцирования ионизационного интеграла не только позволила выполнить сравнение с оператором (1.2)–(1.4), но, как видно из разд. 7, оценить вклад компонент полного оператора столкновений и, что важно, исключив некоторые из них, существенно упростить полный оператор (ср. (8.1) и (8.2)). Выделение слабых ионизирующих взаимодействий в отдельный дифференциальный оператор нецелесообразно, так как это понижает точность описания, не давая никаких вычислительных преимуществ.

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получен оператор столкновений электронов (8.1) в плотной слабоионизованной плазме с доминированием взаимодействий с атомарными частицами, учитывающий упругое рассеяние на ядрах, возбуждение атомарных частиц и их ионизацию.

Оператор в форме (8.2) предназначен для описания кинетики электронов больших энергий, для которых справедливы сечения и аргументация, приведенные в разд. 7. Доминирующими взаимодействиями в (8.2) являются упругое рассеяние на ядрах и ионизация атомов. Оператор (8.2) проще оператора (1.2)–(1.4), использованного ранее [3, 4, 8–12], и требует меньших затрат времени при расчетах на ЭВМ, поскольку в нем отсутствует аналог компоненты (1.2), описывающей отдельно малые изменения модуля импульса в ионизирующих соударениях.

В результате последовательной процедуры выделения «слабых» взаимодействий из ионизационного интеграла получена компонента оператора, отвечающая за угловое рассеяние и отличающаяся от (1.3) множителем перед  $\hat{L}_\mu$  и увеличенным вкладом ионизирующих соударений в угловое рассеяние электронов.

Оператор (8.1) может быть использован для описания кинетики электронов в широком диапазоне энергий, достаточно больших по сравнению с энергиями возбуждения. Ограничения накладываются требованием малости угла рассеяния.

Оператор (8.2) можно использовать не только в исследованиях, относящихся к проблеме пробоя планетных атмосфер в грозовых полях, которая, будучи фундаментальной для атмосферного электричества, все же является частной физической задачей. КУ с оператором (8.2) применимо в задачах транспорта электронов больших энергий через плотные газовые среды, как в присутствии электрического поля, так и без него: описание электронно-позитронной компоненты космических ливней; расчеты высоковольтных разрядов в плотных газах с убегающими электронами и несамостоятельных газовых разрядов, поддерживаемых пучком электронов, в том числе предназначенных для накачки мощных газовых лазеров; расчеты распространения пучков релятивистских электронов в атмосфере; описание кинетики комптоновских электронов, образующихся при ядерном взрыве в атмосфере.

Автор выражает глубокую благодарность академику А. В. Гуревичу и доктору Р. А. Русселю-Дюпре (R. A. Roussel-Dupré) за ценные дискус-

сии и полезные советы, директору ВНИИЭФ академику Р. И. Ильякаеву и доктору С. Д. Гитомеру (S. J. Gitomer) за поддержку работ по физике атмосферного электричества.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Gurevich, G. M. Milikh, and R. Roussel-Dupré, *Phys. Lett. A* **165**, 463 (1992).
2. A. V. Gurevich, G. M. Milikh, and R. Roussel-Dupré, *Phys. Lett. A* **187**, 197 (1994).
3. R. A. Roussel-Dupré, A. V. Gurevich, T. Tunnell, and G. M. Milikh, *Kinetic Theory of Runaway Air Breakdown and the Implications for Lightning Initiation*, Los Alamos National Laboratory Report, LA-12601-MS (1993) p. 51.
4. R. A. Roussel-Dupré, A. V. Gurevich, T. Tunnell, and G. M. Milikh, *Phys. Rev. E* **49**, 2257 (1994).
5. H. Bethe and U. Ashkin, in: *Experimental Nuclear Physics*, ed. by E. Segré, New York-London (1953), Vol. 1, part 2.
6. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика. Теоретическая физика*, том IV, Наука, Москва (1989).
7. L. P. Babich, I. M. Kutsyk, E. N. Donskoy, and A. Yu. Kudryavtsev, *Phys. Lett. A* **245**, 460 (1998).
8. E. M. D. Symbalisty, R. A. Roussel-Dupré, L. P. Babich, I. M. Kutsyk, E. N. Donskoy, and A. Yu. Kudryavtsev, *Eos Trans. of AGU* **78**, 4760 (1997).
9. E. M. D. Symbalisty, R. A. Roussel-Dupré, and V. Yukhimuk, *IEEE Transactions on Plasma Science* **26**, 1575 (1998).
10. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, А. Ю. Кудрявцев, И. М. Куцык, В. Н. Шамраев, Труды Российского федерального ядерного центра — ВНИИЭФ, вып. 1, 432 (2001).
11. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Р. И. Ильякаев, А. Ю. Кудрявцев, И. М. Куцык, В. Н. Шамраев, Доклады РАН **379**, 606 (2001).
12. L. P. Babich, E. N. Donskoy, I. M. Kutsyk, A. Yu. Kudryavtsev, R. A. Roussel-Dupré, B. N. Shamraev, and E. M. D. Symbalisty, *IEEE Transactions on Plasma Science* **29**, 430 (2001).
13. T. Holstein, *Phys. Rev.* **70**, 367 (1946).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля. Теоретическая физика*, том II, Наука, Москва (1988).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Теоретическая физика*, том III, Наука, Москва (1989).
16. C. L. Longmire and H. J. Longley, *Improvements in the Treatment of Compton Current and Air Conductivity in EMP Problems*, Defense Nuclear Agency Report № 3192T (1973).