ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 4, стр. 831–849

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ

Н. А. Силантьев[*]

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica
Apartado Postal 51 y 216, C. P. 72000, Pue. México

Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук
196140, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 15 мая 2003 г.

Показано, что известные законы сохранения магнитной спиральности и интенсивности флуктуаций числа примесных частиц в пренебрежении молекулярной диффузией требуют взаимосогласованного рассмотрения иерархии нелинейных уравнений для средней функции Грина и иерархии уравнений типа Бете–Солпитера для интенсивности флуктуаций. Эти иерархии уравнений получены вплоть до шестого порядка по корреляторам турбулентной скорости. Даны асимптотические формулы, описывающие эволюцию флуктуаций частиц и магнитного поля. Обнаружен ряд новых эффектов, которые существенно изменяют темп эволюции и не появляются в часто используемой модели турбулентности с малым временем корреляции.

PACS: 05.60.-k, 47.11.+j, 47.40.-x, 47.27.-i

1. ВВЕДЕНИЕ

Диффузия примесных (пассивных) полей (концентрация частиц, температура, магнитное поле) является одной из важных для практических приложений проблем теории турбулентности. Условие примесности означает, что обратным воздействием примесных полей на турбулентное движение основной жидкости или газа можно пренебречь. Это условие является наиболее ограничивающим в случае описания диффузии магнитного поля в турбулентной плазме, так как турбулентные движения, вообще говоря, могут усиливать как крупномасштабную, так и мелкомасштабную компоненты магнитного поля. Когда энергия магнитного поля, $B^2/8\pi$, достигает уровня кинетической энергии плазмы, $\varrho u^2/2$, необходимо учитывать влияние магнитного поля на турбулентность.

В работах [1, 2] утверждается, что флуктуации магнитного поля чрезвычайно быстро усиливаются до значений энергии сравнимых с энергией турбулентности и, следовательно, магнитное поле практически никогда нельзя рассматривать как примесное. Эти работы фактически повторяют для трехмерного случая известную оценку энергии флуктуаций магнитного поля в двумерной среде, данную в [3]. Численные расчеты эволюции магнитного поля в турбулентной среде [4–6] не подтверждают эти оценки. В статьях [7, 8] были тщательно проанализированы работы [2, 3] и было показано, что приведенные в них оценки уровня энергии магнитных флуктуаций сильно завышены. Таким образом, следует признать, что при эволюции магнитного поля в турбулентной среде (особенно в отсутствие турбулентной спиральности) существует период, когда магнитное поле можно считать примесным. Большое количество работ исследует эволюцию магнитного поля именно в этом приближении.

Исходными стохастическими уравнениями для концентрации $n(\mathbf{r},t)$ примесных частиц и магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ являются уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} - D_m\nabla^2 n(\mathbf{r},t) = -\mathrm{div}[\mathbf{u}(\mathbf{r},t)n(\mathbf{r},t)] \quad (1)$$

и уравнение индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - D_m\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla\times[\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — поле турбулентных скоростей, статистические свойства которого считаются заданными, D_m — молекулярный коэффициент диффузии

[*] E-mail: silant@inaoep.mx

(для магнитного поля $D_m = c^2/4\pi\sigma$, где σ — проводимость плазмы, c — скорость света).

Проблема турбулентной диффузии сводится в основном к нахождению уравнений, описывающих эволюцию средних полей $\langle n \rangle$, $\langle \mathbf{B} \rangle$, а также уравнений, описывающих развитие квадратичных величин:

$$V(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle n(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}', t') \rangle \equiv \\ \equiv \langle n(1) \rangle \langle n(2) \rangle + \langle n'(1) n'(2) \rangle, \quad (3)$$

$$H_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}', t') \rangle \equiv \\ \equiv \langle B_i(1) \rangle \langle B_j(2) \rangle + \langle B'_i(1) B'_j(2) \rangle. \quad (4)$$

Как обычно, представляем все величины в виде суммы среднего значения и флуктуационной части: $n = \langle n \rangle + n'$, $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}'$, где $\langle n' \rangle = 0$ и $\langle \mathbf{B}' \rangle = 0$. Пусть турбулентные движения имеют характерную скорость u_0 ($u_0^2 = \langle u^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \langle \mathbf{u} \rangle = 0$), характерные масштаб R_0 и время τ_0 двухточечных корреляций. Как известно (см., например, [9]), предположение о том, что средние поля являются гладкими на характерных масштабах R_0 и временах τ_0 (или $t_0 = R_0/u_0$), приводит к диффузионным уравнениям для этих полей с коэффициентом диффузии $D_m + D_T$, где D_T — коэффициент турбулентной диффузии, который обычно много больше коэффициента молекулярной диффузии, $D_T \gg D_m$. Таким образом, первая проблема сводится к нахождению коэффициента D_T.

Для модели турбулентности в неограниченной среде, которой мы далее ограничимся, имеются точные формулы для D_T как в лагранжевом [10, 11], так и в эйлеровом [9, 12] представлениях. С практической точки зрения, предпочтительны вычисления в эйлеровом представлении, которое далее и будет использоваться. В этом представлении точное значение D_T связано с нахождением стохастической функции Грина $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \equiv G(1, 2)$ уравнений (1) и (2) и с ее дальнейшим статистическим усреднением с компонентами поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

Здесь и далее будем использовать удобные своей краткостью обозначения:

$$f(1) = f(\mathbf{r}_1, t_1), \quad f(1-2) = f(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2),$$
$$dm = d\mathbf{r}_m dt_m, \quad d\mathbf{m} = d\mathbf{r}_m, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$
$$\tau = t_1 - t_2, \ldots$$

Нахождение и решение уравнений, описывающих эволюцию корреляторов (3) и (4), в случае турбулентной среды значительно сложнее, чем нахождение средних полей $\langle n \rangle$ и $\langle \mathbf{B} \rangle$. Прежде всего, как мы увидим далее, для корреляторов (3) и (4) нельзя использовать в полной мере диффузионное приближение, т. е. необходимо решать сложные интегральные (или интегродифференциальные) уравнения типа Бете–Солпитера (см., например, [13, 14]). Различные приближенные формы этого уравнения были предложены и изучены в работах [15–17]. Особенностью этих уравнений является то, что интенсивность флуктуаций определяется разностью двух членов одного порядка по величине. С другой стороны, из уравнений (1) и (2) для однородного ансамбля турбулентных скоростей непосредственно следуют важные соотношения:

$$\frac{d}{dt} \langle n^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \\ = -2D_m \langle (\nabla n(\mathbf{r}, t))^2 \rangle - \langle n^2(\mathbf{r}, t) \mathrm{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle = -2D_m \langle \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \rangle. \quad (6)$$

Формула (5) означает, что в несжимаемой однородной турбулентной среде ($\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$) среднее значение квадрата концентрации примесных частиц в какой-либо фиксированной точке среды уменьшается только за счет молекулярной диффузии. В пренебрежении молекулярной диффузией величина $\langle n^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ сохраняется. Поэтому выражения (5) и (6) будем называть законами сохранения. Выражение (6) представляет собой известный закон сохранения магнитной спиральности $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ в идеально проводящей ($\sigma \to \infty, D_m \to 0$) однородной плазме (см., например, [18, 19]). Напомним, что $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

При получении эволюционных уравнений для $\langle n(1) n(2) \rangle$ и $\langle B_i(1) B_j(2) \rangle$ необходимо добиваться, чтобы законы сохранения (5) и (6) обязательно выполнялись, т. е. чтобы указанная выше разность двух членов одного порядка по величине интегрально обращалась бы в нуль. Отметим, что в часто используемом приближении поля скоростей с малым временем корреляции ($\langle u_i(1) u_j(2) \rangle \propto \delta(t_1 - t_2)$) законы сохранения выполняются автоматически, так как при этом используется только одно, очевидное в силу определения, свойство любой функции Грина: $G(\mathbf{R}, 0) = \delta(\mathbf{R})$. В работе [20] и ряде других сделана попытка описать эволюцию флуктуаций магнитного поля для поля скоростей, которое не является $\delta(\tau)$-коррелированным. Однако полученное там уравнение типа Бете–Солпитера не обеспечивает выполнения закона сохранения (6). Поэтому полученные в этих работах результаты, по-видимому, следует считать неверными, по меньшей мере в чисто количественном смысле.

Из линейных стохастических уравнений (1) и (2) следует, что средние значения $\langle n\rangle$ и $\langle \mathbf{B}\rangle$ связаны с флуктуациями n' и $\mathbf{B}'$, и наоборот. Поэтому попытка написать отдельное уравнение для усредненной функции Грина $\langle G(1,2)\rangle$ уравнений (1) и (2) приводит к возникновению иерархии нелинейных уравнений для $\langle G\rangle$. Ситуация здесь полностью подобна известной проблеме замыкания уравнений в теории турбулентности.

Отметим, что часто используется предположение о гауссовом ансамбле турбулентных скоростей, когда среднее значение нечетного числа компонент скорости $\mathbf{u}$ равно нулю, а среднее от четного числа компонент равно сумме членов со всевозможными парными корреляторами. В этом случае для $\langle G(1,2)\rangle$ можно написать уравнение Дайсона [13]. Формально это линейное интегральное уравнение, ядро которого является суммой бесконечного числа членов, описывающих элементарные взаимодействия турбулентной среды с примесным полем (так называемые связные, или неприводимые взаимодействия). Аналогично, для гауссовского ансамбля легко написать линейное интегральное уравнение типа Бете–Солпитера для среднего значения $\langle G(1,3)G(2,4)\rangle$, ядро которого также является суммой бесконечного числа членов, описывающих неприводимые взаимодействия. Оставляя в ядрах этих уравнений последовательно увеличивающееся число членов, получаем иерархию линейных уравнений для $\langle G(1,2)\rangle$ и $\langle G(1,3)G(2,4)\rangle$. Однако эффективность линейных уравнений для $\langle G(1,2)\rangle$ не очень высокая. Так, учет первого члена в ядре (приближение Бурре [15]) позволяет вычислить D_T лишь для параметра $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0 \ll 1$. Это следует уже из того факта, что в диффузионном пределе (большие времена и расстояния) функция Грина уравнения Бурре совпадает с обычной функцией Грина уравнения диффузии с коэффициентом турбулентной диффузии $D_T = u_0^2\tau_0/3$, который получается в общей теории [9, 12] как первый член разложения по параметру ξ_0.

Более эффективно для вычисления D_T рассматривать иерархию нелинейных уравнений для $\langle G(1,2)\rangle$. Так, уже первое уравнение иерархии (direct interaction approximation equation, DIA-equation, [16]), с квадратичной нелинейностью, позволяет вычислить $D_T \equiv D_T^{(0)}$ для любых значений параметра ξ_0. Учет следующего члена иерархии, включающего неприводимые взаимодействия четвертой степени по скорости, показал, что поправка к D_T (обозначим ее $D_T^{(1)}$) отрицательна и монотонно растет от нуля при $\xi_0 = 0$ до значения, приблизительно равного $0.1D_T^{(0)}$ при $\xi_0 \to \infty$ [21]. Таким образом, уже решение первых двух уравнений иерархии нелинейных уравнений для $\langle G(1,2)\rangle$ позволяет практически точно вычислить коэффициент турбулентной диффузии $D_T = D_T^{(0)} + D_T^{(1)}$.

Нелинейность уравнений позволяет учесть гораздо большее число элементарных актов взаимодействия турбулентной среды с примесью, чем соответствующие члены иерархии линейных уравнений Дайсона. Математически это проявляется в том, что при $\xi_0 \gg 1$ изменяется асимптотическое поведение средней функции Грина по сравнению с функцией Грина уравнения Бурре (более подробно см. ниже). Именно поэтому нелинейные уравнения позволяют вычислить D_T при больших значениях параметра ξ_0. Однако, поскольку коэффициент турбулентной диффузии D_T определяется в основном крупномасштабными турбулентными движениями, остается открытым вопрос, насколько хорошо первые члены иерархии нелинейных уравнений описывают мелкомасштабную диффузию. Ряд приближений для коэффициента турбулентной диффузии $D_T = D_T^{(0)} + D_T^{(1)} + \cdots$ даже при использовании иерархии нелинейных уравнений для функции Грина $\langle G(1,2)\rangle$ является лишь асимптотически сходящимся, так как число различных взаимодействий, учитываемых в последовательных приближениях, растет чрезвычайно быстро (напомним, что для гауссовского случая в n-м приближении существует $(2n-1)!!$ различных членов). Хотя нелинейность несколько сокращает это число (см. ниже), это, по-видимому, приводит только лишь к улучшению асимптотической сходимости ряда.

В отличие от иерархии линейных уравнений Дайсона, иерархия нелинейных уравнений существует и для негауссовского ансамбля поля турбулентных скоростей. Это может быть использовано для исследования влияния негауссовости ансамбля скоростей на поведение средней функции Грина, в частности, на величину коэффициента турбулентной диффузии. В данной работе мы приведем вывод этой иерархии уравнений. Известно [22], что реальная турбулентность может быть и негауссовской. Вторая особенность иерархии нелинейных уравнений — сокращается число неприводимых взаимодействий в ядрах уравнений. Так, для корреляторов четвертого порядка вместо двух неприводимых выражений, учитываемых в уравнении Дайсона, в иерархии нелинейных уравнений остается только один. Для корреляторов шестого порядка вместо девяти членов остаются только четыре и т. д.

Эволюция флуктуаций $\langle n'(1)n'(2)\rangle$ и $\langle B_i'(1)B_j'(2)\rangle$ определяется средним значением $\langle G'(1,3)G'(2,4)\rangle$ флуктуационных частей функции Грина. Поскольку уравнения сохранения (5) и (6) относятся к величинам $\langle n^2(1)\rangle = \langle n(1)\rangle\langle n(1)\rangle + \langle n'(1)n'(1)\rangle$ и $\langle B_i(1)B_j(1)\rangle$, удобно рассматривать корреляционные функции $V(1,2)$ и $H_{ij}(1,2)$ (см. (3) и (4)). Средние значения $\langle n\rangle$ и $\langle \mathbf{B}\rangle$ удовлетворяют уравнениям диффузии и сравнительно быстро затухают с характерным временем $t_* \approx R_0^2/12D_T$. При $t \geq t_*$ корреляторы $V(1,2)$ и $H_{ij}(1,2)$ фактически описывают только флуктуации $\langle n'(1)n'(2)\rangle$ и $\langle B_i'(1)B_j'(2)\rangle$.

При получении интегродифференциальных уравнений для $V(1,2)$ и $H_{ij}(1,2)$ (для гауссовского ансамбля это будет иерархия уравнений типа Бете–Солпитера) мы выясним, что законам сохранения (5) и (6) можно удовлетворить, только если средняя функция Грина $\langle G(1,2)\rangle \equiv G_0(1,2)$ удовлетворяет иерархии нелинейных уравнений, вывод которой будет дан в следующем разделе. Это означает, в частности, что широко используемое приближенное уравнение Бурре для средней функции Грина, являющееся линейным уравнением, непригодно для описания эволюции интенсивности флуктуаций, так как приводит к нарушению законов сохранения (5) и (6).

При этом самые простые уравнения для $V(1,2)$ и $H_{ij}(1,2)$, учитывающие только лестничные диаграммы для взаимодействия примеси с турбулентностью, обязательно требуют, чтобы функция $\langle G(1,2)\rangle$ удовлетворяла самому первому уравнению иерархии нелинейных уравнений, т. е. уравнению с квадратичной нелинейностью (DIA-уравнению). Учет следующих взаимодействий, описываемых неприводимым коррелятором четвертой степени по скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, требует, чтобы функция $\langle G(1,2)\rangle$ удовлетворяла следующему уравнению иерархии, включающему корреляторы четвертой степени, и т. д. Таким образом, законы сохранения (5) и (6) будут выполняться, если уравнения иерархии для $V(1,2)$ и $H_{ij}(1,2)$ будут согласовываться с соответствующими уравнениями иерархии нелинейных уравнений для $\langle G(1,2)\rangle$. На возможность нарушения законов сохранения при написании уравнений Бете–Солпитера указывалось и ранее (см. [23] и ссылки там), однако вывод правильных интегродифференциальных уравнений для $V(1,2)$ и $H_{ij}(1,2)$, удовлетворяющих условиям (5) и (6), проводится впервые в данной работе.

Дальнейшее содержание статьи следующее. Сначала мы выведем из основных уравнений (1) и (2) иерархию нелинейных уравнений для средней функции Грина $\langle G(1,2)\rangle$, а также все усложняющиеся выражения для флуктуационной части $G'(1,2)$ функции Грина. Результаты здесь частично совпадают с результатами работы [12], но получены другим способом. Подчеркнем, что получаемая иерархия уравнений не связана с предположением о гауссовском виде ансамбля поля турбулентных скоростей. Далее мы получим правильные уравнения для корреляторов $V(1,2)$ и $H_{ij}(1,2)$ вплоть до учета неприводимых корреляторов скорости шестой степени. Затем мы выпишем в явном виде уравнения, описывающие спектры флуктуаций, и приведем некоторые асимптотические выражения для величин $\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle$ и $\langle B^2(\mathbf{r},t)\rangle$ для моделей турбулентности как с конечным, так и с малым временем корреляции, причем последняя ввиду ее сравнительной математической простоты до сих пор (см., например, [24]) широко используется для описания процесса переноса примесных полей турбулентностью. Сравнение этих выражений показывает, что приближение с малым временем корреляции пригодно только для турбулентности с $\xi_0 \ll 1$ и сильно завышает скорость роста интенсивности флуктуаций как скалярных примесей, так и магнитного поля.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

Уравнение для функции Грина $G(1,2)$ исходных уравнений (1) и (2) имеет общую форму:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} - D_m\nabla_1^2\right) G(1,2) \equiv L_0(1)G(1,2) = = L(1)G(1,2) + I\delta(\mathbf{R})\delta(\tau), \quad (7)$$

где для уравнения (1) величина $L(1)G(1,2) = -\mathrm{div}[\mathbf{u}(1)G(1,2)]$, а для уравнения (2) функция Грина и оператор $L(1)$ являются тензорами:

$$L_{ik}(1)G_{kj}(1,2) = [\nabla_k^{(1)}u_i(1) - \delta_{ik}\nabla_t^{(1)}u_t(1)]G_{kj}(1,2).$$

Напомним, что $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\tau = t_1 - t_2$ и по повторяющимся индексам ведется суммирование; I — единичный тензор ($I_{ij} = \delta_{ij}$). Функции Грина равны нулю для отрицательных значений τ, т. е. могут быть представлены в виде $G(1,2) \equiv \theta(\tau)g(1,2)$, где $\theta(\tau)$ — ступенчатая функция Хевисайда ($\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$ и $\theta(\tau) = 1$ для $\tau > 0$).

Используя функцию Грина левой части уравнения((7),

$$G_m(1-2)=\theta(\tau)(4\pi D_m\tau)^{-3/2}\exp(-R^2/4D_m\tau),$$

можно написать интегральное уравнение для $G(1,2)$:

$$G(1,2)=G_m(1-2)+\int d3G_m(1-3)L(3)G(3,2). \quad (8)$$

Далее будем также использовать графические обозначения. Это сократит написание довольно громоздких формул и уравнений. Кроме того, из графических обозначений более ясно видна симметрия выражений. Обозначим

$$G(1,2)=\subset\!\supset,\quad G_m(1-2)=\text{——},$$
$$L(1)=\circ,\quad \langle G(1,2)\rangle\equiv G_0(1,2)=\subset\!\!|\!\supset,$$
$$\subset\!\supset=\subset\!\!|\!\supset+\subset\!\supset'.$$

В этих обозначениях уравнение (8) имеет вид

$$\subset\!\supset=\text{——}+\text{——}\circ\subset\!\supset. \quad (9)$$

Сравнивая (8) с (9), видим, что по координатам оператора взаимодействия (кружочки) проводится интегрирование; фиксированными остаются наружные координаты 1 и 2. Итерации уравнения (9) приводят к ряду

$$\subset\!\supset=\text{——}+\text{——}\circ\text{——}+\text{——}\circ\text{——}\circ\text{——}+\cdots \quad (10)$$

Усреднение этого ряда по ансамблю стохастических скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ приводит к выражениям

$$\begin{aligned}\subset\!\!|\!\supset&=\text{——}+\text{——}\langle\circ\subset\!\supset\rangle\equiv\\ &\equiv\text{——}+\text{——}\langle\circ\subset\!\supset\circ\rangle\text{——}.\end{aligned} \quad (11)$$

Здесь мы приняли, что среда как целое покоится, т. е. $\langle\mathbf{u}\rangle=0$. Действуя оператором L на ряд (10), получаем соотношения

$$\text{——}\circ\subset\!\supset=\subset\!\supset\circ\text{——}=\subset\!\supset-\text{——}. \quad (12)$$

Усредняя эти выражения и используя (11), получаем

$$\text{——}\langle\circ\subset\!\supset\rangle=\langle\subset\!\supset\circ\rangle\text{——}=\text{——}\langle\circ\subset\!\supset\circ\rangle\text{——}. \quad (13)$$

Используя (11) и (12), получим два выражения для флуктуационной части функции Грина $G'(1,2)=\subset\!\supset'=\subset\!\supset-\subset\!\!|\!\supset$:

$$\begin{aligned}\subset\!\supset'&=\text{——}\circ\subset\!\supset-\text{——}\langle\circ\subset\!\supset\circ\rangle\text{——},\\ \subset\!\supset'&=\subset\!\supset\circ\text{——}-\text{——}\langle\circ\subset\!\supset\circ\rangle\text{——}.\end{aligned} \quad (14)$$

Из обеих этих формул удается исключить молекулярную функцию Грина $G_m(1-2)$. В первой формуле вместо $G_m=\text{——}$ в наружной части второго члена надо подставить выражение

$$\text{——}=\subset\!\supset-\text{——}\circ\subset\!\supset,$$

вытекающее из (12). Во второй формуле вместо —— во внутренней части второго члена подставляем

$$\text{——}=\subset\!\supset-\subset\!\supset\circ\text{——}.$$

В получающихся выражениях следует снова использовать формулы (11) и (13). В итоге получаем два эквивалентных выражения:

$$\begin{aligned}\subset\!\supset'&=\subset\!\!|\!\supset\circ\subset\!\supset-\langle\subset\!\supset\circ\rangle\subset\!\supset,\\ \subset\!\supset'&=\subset\!\supset\circ\subset\!\!|\!\supset-\subset\!\supset\langle\circ\subset\!\supset\rangle.\end{aligned} \quad (15)$$

Прибавляя к обеим частям формул (15) среднюю функцию Грина $G_0(1,2)$, получаем окончательные эквивалентные уравнения для полной функции Грина, где формально отсутствует молекулярная функция Грина G_m:

$$\begin{aligned}\subset\!\supset&=\subset\!\!|\!\supset+\subset\!\!|\!\supset\circ\subset\!\supset-\langle\subset\!\supset\circ\rangle\subset\!\supset,\\ \subset\!\supset&=\subset\!\!|\!\supset+\subset\!\supset\circ\subset\!\!|\!\supset-\subset\!\supset\langle\circ\subset\!\supset\rangle.\end{aligned} \quad (16)$$

Выражения (15) и (16) являются основными для получения иерархии нелинейных уравнений для $\langle G(1,2)\rangle\equiv G_0(1,2)$. Выпишем уравнения (16) в явном виде:

$$\begin{aligned}&G(1,2)=G_0(1,2)+\\ &+\int d3[G_0(1,3)L(3)-\langle G(1,3)L(3)\rangle]G(3,2),\\ &G(1,2)=G_0(1,2)+\\ &+\int d3G(1,3)[L(3)G_0(3,2)-\langle L(3)G(3,2)\rangle].\end{aligned} \quad (17)$$

Проверим теперь, что $\langle G'(1,2)\rangle=0$. Для этого, согласно (15), надо показать, что

$$\subset\!\!|\!\supset\langle\circ\subset\!\supset\rangle=\langle\subset\!\supset\circ\rangle\subset\!\!|\!\supset. \quad (18)$$

Подставляя (11) в левую и правую части выражения (18), а затем используя (13), получаем, что выражение (18) действительно имеет место.

Следует отметить, что выражения (15)–(18) выполняются также и для случая $\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle\neq 0$. Процесс вывода этих выражений в этом случае полностью аналогичен приведенному выше случаю $\langle\mathbf{u}\rangle=0$, где в силу однородности и стационарности турбулентности можно считать $G_0(1,2)\equiv G_0(1-2)$.

Представим функцию Грина $G(1,2)$ в виде ряда по степеням оператора L:

$$G(1,2) = G_0(1-2)+G^{(1)}(1,2)+G^{(2)}(1,2)+\cdots \quad (19)$$

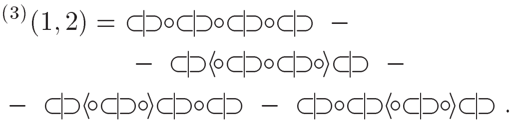
Из уравнений (17) следует рекуррентное соотношение

$$G^{(n)}(1,2) = \int d3[G^{(n-1)}(1,3)L(3)G_0(3-2) - - \sum_{k=2}^{n} G^{(n-k)}(1,3)\langle L(3)G^{(k-1)}(3,2)\rangle]. \quad (20)$$

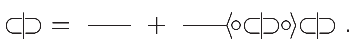
Выражения для $G^{(n)}(1,2)$ являются аппроксимациями флуктуационной части функции Грина, содержащими n операторов взаимодействия L. Используя (18), легко показать, что $\langle G^{(n)}(1,2)\rangle = 0$. Приведем явные выражения для ряда первых членов $G^{(n)}$ в графическом виде для случая $\langle \mathbf{u}\rangle = 0$, которым далее мы ограничимся:

$G^{(1)}(1,2) =$  (21)

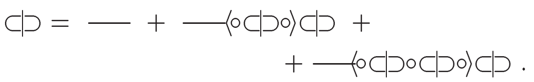
$G^{(2)}(1,2) =$  (22)

$G^{(3)}(1,2) =$  (23)

Подставляя выражение (21) в первую из формул (11), получаем нелинейное уравнение для средней функции Грина с квадратичной нелинейностью:

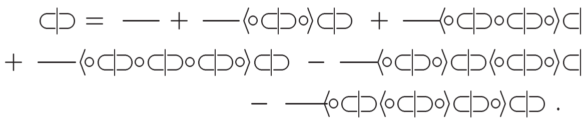
 (24)

Это уравнение носит название DIA-уравнения, или уравнения Крайчнана [16, 25]. Аналогично, подстановка суммы выражений (21) и (22) в (11) приводит к уравнению с нелинейностью третьей степени:

 (25)

Для гауссовского ансамбля поля скоростей трехточечный коррелятор в (25) равен нулю и уравнение (25) совпадает с (24). Таким образом, уравнение (25) является первым из иерархии нелинейных уравнений, учитывающим негауссовский характер реальной турбулентности.

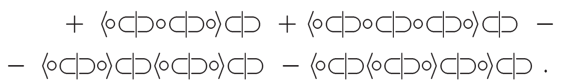
Подстановка $G'(1,2) = G^{(1)} + G^{(2)} + G^{(3)}$ в (11) приводит к следующему уравнению иерархии:

 (26)

Предпоследний член этого уравнения — несвязный. Следующее уравнение иерархии с учетом корреляторов шестого порядка содержит еще больше несвязных членов. Из семнадцати членов шестого порядка семь — несвязные. Таким образом, наша иерархия нелинейных уравнений для негауссовского ансамбля поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ не является нелинейным уравнением Дайсона, так как содержит несвязные члены. Однако при переходе к гауссовскому ансамблю все несвязные (приводимые) члены сокращаются и уравнения превращаются в нелинейный аналог иерархии уравнений Дайсона.

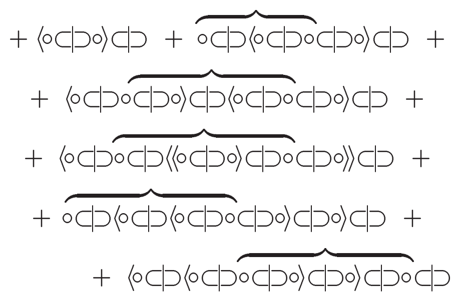
Действуя оператором $L_0(1)$ (см. (7)) на уравнение (26), получаем нелинейное интегродифференциальное уравнение для $G_0(1-2)$:

$$L_0(1)G_0(1-2) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - D_m\nabla^2\right) G_0(\mathbf{R},\tau) = = I\delta(\mathbf{R})\delta(\tau) +$$ 

 (27)

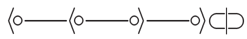
Для гауссовского ансамбля скоростей это уравнение сильно упрощается. Для этого случая мы учтем также корреляторы шестого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - D_m\nabla^2\right) G_0(\mathbf{R},\tau) = I\delta(\mathbf{R})\delta(\tau) +$$

 (28)

Здесь, ввиду сложности комбинаций усреднения пар операторов L, мы использовали вместо скобок $\langle\ldots\rangle$, также двойные скобки $\langle\langle\ldots\rangle\rangle$ и верхние фигурные скобки.

Если не переходить к иерархии нелинейных уравнений, а сразу усреднить ряд приближений (10), выделить в этом ряде связные (неприводимые) члены, то можно получить обычное линейное уравнение Дайсона [13]. Это уравнение получается из (28), если все внутренние функции Грина $G_0(1,2) =$  заменить на молекулярную функцию Грина $G_m(1-2) =$ и в правую часть добавить неприводимый член четвертого порядка

 (29)

а также пять новых связных членов шестого порядка, которые мы здесь не выписываем. Члены типа (29) уже содержатся в нелинейном уравнении (24), что сразу видно при выписывании ряда итераций этого уравнения. Аналогично, добавочные члены шестого порядка также возникают при итерациях следующего уравнения иерархии (26) при гауссовском ансамбле скоростей. Таким образом, нелинейность уравнений приводит к сокращению числа связных выражений в ядрах.

Связность выражений в (28) обеспечивает остроту ядер интегральных членов. Это позволяет представить внешнюю функцию Грина ⊂|⊃ в виде ряда Тейлора по координатам и времени и, ограничиваясь первыми членами разложения, перейти к диффузионному приближению:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - D_m\nabla^2\right) G_0(R,\tau) = \\ = I\delta(\mathbf{R})\delta(\tau) + D_T(\tau)\nabla^2 G_0(R,\tau). \quad (30)$$

Учитывая только первый член иерархии (с квадратичной нелинейностью), для коэффициента диффузии скалярной примеси получаем

$$D_T^{(0)}(\tau) = \frac{1}{3}\int d\mathbf{R}\int_0^\tau d\tau\,[\langle u_i(1)u_i(2)\rangle - \\ - \mathbf{R}\cdot\langle \mathbf{u}(1)\operatorname{div}\mathbf{u}(2)\rangle]\,G_0(R,\tau). \quad (31)$$

Напомним, что $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\tau = t_1 - t_2 > 0$ и $G_0(1-2) \equiv \langle G(1,2)\rangle$. Особенностью перехода к диффузионному приближению является то, что из разложения Тейлора по времени следует оставить только начальный член, т. е. просто вынести внешнюю функцию Грина в точке остроты ядра по времени (подробнее см. [26]). Явный вид вклада $D_T^{(1)}$ от следующего члена иерархии с учетом нелинейности четвертой степени дан в [27]. Точность выражений $D_T^{(0)}$ и $D_T^{(1)}$ обсуждается во Введении. Выражения для $D_T^{(0)}$ и коэффициента усиления (α-эффект) $\alpha_T^{(0)}$ для случая диффузии магнитного поля даны в работе [26].

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯТОРОВ $V(1,2)$ И $H_{ij}(1,2)$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в турбулентной среде имеется распределение концентрации примесных частиц $n_0(\mathbf{r})$. При известной функции Грина $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$ уравнения (1) стохастические свойства $n(\mathbf{r},t)$ определяются выражением

$$n(\mathbf{r},t) \equiv \langle n(\mathbf{r},t)\rangle + n'(\mathbf{r},t) = \\ = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',0)n_0(\mathbf{r}'). \quad (32)$$

Аналогичное выражение связывает магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ с его начальным распределением $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$.

Используя (32), легко написать выражение для коррелятора $V(1,2) = \langle n(1)n(2)\rangle$ и аналогично — для $H_{ij}(1,2)$. Для стохастической функции Грина $G(1,2)$ мы имеем два выражения — ряд (10) по молекулярным функциям Грина $G_m(1-2)$ и ряд (19) по средним функциям Грина $G_0(1,2)$. Для обычно используемого гауссовского ансамбля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ усреднение выражений для $n(1)n(2)$ и $B_i(1)B_j(2)$ приводит к иерархии линейных интегральных уравнений типа Бете–Солпитера (см. [13]), различающихся только количеством учитываемых в ядре связных (неприводимых) членов. Общий вид таких уравнений следующий:

$$V(1,2) = \int d\mathbf{3}\int d\mathbf{4}G_0(1;\mathbf{3},0)G_0(2;\mathbf{4},0)V_0(\mathbf{3},\mathbf{4}) + \\ + \int d3\int d4\int d5\int d6G_0(1,3)G_0(2,4)\times \\ \times K(3,4;5,6)V(5,6). \quad (33)$$

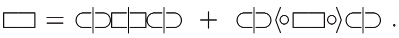
Выражение $V_0(\mathbf{3},\mathbf{4}) = \langle\langle n_0(\mathbf{r}_3)n_0(\mathbf{r}_4)\rangle\rangle$. Двойные скобки здесь обозначают усреднение по ансамблю распределения начальных значений концентрации примесных частиц. Обычно принимают, что этот ансамбль однородный и изотропный. В этом случае $V_0(\mathbf{3},\mathbf{4}) = V_0(|\mathbf{3}-\mathbf{4}|)$. Свободный член в (33) обозначает величину $\langle n(1)\rangle\langle n(2)\rangle$, а интегральный — коррелятор флуктуаций $\langle n'(1)n'(2)\rangle$. Из уравнения (33) легко написать интегральное уравнение только для $\langle n'(1)n'(2)\rangle$. Это уравнение имеет более сложный вид, чем (33), и мы не будем его использовать.

Часто удобнее исследовать интегродифференциальное уравнение для $V(1,2)$, которое не зависит от начального распределения $V_0(\mathbf{3},\mathbf{4})$. Для этого действуют на (33) оператором $L_0(1)$ (или $L_0(2)$) и используют при этом уравнение для средней функции Грина (в нашем случае это уравнение (28)).

Самый простой вид уравнение (33) имеет, когда в ядре оставляют первый связный член (так называемое лестничное приближение). Для $\delta(\tau)$-коррелированного ансамбля это лестничное приближение является точным, так как вклад в (33) остальных связных членов исчезает (см., например, [17]). Напишем это уравнение (не для $\delta(\tau)$-ансамбля) в явном виде:

$$V(1,2) = \int d\mathbf{3} \int d\mathbf{4} G_0(1;\mathbf{3},0) G_0(2;\mathbf{4},0) V_0(\mathbf{3},\mathbf{4}) + \\ + \int d3 \int d4 G_0(1,3) G_0(2,4) \times \\ \times \nabla_i^{(3)} \nabla_j^{(4)} \langle u_i(3) u_j(4) \rangle V(3,4). \quad (34)$$

В дальнейшем, при рассмотрении более сложных уравнений, удобно для краткости использовать графическую запись. Уравнение (34) в этой записи имеет вид



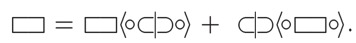
(35)

Здесь и далее надо иметь в виду, что координате 1 соответствует левая крайняя точка графика, а координате 2 — правая крайняя. Операторы, стоящие справа от прямоугольника (функция $V(3,4)$) действуют налево; времена уменьшаются с обеих сторон при приближении к прямоугольнику. Прямоугольник с вертикальной чертой обозначает $V_0(\mathbf{3},\mathbf{4})$.

При действии оператора $L_0(1)$ или $L_0(2)$ на (35) возникает проблема — сколько членов в уравнении (28) учитывать при этом? Мы уже указывали во Введении, что для выполнения закона сохранения (5) необходимо согласовывать порядки нелинейного уравнения для средней функции Грина  $\equiv G_0$ и получаемого интегродифференциального уравнения для $V(1,2)$. В данном случае это означает, что в (28) надо оставить только первый интегральный член, т. е. ограничиться DIA-уравнением для $G_0(1,2)$. В итоге получим

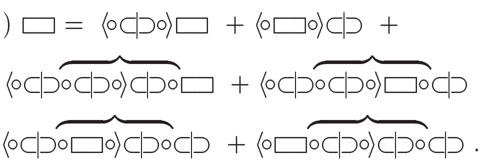
$L_0(1)$  (36)

Аналогично получаем

$L_0(2)$  (37)

Ввиду симметрии $V(1,2) = V(2,1)$ уравнение (37) получается из (36) перестановкой точек 1 и 2 между собой, что означает в графических обозначениях инверсию графиков. Это выполняется для всех приближений.

Члены в правой части выражения (36) можно получить из первого графика в правой части выражения (28) последовательной заменой одной из средних функций Грина $G_0(1,2)$ на коррелятор $V(1,2)$. Непосредственная проверка показала, что это правило выполняется и для следующих уравнений иерархии уравнений Бете–Солпитера. Так, учет неприводимых взаимодействий четвертого порядка (см. (28)) приводит к уравнению

$L_0(1)$  (38)

Аналогично записывается уравнение, содержащее корреляторы шестого порядка. Поскольку в (28) содержатся четыре члена шестого порядка, каждый из которых включает шесть функций Грина G_0, то число членов шестого порядка в уравнении типа (38) будет равно двадцати четырем. Мы не будем выписывать это уравнение, громоздкое даже в графической записи. Отметим также, что нелинейность уравнений для $G_0(1,2)$ и здесь сказывается в уменьшении числа связных членов по сравнению с прямым построением уравнения Бете–Солпитера (см. [13]) исходя из ряда (10). Однако это уменьшение начинается только с корреляторов шестого порядка: из двадцати шести связных членов в линейной теории [13] остается только двадцать. Не вошли члены вида

т. е. содержащие несвязную часть под одним из знаков усреднения. Отметим, что уравнения Бете–Солпитера обычно записывают графически в виде «двухэтажных» рисунков (см. [13, 17]). Наши графические выражения имеют более компактный вид и более наглядно показывают свойства симметрии, в частности, именно в такой записи выполняется правило последовательного перемещения функции $V(1,2)$ в различных членах уравнения Бете–Солпитера (см. уравнение (38)). Разумеется, наши уравнения легко изобразить и в обычном двухэтажном виде.

Наибольший интерес представляет эволюция величины $\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle \equiv V(1,1)$. Для получения производной $d\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle/dt$ необходимо сложить уравнения (36) и (37) и положить $t_1 = t_2 = t$. При этом правые части уравнений (36) и (37) совпадут и можно просто взять удвоенную правую часть уравнения (36) (или (38) в следующем уравнении иерархии). Согласно закону сохранения (5), для несжимаемой однородной турбулентной среды правая часть уравнения для $d\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle/dt$ должна быть равной нулю при $D_m = 0$. При этом существенно, что и само распределение примесных частиц должно быть статистически однородным, т. е. $V(1,2) = V(R,t_1,t_2)$. Несоблюдение закона сохранения (5) приводит к псевдоэффектам — сильному росту $\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle$, если первый член в правой части уравнения (36) меньше второго и, наоборот, — уменьшению $\langle n^2(1)\rangle$ при обратном неравенстве. Особенностью полученных нами уравнений (36), (38) и т. д. является то, что закон сохранения (5) выполняется для каждого члена иерархии уравнений Бете–Солпитера и указанные выше псевдоэффекты исключены. При этом, конечно, остается проблема, насколько хорошо эти уравнения представляют спектральное распределение флуктуаций примеси.

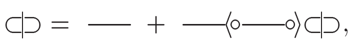
Покажем выполнение закона сохранения (5) сначала для уравнения (36) — простейшего из уравнений иерархии. При 1=2 ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ и $t_1 = t_2 = t$) и $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ первый из графиков правой части можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\int d3[\nabla_i^{(1)} G_0(1-3)\langle u_i(1)u_j(3)\rangle] \times \\
&\qquad \times \nabla_j^{(3)} V(|\mathbf{1}-\mathbf{3}|, t_3, t_1) = \\
&= \nabla_i^{(1)} \int d3\, G_0(1-3)\langle u_i(1)u_j(3)\rangle \times \\
&\qquad \times \nabla_j^{(3)} V(|\mathbf{1}-\mathbf{3}|, t_3, t_1) - \\
&- \int d3\, G_0(1-3)\langle u_i(1)u_j(3)\rangle \times \\
&\qquad \times \nabla_i^{(1)} \nabla_j^{(3)} V(|\mathbf{1}-\mathbf{3}|, t_3, t_1). \quad (39)
\end{aligned}$$

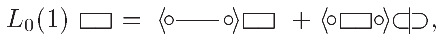
Так как коррелятор $\langle u_i(1)u_j(3)\rangle \equiv B_{ij}(1-3)$ зависит от разности аргументов, то интеграл в первом члене правой части выражения (39) не зависит от $\mathbf{r}_1$ и этот член равен нулю. Второй член, как легко видеть, равен второму графику в (36) с обратным знаком, если в последнем сделать инверсию, которая при $1 = 2$ ничего не меняет. Таким образом, правая часть уравнения (36) при $1 = 2$ обращается в нуль. Фактически мы здесь показали, что левый крайний оператор L (кружок) при $1 = 2$ можно переставить с обратным знаком в правый конец графика.

Аналогичным образом получаем, что при $1 = 2$ и $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ первый член четвертого порядка в (38) сокращается с последним, а второй — с третьим. В уравнении иерархии, содержащем 24 коррелятора шестого порядка, при $1 = 2$ члены попарно также сокращаются, т. е. закон сохранения (5) выполняется и для этих уравнений.

В работе [20] и ряде других рассматривалось уравнение (35) для коррелятора магнитного поля $H_{ij}(1,2) = \langle B_i(1)B_j(2)\rangle$, но принималось, что средняя функция Грина удовлетворяет уравнению Бурре

 (40)

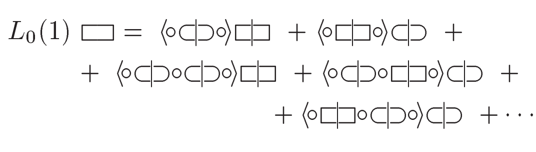
а не правильному для лестничного приближения нелинейному уравнению (24). В результате вместо уравнения (36) имеем уравнение

 (41)

которое не удовлетворяет закону сохранения (6) (здесь прямоугольник означает коррелятор H_{ij}). По этой причине количественные выводы работы [20] нельзя считать обоснованными.

Таким образом, мы показали, что законы сохранения (5) и (6) однозначно приводят к правильному виду иерархии уравнений Бете–Солпитера, получаемому при соблюдении правила равенства порядков нелинейного уравнения для средней функции Грина $G_0(1-2)$ и соответствующего уравнения Бете–Солпитера. Конечно, в правильных по структуре уравнениях (36) и (38) для оценок можно использовать какие-то правдоподобные выражения для средней функции Грина, например, диффузионные. Законы сохранения при этом будут выполнены. Важно, чтобы в ядрах уравнений присутствовало только одно выражение для средней функции Грина, а не различные, как в (41). Уравнение (41) совпадает с правильным уравнением (36) только в случае модели турбулентности с малым временем корреляции ($\langle u_i(1)u_j(2)\rangle \propto \delta(t_1 - t_2)$), когда функции Грина в первых членах правых частей этих уравнений превращаются в $\delta(\mathbf{R})$-функции.

До сих пор мы использовали общепринятое предположение о гауссовском ансамбле поля турбулентных скоростей. Вообще говоря, реальная турбулентность негауссова [22]. Иерархия нелинейных уравнений для средней функции Грина $G_0(1,2)$ (см. (26) и (27)) и выражения для флуктуационных частей функции Грина $G'(1,2)$ (см. (21)–(23)) получены для произвольного ансамбля поля турбулентных скоростей. Используя формулы (21)–(23), легко убедится, что величина $\langle G'(1,3)G'(2,4)\rangle$ не распадается на связные и несвязные части. Например, в членах четвертого порядка по операторам взаимодействия L нет соответствующей лестничной диаграммы четвертого порядка. Таким образом, уравнение типа Бете–Солпитера в этом случае не удается написать. Единственное, что мы можем сделать, это написать ряд приближенных выражений для $\langle n(1)n(2)\rangle = V(1,2)$, непосредственно используя приближения (21)–(23) для $G'(1,2)$. Действуя на этот ряд оператором $L_0(1)$ или $L_0(2)$ и учитывая (27), получаем выражение

 (42)

Здесь мы не стали приводить десять членов четвертого порядка, в которых, в отличие от гауссовского случая, уже не выполняется правило последовательного замещения одной из средних функций Грина в (27) начальным коррелятором $V_0(1-2) = ⊏⊐$. Используя прежний способ (см. (39)), легко показать, что выражение (42) удовлетворяет уравнению сохранения (5). Отметим, что при $1 = 2$ третий член в правой части выражения (42) обращается в нуль. Как и в гауссовском случае, при выводе (42) соблюдалось правило равенства порядков уравнения для $G_0(1-2)$ и порядка выражения (42).

Снова напомним, что нелинейность уравнений (27) может привести к хорошей асимптотической сходимости ряда (42) даже при больших значениях параметра $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0$. Уравнение (42) может служить для исследования влияния негауссовости ансамбля поля турбулентных скоростей на поведение корреляционных функций $V(1,2)$ и H_{ij}. Для этого, очевидно, надо знать (или задать) явный вид трехточечного коррелятора турбулентных скоростей.

Все формулы данного раздела пригодны и для описания коррелятора $H_{ij}(1,2) = \langle B_i(1)B_j(2)\rangle$, где оператор $L(1)$ и функции Грина являются тензорными. Проверка закона сохранения магнитной спиральности (6) из-за сложности вычислений в этом случае была проведена только для уравнения (36) с квадратичной нелинейностью.

4. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СПЕКТРОВ ПРИМЕСНЫХ ЧАСТИЦ

Ограничимся только гауссовским ансамблем турбулентных скоростей и рассмотрим сначала нелинейные уравнения (24) и (36) с квадратичной нелинейностью, а затем более сложные уравнения (28) и (38) четвертого порядка по операторам $L(1) = -\nabla_i^{(1)}u_i(1)$. Спектр коррелятора $V(1,2) = V(R;t_1,t_2)$ связан с фурье-разложением

$$V(R;t_1,t_2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}\tilde{V}(p;t_1,t_2) \qquad (43)$$

формулами

$$V(0;t_1,t_2) = \int\limits_0^\infty dpE_V(p;t_1,t_2), \qquad E_V(p;t_1,t_2) = \frac{p^2}{2\pi^2}\tilde{V}(p;t_1,t_2), \qquad (44)$$

т. е. достаточно изучать уравнения для $\tilde{V}(p;t_1,t_2)$.

Стационарный, однородный и изотропный ансамбль поля турбулентных скоростей характеризуется коррелятором $B_{ij}(\mathbf{R},\tau) = \langle u_i(1)u_j(2)\rangle$ ($\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\tau = t_1 - t_2$)), фурье-образ которого по $\mathbf{R}$ имеет вид [28]

$$\tilde{B}_{kj}(\mathbf{p},\tau) = (\delta_{kj}p^2 - p_kp_j)f(p,\tau) + p_kp_jW(p,\tau) + ie_{kjt}p_tD(p,\tau), \qquad (45)$$

где e_{kjt} — единичный псевдотензор Леви–Чивита, $e_{xyz} = -e_{yxz} = 1$, и т. д. Функции $f(p,\tau)$, $W(p,\tau)$ и $D(p,\tau)$ определяют спектры турбулентности:

$$\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r},t+\tau)\rangle = \int\limits_0^\infty dpE(p,\tau),$$

$$E(p,\tau) = E_{inc}(p,\tau) + E_{compr}(p,\tau),$$

$$E_{inc}(p,\tau) = p^4f(p,\tau)/\pi^2, \qquad E_{compr}(p,\tau) = p^4W(p,\tau)/2\pi^2. \qquad (46)$$

В случае несжимаемой турбулентной среды $W(p,\tau) = 0$. Спектр турбулентной спиральности определяется функцией $D(p,\tau)$:

$$H(\tau) \equiv \langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\cdot(\nabla\times\mathbf{u}(\mathbf{r},t+\tau))\rangle = \int\limits_0^\infty dpE_h(p,\tau), \qquad E_h(p,\tau) = -p^4D(p,\tau)/\pi^2. \qquad (47)$$

Уравнение для $\tilde{V}(p,t_1,t_2)$ (в лестничном приближении) получаем фурье-преобразованием уравнения (36):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + D_mp^2\right)\tilde{V}(p,t_1,t_2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\times \int d\mathbf{q}\left[-\int\limits_0^{t_1}dt'\,p_i\tilde{B}_{ij}(\mathbf{q},|t_1-t'|)(\mathbf{p}-\mathbf{q})_j\times \tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1-t')\,\tilde{V}(p,t',t_2) + \int\limits_0^{t_2}dt'\,p_i\tilde{B}_{ij}(\mathbf{q},|t_1-t'|)p_j\times \tilde{g}(p,t_2-t')\,\tilde{V}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1,t')\right]. \qquad (48)$$

Здесь мы представили $\tilde{G}_0(p,\tau) \equiv \theta(\tau)\tilde{g}(p,\tau)$, где $\theta(\tau)$ — ступенчатая функция Хевисайда (см. начало разд. 2). Легко проверить, что турбулентная спиральность в (48) не входит, т. е. тензор $\tilde{B}_{ij}$ можно в (48) считать симметричным. Для

$\tilde{L}_0(p,t_2)\tilde{V}(p,t_1,t_2) \equiv \tilde{L}_0(p,t_2)\tilde{V}(p,t_2,t_1)$ (см. (37)) имеет место (48) с заменой $t_1 \to t_2$ и $t_2 \to t_1$.

Закон сохранения (5) требует равенства нулю интеграла по $\mathbf{p}$ от правой части (48) при $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Легко видеть, что это выполняется. Казалось бы, что, считая $p \ll p_0 \approx 1/R_0$, $t_1 \gg \tau_0$ и $t_2 \gg \tau_0$, можно в (48) перейти к диффузионному приближению, как в случае уравнения (28) для средней функции Грина. Однако получающееся уравнение все равно остается интегродифференциальным из-за наличия второго члена с $\tilde{V}(q,t_1,t')$, а самое главное — в новом выражении не удается удовлетворить закону сохранения (5).

Случай использования уравнения Бурре (см. (41)) соответствует замене в (48) $\tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1-t')$ на молекулярную функцию Грина $\tilde{g}_m(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1-t') = \exp[-D_m(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2(t_1-t')]$, которая равна единице, если пренебречь малым коэффициентом D_m. Поскольку первый член в (48) описывает уменьшение примесных частиц за счет турбулентной диффузии, приближение Бурре (41) соответствует завышению этого уменьшения. Отметим снова, что при этом закон сохранения (5) не выполняется.

Складывая (48) с аналогичным уравнением для $\tilde{L}_0(2)\tilde{V}(p,t_1,t_2)$, полагая $t_1 = t_2 = t$ и интегрируя по $\mathbf{p}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle = -2D_m\langle(\nabla n(\mathbf{r},t))^2\rangle + \int_0^t d\tau\int_0^\infty dq\, E_V(q,t,t-\tau) \times \int_0^\infty dp\int_{-1}^1 d\mu\, E_{compr}(p,\tau)\tilde{g}(|\mathbf{p}+\mathbf{q}|,\tau)(p^2+pq\mu). \quad (49)$$

Здесь μ — косинус угла между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Для несжимаемой среды $E_{compr}(p,\tau) \equiv 0$ и (49) превращается в закон сохранения (5) при $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Второй член в правой части уравнения (49) является приближенным выражением члена с $\operatorname{div}\mathbf{u}$ в (5), соответствующим лестничному приближению для уравнения Бете–Солпитера. Физически член с $\operatorname{div}\mathbf{u}$ в (5) соответствует явлению кластеризации примесных частиц [14], т. е. образованию областей сгущения и разрежения частиц в сжимаемой турбулентной среде.

Для часто используемой из-за своей простоты модели турбулентности с малым временем корреляции ($\tilde{B}_{ij}(\mathbf{p},\tau) = \tau_0\delta(\tau)\tilde{B}_{ij}(\mathbf{p})$) уравнение (48) является точным (остальные члены иерархии обращаются в нуль). Для этой модели можно написать замкнутое относительно времени уравнение для $\tilde{V}(p,t,t)$:

$$\frac{\partial\tilde{V}(p,t,t)}{\partial t} = -2(D_m + D_T^{(0)})p^2\tilde{V}(p,t,t) + \frac{1}{2}p^2\tau_0\int_0^\infty dq\int_{-1}^1 d\mu\left[(1-\mu^2)E_{inc}(q)+2\mu^2E_{compr}(q)\right] \times \tilde{V}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t,t). \quad (50)$$

Коэффициент турбулентной диффузии $D_T^{(0)}$ (см. (31)) можно записать также в виде

$$D_T^{(0)}(t) = \frac{1}{3}\int_0^t d\tau\int_0^\infty dp\left\{[E_{inc}(p,\tau)+ E_{compr}(p,\tau)]\tilde{g}(p,\tau) + E_{compr}(p,\tau)p\frac{\partial\tilde{g}(p,\tau)}{\partial p}\right\}. \quad (51)$$

Интересно отметить, что в случае $\delta(\tau)$-процесса последний член в (51) вклада не дает ($\tilde{g}(p,0) \equiv 1$) и собственно сжимаемость ($\operatorname{div}\mathbf{u} \neq 0$) в коэффициенте диффузии себя не проявляет — он зависит только от полной энергии турбулентного движения: $D_T^{(0)} = u_0^2\tau_0/3$. Однако в случае корреляции флуктуаций числа примесных частиц это не так — в точное уравнение (50) спектры $E_{inc}(q)$ и $E_{compr}(q)$ входят неравноправно, с разными угловыми зависимостями.

Выражение (49) для $\delta(\tau)$-процесса также дает точное для этой модели соотношение:

$$\frac{d}{dt}\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle = -2D_m\langle(\nabla n(\mathbf{r},t))^2\rangle + 2\tau_0\langle\operatorname{div}^2\mathbf{u}\rangle\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle. \quad (52)$$

Из (52) следует, что в начальные моменты времени, когда распределение концентрации почти однородно, флуктуации $\langle n^2\rangle$ растут (кластеризация). Однако с течением времени $\langle(\nabla n)^2\rangle$ увеличивается при переходе примесных частиц в область мелкомасштабных движений, и в итоге становится доминирующим процесс сглаживания флуктуаций за счет вязкости (молекулярная диффузия).

При временах $t_1 \approx t_2 \gg \tau_0$(или $t_1 \approx t_2 \gg \gg t_0 = R_0/u_0$) как уравнение (48), так и уравнение (49) допускают приближенное описание в терминах $\tilde{V}(p,t,t)$. Рассмотрим два случая. При t не очень больших ($t \geq \tau_0$), когда примесные частицы еще не успели перейти в область мелкомасштабных движений, можно считать, что $\tilde{V}(q,t,t-\tau) \approx \tilde{V}(q,t,t)$ в (49) имеет максимум при малых $q \ll q_0 \approx 1/R_0$. Разложив $\tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)$ в ряд по степеням малого параметра q, получим

$$\frac{d}{dt}\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle = -2(D_m - D'_T)\langle(\nabla n(\mathbf{r},t))^2\rangle + \\ + 2C\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle, \quad (53)$$

где

$$C = \int_0^\infty dp \int_0^\infty d\tau\; p^2 E_{compr}(p,\tau)\tilde{g}(p,\tau), \quad (54)$$

$$D'_T = \frac{1}{3}\int_0^\infty dp \int_0^\infty d\tau\; E_{compr}(p,\tau) p \frac{\partial \tilde{g}(p,\tau)}{\partial p}. \quad (55)$$

Величина D'_T является частью коэффициента турбулентной диффузии $D_T^{(0)}$, которая непосредственно связана с сжимаемостью ($\operatorname{div}\mathbf{u} \neq 0$) и которая обращается в нуль для $\delta(\tau)$-процесса. Для неакустической турбулентности величина $\partial\tilde{g}(p,\tau)/\partial p < 0$ и, следовательно, $D'_T < 0$, т.е. хаотические движения сжимаемого газа (типа ударных волн) сильно уменьшают интенсивность флуктуаций. Заметим, что коэффициент C в (53) может быть гораздо меньше соответствующего коэффициента в (52). Это также приводит к уменьшению флуктуаций. В пределе турбулентности с малым временем корреляции выражение (53) переходит в (52), т.е. формулы (53)–(55) можно считать обобщением уравнения (52) на случай турбулентности с конечным временем корреляции для начального этапа эволюции примесных частиц в среде.

В случае акустической турбулентности, для которой

$$E_{compr}(p,\tau) = \\ = E_{compr}(p)\cos(cp\tau)\exp[-k(p)p^2\tau], \quad (56)$$

используя метод вычисления $D_T^{(0)}$ работы [29], получаем

$$D'_T = \frac{\pi M^3}{9}\,\frac{u_0}{p_0}\int_0^\infty dx\, E^2_{compr}(x), \quad (57)$$

$$C = u_0 p_0 M \times \\ \times \int_0^\infty dx\, x^2 E_{compr}(x)\left(\eta(x) + \frac{\pi}{6}M^2 E_{compr}(x)\right). \quad (58)$$

Здесь $M = u_0/c$ — число Маха, $x = p/p_0$, $E_{compr}(p) = E_{compr}(x)u_0^2/p_0$, $\eta(x) = k(x)p_0/c$, c — скорость звука. Согласно модели работы [30], $\eta(x) = M^2 E_{compr}(x)$.

Очевидно, коррелятор (56) не может быть аппроксимирован временной $\delta(\tau)$-зависимостью, и оценки роста флуктуаций определяются только из выражения (53). Для акустической турбулентности $D'_T > 0$, т.е. уровень флуктуаций при $t \geq \tau_0$ (или t_0) повышается как за счет положительного члена $C\langle n^2\rangle$, так и за счет турбулентной диффузии $D'_T\,\langle(\nabla n)^2\rangle$.

Таким образом, более реалистичная модель турбулентности с конечным временем корреляции приводит для начального этапа эволюции к качественно новым эффектам – уменьшению уровня флуктуаций за счет турбулентной диффузии в случае неакустической турбулентности и, напротив, к добавочному росту величины $\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle$ в случае акустической турбулентности.

При очень больших временах t, много больших меньшего из характерных времен τ_0 и $t_0 = R_0/u_0$, можно считать, что флуктуации примесных частиц в основном существуют в мелкомасштабном виде, т.е. в (49) можно полагать $q \gg p_0$. Используя разложение в ряд по $p/q \ll 1$, получаем

$$\frac{d}{dt}\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle = -2D_m\langle(\nabla n)^2\rangle + \\ + \frac{4}{\sqrt{3}u_0}\langle \operatorname{div}^2\mathbf{u}\rangle \int_0^\infty dp \frac{E_V(p,t,t)}{p}. \quad (59)$$

При выводе этой формулы мы считали функцию $\tilde{g}(q,\tau)$ более острой по τ, чем спектр $E_{compr}(p,\tau)$. Кроме того, было использовано соотношение

$$\int_0^\infty d\tau \tilde{g}(q,\tau) \approx \frac{\sqrt{3}}{u_0 q}, \quad q \gg q_0, \quad (60)$$

которое вытекает из нелинейного DIA-уравнения (24) для лаплас-образа по τ функции $\tilde{g}(p,\tau)$:

$$\tilde{\tilde{g}}(p,s) = \\ = \left[s + D_m p^2 + \frac{p}{4}\int_0^\infty dq \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\infty d\tau [(1-\mu^2)pE_{inc}(q,\tau) + \right. \\ \left. + \quad 2\mu(p\mu - q)E_{compr}(q,\tau)]e^{-s\tau}\tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)\right]^{-1}. \quad (61)$$

Таким образом, и в этом пределе выражение (59) сильно отличается от аналогичного, точного для $\delta(\tau)$-процесса, выражения (52).

Для $\delta(\tau)$-процесса уравнение (61) решается точно (см. [17]):

$$\tilde{\tilde{g}}(p,s) = [s + (D_m + D_T^{(0)})p^2]^{-1}, \quad (62)$$

что приводит к выражению

$$\tilde{g}(p,\tau) = \exp[-(D_m + D_T^{(0)})p^2\tau],$$

т. е. к решению уравнения диффузии с коэффициентом диффузии $D_m + D_T^{(0)}$, где $D_T^{(0)} = u_0^2\tau_0/3$. С другой стороны, это диффузионное выражение получается и для модели турбулентности с конечным временем корреляции, но только при $p \ll p_0$. Однако в выражениях (54) и (55) основной вклад дают не малые ($p \ll p_0$), а большие значения $p \geq p_0$, когда использование диффузионной функции (62) не оправдано, а значит, и использование $\delta(\tau)$-приближения также не обосновано. Действительно, если взять в (54) диффузионную функцию Грина, то это выражение совпадет с коэффициентом из (52), только если $(p/p_0)^2\xi_0 \ll 1$. Обычно [31] в турбулентности принимают $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0 \sim 1$, т. е. параметр выполнимости $\delta(\tau)$-приближения заведомо не выполняется. Резюмируя, можно сказать, что $\delta(\tau)$-приближение применимо только для турбулентности с $\xi_0 \ll 1$, для которой вполне можно обойтись обычным разложением (10) по молекулярным функциям Грина.

Функция Грина уравнения Бурре (40) выражается формулой (61), где в правой части надо заменить $\tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)$ на молекулярную функцию Грина $\tilde{g}_m(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)$ или просто на единицу, если пренебречь малым коэффициентом D_m молекулярной диффузии. В диффузионном приближении ($p \ll p_0, s \ll 1/\tau_0$) функция Грина уравнения Бурре полностью совпадает с выражением (62).

Асимптотическое поведение функций Грина нелинейного DIA-уравнения (61) и линейного уравнения Бурре (40) при больших значениях параметра $\xi_0 \gg 1$ различно. Не приводя здесь точных асимптотик (см. [21]), укажем только, что, грубо говоря, в первом случае $\tilde{\tilde{g}}(p,s) \propto (\xi_0 p/p_0)^{-1}$, а во втором $\tilde{\tilde{g}}(p,s) \propto (\xi_0 p/p_0)^{-2}$. Именно это различие приводит к тому, что вычисление $D_T^{(0)}$ по общей формуле (51) при $\xi_0 \to \infty$ дает в первом случае величину $D_T^{(0)} = \mathrm{const}\cdot u_0/p_0$ — физически вполне ожидаемый результат (см. [12]), а во втором случае — значение, стремящееся к нулю как $1/\xi_0$. Впервые тот факт, что DIA-уравнение приводит к качественно правильным значениям коэффициента турбулентной диффузии как при $\xi_0 \ll 1$, так и при $\xi_0 \gg 1$, был обнаружен в работе [16], где DIA-уравнение для описания турбулентной диффузии скалярной примеси было впервые выведено исходя из предшествующей работы Крайчнана [25], посвященной нелинейной теории самой турбулентности. Таким образом, в нелинейной теории турбулентной диффузии фактически нет разложения по параметру ξ_0 — нелинейность теории позволяет учесть гораздо большее число актов взаимодействия примеси с основной жидкостью, чем линейная теория типа уравнения Бурре, что и приводит к правильным результатам для D_T для любых значений параметра ξ_0.

Напишем теперь уравнение для $\tilde{V}(p,t_1,t_2)$ с учетом неприводимых корреляторов четвертого порядка. Для этого в правую часть уравнения (48) надо добавить четыре новых члена, соответствующих последним четырем членам в уравнении (38). Обозначим их A, B, C, D в порядке следования в (38):

$$\begin{aligned} A(p,t_1,t_2) = &\int_0^{t_1} d\tau \int_0^{t_1-\tau} d\tau' \int_0^{t_1-\tau-\tau'} d\tau'' \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{s}}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{s}|,\tau)\tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{s}|,\tau')\tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau'') \times \\ &\times p_i\tilde{B}_{ij}(\mathbf{s},\tau+\tau')(\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{s})_j \times \\ &\times (\mathbf{p}-\mathbf{s})_n\tilde{B}_{nm}(\mathbf{q},\tau'+\tau'')(\mathbf{p}-\mathbf{q})_m \times \\ &\times \tilde{V}(p,t_1-\tau-\tau'-\tau'',t_2), \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} D(p,t_1,t_2) = -&\int_0^{t_2} d\tau \int_0^{t_2-\tau} d\tau' \int_0^{t_2-\tau-\tau'} d\tau'' \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{s}}{(2\pi)^3} \tilde{g}(p,\tau) \times \\ &\times \tilde{g}(|\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{s}|,\tau'')\tilde{g}(|\mathbf{p}+\mathbf{q}|,\tau')p_i \times \\ &\times \tilde{B}_{ij}(\mathbf{s},|t_1-t_2+\tau+\tau'|)(\mathbf{p}+\mathbf{q})_j \times \\ &\times p_n\tilde{B}_{nm}(\mathbf{q},\tau'+\tau'')(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{s})_m \times \\ &\times \tilde{V}(|\mathbf{p}-\mathbf{s}|,t_2-\tau-\tau'-\tau'',t_1), \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} B(p,t_1,t_2) = -&\int_0^{t_1} d\tau \int_0^{t_1-\tau} d\tau' \int_0^{t_2} d\tau'' \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{s}}{(2\pi)^3} \tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{s}|,\tau) \times \\ &\times \tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{s}|,\tau')\tilde{g}(p,\tau'')p_i \times \\ &\times \tilde{B}_{ij}(\mathbf{s},\tau+\tau')(\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{s})_j \times \\ &\times (\mathbf{p}-\mathbf{s})_n\tilde{B}_{nm}(\mathbf{q},|t_1-t_2-\tau+\tau''|)p_m \times \\ &\times \tilde{V}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1-\tau-\tau',t_2-\tau''), \end{aligned} \tag{65}$$

$$C(p,t_1,t_2) = \int_0^{t_2} d\tau \int_0^{t_2-\tau} d\tau' \int_0^{t_1} d\tau'' \times \\ \times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{s}}{(2\pi)^3} \tilde{g}(p,\tau) \times \\ \times \tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau')\tilde{g}(|\mathbf{p}+\mathbf{s}|,\tau'')(\mathbf{p}-\mathbf{q})_i \times \\ \times \tilde{B}_{ij}(\mathbf{s},|t_1-t_2+\tau+\tau'|)p_j \times \\ \times (\mathbf{p}+\mathbf{s})_n \tilde{B}_{nm}(\mathbf{q},|t_1-t_2+\tau-\tau''|)p_m \times \\ \times \tilde{V}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}+\mathbf{s}|, t_1-\tau'', t_2-\tau-\tau'). \quad (66)$$

При проверке выполнимости закона сохранения (5) можно убедиться, что суммы $A+D$ и $B+C$ при интегрировании по $\mathbf{p}$ при $t_1=t_2=t$ и $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$ действительно обращаются в нуль. В отличие от (48), добавочные члены (63)–(66) зависят от турбулентной спиральности. При учете (63)–(66) в правую часть формулы (49) надо добавить выражения:

$$E(t) = \int_0^{t} d\tau \int_0^{t-\tau} d\tau' \int_0^{t-\tau-\tau'} d\tau'' \times \\ \times \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{s}}{(2\pi)^3} \tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{s}|,\tau) \times \\ \times \tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{s}|,\tau')\tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau'')s_i \times \\ \times \tilde{B}_{ij}(\mathbf{s},\tau+\tau')(\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{s})_j \times \\ \times (\mathbf{p}-\mathbf{s})_n \tilde{B}_{nm}(\mathbf{q},\tau'+\tau'')(\mathbf{p}-\mathbf{q})_m \times \\ \times \tilde{V}(p, t-\tau-\tau'-\tau'', t), \quad (67)$$

$$F(t) = -\int_0^{t} d\tau \int_0^{t-\tau} d\tau' \int_0^{t} d\tau'' \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \times \\ \times \int \frac{d\mathbf{s}}{(2\pi)^3} \tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{s}|,\tau) \times \\ \times \tilde{g}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{s}|,\tau')\tilde{g}(p,\tau'')s_i \times \\ \times \tilde{B}_{ij}(\mathbf{s},\tau+\tau')(\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{s})_j \times \\ \times (\mathbf{p}-\mathbf{s})_n \tilde{B}_{nm}(\mathbf{q},|\tau'-\tau''|)p_m \times \\ \times \tilde{V}(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|, t-\tau'', t-\tau-\tau'). \quad (68)$$

Функция $E(t)$ возникла от интегрирования суммы $A+D$, а $F(t)$ — суммы $B+C$. В отличие от $\tilde{V}(p,t_1,t_2)$, величина $\langle n^2(\mathbf{r},t)\rangle$ от турбулентной спиральности не зависит даже при учете корреляторов четвертого порядка. Интересно отметить, что функции $E(t)$ и $F(t)$ зависят от произведения спектра движений сжимаемой среды (потенциальных), $E_{compr}(p,\tau)$, на коррелятор, содержащий также и спектр $E_{inc}(p,\tau)$. Используя (67) и (68), можно вычислить поправки к асимптотическим выражениям (53) и (59). Мы приведем здесь только добавочный вклад в (59), имеющий сравнительно простой аналитический вид:

$$-\frac{2}{\sqrt{3}u_0^3}\langle \operatorname{div}^2\mathbf{u}\rangle\langle \operatorname{rot}^2\mathbf{u}\rangle \int_0^\infty dq \frac{\tilde{E}_V(q,t,t)}{q^3}. \quad (69)$$

Формула (69) показывает, что уровень флуктуаций уменьшается из-за наличия вращательного турбулентного движения. При малости молекулярной диффузии именно этот эффект будет сначала эффективно уменьшать флуктуации (размешивать кластерные скопления частиц). Однако при дальнейшей эволюции молекулярная диффузия станет главной причиной выравнивания концентрации частиц. Этот эффект отсутствует в рамках $\delta(\tau)$-модели, так как вращательные движения не могут быть описаны в приближении с малым временем корреляции.

5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СПЕКТРОВ ФЛУКТУАЦИЙ МАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ И МАГНИТНОЙ СПИРАЛЬНОСТИ

В случае диффузии магнитного поля функция Грина $G_{ij}(1,2)$ и оператор взаимодействия $L_{ij}(1) = \nabla_j^{(1)}u_i(1) - \delta_{ij}\nabla_t^{(1)}u_t(1)$ являются тензорными величинами. Для рассматриваемого нами случая однородной, изотропной и стационарной турбулентности $\langle G_{ij}(1,2)\rangle = \theta(\tau)g_{ij}(\mathbf{R},\tau)$ и $H_{ij}(1,2) = \langle B_i(1)B_j(2)\rangle = H_{ij}(\mathbf{R},t_1,t_2)$, где $\mathbf{R}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, $\tau = t_1-t_2$. Явный вид для фурье-преобразований по $\mathbf{R}$ этих величин следующий:

$$\tilde{g}_{jk}(\mathbf{p},\tau) = \delta_{jk}\tilde{g}_m(p,\tau) + (\delta_{jk}p^2 - p_jp_k)\tilde{g}_2(p,\tau) + \\ + ie_{jkt}p_t\tilde{g}_1(p,\tau), \quad (70)$$

$$\tilde{H}_{jk}(\mathbf{p},t_1,t_2) = (\delta_{jk}p^2 - p_jp_k)\tilde{H}_0(p,t_1,t_2) + \\ + ie_{jkt}p_t\tilde{H}_1(p,t_1,t_2). \quad (71)$$

Член с $\tilde{g}_m(p,\tau)$ возникает от свободного члена интегрального уравнения (9) для функции Грина. Условие $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ $(\mathbf{p}\cdot\tilde{\mathbf{B}}=0)$ выполняется, так как начальное магнитное поле $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ соленоидально. Удобно ввести функцию

$$\tilde{g}_0(p,\tau) = \tilde{g}_m(p,\tau) + p^2\tilde{g}_2(p,\tau) \quad (72)$$

и написать систему уравнений для $\tilde{g}_0(p,\tau)$ и $\tilde{g}_1(p,\tau)$, вытекающую из DIA-уравнения (24). Вводя обозначения $\tilde{g}_\pm(p,\tau) = \tilde{g}_0(p,\tau) \pm p\tilde{g}_1(p,\tau)$, получаем

$$\tilde{g}_{\pm}(p,\tau) = \tilde{g}_m(p,\tau) - \int\limits_0^{\tau} d\tau' \int\limits_0^{\tau-\tau'} d\tau'' \tilde{g}_m(p,\tau') \times \\ \times \left[p^2 S_0(p,\tau'') \pm p S_1(p,\tau'')\right] \tilde{g}_{\pm}(p,\tau-\tau'-\tau''), \quad (73)$$

где

$$p^2 S_0(p,\tau) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\infty} dq \int\limits_{-1}^{1} d\mu \{p^2(1-\mu^2) \times \\ \times [E_{inc}(q,\tau)\tilde{g}_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau) - \\ - E_h(q,\tau)\tilde{g}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)] + 2p\mu(p\mu - q) \times \\ \times E_{compr}(q,\tau) g_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)\}, \quad (74)$$

$$S_1(p,\tau) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\infty} dq \int\limits_{-1}^{1} d\mu \{(1-\mu^2)[(p^2+q^2-pq\mu) \times \\ \times E_{inc}(q,\tau)\tilde{g}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau) - \\ - E_h(q,\tau)\tilde{g}_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)] + \\ + [2p^2\mu^2 + (1+\mu^2)(q^2 - 2pq\mu] \times \\ \times E_{compr}(q,\tau)\tilde{g}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)\}. \quad (75)$$

Формулы (73)–(75) сильно упрощаются для случая несжимаемой турбулентной среды. Если взять преобразование Лапласа по τ, то уравнение (73) превратится в следующее выражение:

$$\tilde{\tilde{g}}_{\pm}(p,s) = \left[s + D_m p^2 + p^2 \tilde{S}_0(p,s) \pm p \tilde{S}_1(p,s)\right]^{-1}. \quad (76)$$

Отметим, что условие соленоидальности $\mathbf{p}\cdot\mathbf{B} = 0$ приводит к тому, что член $p_i p_j \tilde{g}_2(p,\tau)$ везде исчезает, так что можно считать, что функция Грина (70) имеет вид

$$\tilde{g}_{jk}(p,\tau) = \delta_{jk}\tilde{g}_0(p,\tau) + i e_{jkt} p_t \tilde{g}_1(p,\tau). \quad (77)$$

В отсутствие турбулентной спиральности ($D(p,\tau) = 0$) функции $\tilde{g}_1(p,\tau) = 0$ и $S_1(p,\tau) = 0$, а уравнения для $\tilde{g}_0(p,\tau)$ совпадают с уравнениями (61) и (62) для случая скалярной примеси.

В диффузионном приближении выражение (76) принимает вид

$$\tilde{\tilde{g}}_{\pm}(p,s) = \left[s + (D_m + D_T^{(0)})p^2 \pm \alpha_T^{(0)} p\right]^{-1}, \quad (78)$$

где коэффициент турбулентной диффузии $D_T^{(0)}$ равен

$$D_T^{(0)} = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\infty} dp \int\limits_0^{\infty} d\tau \times \\ \times \Big\{[E_{inc}(p,\tau) + E_{compr}(p,\tau)]\tilde{g}_0(p,\tau) + \\ + E_{compr}(p,\tau) p \frac{\partial \tilde{g}_0(p,\tau)}{\partial p} - E_h(p,\tau)\tilde{g}_1(p,\tau)\Big\}. \quad (79)$$

В отсутствие турбулентной спиральности ($E_h(p,\tau) = 0$) это выражение совпадает с коэффициентом турбулентной диффузии (51) примесных частиц (различие коэффициентов D_T для магнитного поля и скалярной примеси в этом случае появляется лишь при учете неприводимых взаимодействий четвертого порядка по скоростям [26]). Коэффициент усиления среднего магнитного поля турбулентной спиральностью равен

$$\alpha_T^{(0)} = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\infty} dp \int\limits_0^{\infty} d\tau \{-E_h(p,\tau)\tilde{g}_0(p,\tau) + \\ + p^2[E_{inc}(p,\tau) + 2E_{compr}(p,\tau)]\tilde{g}_1(p,\tau)\}. \quad (80)$$

Для $\delta(\tau)$-процесса

$$D_T^{(0)} = u_0^2\tau_0/3, \quad \alpha_T^{(0)} = -\langle \mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})\rangle \tau_0/3.$$

Диффузионная функция Грина, соответствующая (78), имеет вид (77), где

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0(p,\tau) &= \mathrm{ch}(\alpha_T^{(0)} p\tau)\exp(-D_T^{(0)} p^2\tau), \\ \tilde{g}_1(p,\tau) &= -\frac{1}{p}\,\mathrm{sh}(\alpha_T^{(0)} p\tau)\exp(-D_T^{(0)} p^2\tau). \end{aligned} \quad (81)$$

Обратимся теперь к уравнению (38) для тензора $\tilde{H}_{ij}(p,t_1,t_2)$, где учтем только корреляторы второго порядка (лестничное приближение уравнения Бете–Солпитера). Прежде всего заметим, что функция $\tilde{H}_0(p,t_1,t_2)$ определяет спектр магнитной энергии:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}(\mathbf{r},t_1,t_2)\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t_1,t_2)\rangle &= \int\limits_0^{\infty} dp E_B(p,t_1,t_2), \\ E_B &= p^4 \tilde{H}_0(p,t_1,t_2)/\pi^2. \end{aligned} \quad (82)$$

Используя связь магнитного поля с векторным потенциалом $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, находим связь спектра магнитной спиральности с функцией $\tilde{H}_1(p,t,t)$:

$$\begin{aligned} H_{Mh}(t) \equiv \langle \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\rangle &= \int\limits_0^{\infty} dp E_{Mh}(p,t), \\ E_{Mh}(p,t) &= -p^2\tilde{H}_1(p,t,t)/\pi^2. \end{aligned} \quad (83)$$

Закон сохранения магнитной спиральности (6) для однородной турбулентной среды при $D_m = 0$ приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt}\int d\mathbf{p}\,\tilde{H}_1(p,t,t) = 0. \tag{84}$$

Далее мы убедимся, что это соотношение выполняется.

Из уравнения (38) вытекает следующая система уравнений для $\tilde{H}_0(p,t_1,t_2)$ и $\tilde{H}_1(p,t_1,t_2)$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + D_m p^2\right)\tilde{H}_0(p,t_1,t_2) = \\
&\quad = -\int_0^{t_1} d\tau [p^2 S_0(p,\tau)\tilde{H}_0(p,t_1-\tau,t_2) + \\
&\qquad + S_1(p,\tau)\tilde{H}_1(p,t_1-\tau,t_2)] + \\
&\quad + \int_0^{t_2} d\tau [T_0(p,|t_1-t_2+\tau|,t_1,t_2-\tau)\tilde{g}_0(p,\tau) + \\
&\qquad + T_1(p,|t_1-t_2+\tau|,t_1,t_2-\tau)\tilde{g}_1(p,\tau)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + D_m p^2\right)\tilde{H}_1(p,t_1,t_2) = \\
&\quad = -\int_0^{t_1} d\tau p^2 [S_1(p,\tau)\tilde{H}_0(p,t_1-\tau,t_2) + \\
&\qquad + S_0(p,\tau)\tilde{H}_1(p,t_1-\tau,t_2)] + \\
&\quad + \int_0^{t_2} d\tau [T_1(p,|t_1-t_2+\tau|,t_1,t_2-\tau)\tilde{g}_0(p,\tau) + \\
&\qquad + T_0(p,|t_1-t_2+\tau|,t_1,t_2-\tau)\tilde{g}_1(p,\tau)],
\end{aligned} \tag{85}$$

где функции $T_{0,1}(p,|t|,t_1,t_2-\tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&T_0(p,|t|,t_1,t_2-\tau) = \frac{1}{4}\int_0^\infty dq\,\times \\
&\quad \times \int_{-1}^{1} d\mu\{(1-\mu^2)[(p^2+q^2-pq\mu)\,\times \\
&\quad \times E_{inc}(q,|t|)\tilde{H}_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1,t_2-\tau) - \\
&\quad - E_h(q,|t|)\tilde{H}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1,t_2-\tau)] + \\
&\quad + [2p^2\mu^2 + (1+\mu^2)(q^2-2pq\mu)]\,\times \\
&\quad \times E_{compr}(q,|t|)\tilde{H}_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1,t_2-\tau)\},
\end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
&T_1(p,|t|,t_1,t_2-\tau) = \frac{1}{4}\int_0^\infty dq\,\times \\
&\quad \times \int_{-1}^{1} d\mu\{p^2(1-\mu^2)[E_{inc}(q,|t|)\tilde{H}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1,t_2-\tau) - \\
&\quad - E_h(q,|t|)\tilde{H}_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1,t_2-\tau)] + \\
&\quad + 2p\mu(p\mu-q)E_{compr}(q,|t|)\tilde{H}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t_1,t_2-\tau)\}.
\end{aligned} \tag{87}$$

Отметим, что величины S_0 и S_1 связаны с графиком $\langle\circ\!\subset\!\supset\!\circ\rangle$, а T_0 и T_1 — с графиком $\langle\circ\!\sqsubset\!\sqsupset\!\circ\rangle$ (см. (38)). Поэтому их структуры подобны. При отсутствии турбулентной спиральности ($D(p,\tau) = 0$, $\tilde{g}_1(p,\tau) = 0$, $S_1(p,\tau) = 0$) система уравнений (85) распадается на отдельные уравнения для $\tilde{H}_0(p,t_1,t_2)$ и $\tilde{H}_1(p,t_1,t_2)$.

Система (85) для часто используемого $\delta(\tau)$-ансамбля скоростей турбулентного движения ($\tilde{B}_{ij}(\mathbf{p},\tau) = \tau_0\delta(\tau)\tilde{B}_{ij}(\mathbf{p})$) принимает более простой вид:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2D_m p^2\right)\tilde{H}_0(p,t,t) = \\
&= -2[D_T^{(0)} p^2 \tilde{H}_0(p,t,t) + \alpha_T^{(0)}\tilde{H}_1(p,t,t)] + \\
&+ \frac{\tau_0}{2}\int_0^\infty dq \int_{-1}^{1} d\mu\{(1-\mu^2)[(p^2+q^2-pq\mu)\,\times \\
&\times E_{inc}(q)\tilde{H}_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t,t) - E_h(q)\tilde{H}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t,t)] + \\
&+ [2p^2\mu^2 + (1+\mu^2)(q^2-2pq\mu)]\,\times \\
&\times E_{compr}(q)\tilde{H}_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t,t)\},
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2D_m p^2\right)\tilde{H}_1(p,t,t) = \\
&= -2p^2[D_T^{(0)}\tilde{H}_1(p,t,t) + \alpha_T^{(0)}\tilde{H}_0(p,t,t)] + \\
&+ \frac{\tau_0}{2}\int_0^\infty dq \int_{-1}^{1} d\mu\{p^2(1-\mu^2)[E_{inc}(q)\tilde{H}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t,t) - \\
&- E_h(q)\tilde{H}_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t,t)] + 2(p^2\mu^2 - pq\mu)\,\times \\
&\times E_{compr}(q)\tilde{H}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,t,t)\},
\end{aligned}$$

где

$$D_T^{(0)} = u_0^2\tau_0/3, \quad \alpha_T^{(0)} = -\langle\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{u})\rangle\tau_0/3.$$

Для несжимаемой турбулентной среды без спиральности первое из уравнений (88), записанное для величины $p^2H_0(p,t,t)$, совпадает с уравнением (14) в известной работе [17].

Интегрируя второе из уравнений (85) по $\mathbf{p}$ и используя при этом простые замены переменных, получаем для среды с $D_m = 0$ закон сохранения магнитной спиральности (84). Подчеркнем, что даже вычисляя магнитную энергию (82), мы должны удовлетворить закону сохранения (84), так как функции $\tilde{H}_0(p,t_1,t_2)$ и $\tilde{H}_1(p,t_1,t_2)$ взаимосвязаны.

Получим теперь из (85)–(87) соотношения для $\langle B^2(\mathbf{r},t)\rangle$:

$$\frac{d}{dt}\langle B^2(\mathbf{r},t)\rangle = -2D_m\langle(\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t))^2\rangle + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty dp\int\limits_0^\infty dq\int\limits_{-1}^1 d\mu\int\limits_0^t d\tau\{E_B(p,t,t-\tau)\times \\ \times\tilde{g}_0(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)[(1-\mu^2)(q^2-pq\mu)\times \\ \times E_{inc}(q,\tau)+(q^2(1+\mu^2)-2pq\mu^3)E_{compr}(q,\tau)]+ \\ +\tilde{g}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)E_{Mh}(p,t,t-\tau)[p^3q(1-\mu^2)\times \\ \times E_{inc}(q,\tau)+(p^2q^2(1-\mu^2)+2p\mu(q^3+2p^3\mu+qp^2\mu^2))\times \\ \times E_{compr}(q,\tau)]-(1-\mu^2)(q^2-2pq\mu)\times \\ \times E_h(q,\tau)E_B(p,t,t-\tau)\tilde{g}_1(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|,\tau)\}. \quad (89)$$

Для модели турбулентности с малым временем корреляции это выражение приобретает простой вид:

$$\frac{d}{dt}\langle B^2\rangle = -2D_m\langle(\nabla\times\mathbf{B})^2\rangle + \\ + \frac{2\tau_0}{3}[\langle(\nabla\times\mathbf{u})^2\rangle + 2\langle\operatorname{div}^2\mathbf{u}\rangle]\langle B^2\rangle. \quad (90)$$

Интересно отметить, что уравнение (90) не зависит от турбулентной спиральности, которая определяет коэффициент усиления среднего магнитного поля $\langle\mathbf{B}\rangle$ (см. (80)). Поскольку $\langle B^2\rangle = \langle\mathbf{B}\rangle\cdot\langle\mathbf{B}\rangle + \langle B'^2\rangle$, это означает, что увеличение энергии среднего (крупномасштабного) магнитного поля за счет действия α-эффекта полностью компенсируется уменьшением энергии магнитных флуктуаций этим же механизмом. Впервые этот эффект был найден в работе [7], где было использовано диффузионное приближение без предположения о малом времени корреляции турбулентности. Отметим, что выражение (90) совпадает с результатом недавно вышедшей работы [24], где подробно рассмотрено обобщение уравнения Казанцева [17] на случаи двумерной и трехмерной сжимаемой турбулентной среды без спиральности.

Следует отметить, что обычно наличие магнитного поля связано с вращением среды (атмосферы вращающихся звезд, вращение Галактики и т. д.). Вращательные движения турбулентной среды как целого приводят к появлению спиральности, что требует даже в рамках $\delta(\tau)$-приближения решения системы уравнений (88) для $\tilde{H}_0(p,t,t)$ и $\tilde{H}_1(p,t,t)$. Работы [20, 24] и ряд других совершенно не учитывают влияния спиральности.

Как и в случае переноса примесных частиц (см. (53)), приведем здесь обобщение выражения (90) на случай турбулентности с конечным временем корреляции, но для начальных времен эволюции:

$$\frac{d}{dt}\langle B^2\rangle = -2(D_m-D''_T)\langle(\nabla\times\mathbf{B})^2\rangle + \\ + \gamma\langle\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\rangle + (C_1+C_2)\langle B^2\rangle. \quad (91)$$

Здесь коэффициенты D''_T, γ, C_1 и C_2 имеют вид

$$D''_T = \frac{1}{15}\int\limits_0^\infty dp\int\limits_0^\infty d\tau\left\{[E_{inc}(p,\tau) + \right. \\ +3E_{compr}(p,\tau)]p\frac{\partial\tilde{g}_0(p,\tau)}{\partial p} - \\ \left. -2E_h(p,\tau)p\frac{\partial\tilde{g}_1(p,\tau)}{\partial p}\right\}, \quad (92)$$

$$\gamma = \frac{2}{3}\int\limits_0^\infty dp\times \\ \times\int\limits_0^\infty d\tau p^2E_{compr}(p,\tau)\left[\tilde{g}_1(p,\tau) - p\frac{\partial\tilde{g}_1(p,\tau)}{\partial p}\right], \quad (93)$$

$$C_1 = \frac{2}{3}\int\limits_0^\infty dp\int\limits_0^\infty d\tau\times \\ \times p^2[E_{inc}(p,\tau)+2E_{compr}(p,\tau)]\tilde{g}_0(p,\tau), \quad (94)$$

$$C_2 = -\frac{2}{3}\int\limits_0^\infty dp\int\limits_0^\infty d\tau\, p^2E_h(p,\tau)\tilde{g}_1(p,\tau). \quad (95)$$

В (91) мы отбросили два малых члена типа $\langle\nabla^2\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\rangle$. Интересно, что член с γ обусловлен только движениями сжимаемой турбулентной среды с учетом спиральности. В отличие от (90), в (91) турбулентная спиральность уже дает вклад в член с $\langle B^2\rangle$, квадратичный по спектру $E_h(p,\tau)$, так как функция g_1 сама пропорциональна спектру спиральности. Это означает, что $C_2 \le 0$, т. е. турбулентная спиральность на первых этапах эволюции уменьшает рост магнитной энергии по сравнению со случаем отсутствия спиральности. Поскольку $\partial\tilde{g}_0(p,\tau)/\partial p \le 0$, то, скорее всего, $D''_T \le 0$ (по-видимому член с E_h все же меньше первого члена в (92)). По величине коэффициент D''_T много больше коэффициента молекулярной диффузии D_m, и именно им определяется затухание магнитной энергии в начальные моменты времени. Отметим, что для случая малых времен корреляции выражение (91) переходит в (90).

Резюмируя, можно сказать, что учет конечности времени корреляции турбулентных движений приводит к сильному замедлению роста магнитной энергии по сравнению с моделью турбулентности с малым временем корреляции.

Для акустической турбулентности имеем $D''_T = 3D'_T/5$, $C_2 \equiv 0$ и $C_1 = 4C/3$, где положительные коэффициенты D'_T и C даются формулами (57) и (58). Отметим, что коэффициент диффузии среднего магнитного поля в акустической турбулентности совпадает с полученным в работе [27] значением для скалярной примеси. Таким образом, эффект добавочного усиления интенсивности флуктуаций в акустической турбулентности существует как для скалярной примеси, так и для магнитного поля.

При больших временах эволюции в случае отсутствия турбулентной спиральности, по-видимому, энергия магнитных флуктуаций содержится в малых масштабах. Из выражения (89) тогда следует соотношение

$$\frac{d}{dt}\langle B^2\rangle = -2D_m\langle(\nabla\times\mathbf{B})^2\rangle + \frac{8}{5\sqrt{3}u_0}[\langle(\nabla\times\mathbf{u})^2\rangle + 2\langle\mathrm{div}^2\mathbf{u}\rangle]\times \int\limits_0^\infty dp\frac{E_B(p,t,t)}{p}. \quad (96)$$

В отличие от концентрации примесных частиц (см. (55)), флуктуации магнитного поля усиливаются и вращательными движениями турбулентной плазмы, а не только турбулентностью сжимаемой среды типа ударных волн. Если учесть, что $E_B(p,t,t)$ имеет максимум при $p_{max} \gg p_0$, и вынести $1/p$ из-под знака интеграла в некоторой средней точке p_1 ($p_0 \ll p_1 \le p_{max}$), то второй член в (96) совпадет по структуре с аналогичным членом в (90), однако его величина будет в $(p_0/p_1)/\xi_0$ раз отличаться от значения, полученного из (90), т. е. при обычно принимаемом для развитой турбулентности значении $\xi_0 \approx 1$ [31] получим значительно меньший коэффициент усиления флуктуаций, чем дает выражение (90). То же самое имеет место и для флуктуаций скалярной примеси.

Выражения (91) и (96) сильно отличаются от (90) для $\delta(\tau)$-процесса. Все критические замечания предыдущего параграфа относительно модели турбулентности с малым временем корреляции относятся и к случаю диффузии магнитного поля.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем основные результаты работы. Прежде всего, впервые указано на важность учета законов сохранения (5) и (6) при получении интегродифференциальных уравнений, описывающих эволюцию интенсивности флуктуаций примесных частиц и магнитного поля (уравнения типа Бете–Солпитера). Ядра этих уравнений являются разностью двух членов одного порядка величины, описывающих процессы прихода и отвода (баланс) флуктуаций в какой-либо фиксированной точке турбулентной среды. Законы сохранения накладывают интегральное ограничение на эти процессы. Их выполнимость гарантирует, что в уравнениях не появятся псевдоэффекты сильного усиления или, напротив, ослабления флуктуаций в процессе эволюции.

В работе выяснено, что для выполнимости законов сохранения в иерархии уравнений типа Бете–Солпитера необходимо, чтобы средняя функция Грина задачи $\langle G(1,2)\rangle$ удовлетворяла бы иерархии нелинейных уравнений (нелинейных уравнений типа Дайсона). При этом необходимо, чтобы порядки этих иерархий (наибольшая степень учитываемых корреляторов скорости) совпадали. В частности, показано, что широко используемое приближение Бурре уравнения для $\langle G(1,2)\rangle$ не приводит к выполнению законов сохранения в уравнениях типа Бете–Солпитера даже для малых значений параметра $\xi_0 = u_0\tau_0/R_0 \ll 1$, хотя это уравнение и дает правильное значение коэффициента турбулентной диффузии для $\xi_0 \ll 1$.

В статье представлен простой вывод иерархии нелинейных уравнений для средней функции Грина, не ограниченный случаем гауссовского ансамбля поля турбулентных скоростей. Приведены правильные уравнения для описания эволюции спектров флуктуаций числа примесных частиц и магнитных флуктуаций в сжимаемой турбулентной среде со спиральностью. Полученные уравнения, удовлетворяющие законам сохранения, могут быть использованы также для изучения влияния негауссовости ансамбля турбулентных скоростей на значения коэффициентов турбулентной диффузии и эволюцию флуктуаций примесных полей.

Даны вытекающие из этих уравнений асимптотические формулы, которые описывают эволюцию во времени интенсивности флуктуаций этих примесных полей в фиксированной точке турбулентной среды.

Показано, что часто используемая ввиду ее математической простоты модель с малым временем корреляции турбулентности ($\langle u_i(1)u_j(2)\rangle \propto \delta(t_1 - t_2)$) не описывает ряда эффектов турбулентной диффузии, которые существенно влияют на время перехода флуктуаций в мелкие масштабы движения. В целом конечность времени корреляции турбулентных скоростей приводит к сильному замедлению роста интенсивности флуктуаций как за счет затухания флуктуаций турбулентной диффузией (в $\delta(\tau)$-модели затухание обусловлено только молекулярной диффузией), так и одновременного уменьшения коэффициента усиления флуктуаций при учете временной нелокальности процесса турбулентного переноса. Исключением является акустическая турбулентность, где, напротив, турбулентная диффузия преодолевает молекулярное затухание и одновременно приводит к увеличению коэффициента усиления флуктуаций. Однако в конечной стадии эволюции, когда флуктуации переходят в область малых масштабов, затухание определяется все же молекулярной диффузией. При этом коэффициенты усиления флуктуаций для развитой турбулентности с $\xi_0 \approx 1$ принимают значительно меньшее значение, чем это следует из $\delta(\tau)$-модели.

Полученные правильные иерархии уравнений для $\langle G(1,2)\rangle$ и интенсивности флуктуаций являются твердым основанием для более детального изучения эволюции флуктуаций. Метод получения и согласования иерархий уравнений является общим и, возможно, может быть использован также и при описании турбулентных движений основной жидкости или газа. В частности, было бы интересно получить обобщение с учетом корреляторов четвертого порядка для известного уравнения Крайчнана [25], дающего для инерционной области спектра турбулентности значение $p^{-3/2}$ вместо колмогоровского значения $p^{-5/3}$. Следует ожидать, что такое обобщение даст более близкий к колмогоровскому показатель спектра, что, очевидно, будет означать переход к более точному описанию реальной турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. I. Vainshtein and F. Cattaneo, Astrophys. J. **393**, 165 (1992).
2. A. V. Gruzinov and P. H. Diamond, Phys. Rev. Lett. **72**, 1651 (1994).
3. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ **31**, 154 (1956).
4. R. S. Peckover and N. O. Weiss, Month. Not. Roy. Astron. Soc. **182**, 189 (1978).
5. L. L. Kichatinov, V. V. Pipin, and G. Rüdiger, Astron. Nachr. **315**, 157 (1994).
6. J. Cho and A. Lazarian, Astrophys. J. **589**, L77-L80 (2003).
7. Н. А. Силантьев, Письма в ЖЭТФ **72**, 60 (2000).
8. N. A. Silant'ev, Astron. Astrophys. **370**, 533 (2001).
9. A. Z. Dolginov and N. A. Silant'ev, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **63**, 139 (1992).
10. G. I. Taylor, Proc. London Math. Soc. A **20**, 196 (1921).
11. H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. **65**, 1 (1974).
12. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **101**, 1216 (1992).
13. В. И. Татарский, *Распространение волн в турбулентной атмосфере*, Наука, Москва (1967).
14. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазами физика*, Физматлит, Москва (2001).
15. R. Bourret, Canad. J. Phys. **38**, 665 (1960).
16. P. H. Roberts, J. Fluid Mech. **11**, 257 (1961).
17. А. П. Казанцев, ЖЭТФ **53**, 1806 (1967).
18. H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1978).
19. N. Seehafer, Phys. Rev. E **53**, 1283 (1996).
20. А. П. Казанцев, А. А. Рузмайкин, Д. В. Соколов, ЖЭТФ **88**, 487 (1985).
21. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **111**, 871 (1997).
22. C. C. Lin, *Turbulent Flows and Heat Transfer*, Princeton Univ. Press, Princeton (1959).
23. G. Rickayzen, *Green Functions and Condensed Matter*, Academic Press, New York (1980).
24. A. A. Schekochihin, S. A. Boldyrev, and R. M. Kulsrud, Astrophys. J. **567**, 828 (2002).
25. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **5**, 497 (1959).
26. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **112**, 1312 (1997).
27. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **114**, 930 (1998).
28. G. K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1953).
29. Н. А. Силантьев, ЖЭТФ **122**, 1107 (2002).
30. В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев, ДАН СССР **192**, 296 (1970).
31. С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, УФН **145**, 593 (1985).