

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ НЕИДЕАЛЬНЫХ СРЕДАХ

А. В. Конюхов^{a,b}, А. П. Лихачев^a, А. М. Опарин^{b,*}, С. И. Анисимов^c, В. Е. Фортвов^a

^a Институт теплофизики экстремальных состояний Российской академии наук
125412, Москва, Россия

^b Институт автоматизации проектирования Российской академии наук
123056, Москва, Россия

^c Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 27 августа 2003 г.

Проведено численное исследование нелинейной неустойчивости ударных волн в твердом дейтерии и в модельной среде со специально подобранным уравнением состояния. Впервые рассмотрен случай, когда исходная неустойчивая ударная волна распадается на устойчивую и акустически неустойчивую.

PACS: 47.20.Hw, 47.40.Nm

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] была развита линейная теория неустойчивости ударных волн. Было установлено, что для широкого класса сред (в частности, для сред с фазовыми переходами) на ударных адиабатах имеются участки, на которых ударные волны неустойчивы относительно малых возмущений фронта волны. Из результатов проведенного анализа следует, что возможно существование двух типов неустойчивости: абсолютной (или гофрировочной), заключающейся в экспоненциальном росте амплитуды периодических возмущений фронта ударной волны со временем, и акустической, при которой возмущения фронта могут существовать неограниченно долго, не затухая и не усиливаясь. В последнем случае фронт ударной волны является источником звуковых и энтропийных возмущений, распространяющихся вниз по потоку. Результаты этих работ получили, по имени их авторов, название линейной теории Дьякова–Конторовича. В рамках этой теории были впервые сформулированы соответствующие критерии неустойчивости ударной волны. В соответствии со значением параметра устойчивости

$$L = j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_H,$$

где $j^2 = (p_2 - p_1)/(V_1 - V_2)$ — поток вещества через фронт ударной волны, $V = 1/\rho$ — удельный объем, p — давление, а частная производная берется вдоль ударной адиабаты, выделяются следующие области, различающиеся по качественному характеру эволюции малых периодических возмущений фронта ударной волны: 1) область устойчивости, в которой $-1 < L < L_0$, 2) область звуковой неустойчивости, где $L_0 < L < 1 + 2M$ и 3) область абсолютной неустойчивости, где $L < -1$, $L > 1 + 2M$. Здесь введены обозначения:

$$L_0 = \frac{1 - \theta M^2 - M^2}{1 + \theta M^2 - M^2}, \quad \theta = \frac{V_0}{V}, \quad M = \frac{u}{c}.$$

Впоследствии было показано (см., например, [3]), что участки ударной адиабаты, соответствующие абсолютной неустойчивости, лежат внутри участков неоднозначного представления ударного разрыва. На этих участках исходная ударная волна может распадаться с образованием совокупности устойчивых элементов (ударных волн, изэнтропических «несхлопывающихся» волн разрежения и сжатия, контактных разрывов), не догоняющих друг друга. В этой связи в [3] было высказано предположение,

*E-mail: a.oparin@icad.org.ru

что абсолютная неустойчивость на практике не реализуется в силу распада («распадной» неустойчивости) исходной ударной волны с образованием одной из возможных волновых конфигураций.

Для дальнейшего полезно привести некоторые факты, относящиеся к проблеме устойчивости ударной волны. Как было показано в [4], на p - V -диаграмме точка касания ударной адиабаты и прямой, проходящей через начальную точку, является «звуковой», т. е. точкой, в которой число Маха за ударной волной в системе координат, связанной с фронтом, обращается в единицу:

$$M = \frac{|u - D|}{c} = \frac{D - u}{c} = 1.$$

Соответственно, для тангенса угла наклона касательной к адиабате Пуассона выполняется соотношение

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\frac{j^2}{M^2} = -j^2.$$

По определению, в точке касания

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_H = -j^2,$$

откуда видно, что точка касания прямой Рэлея и ударной адиабаты является также точкой касания ударной адиабаты и изэнтропы:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -j^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_H,$$

а параметр устойчивости L , который характеризует эволюцию малых возмущений в теории Дьякова-Конторовича, в точке касания прямой Рэлея и ударной адиабаты принимает значение, равное -1 :

$$L = j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H = -1.$$

Таким образом, точки касания прямой Рэлея и ударной адиабаты являются границами области абсолютной неустойчивости. В промежутке между этими точками выполняется неравенство: $L < -1$.

Точка касания, отвечающая меньшему давлению, является также нижней границей области неоднозначного представления (распадной неустойчивости) ударной волны, за которой исходная волна распадается на комбинацию, состоящую из ударной волны и примыкающей к ней изэнтропической волны сжатия. На гладких адиабатах условие термодинамической аномальности

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S < 0$$

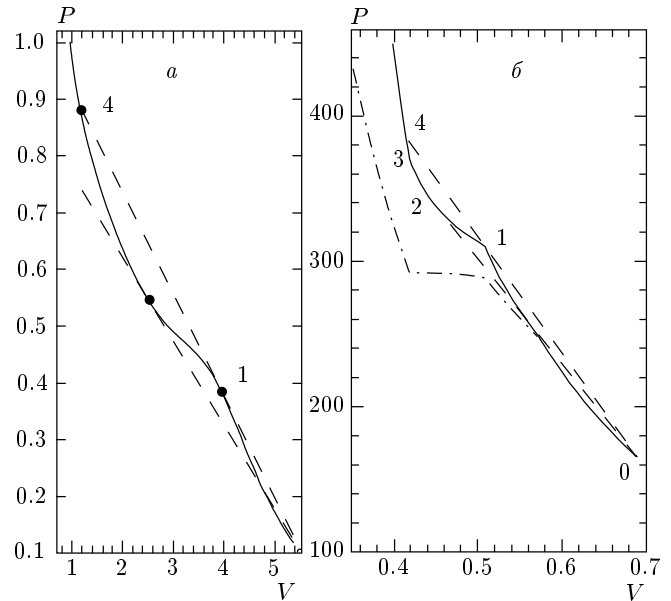


Рис. 1. Характерные ударные адиабаты без точек излома (а) и с точками излома (б). Сплошные линии представляют собой ударные адиабаты, построенные, соответственно, для модельного уравнения состояния и для табличного уравнения состояния дейтерия SESAME. Для табличного уравнения состояния штрихами выделены области устойчивости (0–1), абсолютной неустойчивости (1–2), звуковой неустойчивости (2–3), неустойчивости относительно распада (1–4). Штрихпунктирной линией показана нулевая изотерма

начинает выполняться ниже этой точки, являющейся нижней границей распада по схеме

$$\vec{U} \rightarrow \overleftarrow{B} \overleftarrow{T} \overleftarrow{C} \overleftarrow{U}$$

(здесь использованы обычные обозначения, см., например, [3]: U — ударная волна, B — ударная волна или волна разрежения, T — тангенциальный разрыв, C — изэнтропическая волна сжатия), так как при переходе через точку

$$M = \frac{D - u}{c} = 1$$

звуковые возмущения, имеющие скорость $u + c$, начинают отставать от фронта ударной волны, $u + c < D$, формируя изэнтропическую волну сжатия [3].

В точках касания ударной адиабаты и прямой Рэлея выполняется необходимое условие существования нижней границы области звуковой неустойчивости

$$L_0 = \frac{1 - \theta M^2 - M^2}{1 + \theta M^2 - M^2} = -1 = L.$$

Для адиабаты с гладким перегибом в точке ее касания с прямой Рэлея (см. рис. 1а) имеет место касание или пересечение кривых $L(P)$ и $L_0(P)$. В случае адиабаты с изломом (рис. 1б), значения L и L_0 в этой точке становятся неопределенными, но так же, как и в первом случае, разность $L - L_0$ при переходе через точку излома может либо изменить знак (аналог пересечения), либо остаться того же знака (аналог касания). Во второй точке касания прямой Рэлея и ударной адиабаты для любого типа ударной адиабаты, по-видимому, всегда имеет место пересечение кривых $L(P)$ и $L_0(P)$. В этом случае, к участку абсолютной неустойчивости в точке касания прямой Рэлея и ударной адиабаты всегда примыкает область звуковой неустойчивости. В прилегающей к участку абсолютной неустойчивости $L < -1$ области звуковой неустойчивости звуковые волны излучаются под углом, близким к направлению движения ударной волны. Предельная форма уравнения для косинуса угла наклона волнового вектора звуковой волны [4] при

$$L \rightarrow -1, \quad M \rightarrow 1$$

имеет единственное решение: $\cos \alpha = -1$. При условии $\cos \alpha < 0$ волновой вектор возмущения направлен в сторону движения ударной волны. Волна является «уходящей» вследствие сноса потоком.

Верхняя граница распадной неустойчивости ударной волны определяется условием равенства скоростей первой и второй волн. Для определения давления на этой границе можно использовать равенство

$$\frac{p_4 - p_1}{V_4 - V_1} = -\frac{c_1^2}{V_1^2}$$

как условие касания прямой Рэлея и адиабаты Пуассона. Индексы соответствуют точкам на рис. 1а и б. Это же соотношение можно рассматривать как выражение того факта, что скорость второй ударной волны относительно среды совпадает со скоростью звука:

$$D_{II} - u_1 = V_1 \left(\frac{p_4 - p_1}{V_1 - V_4} \right)^{1/2} = c_1.$$

Подробный анализ распадных конфигураций для ударных адиабат обоих типов содержится в [3].

Несмотря на почти полувековую историю развития проблемы устойчивости ударной волны и большое количество теоретических работ, посвященных анализу этой проблемы, в настоящее время имеется мало экспериментальных наблюдений, подтверждающих упомянутые выше теоретические предсказания. С одной стороны, это связано с тем, что необхо-

димые для их реализации термодинамические условия трудно осуществить в эксперименте. Другой причиной может быть недостаточность данных, указывающих, какой физический эксперимент нужно осуществить и в каком виде неустойчивость ударной волны может в нем проявиться. Для получения таких данных необходимо проводить параметрическое численное исследование поведения ударной волны в зависимости от ее интенсивности при соответствующем подборе модельного или реального уравнения состояния. К настоящему времени известно всего несколько работ, посвященных численному моделированию распадной [5, 6] и акустической [7] неустойчивостей ударной волны. Полученные в них результаты носят отрывочный характер, поэтому систематическое численное исследование нелинейной неустойчивости ударных волн является актуальной задачей. Этой задаче и посвящена данная работа.

В настоящей работе исследуется проблема устойчивости ударной волны в твердом дейтерии (уравнение состояния взято из библиотеки SESAME [8]) и в модельной среде с уравнением состояния

$$e(p, \rho) = (1 - e^{-p^2})(4 - e^{-(4-1/\rho)^2}),$$

предложенным в работе [5]. Это уравнение состояния термодинамически корректно и обладает тем свойством, что построенные на его основе ударные адиабаты содержат участки со всеми известными типами неустойчивости. Реальное трехфазное уравнение состояния SESAME [8], задаваемое в табличном виде, описывает фазовый переход первого рода из молекулярной фазы твердого дейтерия в металлическое состояние.

Ударная адиабата, построенная с использованием модельного уравнения состояния, характерна для процессов ударного сжатия, сопровождающихся фазовыми переходами или химическими реакциями с поглощением тепла. Эта ударная адиабата характеризуется наличием двух типов неустойчивости: распадной и звуковой. Участок этой адиабаты, отвечающий сравнительно низким давлениям, показан на рис. 1а.

Приведенная на рис. 1б ударная адиабата соответствует ударному сжатию низкотемпературного дейтерия из начального состояния $p_0 = 1.6 \cdot 10^3$ ГПа, $V_0 = 0.7$ см³/г. В отличие от предыдущего примера, данная адиабата имеет две точки излома, в которых адиабатическая сжимаемость изменяется скачком, сначала в сторону уменьшения (точка 1), затем в сторону увеличения (точка 3). Рассматривая

кривую с изломом как предельный случай гладкой кривой, можно сказать, что протяженная в первом случае область термодинамической аномальности в случае адиабаты с изломом оказывается стянутой в точку. В том же смысле будем говорить о касании в точке излома.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для численного интегрирования уравнений используется обобщение метода Рунге [9] на произвольное уравнение состояния вида $\varepsilon = (p, \rho)$. Данный метод обладает следующими свойствами: 1) метод консервативен, 2) метод использует точное характеристическое расщепление потоков, 3) стационарный разрыв, на котором выполнены условия Рэнкина-Гюгонио, является точным решением конечно-разностных уравнений и 4) применяется экономичная в вычислительном отношении формулировка метода с использованием вектора $Y = (p, \rho^{1/2}, u)^T$ [10].

В соответствии с подходом [10], для вычисления вектора решения на временном слое $(n + 1)$ используются интегральные законы сохранения, разрешенные относительно сеточных функций давления, скорости, $\rho^{1/2}$:

$$z^{n+1} = ((z^n)^2 + \xi_1)^{1/2},$$

$$u^{n+1} = \frac{(z^n)^2 u^n + \xi_2}{(z^{n+1})^2},$$

$$\varepsilon(p^{n+1}, \rho^{n+1}) = \varepsilon(p^n, \rho^n) + \frac{1}{2} ((z^n u^n)^2 - (z^{n+1} u^{n+1})^2) + \xi_3,$$

где $z = \rho^{1/2}$, ε — внутренняя энергия, приходящаяся на единицу объема,

$$\xi = -\frac{\tau}{h} (\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2})$$

— суммарный поток консервативных величин через грани вычислительной ячейки, τ и h — шаг интегрирования по времени и пространству

соответственно. Аппроксимация вектора потока на гранях с использованием переменных давление–плотность–скорость записывается более компактно, чем через консервативные переменные:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} + R_{i+1/2} \Phi_{i+1/2}],$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u H \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & \frac{\rho}{2c} \\ u & \frac{\rho(u-c)}{2c} & \frac{\rho(u+c)}{2c} \\ \varepsilon_\rho + \frac{1}{2} u^2 & \frac{\rho(H-u)}{2c} & \frac{\rho(H+u)}{2c} \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \Delta \rho - \Delta p/c^2 \\ \Delta p/(\rho c) - \Delta u \\ \Delta p/(\rho c) + \Delta u \end{pmatrix},$$

$$\lambda = (u, u - c, u + c)^T, \quad \lambda^\pm = \frac{\lambda \pm |\lambda|}{2}.$$

Элементы ϕ^l вектора $\Phi_{j+1/2}$ имеют вид

$$\phi_{i+1/2}^l = g_i^1 + g_{i+1}^1 - \psi \left(\lambda_{i+1/2}^1 + \frac{g_{i+1}^1 - g_i^1}{\alpha_{i+1/2}^1} \right) \alpha_{i+1/2}^1$$

— TVD1 (метод первого порядка аппроксимации);

$$\phi_{i+1/2}^l = -\psi(\lambda_{i+1/2}^l) \alpha_{i+1/2}^1,$$

— TVD2 (TVD-схема Хартена второго порядка аппроксимации [11]);

$$g_i^1 = \frac{1 - |\sigma|}{2} \psi(\lambda_{i+1/2}^1) m[\alpha_{j+1/2}^1, \alpha_{j-1/2}^1]$$

— UNO3-схема, использующая ENO-интерполяцию третьего порядка аппроксимации (RP3 [12]);

$$g_i^l = \frac{1 - |\sigma|}{2} \psi(\lambda_{i+1/2}^1) m[\alpha_{j+1/2}^1, \alpha_{j-1/2}^1] + \begin{cases} \left(\lambda_{i+1/2}^{1+} \frac{2 - 3|\sigma| + \sigma^2}{6} + \lambda_{i+1/2}^{1-} \frac{\sigma^2 - 1}{6} \right) \bar{m} [\Delta_- \alpha_{j-1/2}^1, \Delta_+ \alpha_{j-1/2}^1], & \text{если } |\alpha_{i-1/2}^1| \leq |\alpha_{i+1/2}^1|, \\ \left(\lambda_{i+1/2}^{1-} \frac{2 - 3|\sigma| + \sigma^2}{6} + \lambda_{i+1/2}^{1+} \frac{\sigma^2 - 1}{6} \right) \bar{m} [\Delta_- \alpha_{j+1/2}^1, \Delta_+ \alpha_{j+1/2}^1], & \text{если } |\alpha_{i-1/2}^1| > |\alpha_{i+1/2}^1|, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda_{j+1/2}^1 \frac{\Delta \tau}{h}, \\ m[x, y] &= \begin{cases} 0, & xy \leq 0, \\ \min(|x|, |y|) \operatorname{sign}(x), & xy > 0, \end{cases} \\ \bar{m}[x, y] &= \begin{cases} x, & |x| \leq |y|, \\ y, & |x| > |y|, \end{cases} \\ \psi(x) &= \begin{cases} |x|, & |x| \geq \epsilon, \\ \frac{x^2 + \epsilon^2}{2\epsilon}, & |x| < \epsilon, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

где ϵ — параметр энтропийной коррекции [11].

Для двух состояний, обозначаемых индексами «1» и «2», соответствующих смежным ячейкам, приближенное решение задачи о распаде разрыва определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \rho &= z_1 z_2, \\ u &= \frac{z_1 u_1 + z_2 u_2}{z_1 + z_2}, \\ H &= \frac{z_1 H_1 + z_2 H_2}{z_1 + z_2}, \\ c^2 &= \frac{h - \epsilon_\rho}{\epsilon_p}. \end{aligned}$$

Производные уравнения состояния определяются численным дифференцированием с использованием состояний¹⁾ «1» и «2»:

$$\begin{aligned} \epsilon_\rho &= \frac{0.5}{\tilde{\rho}_2 - \rho_1} (\epsilon(\tilde{p}_2, \tilde{\rho}_2) + \epsilon(p_1, \tilde{\rho}_2) - \\ &\quad - \epsilon(\tilde{p}_2, \rho_1) - \epsilon(p_1, \rho_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \frac{0.5}{\tilde{p}_2 - p_1} (\epsilon(\tilde{p}_2, \tilde{\rho}_2) + \epsilon(\tilde{p}_2, \rho_1) - \\ &\quad - \epsilon(p_1, \tilde{\rho}_2) - \epsilon(p_1, \rho_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2 &= \begin{cases} p_2, & |p_2 - p_1| \geq p_1 \delta, \\ p_1 + p_1 \delta, & |p_2 - p_1| < p_1 \delta, \end{cases} \\ \tilde{\rho}_2 &= \begin{cases} \rho_2, & |\rho_2 - \rho_1| \geq \rho_1 \delta, \\ \rho_1 + \rho_1 \delta, & |\rho_2 - \rho_1| < \rho_1 \delta, \end{cases} \end{aligned}$$

где δ — малая положительная величина.

Данный способ вычисления производных гарантирует выполнение на сильном разрыве соотношения

¹⁾ Подход, аналогичный решению Глэйстера [13], впервые примененного для распространения метода Рунге на произвольное уравнение состояния способ введения смешанных состояний для вычисления производных давления.

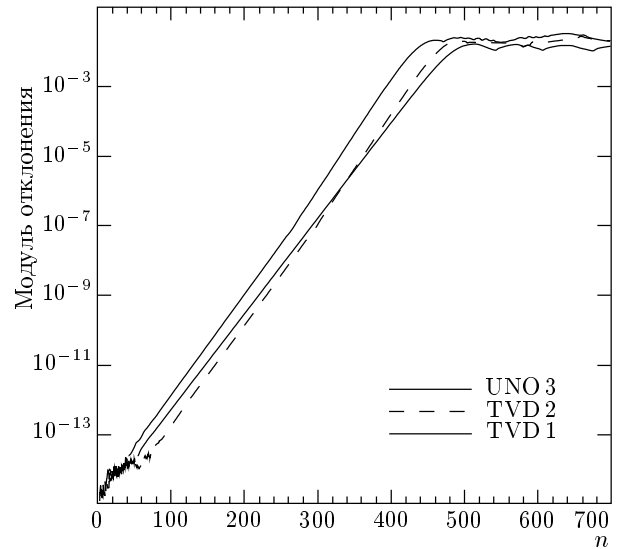


Рис. 2. Изменение модуля отклонения для решений в области распадной неустойчивости. По оси x — номер шага по времени

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 = \epsilon_\rho (\rho_2 - \rho_1) + \epsilon_p (p_2 - p_1)$$

и соответственно соотношения

$$\Delta F = A \Delta U,$$

где A — матрица Якоби вектора потока для усредненного состояния. В этом случае произвольный стационарный скачок, удовлетворяющий условиям Гюгонио на разрыве, т. е. определенный сеточной функцией вида

$$U_i^n = \begin{cases} U_1, & i \leq i_0, \\ U_2, & i > i_0, \end{cases} \quad (2)$$

где $F(U_2) - F(U_1) = 0$, i_0 — некоторое значение сеточного индекса, является точным решением разностных уравнений²⁾.

В области неоднозначного представления слабое решение уравнений Эйлера не единственно. Так как исходная ударная волна, рассматриваемая в системе координат, связанной с фронтом, является точным решением дискретной модели, малое возмущение начальных данных либо затухает, что соответ-

²⁾ Только в случае, если параметр энтропийной коррекции Хартена равен нулю. Собственно процедура энтропийной коррекции имеет целью исключить решение, соответствующее ударной волне разрежения, которое допускается в методе Рунге. В контексте рассматриваемой задачи проблема возникновения в численном решении ударных волн разрежения в области нормальности термодинамических свойств среды не возникает. Возникает другая «симметричная» проблема ударных волн сжатия в области аномальности.

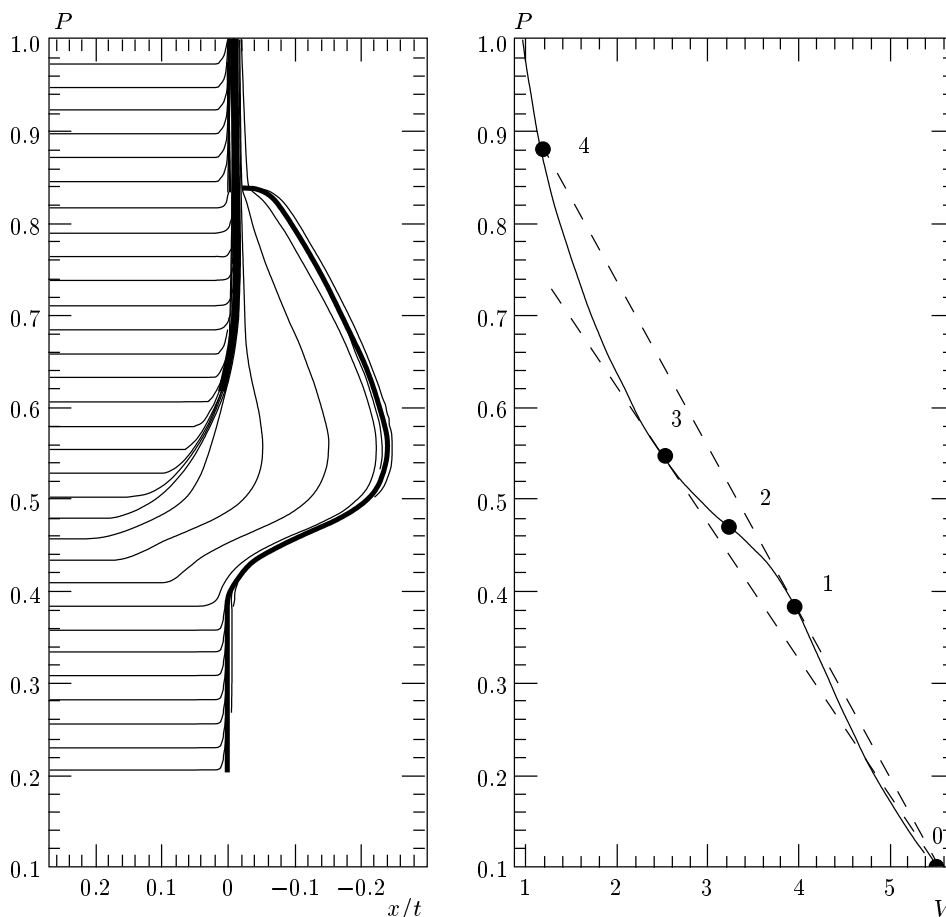


Рис. 3. Справа: ударная адиабата (сплошная линия) для модельного уравнения состояния. Слева: результаты одномерных расчетов распада ударной волны — распределение давления в зависимости от автомодельной переменной x/t для ударных волн, соответствующих различным точкам (значениям P) на ударной адиабате, приведенной на рисунке справа

ствует устойчивой ударной волне, либо экспоненциально растет, что соответствует развитию распадной неустойчивости, т. е. переходу на альтернативное автомодельное решение. Решение уравнений дискретной модели в данном случае также не единственно. Пример изменения модуля отклонения в области неустойчивости для всех используемых схем приведен на рис. 2. Насыщение соответствует выходу на распадное решение.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСПАДА

Решается задача Коши для уравнений Эйлера с начальными данными в форме (2). Задача решается в системе координат, движущейся со скоростью

фронта, исходная ударная волна стационарна на расчетной сетке. Решения для различных точек ударной адиабаты представлены на рис. 3. Для каждой точки на ударной адиабате, которая характеризуется давлением в конечном состоянии P , в переменных x/t представлено автомодельное решение для давления. На адиабате отмечены точки: 0 — начальное состояние; 1 — первая точка касания прямой Рэлея, нижняя граница области абсолютной неустойчивости и нижняя граница области неустойчивости относительно распада; 2 — верхняя граница области термодинамической аномальности; 3 — вторая точка касания прямой Рэлея, верхняя граница области абсолютной неустойчивости и нижняя граница звуковой неустойчивости Дьякова–Конторовича; 4 — точка пересечения ударной адиабаты с прямой, проведенной из начального состояния и касающейся удар-

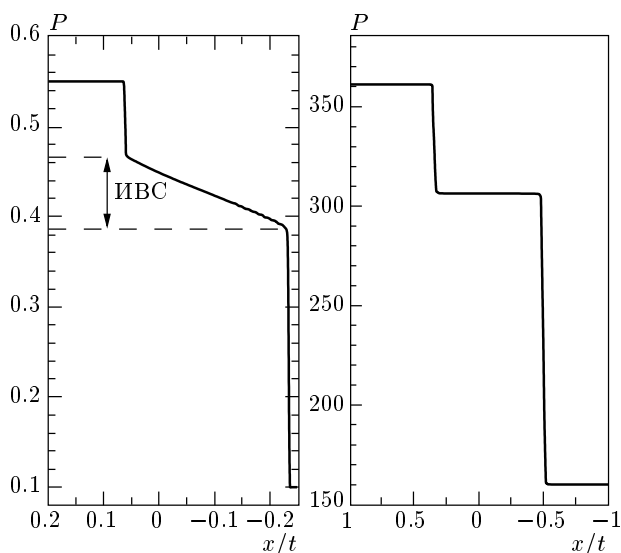


Рис. 4. Слева: распад ударной волны по схеме $\vec{V} \rightarrow \vec{B} \text{ T } \vec{U} \vec{C} \vec{U}$ для адиабаты без точки излома (модельное уравнение состояния). Справа: распад ударной волны по схеме $\vec{V} \rightarrow \vec{B} \text{ T } \vec{U} \vec{U}$ для адиабаты с изломом (дейтерий, SESAME)

ной адиабаты в точке 1, верхняя граница неустойчивости ударной волны относительно распада.

Решение в плоскости $(P, x/t)$ визуализируется посредством линий равного давления. Значения давления на изолиниях могут быть определены по значениям на оси P . В дальнейшем для краткости такой способ представления результатов исследования ударной адиабаты будем называть распадной диаграммой. Справа показан соответствующий участок ударной адиабаты с отмеченными характерными точками.

Положение нижней границы области неоднозначного представления в расчете совпадает с началом участка абсолютной неустойчивости $L = -1$ (точка 1). До этой точки ударная волна устойчива. В интервале 1–2 имеет место распад исходной ударной волны на двухволновую конфигурацию, представляющую собой ударную волну и примыкающую к ней изэнтропическую волну сжатия:

$$\vec{V} \rightarrow \vec{B} \text{ T } \vec{C} \vec{U}.$$

Выше точки 2 имеем распад на конфигурацию из двух ударных волн, разделенных изэнтропической волной сжатия:

$$\vec{V} \rightarrow \vec{B} \text{ T } \vec{U} \vec{C} \vec{U}.$$

Точка 3 соответствует концу зоны абсолютной неустойчивости $L = -1$ и одновременно является

начальной точкой зоны звуковой неустойчивости $L = L_0$ исходной ударной волны; соответственно, в данной точке $M = 1$. Разность скоростей распространения ударных волн можно определить как разность положений фронтов на оси x/t . При перемещении по ударной адиабате в сторону увеличения P интенсивность первой ударной волны остается неизменной, в то время как интенсивность и скорость второй ударной волны увеличиваются, а амплитуда давления в изэнтропической волне сжатия уменьшается. В точке 4 скорости первой и второй волн равны, амплитуда изэнтропической волны сжатия обращается в нуль. Соответственно, точка 4 является верхней границей области неустойчивости ударной волны относительно распада.

В отличие от распадных конфигураций для ударной адиабаты, имеющей протяженную область термодинамической аномальности, схема распада для ударной адиабаты с точкой излома (рис. 1б) не содержит изэнтропической волны сжатия и на всем участке неустойчивости относительно распада имеет вид

$$\vec{V} \rightarrow \vec{B} \text{ T } \vec{U} \vec{U}.$$

Для сравнения на рис. 4 приведены автомодельные решения для давления в точке $P = 0.54$ для модельного уравнения состояния (слева) и для дейтерия при $P = 3.6 \cdot 10^3$ ГПа (справа). Отмечен диапазон давлений, соответствующий изэнтропической волне сжатия. Разность скоростей первой и второй ударных волн после распада исходной ударной волны в дейтерии составляет около $2.8 \cdot 10^3$ м/с.

Данные расчеты проверялись с использованием различных численных методик (помимо описанных выше), включая эйлеровы и лагранжевы подходы. Получено хорошее согласие между всеми этими расчетами и расчетами, выполнявшимися ранее [6].

4. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ. НЕОБХОДИМОСТЬ ЭНТРОПИЙНОЙ КОРРЕКЦИИ

Методические расчеты с использованием схем TVD первого и второго порядков точности и схемы, использующей для расчета потоков на гранях ячеек одномерную ENO-интерполяцию третьего порядка точности (RP3 [12]) показали, что получение физически корректного решения, удовлетворяющего закону возрастания энтропии в области аномальности термодинамических свойств среды, требует введения в схемы TVD энтропийной коррекции. Из

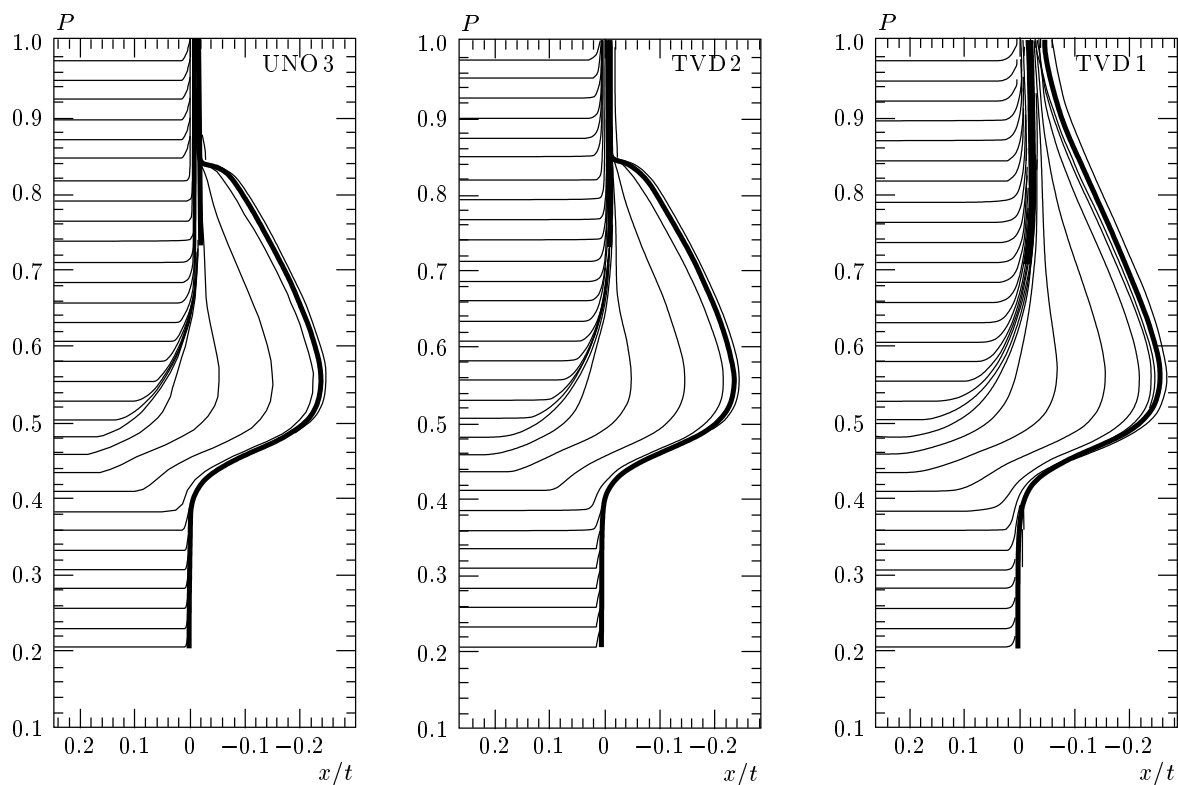


Рис. 5. Сравнение распадных диаграмм, полученных с использованием различных конечноразностных схем

протестированных схем, только схема UNO3 дает правильное решение без введения энтропийной коррекции. Например, в отсутствие энтропийной коррекции, схема первого порядка вместо распада по схеме $\vec{U} \rightarrow \vec{B} \vec{T} \vec{U} \vec{C} \vec{U}$ дает ошибочное распадное решение с двумя ударными волнами без изэнтропической волны сжатия: $\vec{U} \rightarrow \vec{B} \vec{T} \vec{U} \vec{U}$. С другой стороны, схемы высокого порядка аппроксимации дают заниженное значение экспериментально определяемой верхней границы неустойчивости ударной волны относительно распада. Ситуация изменяется в лучшую сторону при введении в схему дополнительной диффузии. Для этой цели использовался механизм энтропийной коррекции Хартена (1). При значении параметра энтропийной коррекции 0.125ω , где ω — спектральный радиус матрицы Якоби вектора потоков, качество решения в области верхней границы неустойчивости является удовлетворительным.

Распадные диаграммы, построенные с использованием различных схем для ударной адиабаты на основе модельного уравнения состояния (рис. 3) при указанном выше значении параметра энтропийной коррекции, представлены на рис. 5.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВНУТРИ ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСПАДА

Звуковая неустойчивость наблюдалась в расчетах в следующих случаях: 1) как неустойчивость исходной волны относительно распада с конечным состоянием на ударной адиабате выше точки 4 (см. рис. 1); 2) в течение ограниченного времени внутри области распадная неустойчивость, если акустическая неустойчивость развивается быстрее распадной. В этом случае, после того как волны I и II расходятся на расстояние, превышающее длину звуковых волн, остаточные возмущения затухают и образуются две устойчивые ударные волны; 3) как звуковая неустойчивость второй ударной волны в распадной конфигурации.

Рассмотрим результаты численного анализа, соответствующие последнему случаю из перечисленных. Исходная ударная волна соответствует точке $P = 0.82$ для ударной адиабаты, показанной на рис. 3. В данной точке для исходной волны одновременно выполняются и условия звуковой неустойчи-

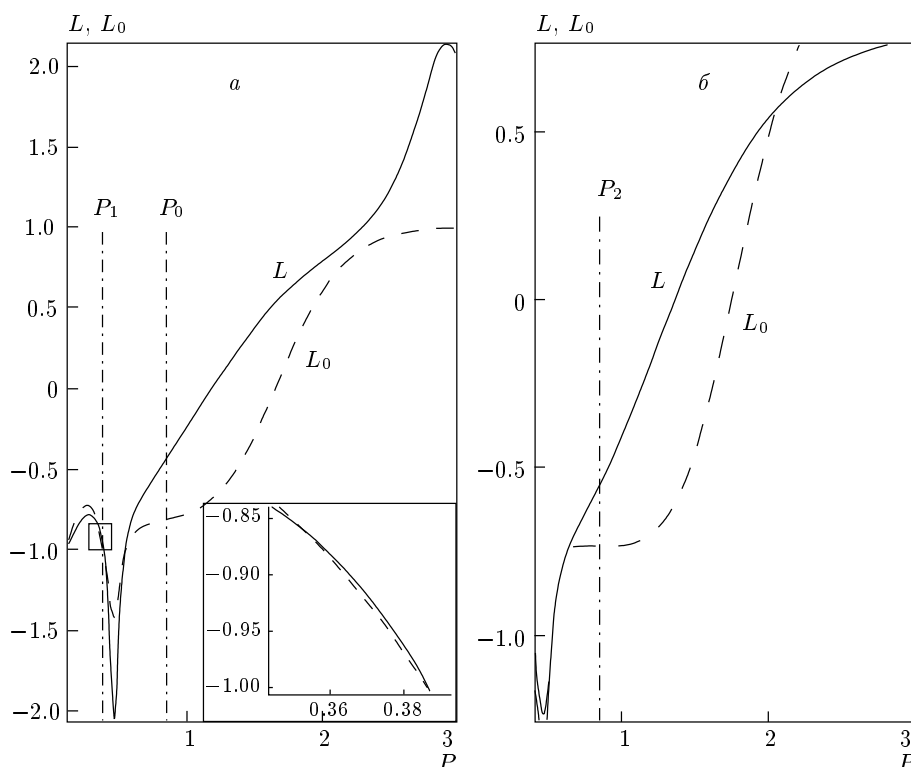


Рис. 6. Зависимость параметра устойчивости L и критического значения L_0 от величины давления за фронтом ударной волны P : *а*) для ударной адиабаты исходной волны отмечены точки, соответствующие исходной ударной волне (0) и первой волне в распадной конфигурации (1); *б*) для ударной адиабаты второй волны, отмечена точка, соответствующая амплитуде второй ударной волны (2)

вости Конторовича и условия неустойчивости относительно распада. На рис. 6 представлены зависимости параметра устойчивости L и критического значения L_0 для двух ударных адиабат: исходной ударной адиабаты с началом в точке 0 и ударной адиабаты, построенной для волны II. На рис. 6*а* вертикальными линиями отмечены давления, соответствующие исходной ударной волне и волне I, на рис. 6*б* — волне II. Как видно на рисунке, для исходной ударной волны и волны II, образующейся после распада исходной ударной волны, выполняется условие звуковой неустойчивости: $L_0 < L < 1 + 2M$. Вставка на левой части рисунка показывает, что имеются два близких корня решения уравнения $L(P) = L_0(P)$, что означает наличие малого интервала звуковой неустойчивости, примыкающего снизу к точке 1 на рис. 3*а*.

Распад на конфигурацию, включающую устойчивую и неустойчивую ударные волны, реализуется в вычислительном эксперименте. Задача о распаде ударной волны решается в двумерной постановке в системе координат, связанной с фронтом исходной ударной волны, на расчетной сетке 400×300 . На-

чальные данные аппроксимируют участок фронта исследуемой неустойчивой ударной волны и прилегающие к нему области однородного течения. В качестве возмущения использовалось изменение (уменьшение) величины скорости на 1% в центре области интегрирования в одной ячейке, примыкающей к фронту ударной волны. Ни выбор возмущаемой компоненты, ни амплитуда возмущения качественного влияния на последующую картину течения не оказывают. Численное решение при $P = 0.82$ для нескольких моментов времени с шагом интегрирования, соответствующим числу Куранта 0.3, показано на рис. 7, где представлены поля абсолютной величины градиента давления (более темные области соответствуют большей величине градиента давления в данной точке). Времена, приведенные на рисунке, условные, поскольку задача не имеет характерного масштаба. На поверхности второй (правой) волны расположены узловые точки трехволновой конфигурации — точки излома фронта ударной волны с исходящей вниз по потоку слабой волной возмущения, — которые перемещаются вдоль фрон-

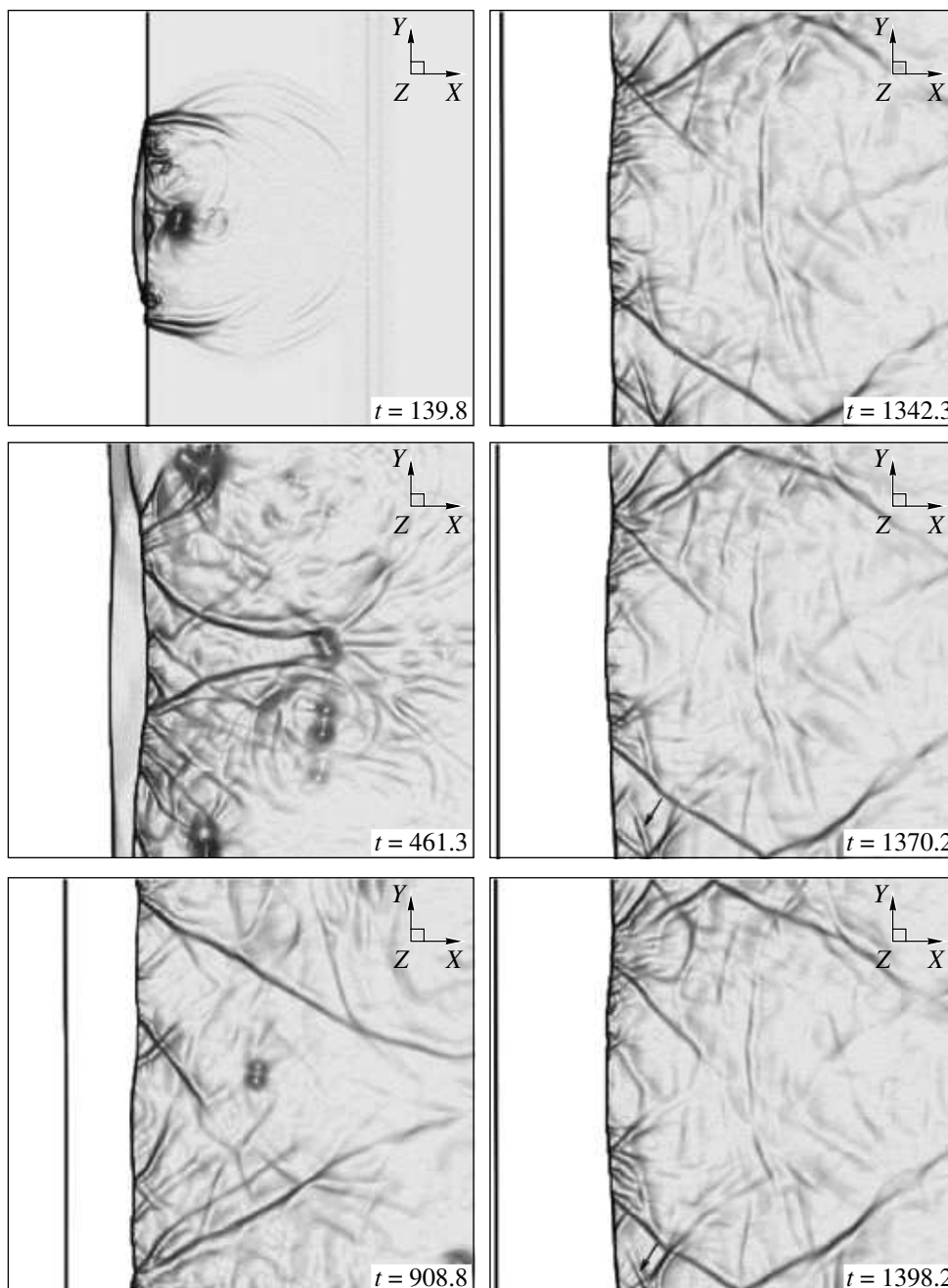


Рис. 7. Поле абсолютной величины градиента давления. Более темные области соответствуют большим значениям градиента давления

та. Величины, определяющие звуковую неустойчивость: параметр устойчивости, число Маха за фронтом ударной волны и отношение удельных объемов, для расчетного варианта имеют следующие значения: $L = -0.59$, $M = 0.83$, $\theta = 2.8$. Уравнение для косинуса угла между волновым вектором возмущения и положительным направлением оси x [4]:

$$M^2 \left(\frac{4}{1+L} + \theta - 1 \right) \cos^2 \alpha + 2M \left(\frac{3+M^2}{1+L} - 1 \right) \times \cos \alpha + \frac{2(1+M^2)}{1+L} - (1 + \theta M^2) = 0$$

в данном случае имеет решения $(-1, -0.66)$. Второй из корней лежит в диапазоне $-M_2 < \cos^2 \alpha < 1$, что соответствует уходящей звуковой волне, волно-

вой вектор которой составляет с положительным направлением оси x угол $\pm 131^\circ$. Три близких последовательных момента времени, изображенных на правой части рис. 7, иллюстрируют движение фронтов звуковых волн и показывают хорошее согласие с теоретическим значением.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые в численном расчете получен распад ударной волны в области неоднозначного представления на конфигурацию, содержащую устойчивую и неустойчивую (акустическая неустойчивость) ударные волны. Направление распространения звуковых волн возмущения соответствует результатам линейной теории.

Анализ автомодельных решений с использованием распадной диаграммы в переменных $(P, x/t)$ подтверждает теоретические результаты [3] для структуры решения и границ распада по схемам $\vec{U} \rightarrow \vec{B} \vec{T} \vec{C} \vec{U}$, $\vec{U} \rightarrow \vec{B} \vec{T} \vec{U} \vec{C} \vec{U}$, $\vec{U} \rightarrow \vec{B} \vec{T} \vec{U} \vec{U}$.

Вычислительный эксперимент по моделированию неустойчивости ударной волны относительно распада с использованием обобщенного метода Рои (приближенное решение задачи о распаде разрыва для произвольного уравнения состояния) выявил необходимость введения энтропийной коррекции для получения физически достоверных решений в окрестности верхней границы области неустойчивости, а также решений, удовлетворяющих условию возрастания энтропии при наличии в распадной конфигурации изэнтропических волн сжатия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума РАН, Комплексной программы «Мате-

матическое моделирование, интеллектуальные системы и управление нелинейными механическими системами».

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Дьяков, ЖЭТФ **27**, 288 (1954).
2. В. М. Конторович, ЖЭТФ **33**, 1525 (1957).
3. Н. М. Кузнецов, ЖЭТФ **88**, 470 (1985).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
5. А. Л. Ни, С. Г. Сугак, В. Е. Фортов, Теплофиз. выс. темп. **24**, 564 (1986).
6. В. А. Гуцин, А. П. Лихачев, Н. Г. Нечипоренко, Е. Р. Павлюкова, *Новое в численном моделировании: алгоритмы, вычислительные эксперименты, результаты*, Наука, Москва (2000), с. 165.
7. J. W. Bates and D. C. Montgomery, Phys. Rev. Lett. **84**, 1180 (2000).
8. SESAME Report on the Los Alamos Equation-of-State Library (1983), Report LANL-83-4.
9. P. L. Roe, J. Comput. Phys. **43**, 357 (1981).
10. О. М. Белоцерковский, А. В. Конюхов, ЖВМ и МФ **42**, 235 (2002).
11. A. Harten, J. Comput. Phys. **49**, 357 (1983).
12. A. Harten and S. Osher, SIAM Journal on Numerical Analysis **24**, 279 (1987).
13. P. Glaister, J. Comput. Phys. **74**, 382 (1988).