ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 5, стр. 1012–1017

ЧАСТИЦА В ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

А. С. Чихачев *

Государственный научный центр «Всероссийский электротехнический институт»
111250, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 ноября 2003 г.

Рассмотрены связанные состояния частицы в поле двух точечных δ-центров в трехмерной задаче. Получено точное решение уравнения Шредингера для системы разбегающихся центров.

PACS: 03.65.-w

Впервые точечные потенциалы — потенциалы нулевого радиуса действия — в одномерной задаче использовались в работе Ферми [1] для изучения смещения спектральных линий. В дальнейшем широкому применению точечных потенциалов способствовало то, что использование δ-функции в качестве потенциала в уравнении Шредингера во многих случаях позволяет получить компактное аналитическое решение. Кроме того, реальные силы часто можно считать короткодействующими, как, например, ядерные силы или силы, возникающие при экранировании кулоновского потенциала.

Метод потенциалов нулевого радиуса действия успешно использовался в различных разделах физики. В ядерной физике с помощью этого метода изучалось рассеяние частиц, в том числе рассеяние на двух неподвижных центрах. Точечные взаимодействия использовались для решения задачи трех тел и для изучения нуклонного туннелирования. Интенсивное применение метод находит также в атомной физике. Он применялся для описания молекулярных систем, в теории атомных столкновений (например, при изучении перезарядки и нейтрализации атомных частиц) и в теории твердого тела.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная данному вопросу. Стационарные решаемые точечные модели в одномерном, двумерном и в трехмерном случаях рассмотрены в монографии [2]. В работе [3] изучались одномерные стационарные уравнения с δ- и δ'-потенциалами. Ряд вопросов, связанных с трехмерными точечными потенциалами, подробно изучен в монографиях [4, 5].

Одной из характерных черт моделей с точечными взаимодействиями является возможность их применения для построения точных решений нестационарных задач. По-видимому, впервые Брейт (см. [6]) исследовал нуклонное туннелирование при помощи нестационарной одномерной модели. Нуклонное туннелирование изучалось также в работах [7, 8].

Аналогичное нестационарное модельное уравнение с разбегающимися δ-потенциалами изучалось в работах [9–15]. В работе [9] впервые получено точное решение, описывающее «связанное» состояние, т. е. состояние, описываемое быстро (экспоненциально) убывающей по координатам функцией в случае, когда константы, характеризующие глубину уровней точечных центров, одинаковы. Кроме того, в этой работе отмечена важная особенность задачи о разбегании точечных центров с постоянной скоростью. Если использовать уравнение Шредингера в интегральной форме, то при определенной замене переменных возникает уравнение с разностным ядром. Это обстоятельство позволяет найти точные решения для широкого класса задач. В работе [10] получено соотношение для вероятности перезарядки при произвольном соотношении относительной скорости v и параметра α, характеризующего глубину уровня. В [11] приведено компактное выражение для амплитуды вероятности перезарядки для δ-ям, характеризуемых различной глубиной — α и β. Выражение справедливо при любых соотношениях величин α, β, v. В работе [12] найдено решение с осцилляционной асимптотикой (т. е. определены «свободные» состояния) при разлете одинаковых ям. Здесь также решена задача Коши в случае неодинаковых ям и при разлете δ-центров из разных точек. В рабо-

*E-mail: churchev@mail.ru

те [13] определено «связанное» состояние разбегающихся центров, характеризующихся разной глубиной единственного связанного уровня. В [14] впервые определен пропагатор в поле двух разбегающихся центров различной глубины. Позднее эта же задача решена в работе [15].

Настоящая работа посвящена изучению точечных трехмерных систем. В первом разделе определен вид потенциального оператора для движущейся трехмерной ямы, во втором и третьем разделах определены связанные состояния для двух покоящихся ям, в том числе для ям с разной глубиной. В четвертом и пятом разделах найдено точное решение уравнения Шредингера в случае одинаковых разбегающихся ям — определено «связанное» состояние, т. е. состояние, описываемое быстро убывающей по координатам ψ-функцией. При этом также найдено решение в случае разбегания из разных точек. В шестом разделе обсуждаются полученные результаты.

1. Связанное состояние одного покоящегося в начале координат δ-центра в сферически-симметричном случае может быть описано уравнением Шредингера следующего вида:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta\psi=\frac{2\pi}{\kappa}\delta(\mathbf{r})(\psi+\mathbf{r}\nabla\psi), \tag{1}$$

где $\psi(\mathbf{r},t)$ — пси-функция, используется система единиц, в которой $\hbar=m=e=1$, $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса, e — заряд.

Решение (1), описывающее связанное состояние, имеет вид

$$\psi=\frac{\text{const}}{r}\exp\left(-\kappa r+\frac{i\kappa^2}{2}t\right). \tag{2}$$

В справедливости (2) можно убедиться, например, подставив это решение в представленное в интегральном виде уравнение (1):

$$\psi=\frac{2\pi}{\kappa}\int\limits_{-\infty}^{t}dt\int d\mathbf{r}'G^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\times \\ \times\delta(\mathbf{r}')\left[\psi(\mathbf{r}',t')+\mathbf{r}'\nabla\psi(\mathbf{r}',t')\right], \tag{3}$$

где $G^{(+)}$ — запаздывающая функция Грина (см. [4, 5]),

$$G^{(+)}=-\frac{i\sigma(t-t')}{\left[2\pi i(t-t')\right]^{3/2}}\exp\left[i\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2(t-t')}\right]. \tag{4}$$

Здесь $\sigma(x)=0$, если $x<0$, $\sigma(x)=1$, когда $x\geq 0$.

Если, далее, имеется один движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ δ-центр, то правую часть (1) следует изменить и записать уравнение следующим образом:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta\psi= \\ =\frac{2\pi}{\kappa}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\left\{\psi\left[1-i\mathbf{v}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\right]+(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\nabla\psi\right\}. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет решение

$$\psi=\frac{\text{const}}{|\mathbf{r}-\mathbf{v}t|}\times \\ \times\exp\left\{-\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{v}t|+\frac{it}{2}\kappa^2+i\mathbf{v}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)+\frac{iv^2t}{2}\right\}. \tag{6}$$

2. Рассмотрим случай двух покоящихся центров, расположенных в точках $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}=-\mathbf{r}_0$. Соответствующее уравнение Шредингера имеет вид

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta\psi=\frac{2\pi}{\kappa}\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\left(\psi+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\nabla\psi\right)+\right. \\ \left.+\,\delta(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\left(\psi+(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\nabla\psi\right)\right]. \tag{7}$$

Здесь величины κ и r_0 определяют величину уровня энергии κ_0. Представляя уравнение в интегральном виде с помощью запаздывающей функции Грина, получим

$$\psi=\frac{1}{(2\pi i)^{1/2}\kappa}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{dt'\kappa_0C(t')}{(t-t')^{3/2}}\times \\ \times\left\{\exp\left[\frac{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2(t-t')}\right]+\exp\left[\frac{i(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)}{2(t-t')}\right]\right\}. \tag{8}$$

При выводе (8) учтено граничное условие

$$\left[\psi+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\nabla\psi\right]_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}= \\ =\left[\psi+(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\nabla\psi\right]_{\mathbf{r}\to-\mathbf{r}_0}=-\kappa_0C(t).$$

Применяя оператор $\left[\psi+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\nabla\psi\right]_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}$ к выражению (8), для $C(t)$ можно получить уравнение

$$-\kappa_0C(t)=\frac{1}{\kappa\sqrt{2\pi i}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{dt'C(t')}{(t-t')^{3/2}}\kappa_0\times \\ \times\exp\left[\frac{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2(t-t')}\right]\left(1+\frac{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{t-t'}\right)_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0}+ \\ +\frac{1}{\kappa\sqrt{2\pi i}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{dt'C(t')}{(t-t')^{3/2}}\kappa_0\exp\left(\frac{2ir_0^2}{t-t'}\right).$$

В первом слагаемом, прежде чем положить $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$, следует проинтегрировать по частям, причем подстановку

$$\left.\frac{C(t')\exp\left[\dfrac{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{2(t-t')}\right]}{\sqrt{t-t'}}\right|_{t'=-\infty}^{t'=t}$$

будем считать равной нулю. При $t' \to t$ это равенство может быть обусловлено наличием экспоненциального множителя. Если записать показатель экспоненты $i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2/2(t-t')$ в размерных переменных, получим: $im(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2/2\hbar(t-t')$ (см. [5]). При вычислении следует заменить $\hbar \to \hbar(1-i\varepsilon)$, где положительная величина $\varepsilon \to 0$, причем, прежде чем переходить к пределу $\varepsilon \to 0$, следует устремить $t' \to t$. В последующем ε не входит в получаемые выражения. Описанная операция повторяет, по существу, операцию «вычитания расходящихся членов», предложенную в работе [4]. Для $C(t)$ имеем уравнение

$$C(t) = \frac{2}{\kappa\sqrt{2\pi i}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dt' C(t')}{\sqrt{t-t'}} - \\ - \frac{1}{\kappa\sqrt{2\pi i}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dt' C(t') \exp\left(\dfrac{2ir_0^2}{t-t'}\right)}{(t-t')^{3/2}}. \quad (9)$$

Если положить в (9)

$$C(t) = \exp\left(\frac{i\kappa_0^2 t}{2}\right),$$

то получим соотношение

$$\kappa = \kappa_0 - \frac{\exp(-2\kappa_0 r_0)}{2r_0}. \quad (10)$$

Глубина связанного уровня κ_0 зависит не только от κ, но и от расстояния между центрами $2r_0$. При $r_0 \to 0$ не существует плавного перехода решения (7) в решение для одного δ-центра. Это обстоятельство отличает рассмотренную задачу от одномерного случая, в котором такой плавный переход существует (см. [15]). Решение (8) имеет вид

$$\psi = \mathrm{const}\left\{\frac{\exp(-\kappa_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \frac{\exp(-\kappa_0|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}\right\} \times \\ \times \exp\left(\frac{i\kappa_0^2 t}{2}\right). \quad (11)$$

Если искать решение уравнения (7) в виде (11), также легко получить соотношение (10).

3. В случае двух покоящихся δ-центров возможно существование связанных состояний с двумя разными значениями параметров κ_1 и κ_2, характеризующих глубину уровня.

Предположим, что решение для ψ-функции имеет вид суммы четырех слагаемых:

$$\psi = \alpha_1 \frac{\exp\left(\dfrac{i\kappa_1^2 t}{2} - \kappa_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \\ + \alpha_2 \frac{\exp\left(\dfrac{i\kappa_2^2 t}{2} - \kappa_2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \\ + \beta_1 \frac{\exp\left(\dfrac{i\kappa_1^2 t}{2} - \kappa_1|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|\right)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|} + \\ + \beta_2 \frac{\exp\left(\dfrac{i\kappa_2^2 t}{2} - \kappa_2|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|\right)}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}. \quad (12)$$

Тогда

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi = \\ = -2\pi\left\{\left[\alpha_1 \exp\left(\frac{i\kappa_1^2 t}{2}\right) + \alpha_2 \exp\left(\frac{i\kappa_2^2 t}{2}\right)\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \right. \\ \left. + \left[\beta_1 \exp\left(\frac{i\kappa_1^2 t}{2}\right) + \beta_2 \exp\left(\frac{i\kappa_2^2 t}{2}\right)\right]\delta(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\right\}.$$

Правую часть этого уравнения представим в виде

$$C_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\left[\psi + (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\right] + \\ + C_2\delta(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\left[\psi + (\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\right].$$

Подстановка выражения (12) в это соотношение приводит, в конечном счете, к системе четырех уравнений:

$$\begin{aligned} -2\pi\alpha_1 &= \left(-\kappa_1\alpha_1 + \beta_1\frac{\exp(-2\kappa_1 r_0)}{2r_0}\right) C_1, \\ -2\pi\alpha_2 &= \left(-\kappa_2\alpha_2 + \beta_2\frac{\exp(-2\kappa_2 r_0)}{2r_0}\right) C_1, \\ -2\pi\beta_1 &= \left(-\kappa_1\beta_1 + \alpha_1\frac{\exp(-2\kappa_1 r_0)}{2r_0}\right) C_2, \\ -2\pi\beta_2 &= \left(-\kappa_2\beta_2 + \alpha_2\frac{\exp(-2\kappa_2 r_0)}{2r_0}\right) C_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Из условия наличия ненулевых решений системы (13) можно найти два уравнения для определения констант C_1, C_2:

$$\left(1-\frac{\kappa_1 C_1}{2\pi}\right)\left(1-\frac{\kappa_1 C_2}{2\pi}\right) = C_1 C_2\frac{\exp(-4\kappa_1 r_0)}{4r_0^2}, \quad (14)$$

$$\left(1-\frac{\kappa_2 C_1}{2\pi}\right)\left(1-\frac{\kappa_2 C_2}{2\pi}\right) = C_1 C_2\frac{\exp(-4\kappa_2 r_0)}{4r_0^2}. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15) определяют величины C_1 и C_2 через κ_1, κ_2 и r_0. Отметим, что равенство $C_1 = C_2$ возможно только при $\kappa_1 = \kappa_2$.

4. Рассмотрим, далее, более сложный случай движущихся δ-центров. Будем считать, что центры разбегаются из точки $\mathbf{r} = 0$ с равными по величине и противоположными по направлению скоростями. Уравнение Шредингера может быть записано в следующем виде:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta\psi = \frac{2\pi}{\kappa}\left\{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\left[\psi\left(1-i\mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\right) + (\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\nabla\psi\right] + \delta(\mathbf{r}+\mathbf{v}t) \times \left[\psi\left(1+i\mathbf{v}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{v}t)\right) + (\mathbf{r}+\mathbf{v}t)\nabla\psi\right]\right\}. \quad (16)$$

Используя опережающую функцию Грина

$$G^{(-)} = -\frac{i\sigma(t'-t)}{(2\pi i(t-t'))^{3/2}}\exp\left[-\frac{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2(t'-t)}\right]$$

(см. [5]) и граничные условия в точках $\mathbf{r} = \pm\mathbf{v}t$,

$$\psi \approx C(t)\left(\frac{1}{|\mathbf{r}\pm\mathbf{v}t|} - \kappa\right),$$

уравнение (16) можно переписать в интегральном виде:

$$\psi = \frac{i}{(-2\pi i)^{3/2}}\frac{2\pi}{\kappa}\int_t^\infty \frac{dt'C(t')}{(t'-t)^{3/2}} \times \left\{-\kappa\exp\left[-\frac{i(\mathbf{r}-\mathbf{v}t')^2}{2(t'-t)}\right] - \kappa\exp\left[-\frac{i(\mathbf{r}+\mathbf{v}t)^2}{2(t'-t)}\right]\right\}. \quad (17)$$

Обозначим

$$C(t)\exp\left(-\frac{iv^2t}{2}\right) = g(t).$$

Для $g(t)$ аналогично тому, как это сделано в разд. 2, из (17) можно получить:

$$g(t) = -\frac{2i}{\kappa\sqrt{2\pi i}}\int_t^\infty \frac{\dot{g}(t')\,dt'}{\sqrt{t'-t}} - \frac{i}{\kappa\sqrt{2\pi i}}\int_t^\infty \frac{g(t')\,dt'}{(t'-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{2iv^2tt'}{t'-t}\right). \quad (18)$$

При выводе (18) также проводилось интегрирование по частям, причем полагалось

$$\frac{2}{\sqrt{t'-t}}\exp\left\{\frac{iv^2t'}{2} - \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2(t'-t)}\right\}\Bigg|_{t'=t}^{t'=\infty} = 0,$$

что возможно при замене $\hbar \to \hbar(1+i\varepsilon)$ и $\varepsilon \to 0$. Положим

$$h(\tau) = \frac{g\left(\dfrac{1}{\tau}\right)}{\sqrt{\tau}}, \quad \tau = \frac{1}{t}, \quad \tau' = \frac{1}{t'}.$$

Из (18) следует уравнение

$$h(\tau) = \frac{i}{\kappa\sqrt{2\pi i}}\int_0^\tau \frac{d\tau'\,(2h(\tau')\tau' + h(\tau'))}{\sqrt{\tau-\tau'}} - \frac{\tau}{\kappa\sqrt{2\pi i}}\int_0^\tau \frac{d\tau' h(\tau')}{(\tau-\tau')^{3/2}}\exp\left(-\frac{2iv^2}{\tau-\tau'}\right). \quad (19)$$

Уравнение (19) может быть решено при помощи преобразования Лапласа так же, как и в случае одномерной нестационарной задачи (см. [9, 11, 12]). Полагая

$$H(p) = \int_0^\infty h(\tau)\exp(-p\tau)\,d\tau,$$

из (19) можно получить:

$$\kappa H(p) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi i}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left[H(p) + 2p\frac{dH}{dp}\right] - \frac{i}{\sqrt{2\pi i}}\sqrt{\frac{\pi}{2iv^2}}\,\frac{d}{dp}\left[\exp\left(-2v\sqrt{2ip}\right)H(p)\right]. \quad (20)$$

Если положить $p = q^2/2i$, из (20) можно получить решение для H в виде

$$H(q) = \frac{\mathrm{const}}{a(q)}\exp\left\{i\kappa\int_0^q \frac{q'dq'}{a(q')}\right\}, \quad (21)$$

где

$$a(q) = q - \frac{\exp(-2vq)}{2v}.$$

Для $g(t)$ следует соотношение

$$g(t) = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{t}}\int_L q\,dq\,H(q)\exp\left(-\frac{iq^2}{2t}\right). \quad (22)$$

Контур L может представлять собой два луча, расположенных во втором и четвертом квадрантах комплексной плоскости q, и более точно определен ниже. Поскольку

$$C(t) = g(t)\exp\left(\frac{iv^2t}{2}\right),$$

решение уравнения Шредингера определяется выражением

$$\psi(\mathbf{r},t)=\mathrm{const}\int\limits_t^\infty \frac{dt'\exp\left(\dfrac{iv^2t'}{2}\right)}{(t'-t)^{3/2}\sqrt{t'}}\int\limits_L q\,dq\,\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{iq^2}{2t'}\right)\frac{1}{a(q)}\exp\left\{i\kappa\int\limits_0^q\frac{q'dq'}{a(q')}\right\}\times$$
$$\times\left[\exp\left\{-\frac{i(\mathbf{r}-\mathbf{v}t')^2}{2(t'-t)}\right\}+\exp\left\{-\frac{i(\mathbf{r}+\mathbf{v}t')^2}{2(t'-t)}\right\}\right]=$$
$$=\mathrm{const}\left\{\Psi_-+\Psi_+\right\}. \quad (23)$$

Интегралы, определяющие $\Psi_\pm$, могут быть преобразованы к более простому виду:

$$\Psi_\pm=\frac{\exp\left(\dfrac{iv^2t}{2}\mp i\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_\pm\right)}{r_\pm\sqrt{t}}\times$$
$$\times\int\limits_L\frac{q\,dq}{a(q)}\exp\left\{-\frac{i(q-ir_\pm)^2}{2t}+i\kappa\int\limits_0^q\frac{q'dq'}{a(q')}\right\}. \quad (24)$$

Здесь $\mathbf{r}_\pm=\mathbf{r}\pm\mathbf{v}t$, $r_\pm=|\mathbf{r}_\pm|$,

$$a(q)=q-\frac{\exp(-2vq)}{2v}.$$

Сумма $\Psi_+ + \Psi_-$ удовлетворяет исходному уравнению (16), это может быть проверено непосредственной подстановкой.

Определим теперь более точно контур интегрирования L. Пусть $q=q_1+iq_2$, где q_1, q_2 — действительные числа. Контур L состоит из мнимой оси ($q_1=0$), где q_2 изменяется от ∞ до 0, и действительной оси ($q_2=0$), где q_1 изменяется от 0 до ∞. На мнимой оси подынтегральная функция не имеет особенностей и экспоненциально убывает при $q_2\to\infty$, на действительной оси имеется полюс при $2vq_1=\exp(-2vq_1)$, при этом предполагается, что контур L обходит этот полюс сверху. Подынтегральная функция в (24) экспоненциально убывает также и на действительной оси при $q_1\to\infty$. Для следующего раздела существенно отметить, что контур L при $q_1\to\infty$ может иметь смещение в область $q_2<0$, обеспечивающее сходимость интеграла.

5. С некоторыми изменениями соотношения (23), (24) дают решение более сложной задачи — задачи разбегания из разных точек. Будем считать, что при $t=0$ δ-центры расположены в точках $\mathbf{r}=\pm\mathbf{r}_0$. Скорости движения центров направлены, соответственно, вдоль $+\mathbf{r}_0$ и $-\mathbf{r}_0$. При этом в уравнении (16) следует заменить $\mathbf{r}-\mathbf{v}t$ на $\mathbf{r}-\mathbf{v}t-\mathbf{r}_0=\mathbf{r}_-$, а $\mathbf{r}+\mathbf{v}t$ — на $\mathbf{r}+\mathbf{v}t+\mathbf{r}_0=\mathbf{r}_+$. Обозначим

$$Q_q^\pm(\mathbf{r},t)=\frac{\exp\left(\dfrac{iv^2t}{2}\mp i\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_\pm\right)}{|\mathbf{r}_\pm|\sqrt{t+\dfrac{r_0}{v}}}\exp\left\{-\frac{i(q-ir_\pm)^2}{2\left(t+\dfrac{r_0}{v}\right)}\right\}.$$

Можно получить:

$$i\frac{\partial Q^\pm}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta Q^\pm=-2\pi\delta(\mathbf{r}_\pm)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{iv^2t}{2}-\frac{iq^2}{2\left(t+\dfrac{r_0}{v}\right)}\right\}\frac{1}{\sqrt{t+\dfrac{r_0}{v}}}. \quad (25)$$

Представим Ψ-функцию в виде

$$\Psi=\int\limits_L(Q_q^+ + Q_q^-)S(q)\,dq. \quad (26)$$

Подстановка (26) в измененное в соответствии с вышесказанным уравнение (16) приводит к следующему уравнению для $S(q)$:

$$\int\limits_L dq\,\exp\left\{-\frac{iq^2}{2\left(t+\dfrac{r_0}{v}\right)}\right\}S(q)=\frac{1}{\kappa\left(t+\dfrac{r_0}{v}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_L dq\,\exp\left\{-\frac{iq^2}{2\left(t+\dfrac{r_0}{v}\right)}\right\}a(q)\,S(q). \quad (27)$$

Это уравнение имеет решение:

$$S(q)=\frac{q}{a(q)}C_*\exp\left\{i\kappa\int\limits_0^q\frac{q'dq'}{a(q')}\right\}. \quad (28)$$

Подстановка (28) в (27) и интегрирование правой части уравнения по частям приводят к тождеству. Из вида уравнений (26), (27), (28) следует, что соотношения (23), (24) дают решение задачи о δ-центрах, разбегающихся из разных точек ($\mathbf{r}=\pm\mathbf{r}_0$), если сделать в этих соотношениях замену

$$t\to t+\frac{r_0}{v},\quad r_\pm\to|\mathbf{r}\pm(\mathbf{v}t+\mathbf{r}_0)|.$$

Константа C_* зависит от v, κ и r_0, причем сложный характер зависимости делает сложным переход к стационарному пределу $v\to0$. Для определения решения при $v\to0$ будем искать $S(q)$ в виде $S(q)=\exp(i\kappa_0 q)$. При этом из (27) можно получить:

$$\exp\left[\frac{i\kappa_0}{2}\left(t+\frac{r_0}{v}\right)\right]=\frac{\kappa_0}{\kappa}\exp\left[\frac{i\kappa_0^2}{2}\left(t+\frac{r_0}{v}\right)\right]-$$
$$-\frac{\kappa_0}{\kappa}\frac{1}{2v\left(t+\dfrac{r_0}{v}\right)}\exp\left[\frac{i(\kappa_0+2iv)^2}{2}\left(t+\frac{r_0}{v}\right)\right]. \quad (29)$$

Переходя к пределу $v \to 0$, имеем равенство

$$\kappa = \kappa_0 - \frac{\exp(-2\kappa_0 r_0)}{2r_0},$$

совпадающее с соотношением (10). В соответствии с этим равенством стационарное решение определяется формулой (11). Следует, однако, заметить, что использованный здесь вид $S(q)$ не дает возможности для получения решения при $v \neq 0$.

6. Решение (23), (24) аналогично, в принципе, полученному в работе [9] решению для связанного состояния разбегающихся центров в одномерной задаче. В обоих случаях решение представляет сумму двух выражений, соответствующих направлению движения центра и влияющих друг на друга. Для трехмерной задачи, однако, есть ряд особенностей. В этом случае связанное состояние не представимо в виде дискретного ряда «метастабильных» затухающих уровней. При разбегании из одной точки в одномерной задаче в пределе $v \to 0$ состояние переходит непрерывным образом в состояние одного δ-центра, тогда как в трехмерной задаче такого перехода нет. Это связано с тем, что и в стационарной двухточечной задаче при стремлении к нулю расстояния между центрами нет непрерывного перехода к состоянию одного центра.

В монографии [4] наличие относительного движения моделируется наличием связанных уровней, глубина которых зависит от времени. По-видимому, существует возможность построения более реалистичных решаемых моделей различных нестационарных квантовомеханических процессов, таких как, например, туннелирование нуклонов или перезарядка атомных частиц. Особенно большой интерес в связи с этим представляют нестационарные задачи с трехмерными точечными δ-центрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fermi, Nuovo Cim. **34**, 157 (1934).
2. С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёэг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, Москва (1991).
3. J. M. Roman and R. Tarrach, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 6073 (1996).
4. Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, *Применение потенциалов нулевого радиуса действия в атомной физике*, изд-во Ленингр. унив., Ленинград (1975).
5. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, Москва (1971).
6. G. Breit, Ann. Phys. **34**, 377 (1965).
7. G. H. Herlihg and Y. Nishida, Ann. Phys. **34**, 400 (1965).
8. Y. Nishida, Ann. Phys. **34**, 415 (1965).
9. С. К. Жданов, А. С. Чихачев, ДАН СССР **218**, 1323 (1974).
10. W. Dappen, J. Phys. B **10**, 2399 (1977).
11. С. К. Жданов, А. С. Чихачев, деп. в ВИНИТИ, № 2221-74 Деп., Москва (1974).
12. А. С. Чихачев, ЖЭТФ **107**, 1153 (1995).
13. В. И. Манько, А. С. Чихачев, ЖЭТФ **113**, 606 (1998).
14. G. Scheitler and M. Kleber, Phys. Rev. A **42**, 55 (1990).
15. В. И. Манько, А. С. Чихачев, ЯФ **64**, № 8, 1533 (2001).