

РАСШИРЕНИЕ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОГО КОНДЕНСАТА, УДЕРЖИВАЕМОГО В КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ИЛИ КВАЗИДВУМЕРНЫХ ЛОВУШКАХ

А. М. Камчатнов *

Институт спектроскопии Российской академии наук
142190, Троицк, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 31 октября 2003 г.

Решения уравнений Гросса–Питаевского для бозе-газа с отталкиванием между атомами получены в гидродинамическом приближении для задачи о расширении газа, удерживаемого в квазиодномерных или квазидвумерных ловушках. Результаты выражены через такие экспериментально измеряемые параметры, как начальный размер конденсата и частоты колебаний частиц в ловушках. Влияние трехмерных эффектов рассчитано с помощью вариационного подхода. Аналитические результаты находятся в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными.

PACS: 03.75.Kk

1. ВВЕДЕНИЕ

Свойства бозе-эйнштейновского конденсата в условиях, когда движение частиц в одном или двух направлениях «заморожено» и сведено к нулевым колебаниям, привлекают к себе большое внимание [1–14]. Для экспериментальной реализации квазиодномерного конденсата используются оптические дипольные ловушки, в которых конденсат приобретает сильно вытянутую сигарообразную форму [1]. Квазидвумерный конденсат был создан в системах дискообразных ловушек, образованных периодическим потенциалом лазерного пучка [2]. Если глубина ловушек достаточно велика, то движение поперек каждого диска заморожено и конденсат расщепляется на несколько независимых конденсатов, удерживаемых в своих индивидуальных потенциальных ямах.

Важная экспериментальная информация о свойствах бозе-эйнштейновского конденсата в трехмерных ловушках была получена из измерений плотности атомного облака при его эволюции после выключения удерживающего потенциала ловушки. В приближении среднего поля эволюция конденсата

разреженного газа описывается уравнением Гросса–Питаевского [14]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V_{ext}(\mathbf{r})\psi + g|\psi|^2\psi, \quad (1)$$

где

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

— потенциал ловушки,

$$g = 4\pi\hbar^2 a_s / m \quad (2)$$

— константа нелинейного взаимодействия, обусловленного рассеянием атомов друг на друге с длиной рассеяния a_s , а конденсатная волновая функция ψ нормирована на число атомов

$$\int |\psi|^2 d\mathbf{r} = N. \quad (3)$$

Если число атомов достаточно велико, то уравнение Гросса–Питаевского может быть сведено к гидродинамическим уравнениям, которые допускают простые автомодельные решения, описывающие как колебания газа в параболическом потенциале ловушки, так и его свободное трехмерное расширение после выключения потенциала [15–18]. Эта теория находится в прекрасном согласии с экспериментом.

*E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

Новая ситуация возникает при расширении конденсата в условиях, когда некоторые степени свободы остаются замороженными. В недавних экспериментах исследовалось расширение конденсата в квазиодномерных волноводах [1] и в системах двумерных дисков [2], и это направление исследований представляется весьма многообещающим. Ему уже было посвящено несколько работ. В работе [19] было рассмотрено квазиодномерное расширение конденсата без учета квантового давления в поперечном направлении. В работе [20] эффекты квантового давления были учтены для стационарных состояний, когда вклад в него дают лишь две поперечные моды. В работе [13] стационарные состояния конденсата в сигарообразных и дискообразных ловушках рассматривались с помощью вариационного метода, однако динамика расширения конденсата вовсе не обсуждалась.

В настоящей работе дано аналитическое исследование квазиодномерного и квазидвумерного расширения конденсата. Сформулированы условия, когда трехмерное уравнение Гросса–Питаевского может быть сведено к аналогичным уравнениям с меньшим числом пространственных переменных, и найдены решения этих уравнений в гидродинамическом приближении с начальными условиями, соответствующими равновесному состоянию конденсата в ловушке перед ее выключением. При этом расширение конденсата происходит либо вдоль квазиодномерного волновода, либо в плоскости квазидвумерной ловушки. Если же условия перехода к уравнениям Гросса–Питаевского низшей размерности не выполнены, то течение газа становится трехмерным. Влияние эффектов трехмерности на течение рассмотрено вариационным методом. В заключение показано, что результаты теории находятся в согласии с экспериментом.

2. КВАЗИОДНОМЕРНОЕ И КВАЗИДВУМЕРНОЕ РАСШИРЕНИЕ КОНДЕНСАТА БЕЗ УЧЕТА ЭФФЕКТОВ ТРЕХМЕРНОСТИ

Как известно, уравнение Гросса–Питаевского допускает формулировку в виде принципа наименьшего действия с функционалом действия

$$S = \int L dt, \quad L = \int \mathcal{L} d\mathbf{r}, \quad (4)$$

где плотность лагранжиана дается выражением

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi_t^* \psi - \psi_t \psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + V_{ext} |\psi|^2 + \frac{1}{2} g |\psi|^4. \quad (5)$$

В случае сигарообразной или дискообразной ловушки нетрудно найти условия, когда степени свободы в сильно «сжатых» направлениях становятся замороженными и уравнение Гросса–Питаевского сводится к эффективному одномерному или двумерному уравнению, соответственно. Хотя эта проблема уже неоднократно рассматривалась, мы кратко обсудим здесь основные моменты вывода с целью определения существенных параметров теории и формулировки условий применимости теории.

2.1. Одномерное расширение

Если продольная частота ω_z осесимметричной ловушки много меньше ее поперечной частоты ω_\perp ,

$$\lambda = \omega_z / \omega_\perp \ll 1, \quad (6)$$

а энергия нулевых колебаний атомов в поперечном направлении много больше нелинейной энергии взаимодействия на атом, то поперечное движение сводится к основному состоянию квантовых колебаний частиц в поперечном направлении. Характерная амплитуда этих колебаний равна

$$a_\perp = (\hbar / m \omega_\perp)^{1/2},$$

и если обозначить через Z_0 характерный размер конденсата вдоль сигарообразной ловушки, то с учетом оценки

$$N \sim |\psi|^2 a_\perp^2 Z_0$$

(см. (3)) соответствующее условие может быть написано в форме (см., например, [11])

$$N a_s / Z_0 \ll 1. \quad (7)$$

Если это условие выполнено, то мы можем факторизовать конденсатную волновую функцию, представив ее в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(x, y) \Psi(z, t), \quad (8)$$

где

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_\perp} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a_\perp^2}\right) \quad (9)$$

является волновой функцией основного состояния поперечного движения. Подстановка (8), (9) в (4), (5) и последующее интегрирование по поперечному

сечению конденсата дают функцию действия, выраженную через одномерную плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}_{1D} = \frac{i\hbar}{2}(\Psi_t^* \Psi - \Psi_t \Psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m} |\Psi_z|^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 |\Psi|^2 + \frac{g}{4\pi a_\perp^2} |\Psi|^4. \quad (10)$$

Тогда эволюция $\Psi(z, t)$ подчиняется одномерному уравнению Гросса–Питаевского

$$i\hbar \Psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi_{zz} + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 \Psi + g_{1D} |\Psi|^2 \Psi, \quad (11)$$

где

$$g_{1D} = \frac{g}{2\pi a_\perp^2} = \frac{2\hbar^2 a_s}{m a_\perp^2} \quad (12)$$

— эффективная нелинейная константа связи и Ψ нормирована согласно

$$\int |\Psi|^2 dz = N. \quad (13)$$

Уравнение (11) определяет одномерную продольную динамику конденсата в сигарообразной ловушке.

С помощью известной подстановки

$$\Psi(z, t) = \sqrt{\rho(z, t)} \exp\left(\frac{im}{\hbar} \int^z v(z', t) dz'\right) \quad (14)$$

уравнение (11) преобразуется к системе

$$\rho_t + (\rho v)_z = 0, \quad (15)$$

$$v_t + v v_z + \frac{g_{1D}}{m} \rho_z + \omega_z^2 z + \frac{\hbar^2}{2m^2} \left(\frac{\rho_z^2}{4\rho^2} - \frac{\rho_{zz}}{2\rho} \right)_z = 0. \quad (16)$$

Последним членом («квантовым давлением») в уравнении (16) можно пренебречь, если он много меньше нелинейного члена, т. е. если выполняется условие

$$\frac{a_\perp}{Z_0} \ll \frac{N a_s}{a_\perp}. \quad (17)$$

Тогда уравнение (16) сводится к

$$v_t + v v_z + \frac{g_{1D}}{m} \rho_z + \omega_z^2 z = 0 \quad (18)$$

и вместе с уравнением (15) составляет гидродинамическое приближение для описания эволюции конденсата.

Стационарное решение гидродинамических уравнений дает хорошо известное распределение Томаса–Ферми для одномерного конденсата:

$$\rho(z) = \frac{3N}{4Z_0} \left(1 - \frac{z^2}{Z_0^2}\right), \quad v = 0, \quad (19)$$

где постоянная интегрирования Z_0 имеет смысл продольной полудлины конденсата и может быть выражена через число атомов N ,

$$Z_0 = (3N a_s a_\perp^2 \lambda^{-2})^{1/3}. \quad (20)$$

Условия (7) и (17) применимости одномерного гидродинамического приближения могут быть преобразованы после подстановки (20) к виду (см. [11])

$$\sqrt{\lambda} \ll N a_s / a_\perp \ll 1 / \lambda. \quad (21)$$

Теперь мы предполагаем, что продольный потенциал ловушки выключается, так что конденсат может свободно расширяться вдоль продольной оси. В то же время он по-прежнему удерживается в поперечном направлении и его поперечное движение остается «замороженным» в основном квантовом состоянии (9). Следовательно, расширение описывается гидродинамическими уравнениями (15) и (18) с начальными условиями (19). Аналогичная задача давно решалась в нелинейной оптике [22] для противоположного знака «давления» ρ_z в (18), и недавно это решение было применено для описания трехмерного расширения конденсата [15–18]. Здесь мы используем этот подход для случая расширения конденсата в «волновод». Мы ищем решение уравнений (15), (18) в виде

$$\rho(z, t) = \frac{3N}{4Z_0} \frac{1}{b_z(t)} \left(1 - \frac{z^2}{Z_0^2 b_z^2(t)}\right), \quad (22)$$

$$v(z, t) = z \alpha_z(t),$$

где $b_z(t)$ и $\alpha_z(t)$ должны удовлетворять начальным условиям

$$b_z(0) = 1, \quad \alpha_z(0) = 0. \quad (23)$$

Подстановка (22) в (15), (18) дает соотношение

$$\alpha_z(t) = \dot{b}_z(t) / b_z(t), \quad (24)$$

а также уравнение для $b_z(t)$

$$\ddot{b}_z = \omega_z^2 / b_z^2, \quad (25)$$

которое легко интегрируется (см. [23], где это же решение было применено к описанию начальной ква-

зидномерной стадии расширения конденсата после выключения дискообразной ловушки):

$$\sqrt{2}\omega_z t = \sqrt{b_z(b_z - 1)} + \frac{1}{2} \ln \left[2b_z - 1 + 2\sqrt{b_z(b_z - 1)} \right]. \quad (26)$$

Эта формула определяет неявно b_z как функцию времени t . Функция $\alpha(t)$ легко может быть выражена через $b_z(t)$, так что поле скоростей дается выражением

$$v(z, t) = \frac{\sqrt{2}\omega_z z}{b_z(t)} \sqrt{1 - \frac{1}{b_z(t)}}. \quad (27)$$

Крайняя точка распределения плотности движется по закону

$$z_{max}(t) = Z_0 b_z(t) \quad (28)$$

с максимальной скоростью

$$v_{max}(t) = \frac{dz_{max}}{dt} = \sqrt{2}Z_0\omega_z \sqrt{1 - \frac{1}{b_z(t)}}. \quad (29)$$

При больших временах $t \gg \omega_z^{-1}$ находим

$$b_z(t) \approx \sqrt{2}\omega_z t, \quad t \gg \omega_z^{-1}, \quad (30)$$

так что распределения плотности и скорости приобретают простую форму

$$\rho(z, t) \approx \frac{3N}{4v_{max}t} \left(1 - \frac{z^2}{(v_{max}t)^2} \right), \quad (31)$$

$$v(z, t) \approx \frac{z}{t}, \quad t \gg \omega_z^{-1},$$

и максимальная скорость становится постоянной

$$v_{max} \approx \sqrt{2}Z_0\omega_z, \quad t \gg \omega_z^{-1}. \quad (32)$$

Эти формулы описывают гидродинамическое течение по инерции, когда плотность становится настолько малой, что нелинейное давление больше не ускоряет газ. Формула (32) удобна для сравнения с экспериментом, поскольку асимптотическое значение максимальной скорости выражено через два параметра, измеряемых в эксперименте — продольную частоту ω_z ловушки, первоначально удерживающей конденсат, и начальную полуширину Z_0 продольного распределения Томаса–Ферми.

Из (31) мы находим асимптотическое распределение скоростей

$$\rho(v) dv = \frac{3N}{4v_{max}} \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} \right) dv, \quad |v| \leq v_{max}. \quad (33)$$

Средняя кинетическая энергия равна

$$\overline{E} = \frac{m}{2N} \int v^2 \rho(v) dv = \frac{1}{5} E_{max}, \quad (34)$$

$$E_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2.$$

2.2. Двумерное расширение

Двумерная динамика конденсата осуществляется, когда продольная частота ловушки ω_z много больше ее радиальной частоты ω_\perp , т. е. неравенство (6) заменяется на обратное,

$$\lambda = \omega_z / \omega_\perp \gg 1. \quad (35)$$

Теперь мы предполагаем, что заморожено движение вдоль оси z , т. е. энергия нулевых колебаний с квантовой амплитудой $a_z = (\hbar/m\omega_z)^{1/2}$ много больше нелинейной энергии. С учетом оценки

$$N \sim |\psi|^2 R_0^2 a_z,$$

где R_0 обозначает радиус распределения плотности в плоскости ловушки (x, y) , это условие ведет к неравенству

$$\frac{N a_s}{a_z} \ll \left(\frac{R_0}{a_z} \right)^2. \quad (36)$$

Если оно выполнено, то мы опять можем факторизовать конденсатную волновую функцию:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(z) \Psi(x, y, t), \quad (37)$$

где

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi^{1/4} a_z^{1/2}} \exp \left(-\frac{z^2}{2a_z^2} \right) \quad (38)$$

является волновой функцией основного состояния продольного движения. Подстановка (37), (38) в (4), (5) и интегрирование по продольной координате ведут к выражению для действия через эффективную двумерную плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}_{2D} = \frac{i\hbar}{2} (\Psi_t^* \Psi - \Psi_t \Psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m} (|\Psi_x|^2 + |\Psi_y|^2) + \frac{1}{2} m \omega_\perp^2 (x^2 + y^2) |\Psi|^2 + \frac{g}{2\sqrt{2}\pi a_z} |\Psi|^4. \quad (39)$$

Соответствующее уравнение Лагранжа дает двумерное уравнение Гросса–Питаевского

$$i\hbar \Psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_\perp \Psi + \frac{1}{2} m \omega_\perp^2 (x^2 + y^2) \Psi + g_{2D} |\Psi|^2 \Psi, \quad (40)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2$ — поперечный оператор Лапласа, g_{2D} — эффективная нелинейная константа взаимодействия,

$$g_{2D} = \frac{g}{\sqrt{2\pi}a_z} = \frac{2\sqrt{2\pi}\hbar^2 a_s}{ma_z}, \quad (41)$$

а Ψ нормирована согласно уравнению

$$\int |\Psi|^2 dx dy = N. \quad (42)$$

Уравнение (40) описывает двумерную поперечную динамику конденсата в дискообразной ловушке.

С помощью подстановки

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}_{\perp}, t) &= \\ &= \sqrt{\rho(\mathbf{r}_{\perp}, t)} \exp\left(\frac{im}{\hbar} \int^{\mathbf{r}_{\perp}} \mathbf{v}(\mathbf{r}'_{\perp}, t) \cdot d\mathbf{r}'\right), \end{aligned} \quad (43)$$

где $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$ и скорость $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ имеет компоненты только вдоль плоскости ловушки, уравнение (40) преобразуется к системе

$$\rho_t + \nabla_{\perp}(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla_{\perp})\mathbf{v} + \frac{g_{2D}}{m}\nabla_{\perp}\rho + \omega_{\perp}^2\mathbf{r} + \\ + \frac{\hbar^2}{2m^2}\nabla_{\perp}\left[\frac{(\nabla_{\perp}\rho)^2}{4\rho^2} - \frac{\Delta_{\perp}\rho}{2\rho}\right] = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

где $\nabla_{\perp} = (\partial_x, \partial_y)$ — оператор поперечного градиента. Квантовым давлением можно пренебречь при условии, что оно много меньше нелинейного, что дает неравенство

$$1 \ll Na_s/a_z. \quad (46)$$

Тогда уравнение (45) принимает форму гидродинамического уравнения

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla_{\perp})\mathbf{v} + \frac{g_{2D}}{m}\nabla_{\perp}\rho + \omega_{\perp}^2\mathbf{r} = 0. \quad (47)$$

Стационарное решение гидродинамических уравнений ведет к приближению Томаса–Ферми

$$\rho(r) = \frac{2N}{\pi R_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right), \quad \mathbf{v} = 0, \quad (48)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$ и радиус R_0 распределения плотности определяется числом атомов N :

$$R_0 = \left(\frac{16}{\sqrt{2\pi}} Na_s a_z^3 \lambda^2\right)^{1/4}. \quad (49)$$

Это выражение позволяет преобразовать неравенство (36) к более удобной форме, так что условие применимости двумерного приближения Томаса–Ферми принимает вид

$$1 \ll Na_s/a_z \ll \lambda^2. \quad (50)$$

После выключения поперечного потенциала ловушки конденсат начинает расширяться в радиальном направлении, оставаясь ограниченным в продольном направлении. Это радиальное расширение описывается гидродинамическими уравнениями (44) и (47) с начальными условиями (48). Теперь мы ищем решение в виде

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \frac{2N}{\pi R_0^2} \frac{1}{b_{\perp}^2(t)} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2 b_{\perp}^2(t)}\right), \\ v(r, t) &= r\alpha_{\perp}(t), \end{aligned} \quad (51)$$

где v является радиальной компонентой скорости, а $b_{\perp}(t)$ и $\alpha_{\perp}(t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$b_{\perp}(0) = 1, \quad \alpha_{\perp}(0) = 0. \quad (52)$$

Подстановка (51) в (44), (47) дает соотношение между $b_{\perp}(t)$ и $\alpha_{\perp}(t)$:

$$\alpha_{\perp} = \dot{b}_{\perp}/b_{\perp},$$

а также дифференциальное уравнение для $b_{\perp}(t)$:

$$\ddot{b}_{\perp} = \omega_{\perp}^2/b_{\perp}^3. \quad (53)$$

Его интегрирование с начальным условием

$$b_{\perp}(0) = 1, \quad \dot{b}_{\perp}(0) = b_{\perp}(0)\alpha_{\perp}(0) = 0$$

дает

$$b_{\perp}(t) = \sqrt{1 + \omega_{\perp}^2 t^2}, \quad (54)$$

и, следовательно,

$$\alpha_{\perp}(t) = \dot{b}_{\perp}/b_{\perp} = \omega_{\perp}^2 t / (1 + \omega_{\perp}^2 t^2).$$

Таким образом, мы получаем простые формулы для радиального распределения плотности и скорости:

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= \frac{2N}{\pi R_0^2} \frac{1}{1 + \omega_{\perp}^2 t^2} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2(1 + \omega_{\perp}^2 t^2)}\right), \\ v(r, t) &= \frac{\omega_{\perp}^2 r t}{1 + \omega_{\perp}^2 t^2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Крайняя точка радиального распределения плотности движется по закону

$$r_{max}(t) = R_0 \sqrt{1 + \omega_{\perp}^2 t^2} \quad (56)$$

с максимальной скоростью

$$v_{max}(t) = \frac{dr_{max}}{dt} = \frac{R_0\omega_{\perp}^2 t}{\sqrt{1 + \omega_{\perp}^2 t^2}}. \quad (57)$$

В пределе асимптотически больших времен $t \gg \omega_{\perp}^{-1}$ находим

$$\rho(r, t) \approx \frac{2N}{\pi v_{max} t^2} \left(1 - \frac{r^2}{(v_{max} t)^2}\right), \quad (58)$$

$$v(r, t) \approx \frac{r}{t},$$

где

$$v_{max} \approx R_0\omega_{\perp}, \quad t \gg \omega_{\perp}^{-1}. \quad (59)$$

Аналогично одномерному случаю эти формулы описывают течение по инерции. Опять максимальная скорость выражается через экспериментально измеримые параметры — радиальную частоту ловушки ω_{\perp} перед ее выключением и начальный радиус R_0 распределения Томаса–Ферми.

Асимптотическое распределение скоростей имеет вид

$$\rho(v) dv = \frac{4N}{v_{max}^2} \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right) v dv, \quad (60)$$

а средняя энергия равна

$$\bar{E} = \frac{1}{3} E_{max}, \quad E_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2. \quad (61)$$

3. ТРЕХМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ: ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Если условие (7) или (36) не выполнено, то движение вдоль наименьшего размера конденсата больше не может считаться замороженным и его необходимо принять во внимание. Как было показано в работе [24], это может быть сделано в рамках простого вариационного подхода. Однако в случае сильно асимметричных ловушек и достаточно большого числа атомов в конденсате в качестве начального распределения вдоль вытянутых размеров следует брать равновесное распределение Томаса–Ферми, которое сильно отличается от гауссовского распределения, предполагавшегося в [24]. Равновесные состояния конденсата были рассчитаны таким способом в работе [13] и здесь мы применим его к динамике конденсата.

3.1. Сигарообразная ловушка

В случае сигарообразной ловушки с распределением Томаса–Ферми для плотности вдоль продольной оси z мы берем вариационную волновую функцию конденсата в виде

$$\psi = A \exp\left(-\frac{r^2}{2w_{\perp}^2}\right) \sqrt{1 - \frac{z^2}{w_z^2}} \times \exp\left[\frac{i}{2}(\alpha_{\perp}^2 r^2 + \alpha_z^2 z^2)\right], \quad (62)$$

где параметры $A, w_{\perp}, w_z, \alpha_{\perp}, \alpha_z$ предполагаются функциями времени. Предполагается, что $Na_s/Z_0 \sim 1$, т. е. в радиальном направлении предел Томаса–Ферми еще не достигнут и радиальную волновую функцию можно достаточно хорошо приблизить гауссовым распределением. Параметр A связан с ширинами w_{\perp}, w_z условием нормировки (3), которое дает

$$A = \left(\frac{3N}{4\pi w_{\perp}^2 w_z}\right)^{1/2}. \quad (63)$$

Подстановка (62) в (4), (5) дает после интегрирования усредненный лагранжиан

$$\begin{aligned} \frac{L}{N} = & \left[\frac{\hbar^2}{2} \frac{d\alpha_{\perp}}{dt} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{w_{\perp}^4} + \alpha_{\perp}^2 \right) + \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 \right] w_{\perp}^2 + \\ & + \left(\frac{\hbar^2}{2} \frac{d\alpha_z}{dt} + \frac{\hbar^2}{2m} \alpha_z^2 + \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 \lambda^2 \right) \frac{w_z^2}{5} + \\ & + \frac{3Na_s \hbar^2}{5m} \frac{1}{w_{\perp}^2 w_z}, \end{aligned} \quad (64)$$

где мы пренебрегли членом $1/w_z^4$, много меньшим, чем α_z^2 , поскольку в силу оценок

$$w_z \sim Z_0, \quad \alpha_z \sim (m/\hbar)\dot{w}_z/w_z \sim m\omega_z/\hbar \sim \lambda/a_{\perp}^2$$

условие $1/w_z^2 \ll \alpha_z$ в точности совпадает с условием $\lambda^{1/2} \ll Na_s/a_{\perp}$ применимости приближения Томаса–Ферми в продольном направлении (см. (21)).

Лагранжиан (64) приводит к хорошо известным формулам

$$\alpha_{\perp} = \frac{m}{\hbar} \frac{1}{w_{\perp}} \frac{dw_{\perp}}{dt}, \quad \alpha_z = \frac{m}{\hbar} \frac{1}{w_z} \frac{dw_z}{dt} \quad (65)$$

и к уравнениям движения для ширин

$$\ddot{w}_{\perp} + \omega_{\perp}^2 w_{\perp} = \frac{\hbar^2}{m^2 w_{\perp}^3} + \frac{6Na_s \hbar^2}{5m^2} \frac{1}{w_{\perp}^3 w_z}, \quad (66)$$

$$\ddot{w}_z + \lambda^2 \omega_{\perp}^2 w_z = \frac{3Na_s \hbar^2}{m^2} \frac{1}{w_{\perp}^2 w_z^2}. \quad (67)$$

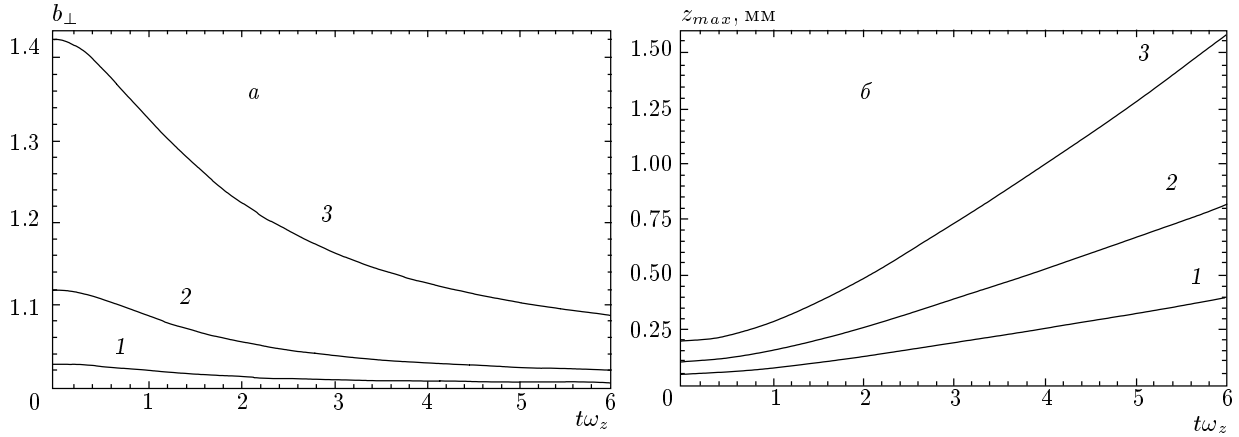


Рис. 1. Зависимость радиального размера $b_{\perp} = w_{\perp}/a_{\perp}$ конденсата (а) и его продольного размера z_{max} (б) от времени $\tau = t\omega_z$ в течение его одномерного расширения в сигарообразной ловушке при следующих значениях параметров: $a_{\perp} = 5$ мкм, $a_s = 5$ нм, $\lambda = 0.05$. Кривые соответствуют числам атомов $N = 10^3$ (1), 10^4 (2), 10^5 (3)

Эти уравнения отличаются от выведенных в [24] численными множителями, а также отсутствием члена, соответствующего квантовому давлению в продольном направлении, учет которого был бы незаконным в нашем приближении. В безразмерных переменных

$$b_{\perp} = w_{\perp}/a_{\perp}, \quad b_z = w_z/Z_0, \quad \tau = \omega_{\perp}t \quad (68)$$

уравнения (66), (67) принимают вид

$$\frac{d^2b_{\perp}}{d\tau^2} + b_{\perp} = \frac{1}{b_{\perp}^3} + \frac{2q}{5} \frac{1}{b_{\perp}^3 b_z}, \quad (69)$$

$$\frac{d^2b_z}{d\tau^2} + \lambda^2 b_z = \frac{\lambda^2}{b_{\perp}^2 b_z^2}, \quad (70)$$

где параметр

$$q = (\lambda Z_0/a_{\perp})^2 \quad (71)$$

характеризует силу нелинейного давления в радиальном направлении. Если $q \ll 1$, то мы можем пренебречь вторым членом в правой части уравнения (69) и получить стационарное решение $b_{\perp 0} = b_{z 0} = 1$, которое соответствует одномерному приближению (см. разд. 2). Легко видеть, что в этом случае уравнение (70) сводится для свободного продольного расширения к уравнению (25).

Равновесные значения b_{\perp} и b_z определяются уравнениями

$$b_{\perp 0} = b_{z 0}^{-3/2}, \quad \frac{1}{b_{z 0}^6} = 1 + \frac{2q}{5} \frac{1}{b_{z 0}}, \quad (72)$$

которые отличаются от аналогичных уравнений работы [21] лишь обозначениями. Они определяют состояние конденсата перед расширением.

Расширение конденсата после выключения продольного потенциала описывается уравнениями

$$\frac{d^2b_{\perp}}{d\tau^2} + b_{\perp} = \frac{1}{b_{\perp}^3} + \frac{2q}{5} \frac{1}{b_{\perp}^3 b_z}, \quad \frac{d^2b_z}{d\tau^2} = \frac{\lambda^2}{b_{\perp}^2 b_z^2}, \quad (73)$$

которые легко могут быть решены численно с начальными условиями

$$\begin{aligned} b_{\perp}(0) &= b_{\perp 0}, & \dot{b}_{\perp}(0) &= 0, \\ b_z(0) &= b_{z 0}, & \dot{b}_z(0) &= 0, \end{aligned} \quad (74)$$

где $b_{\perp 0}$ и $b_{z 0}$ заданы уравнениями (72). Зависимости

$$b_{\perp} = w_{\perp}/a_{\perp}, \quad z_{max} = Z_0 b_z(t) = Z b_z(t)/b_{z 0}$$

от времени, где $Z = Z_0 b_{z 0}$ — начальная полуширина конденсата, показаны на рис. 1 для различных значений числа атомов N . При

$$\sqrt{\lambda} a_{\perp}/a_s \ll N \ll a_{\perp}/(\lambda a_s)$$

мы возвращаемся к аналитическому решению из разд. 2. Если

$$N > a_{\perp}/(\lambda a_s),$$

то расширение начинается при радиальном размере большем амплитуды нулевых колебаний a_{\perp} и $b_{\perp} \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$. При $\tau \gg 1$ продольное расширение переходит в движение по инерции с постоянными скоростями атомов. Значение максимальной скорости легко найти с помощью закона сохранения для уравнений (73):

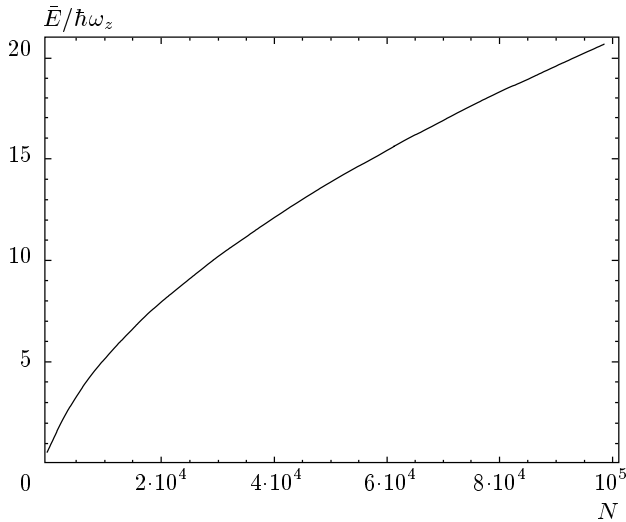


Рис. 2. Средняя энергия выхода атомов конденсата после одномерного расширения в сигарообразной ловушке как функция от числа атомов. Средняя энергия измеряется в единицах кванта энергии продольных колебаний $\hbar\omega_z$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{db_z}{d\tau} \right)^2 + \frac{5\lambda^2}{2q} \left[\left(\frac{db_{\perp}}{d\tau} \right)^2 + b_{\perp}^2 + \frac{1}{b_{\perp}^2} \right] + \frac{\lambda^2}{b_{\perp}^2 b_z} = \text{const.} \quad (75)$$

При $\tau = 0$ мы имеем начальные значения (74), а при $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$db_z/d\tau \rightarrow \dot{b}_{z,max}, \quad b_{\perp} \rightarrow 1, \quad b_z \rightarrow \infty,$$

так что

$$\dot{b}_{z,max} = \lambda \sqrt{\frac{2}{b_{\perp 0}^2 b_{z0}} + \frac{5}{q} \left(b_{\perp 0} - \frac{1}{b_{\perp 0}} \right)^2}. \quad (76)$$

Тогда с помощью уравнений (72) находим

$$v_{max} = \left. \frac{dz_{max}}{dt} \right|_{t \rightarrow \infty} = \frac{2Z\omega_z b_{\perp 0}}{\sqrt{1 + b_{\perp 0}^2}}. \quad (77)$$

Для $q \ll 1$, когда $b_{\perp 0} = 1$, $Z = Z_0$, мы возвращаемся к одномерной формуле (32), и для $q \gg 1$, когда $b_{\perp 0} \gg 1$, получаем

$$v_{max} \approx 2\omega_z Z.$$

Таким образом, при увеличении числа атомов в конденсате увеличивается не только его продольный размер Z , но также и коэффициент пропорциональности между v_{max} и $\omega_z R$ увеличивается от значения $\sqrt{2}$ до 2.

Асимптотическое распределение скоростей и выражение для средней энергии сохраняют свой вид (33), (34), где теперь v_{max} дается формулой (77). Зависимость средней энергии от числа атомов N показана на рис. 2.

3.2. Дiskoобразная ловушка

Для случая дискообразной ловушки с томас-фермиевским распределением плотности конденсата в радиальном направлении мы берем вариационную волновую функцию в виде

$$\psi = A \sqrt{1 - \frac{r^2}{w_{\perp}^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2w_z^2}\right) \times \exp\left[\frac{i}{2}(\alpha_{\perp}^2 r^2 + \alpha_z^2 z^2)\right], \quad (78)$$

где зависящие от времени параметры A , w_{\perp} , w_z , α_{\perp} , α_z связаны условием нормировки (3):

$$A = \left(\frac{2N}{\pi^{3/2}} \frac{1}{w_{\perp}^2 w_z} \right)^{1/2}. \quad (79)$$

Подстановка (78) в (4), (5) дает после интегрирования следующий лагранжиан

$$\begin{aligned} \frac{L}{N} = & \left(\frac{\hbar^2}{2} \frac{d\alpha_{\perp}}{dt} + \frac{\hbar^2}{2m} \alpha_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 \right) \frac{w_{\perp}^2}{3} + \\ & + \left[\frac{\hbar^2}{2} \frac{d\alpha_z}{dt} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{w_z^4} + \alpha_z^2 \right) + \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 \lambda^2 \right] \frac{w_z^2}{2} + \\ & + \frac{8}{3\sqrt{2}\pi} \frac{Na_s \hbar^2}{m} \frac{1}{w_{\perp}^2 w_z}, \quad (80) \end{aligned}$$

где мы пренебрегли членом $1/w_{\perp}^4$, много меньшим, чем α_{\perp}^2 , вследствие условия $Na_s/a_z \gg 1$ применимости приближения Томаса–Ферми в радиальном направлении.

Лагранжиан (80) ведет к соотношениям (65) и к уравнениям движения для ширин:

$$\ddot{w}_{\perp} + \omega_{\perp}^2 w_{\perp} = \frac{16}{\sqrt{2}\pi} \frac{Na_s \hbar^2}{m^2} \frac{1}{w_{\perp}^3 w_z}, \quad (81)$$

$$\ddot{w}_z + \lambda^2 \omega_{\perp}^2 w_z = \frac{\hbar^2}{m^2 w_z^3} + \frac{16}{\sqrt{2}\pi} \frac{Na_s \hbar^2}{m^2} \frac{1}{w_{\perp}^2 w_z^2}, \quad (82)$$

которые в безразмерных переменных

$$b_{\perp} = w_{\perp}/R_0, \quad b_z = w_z/a_z, \quad \tau = \omega_{\perp} t, \quad (83)$$

где $a_z = a_{\perp}/\sqrt{\lambda}$, принимают вид

$$\frac{d^2 b_{\perp}}{d\tau^2} + b_{\perp} = \frac{1}{b_{\perp}^3 b_z}, \quad (84)$$

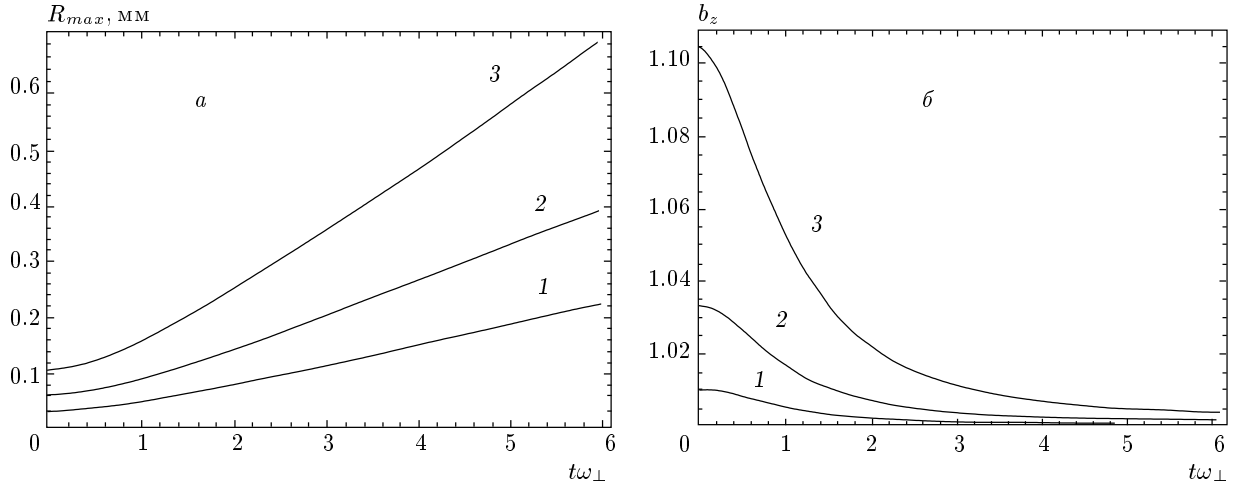


Рис. 3. Зависимость радиального размера R_{max} конденсата (а) и его продольного размера $b_z = w_z/a_z$ (б) от времени $\tau = t\omega_{\perp}$ в течение двумерного расширения в дискообразной ловушке со следующими значениями параметров: $a_z = 5$ мкм, $a_s = 5$ нм, $\lambda = 20$. Кривые соответствуют числам атомов $N = 10^3$ (1), 10^4 (2), 10^5 (3)

$$\frac{d^2 b_z}{d\tau^2} + \lambda^2 b_z = \frac{\lambda^2}{b_z^3} + \frac{\lambda^2 q}{3} \frac{1}{b_{\perp}^2 b_z^2}. \quad (85)$$

Параметр

$$q = (R_0/\lambda a_z)^2 \quad (86)$$

характеризует силу нелинейного давления в продольном направлении. Если $q \ll 1$, то мы можем пренебречь вторым членом в правой части (85) и получить стационарное решение

$$b_{\perp} = b_z = 1,$$

которое соответствует двумерному приближению из разд. 2. Легко видеть, что в этом случае уравнение (84) сводится к (53).

Равновесные значения b_{\perp} и b_z определяются уравнениями

$$b_{z0} = b_{\perp0}^{-4}, \quad \frac{1}{b_{\perp0}^{16}} = 1 + \frac{q}{3} \frac{1}{b_{\perp0}^6}, \quad (87)$$

которые опять с точностью до обозначений совпадают с уравнениями работы [21]. Они задают состояние конденсата перед расширением. Расширение в плоскости ловушки описывается уравнениями

$$\frac{d^2 b_{\perp}}{d\tau^2} = \frac{1}{b_{\perp}^3 b_z}, \quad \frac{d^2 b_z}{d\tau^2} + \lambda^2 b_z = \frac{\lambda^2}{b_z^3} + \frac{\lambda^2 q}{3} \frac{1}{b_{\perp}^2 b_z^2}, \quad (88)$$

которые могут быть решены численно с начальными условиями (74), где $b_{\perp0}$ и b_{z0} определяются уравнениями (87). Зависимости

$$R_{max} = R b_{\perp}(t)/b_{\perp0}, \quad b_z = w_z/a_z,$$

где $R = R_0 b_{\perp0}$ — начальный радиус конденсата, показаны на рис. 3 при различных значениях числа атомов N . При

$$a_z/a_s \ll N \ll a_z \lambda^2/a_s$$

мы возвращаемся к аналитическому решению из разд. 2. При

$$N > a_z \lambda^2/a_s$$

эволюция начинается со значения продольной ширины w_{z0} , большего амплитуды нулевых колебаний a_z (т.е. $b_{z0} > 1$), и $b_z \rightarrow 1$ для $\tau \rightarrow \infty$. При больших временах $\tau \gg 1$ радиальное расширение стремится к движению по инерции с постоянными скоростями атомов. Максимальное значение радиальной скорости может быть найдено с помощью закона сохранения уравнений (88)

$$\left(\frac{db_{\perp}}{d\tau}\right)^2 + \frac{3}{\lambda^2 q} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{db_z}{d\tau}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{2} \left(b_z^2 + \frac{1}{b_z^2}\right) \right] + \frac{1}{b_{\perp}^2 b_z} = \text{const}, \quad (89)$$

который дает

$$\dot{b}_{\perp, max} = \sqrt{\frac{1}{b_{\perp0}^2 b_{z0}} + \frac{3}{2q} \left(b_{z0} - \frac{1}{b_{z0}}\right)^2}. \quad (90)$$

В результате получаем

$$v_{max} = \left. \frac{dR_{max}}{dt} \right|_{t \rightarrow \infty} = \omega_{\perp} R \sqrt{\frac{1 + 3b_{z0}^2}{2(1 + b_{z0}^2)}}. \quad (91)$$

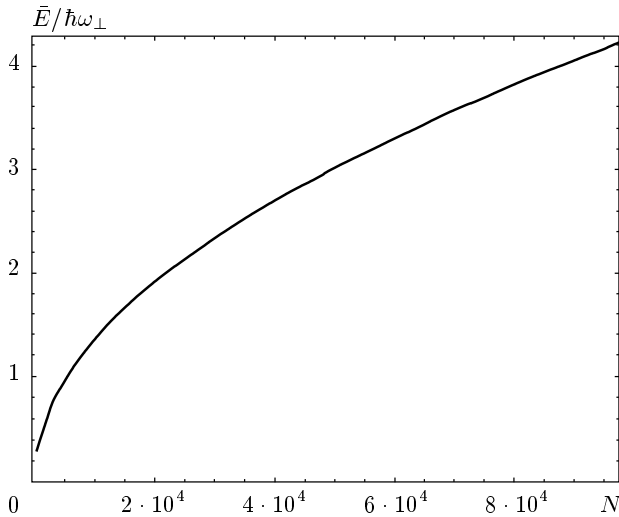


Рис. 4. Средняя энергия выхода атомов после двумерного расширения конденсата в дискообразной ловушке как функция числа атомов N . Энергия измеряется в единицах кванта энергии продольных колебаний $\hbar\omega_{\perp}$

При $q \ll 1$, когда $b_{z0} = 1$, $R = R_0$, мы возвращаемся к двумерной формуле (59), а при $q \gg 1$, когда $b_{z0} \gg 1$, мы получаем

$$v_{max} \approx \sqrt{3/2} \omega_{\perp} R.$$

Асимптотическое распределение скоростей и выражение для средней энергии сохраняют свою форму (60), (61), где теперь v_{max} дается выражением (91). Зависимость средней энергии от числа частиц показана на рис. 4.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Сравним теоретические результаты с имеющимися экспериментальными данными.

Расширение конденсата в квазиодномерной ловушке изучалось экспериментально в [1]. В этом эксперименте полудлина конденсата вдоль продольной оси была равна $Z \approx 100$ мкм, а время перехода к течению по инерции равнялось примерно 20 мс, что соответствует частоте ловушки $\omega_z \approx 50$ с⁻¹. Тогда формула (32) дает значение максимальной скорости

$$v_{max} \approx \sqrt{2} Z \omega_z \approx 7 \text{ мм/с},$$

что ввиду сделанных приближений хорошо согласуется с экспериментальным значением $v_{max} \approx 5.9$ мм/с без введения каких-либо подгоночных параметров.

Расширение бозе-эйнштейновского конденсата в системе двумерных дискообразных ловушек исследовалось в работе [2]. Из результатов этой работы видно, что продольное расширение отсутствовало, так что конденсат был эффективно разделен на отдельные плоские конденсаты, удерживаемые в индивидуальных потенциальных ямах. Поэтому мы можем применить двумерную теорию для описания радиального расширения каждого отдельного конденсата. Согласно данным работы [2], максимальная радиальная скорость равна $v_{max} \approx 1.5\text{--}1.7$ мм/с при начальном радиусе $R \approx 13$ мкм, и радиальной частоте ловушки $\omega_{\perp} \approx 132$ с⁻¹. Формула (59) дает для максимальной скорости теоретическое значение

$$v_{max} \approx R\omega_{\perp} \approx 1.7 \text{ мм/с},$$

что находится в хорошем согласии с указанной экспериментальной величиной. Таким образом, как мы видим, теория среднего поля хорошо описывает процесс расширения конденсата и при уменьшенном числе пространственных координат. Обнаружение отклонений от теоретических предсказаний могло бы служить указанием на реализацию конденсата, не описываемого теорией среднего поля.

Автор благодарен Ф. Х. Абдуллаеву, В. А. Бражному, А. Гаммалу (А. Gammal), В. В. Конотопу, Р. А. Кренкелю (R. A. Kraenkel) и Л. Томио (L. Tomio) за ценные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-01-00696).

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Bongs, S. Burger, S. Dettmer, D. Hellweg, J. Arlt, W. Ertmer, and K. Sengstock, Phys. Rev. A **63**, 031602 (2001).
2. O. Morsch, M. Cristiani, J. H. Müller, D. Ciampini, and E. Arimondo, Phys. Rev. A **66**, 021601 (2002).
3. A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
4. M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, Th. W. Hänsch, and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **87**, 160405 (2001).
5. S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **87**, 160406 (2001).

6. A. E. Leanhardt, A. P. Chikkatur, D. Kielpinski, Y. Shin, T. L. Gustavson, W. Ketterle, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 040401 (2002).
7. D. S. Petrov, M. Holzmann, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2551 (2000).
8. D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).
9. V. Dunjko, V. Lorent, and M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5413 (2001).
10. P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 220401 (2001).
11. C. Menotti and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **66**, 043610 (2002).
12. A. Gammal, L. Tomio, and T. Frederico, *Phys. Rev. A* **66**, 043619 (2002).
13. K. K. Das, M. D. Girardeau, and E. M. Wright, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 110402 (2002).
14. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford (2003).
15. Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
16. Yu. Kagan, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2670 (1996).
17. Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).
18. F. Dalfovo, C. Minniti, S. Stringari, and L. Pitaevskii, *Phys. Lett. A* **227**, 259 (1997).
19. J. A. Stickney and A. A. Zozulya, *Phys. Rev. A* **65**, 053612 (2002).
20. L. Plaja and L. Santos, *Phys. Rev. A* **65**, 035602 (2002).
21. K. K. Das, *Phys. Rev. A* **66**, 053612 (2002).
22. В. И. Таланов, *Письма в ЖЭТФ* **2**, 218 (1965).
23. V. A. Brazhnyi, A. M. Kamchatnov, and V. V. Konotop, *Phys. Rev. A* **68**, 035603 (2003).
24. V. M. Pérez-García, H. Michinel, J. I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5320 (1996); *Phys. Rev. A* **56**, 1424 (1997).