

ПОДАВЛЕНИЕ ХАОСА В ОКРЕСТНОСТИ СЕПАРАТРИСЫ

*А. Ю. Лоскутов**, *А. Р. Джаноев***

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119899, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 апреля 2003 г.

На основе метода Мельникова, который является стандартным инструментом исследования возникновения хаоса в окрестности сепаратрисы, изучена возможность стабилизации поведения динамических систем определенного класса. Аналитически получен явный вид внешних возмущений, приводящих к подавлению хаотического режима. Аналитические результаты дополнены численным анализом системы Дюффинга–Холмса и уравнения нелинейного маятника.

PACS: 05.45.Gg

1. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивные теоретические и экспериментальные исследования хаотических динамических систем выявили их неожиданное и вместе с тем замечательное свойство: они оказываются весьма податливыми и чрезвычайно чувствительными к внешним воздействиям. Это явилось одним из основных критериев, на основе которого была обнаружена возможность управлять поведением хаотических систем, т. е. посредством достаточно слабых возмущений переводить такие системы из режима хаотических колебаний на требуемый регулярный режим и тем самым стабилизировать их поведение.

Под стабилизацией неустойчивого или хаотического поведения динамических систем обычно подразумевается искусственное создание в изучаемой системе устойчивых (как правило, периодических) колебаний посредством внешних мультипликативных или аддитивных воздействий. Иными словами, для стабилизации необходимо найти такие внешние возмущения, которые выведут бы систему из хаотического режима на регулярный. При внешней простоте формулировки этой проблемы ее решение для ряда динамических систем оказывается достаточно сложной задачей. Более того, хотя в настоящее время имеется большое число работ, посвященных этому вопросу, развить последовательную теорию и строго обосновать возможность стабили-

зации хаотического поведения удалось пока только для достаточно общих семейств динамических систем (см. [1, 2] и цитируемую там литературу).

Стабилизация хаотического поведения может быть осуществлена двумя различными способами. Первый из них обеспечивает выведение системы из хаотического на регулярный режим посредством внешних возмущений, реализованных без обратной связи. Другими словами, этот метод не учитывает текущее состояние динамических переменных системы. Качественно отличный от данного метод реализуется посредством корректирующего воздействия в соответствии с требуемым значением динамических переменных и, таким образом, вовлекает обратную связь как необходимую компоненту динамической системы. По установившемуся соглашению первый способ стабилизации хаотической динамики называется подавлением хаоса или контролированием (иногда управлением или регулированием) хаотической динамики без обратной связи. Второй способ носит название контролирование хаоса с обратной связью (controlling chaos). В свою очередь реализация каждого из этих методов может быть проведена параметрическим или силовым способами.

По-видимому, первое исследование стабилизации хаотического поведения некоторых систем было проведено в работах [3, 4]. Однако данное направление получило широкое распространение только после публикации работ [5, 6], где было показано, что при помощи достаточно слабых параметрических

*E-mail: loskutov@moldyn.phys.msu.ru

**E-mail: janoev@poly.phys.msu.ru

возмущений возможно стабилизировать выбранный седловой предельный цикл, вложенный в хаотический аттрактор. Эти и некоторые другие результаты стимулировали изучение вопросов стабилизации хаотического поведения и вызвали большой интерес к вопросам управления неустойчивыми системами. Появилась целая серия работ, как теоретических, так численных и экспериментальных, посвященных исследованиям возможности подавления хаоса и получения периодической или другой требуемой динамики в различных системах и отображениях (см., [1, 2, 7–10] и приводимые там ссылки).

Одним из стандартных и эффективных инструментов, позволяющих аналитически рассмотреть проблему подавления хаоса, является метод Мельникова [11]. Он основан на сравнении членов первого порядка в разложении решения на устойчивой и неустойчивой сепаратрисах в ряды по параметру возмущения. Так, метод Мельникова использовался для исследования возможности стабилизации хаотического поведения нелинейного осциллятора Дюффинга–Холмса [12–16] (см. также [17]). Было показано, что малое параметрическое возмущение такой системы, проявляющей хаотическую динамику, приводит к подавлению хаоса. Кроме того, в работе [18] с помощью метода Мельникова была проанализирована возможность исследования эффектов параметрических возмущений на примере модели джозефсоновских переходов.

В настоящей работе на основе критерия Мельникова [11, 19] в явном виде получен аналитический вид внешних параметрических возмущений, приводящих к стабилизации хаотического и/или неустойчивого поведения динамических систем с диссипацией. В качестве примера рассмотрены осциллятор Дюффинга–Холмса и нелинейный маятник.

2. МЕТОД МЕЛЬНИКОВА

В данном разделе мы кратко опишем суть метода Мельникова, позволяющего аналитически получить условие существования гомо- и гетероклинического хаоса, опираясь на оригинальную работу [11] (см. также [19–21]).

Рассмотрим простую двумерную автономную систему под действием периодического возмущения, имеющую единственную гиперболическую точку X_0 :

$$\dot{x} = f_0(x) + \varepsilon f_1(x, t), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, а функция f_1 периодична по t с периодом T . Допустим, что невозмущенная система

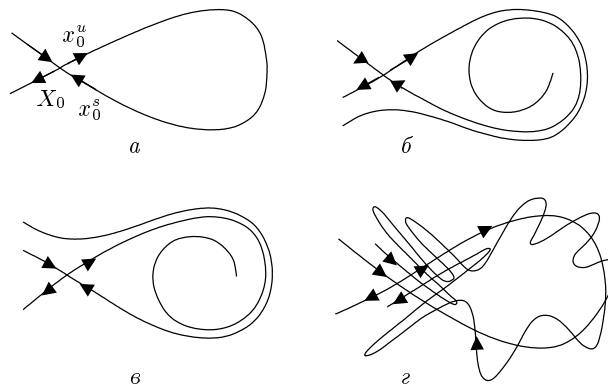


Рис. 1. Расщепление петли сепаратрисы

($\varepsilon = 0$) имеет единую сепаратрису $x_0(t)$ (рис. 1а), так что

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_0(t) = X_0.$$

Возмущение приводит к ее расщеплению, т.е. входящая и выходящая ветви уже не будут совпадать. При этом имеются три возможности: сепаратрисы либо нигде не пересекаются, причем любая из них может полностью охватывать другую (рис. 1б, в), либо пересекаются в бесконечном числе гомоклинических точек. Хаотическое движение возникает только в последнем случае (рис. 1г).

Чтобы найти условие пересечения, необходимо методом теории возмущений вычислить расстояние $D(t, t_0)$ между сепаратрисами в некоторый момент времени t_0 . Когда выходящая сепаратриса окружает входящую, это расстояние $D(t, t_0) < 0$. Если входящая сепаратриса окружает выходящую, то всегда $D(t, t_0) > 0$. И только если при каком-либо t_0 сепаратрисы пересекаются, величина $D(t, t_0)$ будет знакопеременной функцией.

Обоснованный в работе [11] метод позволяет определить размер щели $D(t, t_0)$ между родственными ветвями сепаратрисы. Он требует простого интегрирования вдоль невозмущенных траекторий и основан на сравнении членов первого порядка в разложении решения на устойчивой и неустойчивой сепаратрисах в ряды по параметру возмущения ε .

Для вычисления $D(t, t_0)$ достаточно найти решения на устойчивом x^s и неустойчивом x^u многообразиях. Эти решения различаются на вектор (при $\varepsilon = 1$):

$$r(t, t_0) = x^s(t, t_0) - x^u(t, t_0) = x_1^s(t, t_0) - x_1^u(t, t_0).$$

Расщепление сепаратрисы по Мельникову $D(t, t_0)$ определяется как проекция вектора r на нормаль

N к невозмущенной сепаратрисе x_0 в момент времени t .

Опуская промежуточные выкладки, приведем явное выражение для D :

$$D(t, t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \wedge f_1 dt. \quad (2)$$

Данная зависимость $D(t, t_0)$ определяет характер движения в исходной системе. Если $D(t, t_0)$ является знакопеременной функцией, то сепаратрисы пересекаются и динамика в этой области становится хаотической.

3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В ОКРЕСТНОСТИ СЕПАРАТРИСЫ

На основе описанного математического построения исследуем проблему стабилизации поведения систем с сепаратрисными контурами, для которых исходные уравнения имеют вид (1). Для этой системы мельниковскую функцию $D(t, t_0)$ можно записать следующим образом:

$$D(t, t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \wedge f_1 dt \equiv I[g(x, t)]. \quad (3)$$

Предположим, что величина $D(t, t_0)$ знакопеременная, т. е. сепаратрисы пересекаются (см. рис. 1г). Найдем такое внешнее возмущение $f^*(\omega, t)$, приложение которого к системе приводит к ситуации, когда сепаратрисы не могут пересекаться, т. е. динамика стабилизируется¹⁾:

$$\dot{x} = f_0(x) + \varepsilon [f_1(x, t) + f^*(\omega, t)], \quad (4)$$

где

$$f^*(\omega, t) = (f_1^*(\omega, t), f_2^*(\omega, t)).$$

Обозначим отрезок, на котором функция $D(t, t_0)$ меняет знак, как $[s_1, s_2]$. После приложения внешнего возмущения $f^*(\omega, t)$ возможны два варианта:

$$D^*(t, t_0) > s_2 \quad (5)$$

или

$$D^*(t, t_0) < s_1, \quad (6)$$

где $D^*(t, t_0)$ — мельниковское расстояние для системы (4). Остановимся на случае (5). При выполнении неравенства (6) анализ проводится аналогично. Тогда

$$I[g(x, t)] + I[g^*(\omega, x, t)] > s_2. \quad (7)$$

Здесь

$$I[g^*(\omega, x, t)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 \wedge f^* dt.$$

Выражение (7) верно для всех значений левой части неравенства, больших s_2 . Поэтому всегда найдется такое χ , что

$$I[g(x, t)] + I[g^*(\omega, x, t)] = s_2 + \chi = \text{const}, \quad \chi, s_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Отсюда

$$I[g^*(\omega, x, t)] = \text{const} - I[g(x, t)]. \quad (8)$$

С другой стороны,

$$I[g^*(\omega, x, t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \wedge f^* dt. \quad (9)$$

Выберем $f^*(\omega, t)$ из класса функций, абсолютно интегрируемых на бесконечном участке и разложимых в интеграл Фурье. Запишем $f^*(\omega, t)$ в виде

$$f^*(\omega, t) = \text{Re}\{\hat{A}(t)e^{-i\omega t}\}.$$

Здесь мы полагаем, что $\hat{A}(t) = (A(t), A(t))$. Поэтому

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \wedge \{\hat{A}(t)e^{-i\omega t}\} dt = \text{const} - I[g(x, t)].$$

Обратное фурье-преобразование дает

$$f_0 \wedge \hat{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (I[g(x, t)] - \text{const}) e^{i\omega t} d\omega.$$

Следовательно,

$$A(t) = \frac{1}{f_{01}(x) - f_{02}(x)} \times \int_{-\infty}^{\infty} (I[g(x, t)] - \text{const}) e^{i\omega t} d\omega.$$

Величина $A(t)$ может быть интерпретирована как амплитуда «регуляризующего» возмущения.

¹⁾ Условно назовем такое возмущение f^* «регуляризующим» или «стабилизирующим».

Таким образом, для систем, представимых в виде (1), внешнее стабилизирующее возмущение имеет вид:

$$f^*(\omega, t) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{f_{01}(x) - f_{02}(x)} \int_{-\infty}^{\infty} (I[g(x, t)] - \operatorname{const}) e^{i\omega t} d\omega \right].$$

Исследуем теперь проблему стабилизации систем, для которых исходная система уравнений имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y) + \varepsilon[f(\omega, t) + \alpha F(x, y)], \end{aligned} \quad (10)$$

где $f(\omega, t)$ — периодическое возмущение, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $F(x, y)$ — гладкие функции, а α — диссипация.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся в приложениях случай с единственной гиперболической точкой в начале координат, $x = y = 0$, когда $P(x, y) = y$. Пусть $x_0(t)$ — решение на сепаратрисе. Для системы (10) мельниковское расстояние $D(t, t_0)$ при наличии возмущения можно записать как

$$D(t, t_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t - t_0) \times [f(\omega, t) + \alpha F(x_0, y_0)] dt \equiv I[g(\omega, \alpha)], \quad (11)$$

где $y_0(t) = \dot{x}_0(t)$. Как и в случае с уравнением (1), предположим, что для системы (10) мельниковская величина (11) знакопеременна, т.е. сепаратрисы пересекаются. Найдем внешнее регуляризующее возмущение

$$f^*(\omega, t) = \operatorname{Re}\{\hat{A}(t)e^{i\omega t}\},$$

которое стабилизирует динамику системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= Q(x, y) + \varepsilon[f(\omega, t) + \alpha F(x, y) + f^*(\omega, t)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что поскольку система (10) зависит от параметра α , такая стабилизация должна производиться при каждом фиксированном значении этого параметра. Поэтому далее вместо $I[g(\omega, \alpha)]$ будем писать $I[g(\omega)]$.

Для системы (12) имеем

$$f_{01} = y, \quad f_{02} = Q(x, y), \quad \hat{A}(t) = (0, A(t)).$$

Следовательно, величина $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \frac{1}{y_0(t - t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} (I[g(\omega)] - \operatorname{const}) e^{i\omega t} d\omega.$$

Таким образом, для систем вида (12) внешнее стабилизирующее возмущение можно представить как

$$f^*(\omega, t) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{y_0(t - t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} (I[g(\omega)] - \operatorname{const}) e^{i\omega t} d\omega \right].$$

Получим теперь выражение для внешнего стабилизирующего возмущения, когда функция Мельникова $D(t, t_0)$ допускает смещение с критического значения через аддитивный сдвиг.

Как и ранее, рассмотрим неравенство (5). Предположим, что α_c соответствует критическому значению функции Мельникова

$$I_c = I[g(\omega, \alpha|_{\alpha=\alpha_c})].$$

Тогда докритическое мельниковское расстояние есть

$$I_{out} = I_c - a,$$

где a — постоянная, $a \in \mathbb{R}^+$. Теперь, поскольку мы предполагаем, что после приложения к системе возмущения $f^*(\omega, t)$ она выходит на регулярный режим, получим

$$I' = I_{out} + I[g^*(\omega)] > s_2. \quad (13)$$

Здесь

$$I[g^*(\omega)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t - t_0) f^*(\omega, t) dt.$$

С другой стороны, очевидно, что I' можно положить равным выражению, заведомо большему, чем I_c , а именно,

$$I' = I_c + a > s_2. \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) верны для всех значений левой части неравенства, больших s_2 . Теперь, приравняв (13) и (14), получаем, что $I[g^*(\omega)] = 2a$. Так как мы выбираем $f^*(\omega, t)$ в виде

$$f^*(\omega, t) = \operatorname{Re}\{A(t)e^{i\omega t}\},$$

с учетом выражения для $I[g^*(\omega)]$, находим

$$- \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} A(t) y_0(t - t_0) dt = 2a.$$

Обратное фурье-преобразование дает

$$A(t) y_0(t - t_0) = -2a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Следовательно,

$$A(t) = -\frac{2a}{y_0(t - t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = -\frac{4\pi a \delta(t)}{y_0(t - t_0)}.$$

Таким образом, для систем, для которых возможно смещение с критического значения функции Мельникова $D(t, t_0)$ через аддитивный сдвиг, внешнее стабилизирующее возмущение имеет вид

$$f^*(\omega, t) = -\frac{4\pi a \delta(t)}{y_0(t - t_0)} \cos(\omega t), \quad (15)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

В общем случае, если $f_0 = (f_{01}(x), f_{02}(x))$, то, очевидно,

$$f^*(\omega, t) = -\frac{4\pi a \delta(t)}{f_{01}(x) - f_{02}(x)} \cos(\omega t).$$

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ФИЗИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

В данной части работы на основе изложенного выше материала проведем анализ уравнений Дюффинга–Холмса и нелинейного маятника. В невозмущенном случае устойчивые и неустойчивые многообразия сепаратрис в этих системах могут трансверсально пересекаться, формируя гомоклинические или гетероклинические контуры.

4.1. Осциллятор Дюффинга–Холмса

Уравнение Дюффинга–Холмса с параметрическим возмущением кубического члена имеет вид

$$\ddot{x} - x + \beta [1 + \eta \cos(\Omega t)] x^3 = \varepsilon [\gamma \cos(\omega t) - \alpha \dot{x}], \quad (16)$$

где $\eta \ll 1$, η — амплитуда и Ω — частота параметрического возмущения. Перепишем его в другой форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= x - \beta x^3 + \varepsilon [\gamma \cos(\omega t) - \beta \eta x^3 \cos(\Omega t) - \alpha v]. \end{aligned} \quad (17)$$

Соответствующий невозмущенный гамильтониан можно записать как

$$H_0 = \frac{v^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4}.$$

При $H_0 = 0$ система (17) имеет единственную гиперболическую точку $x = v = 0$ с единой сепаратрисой. Решение на сепаратрисе можно записать как [21] (см. также [12–15])

$$x_0(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \operatorname{ch} t, \quad (18)$$

$$v_0(t) = \dot{x}_0(t) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}. \quad (19)$$

Отсюда, используя (1), находим

$$f_{01} = v, \quad f_{11} = 0,$$

$$f_{02} = x - \beta x^3,$$

$$f_{12} = \gamma \cos(\omega t) - \eta \beta x^3 \cos(\Omega t) - \alpha v.$$

Поэтому

$$f_0 \wedge f_1 = v_0 [\gamma \cos(\omega t) - \eta \beta x_0^3 \cos(\Omega t) - \alpha v_0]$$

и, согласно (2),

$$\begin{aligned} D(t, t_0) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} dt [\gamma v_0(t - t_0) \cos(\omega t) - \\ &\quad - \eta \beta x_0^3(t - t_0) v_0(t - t_0) \cos(\Omega t) - \alpha v_0^2(t - t_0)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь, проводя замену переменной интегрирования ($\tau = t - t_0$), окончательно получаем [12–15]:

$$\begin{aligned} D(t, t_0) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \pi \gamma \omega \frac{\sin(\omega t_0)}{\operatorname{ch}(\pi \omega / 2)} - \\ &\quad - \frac{\pi \eta}{6\beta} (\Omega^4 + 4\Omega^2) \frac{\sin(\Omega t_0)}{\operatorname{sh}(\pi \Omega / 2)} + \frac{4\alpha}{3\beta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Условие на знакопостоянства $D(t, t_0)$ (например, $D(t, t_0) < 0$) выполняется, если (см. [12–15])

$$\begin{aligned} \frac{6\beta d \operatorname{sh}(\pi \Omega / 2)}{\pi (\Omega^4 + 4\Omega^2)} &= \eta_{\min} < \eta \leq \eta_{\max} = \\ &= \frac{1}{p^2} \frac{6\sqrt{2}\beta \gamma \omega}{(\Omega^4 + 4\Omega^2)} \frac{\operatorname{sh}(\pi \Omega / 2)}{\operatorname{ch}(\pi \omega / 2)}, \end{aligned} \quad (22)$$

где p — целое число. Таким образом, исходя из левой части неравенства (22) (анализ для правой части аналогичен), критическое значение функции Мельникова, определяющее границу возникновения хаотичности, запишется как

$$\begin{aligned} D_c(t, t_0) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \frac{\pi \gamma \omega}{\operatorname{ch}(\pi \omega / 2)} \sin(\omega t_0) + \\ &\quad + \frac{4\alpha}{3\beta} - d \sin(\Omega t_0). \end{aligned}$$

Рассмотрим докритическое значение

$$D_{out}(t, t_0) < D_c(t, t_0).$$

Используя соотношение (22), $D_{out}(t, t_0)$ можно представить в виде

$$D_{out}(t, t_0) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \frac{\pi\gamma\omega}{\text{ch}(\pi\omega/2)} \sin(\omega t_0) + \frac{4\alpha}{3\beta} - d \sin(\Omega t_0) - a,$$

где $a > 0$ — некоторая постоянная.

Так как мы ищем регуляризующее возмущение в системе (16) в виде

$$f^*(\Omega, t) = \text{Re}\{e^{i\Omega t} A(t)\},$$

соответствующее данному воздействию выражение для мельниковского расстояния есть

$$D^*(t, t_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(t - t_0) f^*(\Omega, t) dt.$$

Поэтому

$$D^*(t, t_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) v_0(t - t_0) e^{i\Omega t} dt. \quad (23)$$

Таким образом, для завершения анализа необходимо найти величину $A(t)$. С этой целью рассмотрим соотношение

$$D^*(t, t_0) + D_{out}(t, t_0) \equiv D'(t, t_0).$$

Поскольку мы предположили, что возмущение $f^*(\Omega, t)$ выводит систему на регулярный режим, имеем

$$D'(t, t_0) > D_c(t, t_0).$$

Очевидно, $D'(t, t_0)$ можно просто положить равным выражению, которое заведомо больше $D_c(t, t_0)$. Из (22) получаем

$$D'(t, t_0) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \frac{\pi\gamma\omega}{\text{ch}(\pi\omega/2)} \sin(\omega t_0) + \frac{4\alpha}{3\beta} - d \sin(\Omega t_0) + a. \quad (24)$$

С другой стороны, используя (23), для $D'(t, t_0)$ находим

$$D'(t, t_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} A(t - t_0) v_0(t) e^{-i\Omega t} dt + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \frac{\pi\gamma\omega}{\text{ch}(\pi\omega/2)} \sin(\omega t_0) + \frac{4\alpha}{3\beta} - d \sin(\Omega t_0) - a. \quad (25)$$

Теперь, приравнявая (24) и (25), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) v_0(t - t_0) e^{i\Omega t} dt = -2a.$$

Отсюда обратное фурье-преобразование дает

$$A(t) = -\frac{2a}{v_0(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega t} d\Omega.$$

Следовательно, возмущение, приводящее к стабилизации системы Дюффинга–Холмса, будет иметь вид

$$f^*(\Omega, t) = -\frac{4\pi a \delta(t)}{v_0(t - t_0)} \cos(\Omega t). \quad (26)$$

Таким образом, основываясь на соотношении (26), можно ожидать, что хаотическая динамика в системе (16) будет подавлена и осциллятор Дюффинга–Холмса выйдет на регулярный режим движения.

4.2. Нелинейный маятник

Анализ, проведенный выше, справедлив и в случае классического нелинейного маятника, сепаратрисы которого в отсутствие диссипации образуют гетероклинический контур. Уравнение такого маятника с диссипацией и внешним периодическим возмущением можно записать как [22]

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x = \gamma \cos(\omega t). \quad (27)$$

Невозмущенный гамильтониан этой системы имеет вид

$$H_0 = \frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x.$$

Фазовое пространство маятника 2π -периодично по x с гиперболическими седловыми точками в $(\pm\pi, 0)$ и центром в $(0, 0)$. Данная система имеет три типа решений: колебательные, вращательные и сепаратрисные. Нас интересует последний тип решений, который имеет вид

$$x_0(t) = \pm \frac{\text{th } t}{\text{ch } t},$$

$$\dot{x}_0(t) = \pm \frac{2}{\text{ch } t}.$$

Соответствующее уравнению (27) мельниковское расстояние равно [22]

$$D(t_0, \omega) = -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{x}_0(t))^2 dt \pm \gamma \cos(\omega t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x_0(t)) \dot{x}_0(t) \cos \omega t dt. \quad (28)$$

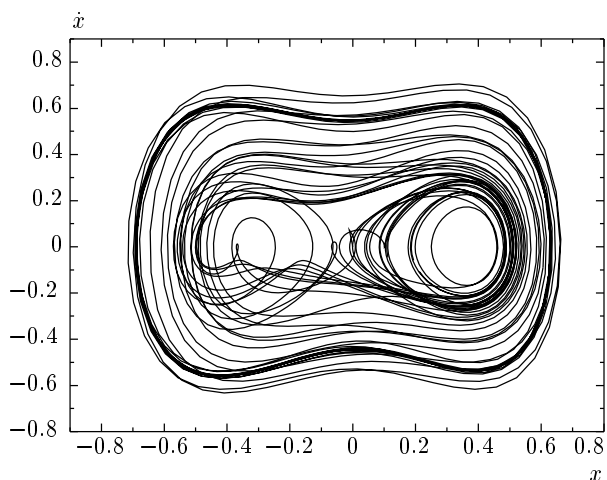


Рис. 2. Фазовый портрет системы Дюффинга-Холмса (16) при $\alpha = 0.145$, $\beta = 8$, $\eta = 0.03$, $\gamma = 0.14$, $\Omega = \omega = 1.1$

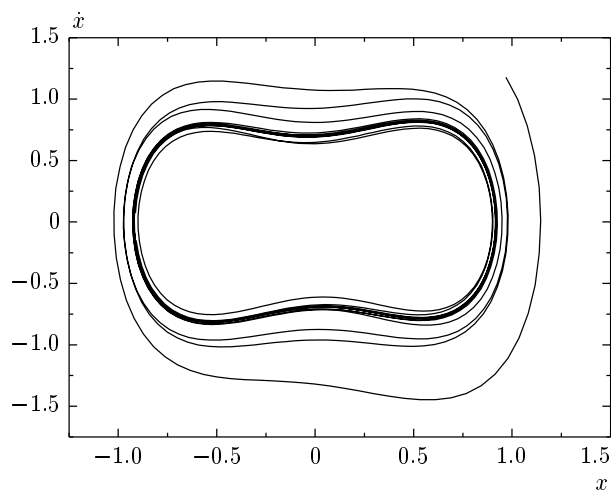


Рис. 4. Фазовый портрет системы Дюффинга-Холмса (31) при $\alpha = 0.145$, $\beta = 8$, $\eta = 0.03$, $\gamma = 0.14$, $\Omega = \omega = 1.1$, $a = 2$

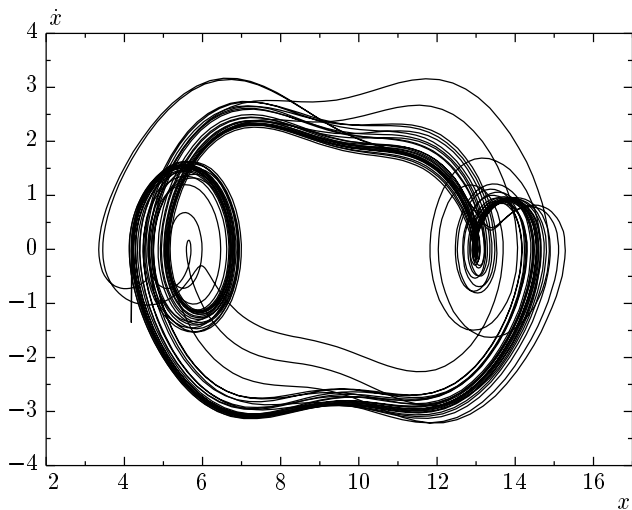


Рис. 3. Фазовый портрет уравнения нелинейного маятника (27) при $\alpha = 0.04$, $\gamma = 1.35$, $\omega = 1.0$

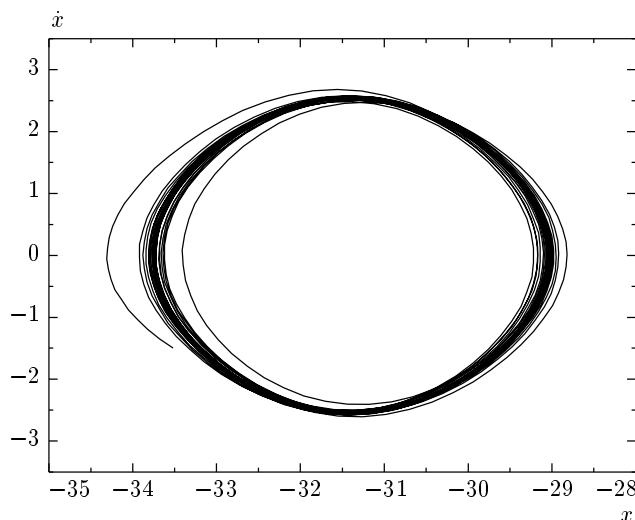


Рис. 5. Фазовый портрет уравнения нелинейного маятника (32) при $\alpha = 0.04$, $\gamma = 1.35$, $\omega = 1.0$, $a = 1.2$

После вычисления интегралов получаем

$$D(t_0, \omega) = -4\alpha B\left(\frac{1}{2}, 1\right) \pm \frac{2\pi\gamma}{\text{ch}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} \cos(\omega t_0), \quad (29)$$

где $B(r, s)$ — β -функция Эйлера.

Легко видеть, в данном случае функция Мельникова $D(t_0, \omega)$ такова, что допустимо смещаться с ее критических значений через аддитивный сдвиг. Поэтому для случая хаотического нелинейного маятника внешнее регуляризирующее возмущение выглядит следующим образом:

$$f^*(\omega, t) = -\frac{4\pi a \delta(t)}{\dot{x}_0(t - t_0)} \cos(\omega t), \quad (30)$$

где $\dot{x}_0(t)$ — решение на невозмущенной сепаратрисе.

С физической точки зрения полученные выражения для внешнего воздействия, выводящего нелинейный осциллятор и систему Дюффинга-Холмса на регулярный режим, означают, что мы извне прикладываем к системе возмущение, имеющее характер серии ударов.

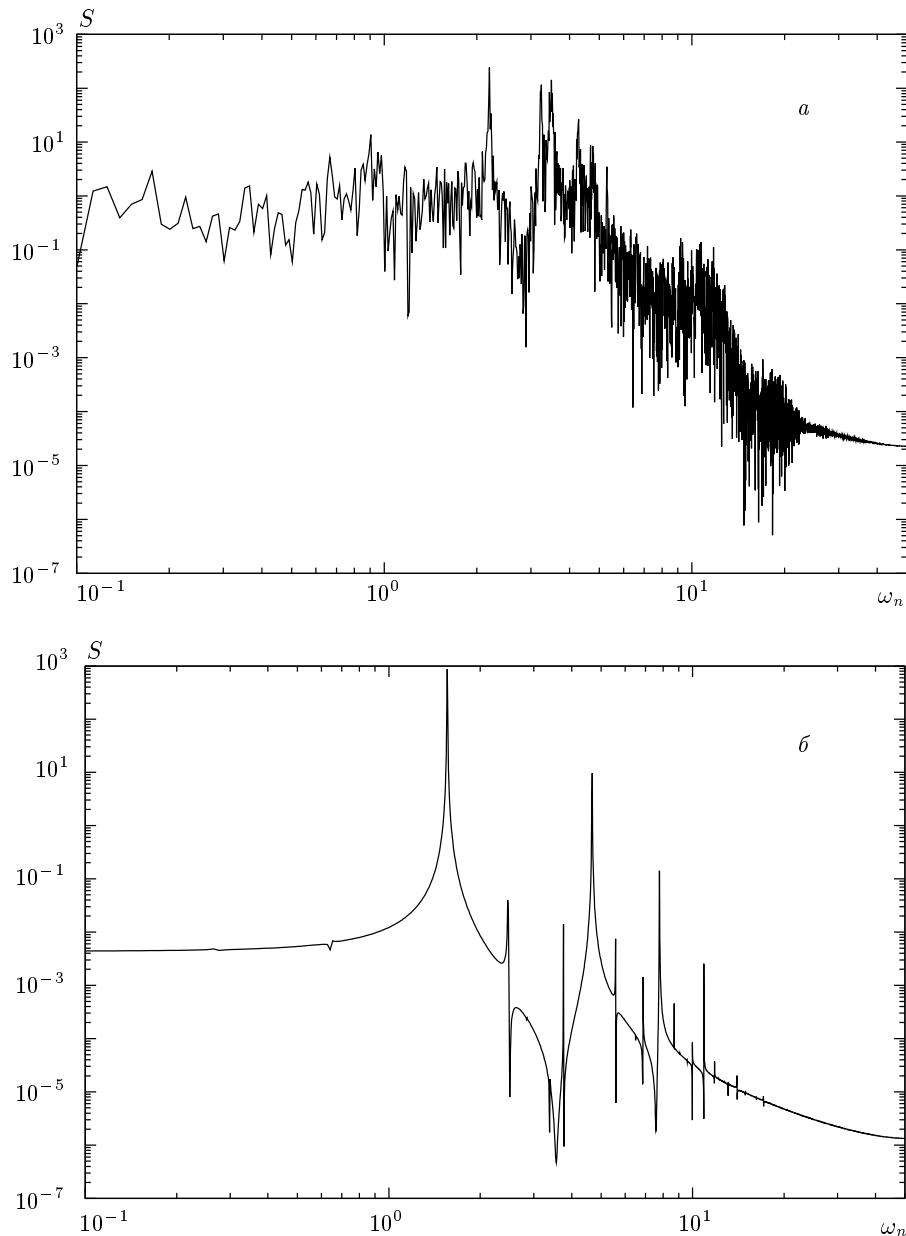


Рис. 6. Спектральная плотность реализации $x(t)$ исходной системы Дюффинга–Холмса (16) при $\alpha = 0.145$, $\beta = 8$, $\eta = 0.03$, $\gamma = 0.14$, $\Omega = \omega = 1.1$ (а) и системы со стабилизирующим возмущением (31) при $a = 2$ (б)

4.3. Численные результаты

В предыдущем разделе было найдено, что хаотическое поведение осциллятора Дюффинга–Холмса и нелинейного маятника может быть стабилизировано посредством приложения определенного внешнего возмущения вида (26) и (30), соответственно. В данной части приведены результаты численного анализа.

Рассмотрим исходную систему уравнений Дюф-

финга–Холмса (16) и нелинейного маятника (27). В осцилляторе Дюффинга–Холмса хаос развивается посредством разрушения сепаратрисного контура типа «восьмерка». Типичная структура хаотического множества для этого случая показана на рис. 2. Для нелинейного маятника характерно рождение хаоса через разрушение гетероклинической траектории (рис. 3).

Добавим теперь к системе Дюффинга–Холмса (16) возмущение (26), а к уравнению маятника —

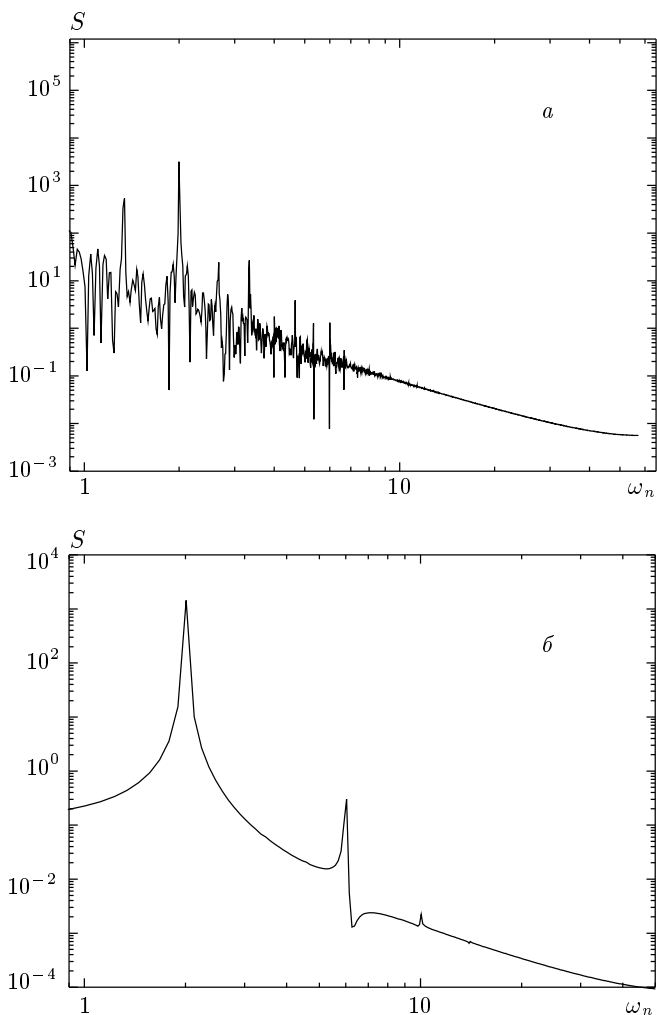


Рис. 7. Спектральная плотность реализации $x(t)$ исходного уравнения маятника (27) при $\alpha = 0.04$, $\gamma = 1.35$, $\omega = 1.0$ (а) и уравнения с возмущением (32) при $a = 1.2$ (б)

возмущение вида (30). В этом случае соответствующие уравнения можно записать как

$$\ddot{x} - x + \beta[1 + \eta \cos(\Omega t)]x^3 = \varepsilon \left[\gamma \cos(\omega t) - \alpha \dot{x} + 2\pi\sqrt{2\beta} \frac{\text{ch}^2(t-t_0)}{\text{sh}(t-t_0)} a\delta(t) \cos \Omega t \right], \quad (31)$$

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x = \gamma \cos(\omega t) + 2\pi \text{ch}(t - t_0) a\delta(t) \cos(\omega t). \quad (32)$$

Численные решения систем (31) и (32) показаны на рис. 4 и рис. 5, соответственно. Отчетливо видно,

что с течением времени динамика осциллятора и маятника становится полностью периодической и фазовая кривая в обоих случаях быстро стремится к стабилизированному регулярному режиму.

Для более полного анализа систем (31) и (32) приведем рассчитанные спектральные плотности

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} |X(\omega)|^2,$$

где $X(\omega)$ — коэффициенты Фурье решения $x(t)$ систем (16) и (27). Характер спектральной плотности — один из самых простых и в то же время вполне надежных критериев, используемых при анализе динамики исследуемой системы. Применение этого критерия позволяет сравнительно легко определить, каким является движение: регулярным или хаотическим.

На рис. 6а и 7а показаны спектральные плотности исходных систем (16), (27), а на рис. 6б и 7б — систем с возмущениями (26) и (30), соответственно. Данные характеристики убедительно показывают, что в обоих рассмотренных случаях происходит подавление хаоса и стабилизация динамики.

Если выбрать другие значения параметров, отвечающие области существования хаоса, и рассмотреть соответствующие функции стабилизации (см. разд. 4), то результат о подавлении хаоса качественно не изменится: после введения возмущения хаотические колебания вырождаются в регулярные.

Таким образом, численный анализ хорошо согласуется с аналитическими результатами, описанными в разд. 4.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Метод расщепления сепаратрис очень удобен для исследования динамических систем. Это связано с тем, что он позволяет аналитически получить условия возникновения неинтегрируемости во многих прикладных задачах [23]. В то же время проблема подавления хаоса, рассмотренная в настоящей работе, сейчас решается, в основном, численными методами (см., например, [1–10]). Однако одной из особенностей изучения этой проблемы с точки зрения анализа асимптотических траекторий является возможность проведения аналитического исследования. Это позволяет для систем с сепаратрисной петлей найти в общем виде расстояние между расщепленными в результате возмущения сепаратрисами. Таким образом, использование методов возмущений вблизи гомоклинической траектории дает хороший инструмент для исследования.

В данной работе на основе метода расщепления сепаратрис исследована возможность подавления хаотической динамики в диссипативных системах. Получен явный вид внешнего возмущения, при воздействии которого на систему она выходит на регулярный режим. Такое подавление хаоса достигается посредством приложения полученной аналитически определенной силовой составляющей. По этой причине полученные результаты являются достаточно общими и могут быть применены к уравнениям и моделям различной природы, где наблюдается расщепление сепаратрис.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai et al., Phys. Rep. **329**, 103 (2000).
2. A. Loskutov and S. D. Rybalko, in *Proc. of the 5th Int. Conf. on Difference Equations and Applications*, ICDEA'2000, Temuco, Chile (2000), Taylor and Francis Publ., London (2002), p. 207.
3. В. В. Алексеев, А. Ю. Лоскутов, Вестник Моск. ун-та, сер. Физ.-Астр. **26**, № 3, 40 (1985).
4. В. В. Алексеев, А. Ю. Лоскутов, Докл. АН СССР **293**, 1346 (1987).
5. E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).
6. F. J. Romeiras, E. Ott, C. Grebogi, and W. P. Dayawansa, Physica D **58**, 165 (1992).
7. T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Nature **363**, 411 (1993).
8. T. Shinbrot, Adv. Phys. **44**, 73 (1995).
9. E. Ott and M. L. Spano, Physics Today **48**, 34 (1995).
10. A. Loskutov, Comput. Math. Mod. **12**, 314 (2001).
11. В. К. Мельников, Труды Моск. матем. об-ва **12**, 3 (1963).
12. R. Lima and M. Pettini, Phys. Rev. A **41**, 726 (1990).
13. F. Cuadros and R. Chacón, Phys. Rev. E **47**, 4628 (1993).
14. R. Lima and M. Pettini, Phys. Rev. E **47**, 4630 (1993).
15. R. Chacón, Phys. Rev. E **51**, 761 (1995).
16. Y. Kivshar, F. Rodelsperger, and H. Benner, Phys. Rev. E **49**, 319 (1994).
17. R. Chacón, Phys. Rev. Lett. **86**, 1737 (2001).
18. G. Cicogna and L. Fronzoni, Phys. Rev. A **42**, 1901 (1990).
19. В. Г. Гельфрейх, В. Ф. Лазуткин, УМН **56**, 79 (2001).
20. P. J. Holmes and J. E. Marsden, Commun. Math. Phys. **82**, 523 (1982).
21. J. Guckenheimer and P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer, Berlin (1990).
22. J. L. Trueba, J. Rams, and M. A. F. Sanjuán, Int. J. Bifurc. Chaos **10**, 2257 (2000).
23. В. В. Козлов, *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, УдГУ, Ижевск (1995).