ЖЭТФ, 2004, том 125, вып. 5, стр. 1204–1212

К ВОПРОСУ О СЛУЧАЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ

В. А. Антонов[a], *Б. П. Кондратьев*[b*]

[a] *Главная астрономическая обсерватория Российской академии наук 196140, Санкт-Петербург, Россия*

[b] *Удмуртский государственный университет 426034, Ижевск, Россия*

Поступила в редакцию 7 марта 2003 г.

Анализируется процесс случайного диффузионного изменения волновой функции системы с двумя состояниями. Разработан способ вычисления оператора эволюции и инкремента затухания функции распределения вероятностей состояния системы на основе аппарата кватернионов. Аналитически доказывается, что моменты второго порядка, образованные из волновой функции, играют главную роль: все другие статистические характеристики стремятся к равновесию в более быстром темпе. Для более общих моделей случайного воздействия асимптотически результат остается тот же, но относительный порядок инкрементов может быть уже разным. Выделены исключительные случаи неполного статистического равновесия. Обсуждается возможная роль данной модельной задачи в актуальной проблеме расщепления состояний на выходе из микромира в макромир. Показано, что распределение конечных вероятностей в модели белого шума не позволяет, вопреки современной литературе, решить известный парадокс кошки Шредингера.

PACS: 03.65.Ta, 42.50.Lc

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение эволюции квантовых систем, на которые воздействует нестационарное внешнее возмущающее поле, представляет несомненный интерес с точки зрения распределения конечных вероятностей и, как следствие, выбора системой возможных квантовых состояний. В статье [1] (см. также [2]) такая эволюция весьма тщательно изучалась на сравнительно простом примере двухуровневой системы, взаимодействующей с классическим «белым шумом». Вероятности перехода частицы из одной ямы в другую рассчитывались с помощью двойного функционального интеграла по траекториям, который разлагался в ряд по степеням малого параметра. Однако в изложении [1] некоторые особенности эволюции квантовой системы остались невыявленными, и мы хотим исследовать эти вопросы более строго.

Напомним, что в работе [1] рассматривалась динамика частицы в двухъямном потенциале (симметричные ямы). Гамильтониан для частицы имеет вид

$$H(t) = -\frac{\hbar}{2}\Delta\sigma_x + \frac{q_0\varphi(t)}{2}\,\sigma_z, \qquad (1)$$

где σ_x, σ_y, σ_z — матрицы Паули, Δ и q_0 — некоторые константы, $\varphi(t)$ — классический белый шум. Через интеграл по траекториям вычислялись корреляторы, связывающие между собой начальное и конечное состояния частицы. Однако не было строго доказано, что главенствующую роль в рассматриваемой задаче должны играть моменты второго порядка. Кроме того, в некоторых случаях надо учитывать и моменты более высокого порядка. Наконец, мы не согласны с высказанным в работах [1, 2] мнением, что итоговое неравенство «весов» двух состояний, возникающих от случайного воздействия термостата, имеет отношение к разрешению фундаментальной проблемы кошки Шредингера, т. е. к выбору одного из квантовых состояний при переходе из микромира в макромир.

Для решения указанных вопросов здесь развит

*E-mail: kond@uni.udm.ru

новый метод анализа эволюционных квантовых задач, опирающийся на математический аппарат кватернионов. С его помощью дается более строгое и компактное представление эволюции состояния двухуровневой системы при воздействии белого шума. При этом мы не ограничиваемся гамильтонианом типа (1) и в разд. 9 рассматриваем эволюцию системы с более общими гамильтонианами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим квантовую систему с двумя базовыми состояниями, которая описывается гамильтонианом (1). Постоянная Δ обратна времени пребывания системы в данном состоянии и характеризует устойчивость этого состояния, параметр q_0 имеет размерность длины и задает ширину потенциального барьера. Результат эволюции на интервале времени можно записать в матричной форме как

$$\psi(T) = D\psi(0), \tag{2}$$

где

$$D = D_n D_{n-1} \ldots D_1,$$
$$D_m = \exp\left[-\frac{iH\left(\dfrac{mT}{n}\right)T}{n\hbar}\right], \tag{3}$$

в пределе $n \to \infty$.

Комплексные унитарные матрицы 2×2, как известно [3], тесно связаны с операциями вращения твердого тела. В качестве промежуточного звена удобно использовать аппарат кватернионов. Умножение кватернионов

$$X = d + ai + bj + ck \quad \text{или} \quad (a,b,c,d), \tag{4}$$

где a, b, c, d — вещественные параметры, эквивалентно [4] умножению комплексных матриц

$$D_x = \begin{pmatrix} d+ic & -(b-ia) \\ b+ia & d-ic \end{pmatrix}, \tag{5}$$

унитарных при нормировочном условии

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 1. \tag{6}$$

В данном случае с нужной точностью имеем

$$D_m = 1 - \frac{iT}{n\hbar}\left[-\frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_x + \frac{q_0\varphi\left(\dfrac{mT}{n}\right)}{2}\sigma_z\right] - \frac{q_0^2T^2}{8n^2\hbar^2}\left[\varphi\left(\frac{mT}{n}\right)\right]^2 + \ldots$$

и соответствующий кватернион

$$X_m = 1 + \frac{T}{n\hbar}\left[\frac{\hbar\Delta}{2}i - \frac{q_0}{2}\varphi\left(\frac{mT}{n}\right)k\right] - \frac{q_0^2T^2}{8n^2\hbar^2}\left[\varphi\left(\frac{mT}{n}\right)\right]^2 + \ldots \tag{7}$$

3. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Предыдущее выражение, согласно общим принципам использования кватернионов в задаче о вращении твердого тела [5, 6], описывает детерминированный поворот за время T/n на угол $T\Delta/n$ вокруг оси x и случайный поворот на угол

$$\frac{q_0T}{n\hbar}\varphi\left(\frac{mT}{n}\right)$$

вокруг оси z. Зафиксируем какое-нибудь начальное положение пробной точки на единичной сфере. По общим правилам теории диффузии [7] плотность f последующих образов этой точки в моменты $t > 0$ будет подчиняться дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta A_x f + \frac{\Gamma}{2}A_z^2 f, \tag{8}$$

где использовано обозначение

$$\Gamma^2 = \frac{q_0^2}{\hbar^2}\langle\varphi^2\rangle,$$

причем угловые скобки означают дисперсию за единицу времени, а A_x, A_y, A_z — операторы вращения вокруг осей x, y, z. Уравнение (8) имеет очевидное стационарное решение $f = \text{const}$ ($\text{const} = 1/4\pi$ при обычной нормировке вероятностей). Остальные частные решения затухают с течением времени.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУНКЦИИ f

Сразу видно, что сферическая функция любого порядка l при подстановке в (8) сохраняет свой порядок. Поэтому, зафиксировав l, можно воспользоваться обычным разложением:

$$f = \sum_{k=-l}^{l}\alpha_k(t)Y_l^k. \tag{9}$$

Нормировка (комплексных) сферических функций в принципе не играет роли; мы ее подбираем, чтобы упростить уравнения для величин α_k. Отделив время и введя декремент λ, находим

$$(\lambda - k^2\Gamma)\alpha_k + \frac{\Delta}{2}\left[(l-k)\alpha_{k+1} - (l+k)\alpha_{k-1}\right] = 0, \quad -l \le k \le l. \tag{10}$$

Если заменить все величины α_k на $(-1)^k\alpha_{-k}$, то, как легко видеть, они будут удовлетворять той же системе (10) с прежним λ. Из этого следует, что все решения можно разделить на четные с

$$\alpha_{-k} = (-1)^k\alpha_k \tag{11}$$

и нечетные с

$$\alpha_{-k} = (-1)^{k+1}\alpha_k, \quad \alpha_0 = 0. \tag{11a}$$

5. НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ λ

Теперь попытаемся определить нижнюю границу для λ (при всех $\lambda \ge 1$ и нетривиальных $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$). Для этого доказываем, что

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\lambda \ge \frac{\Gamma}{2} - \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \Delta^2}, \quad \Delta \le \frac{\Gamma}{2}, \\ &\mathrm{Re}\,\lambda \ge \frac{\Gamma}{2}, \quad \Delta \ge \frac{\Gamma}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Начнем с более простого случая нечетного решения. Умножим каждое из уравнений (10) с $k = 1, 2, \ldots, l$ на величину

$$\xi_k = \frac{\alpha_k^*}{(l+k)!(l-k)!} \tag{13}$$

и сложим между собой. После сдвига отсчета индекса в последней сумме получаем

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{(\lambda - k^2\Gamma)|\alpha_k|^2}{(l+k)!(l-k)!} + \frac{\Delta}{2}\sum_{k=1}^{l-1} \frac{\alpha_{k+1}\alpha_k^*}{(l-k-1)!(l+k)!} - \frac{\Delta}{2}\sum_{k=1}^{l-1} \frac{\alpha_k\alpha_{k+1}^*}{(l-k-1)!(l+k)!} = 0. \tag{14}$$

Сложив соотношение (14) с комплексно-сопряженным, находим, что

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{(\mathrm{Re}\,\lambda - k^2\Gamma)|\alpha_k|^2}{(l+k)!(l-k)!} = 0.$$

Ясно, что хотя бы один из коэффициентов в числителе должен быть положительным числом или нулем. В данном случае это эквивалентно требованию $\mathrm{Re}\,\lambda \ge \Gamma$, которое даже сильнее неравенства (12).

Перейдем к четному случаю. Умножаем все уравнения (10) на $(-1)^k\xi_k$, складываем между собой и сдвигаем отсчет индекса в последней сумме. Получаем

$$\sum_{k=-l}^{l} (-1)^k \frac{(\lambda - k^2\Gamma)|\alpha_k|^2}{(l+k)!(l-k)!} + \frac{\Delta}{2}\sum_{k=-l}^{l-1} (-1)^k \frac{\alpha_{k+1}\alpha_k^*}{(l-k-1)!(l+k)!} + \frac{\Delta}{2}\sum_{k=-l}^{l-1} (-1)^k \frac{\alpha_k\alpha_{k+1}^*}{(l-k-1)!(l+k)!} = 0. \tag{15}$$

Вычтя из равенства (15) комплексно-сопряженное, находим

$$\mathrm{Im}\,\lambda \sum_{k=-l}^{l} (-1)^k \frac{|\alpha_k|^2}{(l+k)!(l-k)!} = 0. \tag{16}$$

Далее следует различать два варианта.
а) $\mathrm{Im}\,\lambda \ne 0$. Тогда сумма по k в (16) обращается в нуль. Умножим все уравнения (10) на ξ_k и сложим между собой. Получится соотношение, аналогичное (14), но с нижним пределом $k = -l$ у всех сумм. Сложив его с комплексно-сопряженным, находим

$$\sum_{k=-l}^{l} \frac{(\mathrm{Re}\,\lambda - k^2\Gamma)|\alpha_k|^2}{(l+k)!(l-k)!} = 0. \tag{17}$$

Вычтем из (17) равенство (16), где $\mathrm{Im}\,\lambda$ заменено на $\mathrm{Re}\,\lambda$. Тогда с учетом свойства четности (11) имеем

$$-\sum^{o} \frac{k^2\Gamma|\alpha_k|^2}{(l+k)!(l-k)!} + \sum^{v} \frac{(2\,\mathrm{Re}\,\lambda - k^2\Gamma)|\alpha_k|^2}{(l+k)!(l-k)!} = 0, \tag{18}$$

где символы «o» и «v» означают, соответственно, суммирование по всем четным и нечетным положительным $k \le l$ (а член с $k = 0$ выпадает). Ясно, что хотя бы один из коэффициентов второй суммы в (18) должен быть положительным числом или нулем, это эквивалентно неравенству

$$\mathrm{Re}\,\lambda \ge \frac{\Gamma}{2}. \tag{19}$$

б) $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$. Представив, что $l \ge 2$, умножим опять уравнения (10) на ξ_k, но только при $k \ge 2$, и сложим между собой. Тогда после сложения с комплексно-сопряженным равенством получаем

$$\sum_{k=2}^{l} \frac{(\lambda - k^2\Gamma)|\alpha_k|^2}{(l+k)!(l-k)!} - \frac{\Delta(\alpha_1\alpha_2^+ + \alpha_2\alpha_1^+)}{4(l+1)!(l-2)!} = 0. \tag{20}$$

Отдельно выписываем уравнения (10) с $k = 1$ и $k = 0$ с учетом условия симметрии:

$$(\lambda - \Gamma)\alpha_1 + \frac{\Delta}{2}\left[(l-1)\alpha_2 - (l+1)\alpha_0\right] = 0,$$

$$\lambda\alpha_0 + l\Delta\alpha_1 = 0.$$

Из них следует уравнение

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{\dfrac{\Delta}{2}(l-1)\lambda}{\lambda^2 - \Gamma\lambda + \dfrac{l(l+1)\Delta^2}{2}}. \qquad (21)$$

В случае, если знаменатель (21) имеет вещественные корни и величина λ превосходит наименьший из них или равна ему, имеем

$$\Gamma^2 \ge 2l(l+1)\Delta^2 > 4\Delta^2,$$

$$\lambda > \frac{\Gamma}{2} - \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \frac{l(l+1)\Delta^2}{2}}$$

и неравенство (12) выполняется. В других случаях знаменатель (21) положителен. Подстановка (21) в (20) тогда дает

$$\left\{\lambda - 4\Gamma + \frac{\Delta^2(l-1)(l+2)\lambda}{4\left[\lambda^2 - \Gamma\lambda + \dfrac{l(l+1)\Delta^2}{2}\right]}\right\} \times$$
$$\times \frac{|\alpha_2|^2}{(l+2)!(l-2)!} + \sum_{k=3}^{l} \frac{(\lambda - k^2\Gamma)|\alpha_k|^2}{(l+k)!(l-k)!} = 0. \qquad (22)$$

И здесь хотя бы один из коэффициентов (22) должен быть положителен (или равен 0). Если это имеет место для одного из коэффициентов суммы с $k \ge 3$, то $\lambda \ge 9\Gamma$, что даже сильнее условия (19). Остается рассмотреть поведение коэффициента в фигурных скобках. Он возрастает при

$$\lambda < \Delta\sqrt{\frac{l(l+1)}{2}}. \qquad (23)$$

Ниже мы принимаем справедливость неравенства (23), так как при его нарушении $\lambda > \Delta$, а эта оценка строже (12). Подставляя вещественное λ из (12), когда знак «$\ge$» заменен на «$=$», видим, что коэффициент в фигурных скобках отрицателен. Следовательно, реальное значение λ должно быть выше.

В простейшем случае $l = 1$ система (10) имеет вид

$$(\lambda - \Gamma)\alpha_1 - \Delta\alpha_0 = 0, \quad \lambda\alpha_0 + \Delta\alpha_1 = 0.$$

Приравнивание определителя нулю дает

$$\lambda_{1,2} = \frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \Delta^2}. \qquad (24)$$

Решение (24) уже было получено несколько иначе в работе [1] и удовлетворяет (12) как точному равенству для одного или обоих (при $\Delta \ge 2\Gamma$) корней (24). Итак, во всех случаях неравенство (12) выполнено.

6. ВРАЩЕНИЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

От поведения пробной точки перейдем к вращению пространства как целого, описываемому произведением случайных кватернионов:

$$X = X_n X_{n-1} \ldots X_1. \qquad (25)$$

По общим правилам [5, 6] преобразование радиуса-вектора пробной точки, который рассматривается формально как чисто векторный кватернион $R = xi + yj + zk$, описывается кватернионным умножением,

$$R' = XRX^{-1}. \qquad (26)$$

Здесь кватернион R' (он получается тоже чисто векторным) соответствует измененному положению пробной точки на сфере. Кватернион X, нормированный условием (6), зависит от трех параметров, а вектор R', также нормированный на единицу, только от двух параметров. Поэтому X не определяется однозначно по R и R', при этом остается одна степень свободы, выражающаяся, как легко догадаться, в возможности замены X на $X(\cos\sigma + R\sin\sigma)$ при фиксированном R. Кроме того, в (26) есть возможность дискретной замены $X \to -X$. С точностью до этих преобразований обратное нахождение X по R' или, в раскрытом виде, например, при $R = k$, решение уравнений

$$2(ac+bd) = x', \quad 2(bc-ad) = y', \quad d^2+c^2-a^2-b^2 = r'$$

с учетом (6) осуществляется однозначно. Таким образом, проясняется связь между поведением случайной точки на сфере и произведением (25) случайных кватернионов. В обоих случаях имеем цепь Маркова со значениями, соответственно, на сфере в трехмерном и четырехмерном пространстве. При этом плотность распределения f в первом случае связана с плотностью во втором случае интегральным соотношением

$$f = \langle p \rangle_R, \qquad (27)$$

где угловые скобки означают усреднение по введенному выше углу поворота σ и по инверсии кватерниона (равные веса очевидны по симметрии). В частном случае $R = k$ в раскрытом виде поворот выражается соотношениями

$$a, b, c, d \to (a\cos\psi - d\sin\psi, b\cos\psi + c\sin\psi, c\cos\psi - b\sin\psi, d\cos\psi + a\sin\psi),$$
$$0 \le \psi \le 2\pi.$$

В общем случае имеется в виду поворот в четырехмерном пространстве вокруг подвижной «оси», представляющей собой, однако, в данном случае двумерное многообразие, построенное на кватернионах 1 и R.

Докажем лемму.

Лемма. Произвольная функция, заданная в виде полинома от a, b, c, d четной степени на четырехмерной сфере, может быть представлена в виде суммы конечного числа полиномиальных функций той же и меньшей степеней, заранее симметричных по отношению к указанному усреднению, проводимому, вообще говоря, вокруг разных осей.

Доказательство ведем по индукции. Для полинома нулевой степени утверждение очевидно.

Выражение

$$(d^2 + c^2)^m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

симметрично по своей структуре. Кватернион k в роли оси можно заменить на $\alpha i + \beta j + \gamma k = 1$, где α, β, γ мы связываем только условием $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. По отношению к этой новой оси симметрично соотношение

$$F = \left[d^2 + (\alpha a + \beta b + \gamma c)^2\right]^m.$$

В силу условия (6)

$$d^2 = 1 - a^2 - b^2 - c^2, \tag{29}$$

поэтому F с точностью до членов степени, меньшей $2m$, совпадает с

$$N = \left[(\alpha a + \beta b + \gamma c)^2 - a^2 - b^2 - c^2\right]^m. \tag{30}$$

Предполагается, что многочлены степени, меньшей или равной $2m - 2$, уже представлены в требуемом виде, поэтому вместо F мы имеем право рассматривать N. Возьмем сначала точку $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, в которой

$$N = \left(-a^2 - b^2\right)^m.$$

Определим на сфере $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ полярный угол θ_1 и азимут ψ_1, а в пространстве abc сферические координаты θ, ψ, ρ. Для разложения функции

$$(-a^2 - b^2)^m = (-\sin^2\theta)^m = (t^2 - 1)^m$$

по полиномам Лежандра относительно $t = \cos\theta$ используем тождество

$$\int\limits_{-1}^{1} (1 - x^2)^m P_{2n}(x)\, dx =$$
$$= 2(-1)^n \frac{(2n-1)!!\,[(2m)!!]^2}{(2n)!!(2n+2m+1)!!(2m-2n)!!}, \quad m \ge n.$$

Следовательно, в специальном случае $\gamma = 1$ имеем

$$N = \sum_{n=0}^{m} (-1)^{m-n} h_{nm} \rho^{2m} P_{2n}(\cos\theta_1) P_{2n}(\cos\theta),$$

где

$$h_{nm} = \frac{(2n+1)!!\,[(2m)!!]^2}{(2n)!!(2n+2m+1)!!(2m-2n)!!}, \quad m \ge n,$$

$$h_{mn} = 0, \quad m < n.$$

В общем случае получаем

$$N = \sum_{n=0}^{m} (-1)^{m-n} h_{nm} \rho^{2m} P_{2n}(\cos\xi) =$$
$$= \sum_{n=0}^{m} (-1)^{m-n} h_{nm} \rho^{2m} \left\{ P_{2n}(\cos\theta) P_{2n}(\cos\theta_1) + \right.$$
$$+ 2\sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n-k)!}{(2n+k)!} P_{2n}^{(k)}(\cos\theta) \times$$
$$\left. \times\, P_{2n}^{(k)}(\cos\theta_1) \cos[k(\psi - \psi_1)] \right\}, \tag{31}$$

где ξ — угол между векторами с компонентами (a, b, c) и (α, β, γ). Справедливость (31) связана с очевидной инвариантностью ξ по отношению к совместным вращениям пространств abc и $\alpha\beta\gamma$.

Сферические функции, как ортогональные друг другу, взаимно независимы. При каждом конкретном m мы имеем дело только с конечной системой таких функций и их независимость должна проявляться уже на каком-то конечном множестве точек $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ на сфере. Беря подходящую линейную комбинацию из соответствующих N, всегда можно таким образом выделить в (31) член с единственной сферической функцией от λ_1 и θ_1. Коэффициент при нем, если убрать ненулевые численные множители, представляется как

$$\rho^{2(m-n)} \times \\ \times \left[\rho^{2n} P_{2n}^{(k)}(\cos\theta) \left\{ \begin{array}{ll} \cos(k\psi), & 0 \le k \le 2n \\ \sin(k\psi), & 1 \le k \le 2n \end{array} \right. \right], \quad (32)$$

где в квадратных скобках стоят разные гармонические многочлены степени $n = 0, 1, 2, \ldots, m$. Легко видеть, что они образуют полную систему в классе всех однородных полиномов от a, b, c степени $2n$ и для всех этих полиномов получается требуемое представление суперпозицией усредненных функций.

Аналогично (28), выражение

$$(d^2 + c^2)^m (ad + bc) \quad (33)$$

симметрично. Вместо a, b, c в (33) можно поставить новые ортогональные компоненты $\beta a - \alpha b$, $-(\alpha a + \beta b)\gamma + (\alpha^2 + \beta^2)c$, $\alpha a + \beta b + \gamma c$. При замене d^2 через a, b, c в (33), кроме членов уже исследованного нами типа, остается

$$N_1 = dN(\beta a - \alpha b).$$

На сфере $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ имеем

$$\cos\xi = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

и применение оператора вращения в пространстве abc дает

$$\frac{\partial}{\partial\psi} P_{2n}(\cos\xi) = \left(a\frac{\partial}{\partial b} - b\frac{\partial}{\partial a} \right) P_{2n}(\alpha a + \beta b + \gamma c) = \\ = (a\beta - b\alpha) P'_{2n}(\cos\xi).$$

Руководствуясь известным тождеством

$$P_N(t) = \frac{P'_{N+1}(t) - P'_{N-1}(t)}{2N+1}, \quad N \ge 1,$$

получаем при любых a, b, c:

$$(a\beta - b\alpha) P_{2n}(\cos\xi) = \\ = \frac{\rho}{4n+1} \frac{\partial}{\partial\psi} \left[P_{2n+1}(\cos\xi) - P_{2n-1}(\cos\xi) \right]$$

и после несложных объединений членов с учетом (31) имеем

$$N_1 = 2d\rho^{2m+1} \sum_{n=0}^{m} (-1)^{m-n} \left(\frac{h_{nm}}{4n+1} + \frac{h_{n+1,m}}{4n+5} \right) \times \\ \times \sum_{k=1}^{2n+1} k \frac{(2n+1-k)!}{(2n+1+k)!} \times \\ \times P_{2n+1}^{(k)}(\cos\theta) P_{2n+1}^{(k)}(\cos\theta_1) \sin\left[k(\psi_1 - \psi) \right]. \quad (34)$$

Дальнейшие рассуждения проводим, как в предыдущем случае, с той лишь оговоркой, что в (34) отсутствуют гармонические многочлены с $k = 0$. Однако это не влияет на окончательный вывод, так как «зональный» гармонический многочлен ($k = 0$) можно получить из всякого другого, присутствующего в (34), усреднением по $2n$ ориентировкам при вращении вокруг любой оси, вдоль которой этот выбранный многочлен не обращается в нуль. Итак, многочлены степени $2(m+1)$, содержащие один множитель d, также обладают нужным свойством. Так как высшие степени d ($d \ge 2$) можно исключить, лемма полностью доказана.

7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ УМНОЖЕНИЕМ КВАТЕРНИОНОВ

Теперь легко установить связь между суперпозицией вращений фиксированной «метки» и несущим больше информации умножением кватернионов. При добавлении новых случайных сомножителей X_n произведение (25) опять-таки ведет себя как цепь Маркова. Сохраняется и степень многочлена, изображающего плотность распределения на сфере (6). Весь процесс можно описать при помощи полиномиальных собственных функций $p_j(a, b, c, d)$ с соответствующими декрементами λ_j. Согласно лемме, для многочлена p четной степени должно существовать разложение типа

$$p(a, b, c, d) = \sum_{i=1}^{N} q_i(a, b, c, d),$$

где полином q_i симметричен по отношению к вращению вокруг оси R_i. Если через $d\omega$ обозначить элемент сферы в четырехмерном пространстве, то

$$\int |p(a, b, c, d)|^2 \, d\omega = \\ = \sum_{i=1}^{N} \int p(a, b, c, d) q_i^+(a, b, c, d) \, d\omega = \\ = \sum_{i=1}^{N} \int \langle p(a, b, c, d) \rangle_{R_i} q_i^+(a, b, c, d) \, d\omega. \quad (35)$$

Левая часть выражения (35) положительна, поэтому справа хотя бы одна из функций

$\langle p(a,b,c,d)\rangle_{R_i}$ — не тождественный нуль. Но ранее мы видели связь (для плотностей она линейна) между вращением сферы с помеченной точкой R_i и суперпозицией кватернионов. Поэтому для плотностей четной степени a, b, c, d значения декремента λ выбираются так же, как для вращений с помеченной точкой.

Иное дело — полиномы от a, b, c, d нечетной степени. Им может соответствовать более широкое множество декрементов. Однако, если вернуться к первоначальному появлению кватернионов в (5), видно, что одновременные изменения знаков у a, b, c, d приводят только к замене ψ на $-\psi$. Это не может иметь никаких статистических последствий, так что с данной постановкой задачи различие (a,b,c,d) и $(-a,-b,-c,-d)$ неинформативно.

8. КВАНТОВЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Легко определить окончательное распределение квадрата модуля любой из двух компонент волновой функции. Поскольку результат не может зависеть от начального распределения, примем при $t=0$ хотя бы $\psi_1(0)=1$, $\psi_2(0)=0$; тогда из (5) получается

$$\psi_1(T)=d+ic, \quad |\psi_1(T)|^2=c^2+d^2.$$

При $T\to\infty$ распределение на сфере (6) из-за симметрии стремится к однородности. Взяв параметризацию в виде

$$a=\cos\eta\cos\delta, \quad b=\cos\eta\sin\delta, \quad c=\sin\eta\cos\varepsilon,$$

$$d=\sin\eta\sin\varepsilon, \quad d\omega=\sin\eta\cos\eta\, d\eta\, d\delta\, d\varepsilon,$$

получаем для неравенства

$$Q<c^2+d^2<Q+dQ, \quad 0<Q<1,$$

или

$$\sqrt{Q}<\sin\eta<\sqrt{Q}+\frac{dQ}{2\sqrt{Q}}$$

вероятность, пропорциональную dQ, т. е. для $|\psi_1|^2$, как, конечно, и для $|\psi_2|^2$, в пределе получается равномерное распределение. Этот результат отмечен и в работе [1].

9. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наш метод допускает обобщение задачи, когда вид гамильтониана (см. (1)) не конкретизируется, а только предполагается, что встречающиеся в нем случайные параметры независимы друг от друга на последовательных интервалах времени.

Связь с кватернионами и с вращением сферы остается прежней. Достаточно снова рассмотреть плотность $f(\tilde\theta,\tilde\psi)$ на сфере в трехмерном пространстве в полярных координатах как суперпозицию сферических функций фиксированного главного индекса $l\geq 1$, т. е.

$$f=\sum_{k=k_1}^{k_2} c_k e^{ik\tilde\psi} P_l^{(|k|)}\left(\cos\tilde\theta\right). \tag{36}$$

Через k_1 и k_2 в (36) обозначены наименьшее и наибольшее значения индекса k из тех, для которых $c_k\neq 0$. (Нормировка $Y_l^{(k)}$ здесь другая, чем в (9), но это не играет роли.)

Мы рассматриваем функции (36) как собственные функции. Как и в частном примере (1), соответствующие значения $\operatorname{Re}\lambda$, вообще говоря, положительны. Исключения, т. е. наличие незатухающих решений (36), с $\lambda=0$ или чисто мнимыми λ свойственны, как мы доказываем ниже, только моделям следующих двух категорий.

а) Вращения сферы сводятся к поворотам вокруг одной и той же (неслучайной) оси, возможно, скомбинированным с ее переворачиванием.

б) Допустимые вращения переводят в себя какой-либо определенный правильный многогранник.

Для доказательства опять обозначим выделенную точку на сфере через R, а возможные на каждом шаге вращения через L_1, $L_2,\ldots,L_s$; им приписываются, независимо от номера шага, вероятности Q_1, $Q_2,\ldots,Q_s$. (Эта последняя дискретизация совершенно не существенна и служит лишь некоторому удобству словесных формулировок.) Собственная функция (36) должна удовлетворять основному соотношению цепей Маркова, которое в данном случае имеет вид

$$\exp\left(-\frac{\lambda T}{n}\right) f(R)=\sum_{q=1}^{s} Q_q f(L_q^{-1}R). \tag{37}$$

Согласно неравенству Буняковского,

$$\left|\sum_{q=1}^{s} Q_q f(L_q^{-1}R)\right|^2 \leq \sum_{q=1}^{s} Q_q \sum_{q=1}^{s} Q_q \left|f(L_q^{-1}R)\right|^2. \tag{38}$$

Введя элемент сферы $d\Omega$ и беря интегралы по целой сфере, с учетом (37) и естественного нормировочного условия

$$\sum_{q=1}^{s} Q_q=1$$

находим

$$\exp\left(-\frac{2T\,\mathrm{Re}\,\lambda}{n}\right)\int|f|^2d\Omega \le \le \sum_{q=1}^{s} Q_q \int \left|f(L_q^{-1}R)\right|^2 d\Omega = = \sum_{q=1}^{s} Q_q \int |f|^2 d\Omega = \int |f|^2 d\Omega. \quad (39)$$

В случае нулевого или чисто мнимого λ в (39) мы в конечном счете имеем дело с равенством. Но точное равенство в (38), по общему правилу, достигается лишь при совпадении всех функций $f(L_q^{-1}R)$, $q = 1, 2, \ldots, s$, с точностью до числовых (комплексных) коэффициентов. Тогда в силу (37) верны соотношения

$$\left|f(L_q^{-1}R)\right| = \sigma_q f(R), \quad q = 1, 2, \ldots, s,$$

с комплексными постоянными σ_q. В силу сохранения интеграла от $|f|^2$ при повороте должно быть $|\sigma_q| = 1$, так что

$$\left|f(L_q^{-1}R)\right| = |f(R)|, \quad q = 1, 2, \ldots, s.$$

Итак, некоторое тело инвариантно по отношению ко всем допустимым вращениям $L_1, \ldots, L_s$ (для наглядности представляем себе поверхность $r = |f(R)|$). Если это — тело вращения, кроме шара, то его ось должна сохраняться неизменной с точностью до переворачивания и мы приходим к случаю а). Если же у нас не тело вращения, то оно совместимо с самим собой лишь конечным числом способов, так что не только $L_1, \ldots, L_q$, но и все их комбинации в любом числе и порядке принадлежат группе симметрии этого тела. Но такие конечные группы вращений, если не обладают единой инвариантной осью, непременно связаны с правильным многогранником [4], и мы приходим к случаю б).

Остается рассмотреть возможность $|f| = \mathrm{const}$. В разложении $|f|^2$ в комплексный ряд Фурье, согласно (36), присутствует последний член вида

$$|f|^2 = = \ldots + c_{k_1} c_{k_2}^* e^{i(k_1-k_2)\tilde{\psi}} P_l^{(|k_1|)}\left(\cos\tilde{\theta}\right) P_l^{(|k_2|)}\left(\cos\tilde{\theta}\right).$$

Ни при каких $l \ge 1$ он не может свестись к постоянной: при $k_1 \ne k_2$ остается зависимость от $\tilde{\theta}$, а при $k_1 = k_2$ — зависимость от $\tilde{\psi}$. Итак, этот случай отпадает, и доказательство закончено.

Как и ранее, результат автоматически переносится на умножение кватернионов X_m при неразличении X и $-X$. Применительно к эволюции волновой функции исключительные случаи могут быть переформулированы следующим образом:

а) все реализации матриц D_m коммутируют между собой (аналог вращения вокруг одной оси);

б) все реализации матриц D_m принадлежат какой-либо конечной группе.

Так как в случае б) нет бесконечно малых поворотов, то он отпадает, если есть диффузия, как для гамильтониана (1). Случай а) формально реализуется в модели (1) при $\Delta = 0$ или $\Gamma = 0$.

Сделаем еще замечание качественного характера. В отличие от частного примера (1), в других моделях нет аналога неравенства (12), обеспечивающего превалирующую роль неравновесностей с $l = 1$ на больших временах. Напротив, теперь нуль может оказаться точкой сгущения значений λ при больших l. Тогда, хотя (за упомянутыми исключениями а и б) плотности $f(R)$ сходятся к постоянной при $t \to \infty$ из-за возможности сколь угодно точной аппроксимации любой непрерывной на сфере функции полиномом, в целом установление статистического равновесия может идти вообще медленнее, чем по любой экспоненте.

10. ОБСУЖДЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

В работах [1, 2, 8] высказывается мнение, что отмеченное в этих публикациях (и повторно обсужденное у нас) неравенство «весов» двух состояний, возникающее от случайного воздействия термостата, если даже первоначально веса были равны, имеет отношение к проблеме выбора одного из квантовых состояний при переходе в макромир. В связи с этим в [2] даже делается заключение о разрешении таким способом известного парадокса кошки Шредингера. Однако такое мнение является ошибочным. Дело в том, что для решения парадокса кошки в макромире из двух компонент волновой функции должна остаться только одна, которая и будет отвечать за показания макроприбора. Но как раз этому требованию и не удовлетворяет модель с белым шумом. Действительно, при больших t, например, вероятность того, что один из весов $|\psi_1|^2$, $|\psi_2|^2$ превзойдет другой в два раза, составляет около $2/3$, но далее эта вероятность не растет и никак не может стать равной единице. Между тем для решения парадокса кошки Шредингера требуется именно полное, или асимптотическое, исключение состояний.

Обобщение на более широкий класс моделей со случайным гамильтонианом не открывает, как мы выяснили, никаких новых возможностей: статистическое распределение при больших t все равно получается то же самое, кроме явно вырожденных ситуаций.

Кстати, математически ясно, что предельное распределение вероятностей можно получить и без всяких кватернионов, просто задавая равновероятность на комплексной окружности:

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1,$$

подобно расчетам в статистической механике [9], только не для бесконечно возрастающего, а для конечного числа степеней свободы. Однако в работе [9] и вообще в выкладках традиционной статистической механики сразу предполагается равновесие, а в настоящей статье рассматривается эволюция к нему. Но результаты, и это существенно, соответствуют друг другу. Внутренние корреляции в гамильтониане $H(t)$ вряд ли что-нибудь меняют: процессы, которые считаются случайными, поддаются разбиению на почти независимые отрезки. В принципе можно было бы представить такую корреляцию явлений в резервуаре с квантовым состоянием выделенной системы, чтобы она стремилась к «чистому» состоянию в смысле выбора $\psi_2 \to 0$ или $\psi_1 \to 0$. Но точно так же можно сказать, что в коробке со смесью черных и белых зерен произойдет разделение тех и других по разным краям коробки, если ее встряхивание будет неким замысловатым образом скоррелировано с начальным положением зерен. В обоих случаях мы имели бы дело с термодинамическим чудом, которое исключено всей суммой наших знаний о роли вероятности в мире [10, 11].

Мы приходим, следовательно, к заключению, что непременное условие «волновые функции не допускают суперпозиции по макроскопическим признакам» не поддается попыткам выразить его в линейной форме. Поэтому любое решение проблемы перехода из микромира в макромир включает в себя нелинейность. Однако соображения, высказанные Менским [12], а также в дискуссии по его выступлению, не позволяют корректно ответить на назревшие вопросы. Нельзя, по-видимому, считать, что каждый квантовый опыт подлежит резкому завершению на грани микромира. Сейчас это выглядит архаизмом в свете исследований, развертывающихся на промежуточном масштабе без обязательно резкого конца и без четко выраженного «наблюдателя». Отсюда следует идея рассматривать нелинейность как органическое свойство самого уравнения, описывающего эволюцию волновой функции в промежуточной зоне между микро- и макромиром [10, 13].

В подходе, развитом в работе [13], главной чертой, кроме нелинейности, является взаимодействие с некоторым резервуаром космической природы. Существенно, однако, что в нашем случае его нельзя назвать термостатом, так как этот космический резервуар должен выполнять две вспомогательные функции: быть источником флуктуаций и поглощать излишнюю неопределенность. С физической точки зрения такая ситуация напоминает роль солнечного излучения и открытого космического пространства для жизни на Земле.

Отметим еще следующее. Как показано в работе [13], при таких предположениях также можно добиться разделения суперпозиции состояний, но при этом роль космического фактора оказывается только вспомогательной и никакой информации о результате расщепления он заранее не несет. Подходящим аналогом может служить симметричная диффузия молекулы между двумя холодными стенками, к одной из которых она, в конце концов, прилипает. Чтобы взаимодействие квантовой системы с термостатом дало такой результат, термостат в каждом (!) конкретном опыте должен был бы обладать совершенно чудесными свойствами. В этом и состоит главное физическое отличие модели с термостатом, описанной в работе [8], от модели, рассмотренной в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Б. Лесовик, А. В. Лебедев, А. О. Имамбаев, Письма в ЖЭТФ **75**, 565 (2002).
2. Г. Б. Лесовик, Письма в ЖЭТФ **74**, 528 (2001).
3. Г. Джеффрис, Б. Свирлс, *Методы математической физики*, Мир, Москва (1969).
4. Ф. Клейн, *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени*, Наука, Москва (1989).
5. В. Н. Бранец, Н. П. Шмыглевский, *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела*, Наука, Москва (1973).
6. С. Н. Кирпичников, В. С. Новоселов, *Математические аспекты кинематики твердого тела*, Изд-во ЛГУ, Ленинград (1986).
7. М. С. Бартлетт, *Введение в теорию случайных процессов*, Изд-во иностр. лит., Москва (1958).
8. Г. Б. Лесовик, УФН **171**, 449 (2001).
9. А. Я. Хинчин, *Математические основания квантовой статистики*, Гостехиздат, Москва–Ленинград (1951).
10. Б. Б. Кадомцев, *Динамика и информация*, Изд-во ред. УФН, Москва (1997).
11. Н. Н. Боголюбов, Ю. В. Саночкин, *Людвиг Больцман. Статьи и речи*, Наука, Москва (1970).
12. М. Б. Менский, УФН **170**, 631 (2000).
13. Б. П. Кондратьев, В. А. Антонов, *Решение парадокса Шредингера. Опыт создания нелинейной квантовой механики*, Изд-во Удмуртского унив., Ижевск (1994).