

ЭВОЛЮЦИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ

*А. А. Заболотский**

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 14 июля 2003 г.

В рамках интегрируемой системы эволюционных уравнений изучается явление самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде для оптических импульсов вне рамок приближения медленных огибающих. Приводится соответствующая модификация аппарата метода обратной задачи рассеяния, с помощью которого найдены солитонные решения модели. Проведено сравнение характеристик оптических солитонов с линейной и круговой поляризациями, в том числе при их эволюции в лазерной среде. Для изучения пределов применимости двухуровневой модели рассматривается влияние дополнительных уровней в адиабатическом приближении. Показано, что для импульсов с длительностью, близкой периоду осцилляций, влияние дополнительных уровней нарушает интегрируемость модели и приводит к потере самоиндуцированной прозрачности среды, которая, однако, восстанавливается при переходе к квазимонохроматическому пределу. Обсуждается применение полученных результатов.

PACS: 42.50.Md, 42.65.Tg, 02.30.Ik

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов генерации и эволюции фемтосекундных оптических импульсов с характерной длительностью, близкой к периоду осцилляций $2\pi/\omega_0$, где ω_0 — частота энергетического перехода, привлекает постоянное внимание в связи с их приложениями в разных областях физики (см., например, обзоры [1–4]). Условия применимости двухуровневой модели для таких импульсов требуют достаточной большой изоляции рабочего перехода от остальных [5–12]. Эти условия улучшаются, если дипольный момент, отвечающий выбранному рабочему переходу больше, чем дипольные моменты для близлежащих переходов [6].

В ряде публикаций отмечено, что развитие методов теоретического анализа динамики оптических фемтосекундных импульсов отстает от потребностей, диктуемых экспериментальными исследованиями в этой области. В частности, для анализа динамики таких импульсов применяется приближение медленных огибающих с учетом некоторых малых поправок, связанных с отклонением от этого при-

ближения [3]. Циолковский и др. [13] применяли численные методы для решения полуклассических уравнений Максвелла–Блоха (МБ). Этими и рядом других авторов исследован эффект самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде для линейно поляризованных импульсов. Численные методы, однако, не всегда позволяют достаточно детально и достоверно проанализировать динамику в сложных системах уравнений, к которым относятся уравнения Максвелла–Блоха, описывающие эволюцию фемтосекундных оптических импульсов.

Период оптической волны длиной 780 нм составляет примерно 2.6 фс. В настоящее время титан-сапфировым лазером осуществлена генерация импульсов длительностью 7.5 фс [7], а с применением волоконно-оптического компрессора — с длительностью 4.5 фс [8]. Длительности этих импульсов всего в несколько раз больше периода осцилляций оптической волны. Поэтому при исследовании оптического фемтосекундного диапазона приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз световых полей в используемых для этой цели моделях и соответствующие решения в качестве нулевого приближения не применимы. В то же время длительность этих импульсов недостаточно мала, чтобы приме-

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

нять упрощающее приближение $\tau_p \ll \pi/\omega_0$, отвечающее предельно коротким импульсам (ПКИ), которое применялось в ряде теоретических работ, например в [9–12], для сведения исходных уравнений Максвелла–Блоха к более простым уравнениям. Как отмечено рядом авторов, это приближение не реалистично в оптическом диапазоне [12]. Поэтому целесообразно вместо условия $\tau_p \ll \pi/\omega_0$ использовать другие упрощающие приближения. В настоящей работе используется приближение однонаправленного распространения световых импульсов, которое с учетом других условий приводит к интегрируемой редукции уравнений Максвелла–Блоха. Поэтому соответствующие локализованные решения этих эволюционных уравнений будем называть однонаправленными импульсами (ОНИ). Концепция ОНИ получила недавно развитие в работе Молони и соавторов [14], в которой численно исследовалась векторная система уравнений Максвелла без применения приближения медленных огибающих.

Известно, что наиболее детальную аналитическую информацию об эволюции импульсов можно получить в рамках интегрируемых моделей методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [15]. Хорошо изучены интегрируемые модели — системы уравнений МБ, описывающие динамику квазимонохроматических импульсов (см. обзор [4] и работу [16], в которой детально представлено применение аппарата МОЗР к уравнениям МБ для вырожденной двухуровневой среды). Самоиндуцированная прозрачность в невырожденной двухуровневой среде для ОНИ изучалась авторами работы [17], которые показали, что исходная система уравнений приводится к редуцированным уравнениям Максвелла–Блоха (РУМБ), к которым применим МОЗР. В работе [17] при выводе РУМБ вместо приближения медленных огибающих использовалось приближение малой плотности активной среды, что отвечает однонаправленному распространению волн, т. е. эволюции ОНИ. Однако все эти результаты относятся к случаю линейно поляризованного поля и неприменимы для переходов с изменением момента на единицу и круговой поляризации ОНИ. Известное нам исключение — частное солитонное решение уравнений Максвелла–Блоха для ПКИ с круговой поляризацией в двухуровневой невырожденной среде, найденное в работе [11]. В то же время решение начально-краевой задачи для соответствующей системы уравнений, изучение многосолитонной и иной автомодельной динамики ОНИ с круговой поляризацией имеет не меньшую актуальность. Важно отметить, что условия применимости теории ОНИ на-

много мягче, чем для ПКИ, что особенно существенно в оптическом диапазоне. Более того, используя приведенные ниже результаты, нетрудно показать, что теория ОНИ формально включает в себя теорию ПКИ и теорию квазимонохроматических импульсов как частные случаи.

Основной целью настоящей работы является изучение динамики взаимодействия фемтосекундных однонаправленных импульсов с двухуровневой средой, состоящей из атомов с энергетическим σ -переходом, т. е. с изменением проекции магнитного момента на единицу ($\Delta m = \pm 1$). В этом случае дипольный матричный элемент является комплексным

$$\mathbf{d} = d_x \mathbf{e}_x - i d_y \mathbf{e}_y$$

(см. [18]). Здесь \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — единичные векторы декартовой системы координат. Импульс поля, взаимодействующий с таким переходом, имеет круговую поляризацию [18].

Подчеркнем, что приближение однонаправленных импульсов, которое применяется в настоящей работе к исходным уравнениям Максвелла–Блоха, приводит в случае циркулярной поляризации поля к эволюционным уравнениям, обладающим качественно новыми свойствами по сравнению с уравнениями, получаемыми после применения приближения медленных огибающих. Как отмечено еще в работе [1], это принципиально отличает рассматриваемую здесь задачу об эволюции импульсов циркулярной поляризации поля от случая линейной поляризации. В последнем случае эволюционные уравнения, получающиеся после применения приближения медленных огибающих и однонаправленного распространения импульсов, связаны простыми преобразованиями. Соответственно, аппарат МОЗР в случае линейной поляризации для этих приближений существенно не отличается. В то же время, как это будет показано ниже, аппарат МОЗР для ОНИ с циркулярной поляризацией принципиально отличен от соответствующего аппарата для уравнений МБ, получаемых после применения приближения медленных огибающих.

Метод решения основан на изучении динамики ОНИ с круговой поляризацией в двухуровневой среде в рамках новой интегрируемой системы уравнений, найденной автором [19]. Для построенных точных решений предполагается провести сравнительный анализ формы ОНИ с круговой и линейной поляризациями, в том числе при их распространении в усиливающей двухуровневой среде с постоянной накачкой верхнего уровня.

Выше отмечено, что использование приближения двухуровневой среды, которое часто применяется для описания эволюции импульсов с длительностью в несколько периодов осцилляций, накладывает достаточно жесткие экспериментальные условия. В частности, энергетическое расстояние до следующих уровней должно быть, по крайней мере, в несколько раз больше спектральной ширины импульсов. Условия применимости двухуровневой модели в такой задаче исследовались численно в работе [20]. Однако полученные этими авторами частные результаты не позволяют детально проанализировать особенности динамики ОНИ в случае учета дополнительных уровней. В настоящей работе учтено влияние на эволюцию ОНИ удаленных дополнительных уровней. В рамках адиабатического приближения показано, что взаимодействие поля с дополнительными уровнями приводит к нарушению интегрируемости модели для достаточно коротких импульсов. Построенная модель позволяет также качественно объяснить ряд известных экспериментальных эффектов.

Структура работы такова. В следующем разделе приводится вывод основной системы эволюционных уравнений, описывающих динамику циркулярно поляризованной волны в невырожденной среде. В разд. 3 получена наиболее общая интегрируемая редукция исходной системы уравнений этой системы и приведен соответствующий аппарат МОЗР, с помощью которого находятся солитонные решения. В разд. 4 исследуется динамика усиления импульсов света в лазерной среде. В разделе 5 исследуется вклад взаимодействия импульсов с дополнительными уровнями. Раздел 6 посвящен обсуждению полученных результатов и их применений.

2. ВЫВОД ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Полуклассическая теория взаимодействия излучения с двухуровневой средой изучалась, в частности, в работах Фейнмана и др. [21]. Уравнения Гейзенберга для оператора \hat{S} , описывающего двухуровневую среду, имеет вид (см. например, [18])

$$i\hbar\partial_t\hat{S} = [\hat{S}, \hat{H}], \quad (1)$$

где

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\omega_0\hat{\sigma}_3 + (\mathbf{d}_x \cdot \hat{\mathbf{E}})\hat{\sigma}_1 + (\mathbf{d}_y \cdot \hat{\mathbf{E}})\hat{\sigma}_2. \quad (2)$$

Здесь

$$\hat{d} = d_x\hat{\sigma}_1 + d_y\hat{\sigma}_2$$

— оператор дипольного момента, $\hat{\sigma}_n$ ($n = 1, 2, 3$) — матрицы Паули, $\hat{\mathbf{E}}$ — оператор электрического поля. В случае эллиптически или циркулярно поляризованной волны необходимо учитывать обе части дипольного момента $d_{x,y} \neq 0$.

Циркулярно поляризованное поле вызывает переходы с изменением проекции магнитного момента на единицу. Такие переходы можно наблюдать в двухуровневой среде с оптическим переходом между следующими магнитными подуровнями:

$$J_l = 1/2 \leftrightarrow J_u = 1/2$$

(индекс l отвечает нижнему уровню, а индекс u — верхнему). Например, это может быть переход ${}^2S_{1/2} \rightarrow {}^2P_{1/2}^0$ в парах натрия [18, 22]. При распространении эллиптически поляризованного поля в такой двухуровневой среде следует в общем случае учитывать переходы с изменением проекции момента $\Delta M = \pm 1$, т. е. переходы

$$\{J_l = 1/2, M_l = -1/2\} \leftrightarrow \{J_u = 1/2, M_u = 1/2\},$$

$$\{J_l = 1/2, M_l = 1/2\} \leftrightarrow \{J_u = 1/2, M_u = -1/2\}.$$

Пусть в начальный момент заселенность подуровней $\{J_l = 1/2, M_l = 1/2\}$ и $\{J_u = 1/2, M_u = \pm 1/2\}$ равна нулю и заселенность подуровня $\{J_l = 1/2, M_l = -1/2\}$ выбрана равной суммарной заселенности всех подуровней. Тогда для этих переходов нетрудно показать, что существует линейное устойчивое решение, отвечающее нулевой заселенности подуровней $\{J_l = 1/2, M_l = 1/2\}$ и $\{J_u = 1/2, M_u = -1/2\}$ для произвольного момента времени. В этом случае вкладом перехода

$$\{J_l = 1/2, M_l = 1/2\} \leftrightarrow \{J_u = 1/2, M_u = -1/2\}$$

можно пренебречь.

Далее ограничимся рассмотрением только взаимодействия перехода

$$\{J_l = 1/2, M_l = -1/2\} \leftrightarrow \{J_u = 1/2, M_u = 1/2\}$$

с импульсом светового поля длительностью порядка или большей обратной частоты этого перехода. Соответствующая система уравнений Блоха для такой двухуровневой среды имеет известный вид [18]:

$$\frac{\partial S_x}{\partial t} = -\omega_0 S_y + \omega_0 f_y \mathcal{E}_y S_z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial S_y}{\partial t} = \omega_0 S_x - \omega_0 f_x \mathcal{E}_x S_z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial S_z}{\partial t} = \omega_0 (f_x \mathcal{E}_x S_y - f_y \mathcal{E}_y S_x) + W(z). \quad (5)$$

Здесь

$$f_{x(y)} = d_{x(y)} \hbar^{-1} \omega_0^{-1},$$

ω_0 — частота перехода, \mathcal{E}_x и \mathcal{E}_y — соответствующие проекции поляризации вектора электрического поля. В уравнение (5) добавлен член W , описывающий накачку верхнего уровня (см. подробнее в разд. 4). Компоненты вектора Блоха \mathbf{S} выражаются через элементы матрицы плотности двухуровневой среды $\hat{\rho}$:

$$S_z = \frac{1}{2} (\rho_{11} - \rho_{22}), \quad S_x = \frac{1}{2} (\rho_{12} + \rho_{21}),$$

$$S_y = \frac{i}{2} (\rho_{12} - \rho_{21}),$$

где

$$S_z^2 + S_x^2 + S_y^2 = 1,$$

т. е. суммарная заселенность уровней нормирована на единицу:

$$2S_0 = \rho_{11} + \rho_{22} = 1.$$

В отсутствие накачки $W = 0$ длина вектора \mathbf{S} сохраняется:

$$\partial_t S_0 = 0.$$

Уравнения Максвелла для компонент поля получаем проектированием на соответствующую ось:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi d_x n}{c^2} \frac{\partial^2 S_x}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial t^2} = \frac{4\pi d_y n}{c^2} \frac{\partial^2 S_y}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где c — скорость света в среде с плотностью n .

Простейшее солитонное решение системы (3)–(7) найдено в работе [11] для условий, отвечающих ПКИ. Для того чтобы упростить эту систему, воспользуемся известным из гидродинамики приближением однонаправленного распространения волн. В нелинейной оптике оно применялось в работе [17] при выводе редуцированных уравнений Максвелла–Блоха. Суть применения этого приближения в следующем. Часто плотность активных атомов или молекул в реальных средах можно считать малой. Причем малой плотности активных атомов отвечает приближенное формальное равенство

$$\partial_z \approx -c^{-1} \partial_t + O(\epsilon),$$

где ϵ — малый параметр. Другими словами, нормированная плотность двухуровневых атомов или молекул имеет тот же порядок малости, что и производная $\partial_z + c^{-1} \partial_t$ от компонент поляризации поля. В результате вклад волны, распространяющейся в

противоположном направлении, мал. Полученная в результате система уравнений описывает динамику ОНИ, групповая скорость которых близка к скорости света в среде.

При выполнении условия однонаправленности распространения импульсов светового поля, т. е. для ОНИ, система (3)–(7) приводится к следующему виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_x}{\partial \tilde{\tau}} &= -S_y + E_y S_z, \\ \frac{\partial S_y}{\partial \tilde{\tau}} &= S_x - E_x S_z, \\ \frac{\partial S_z}{\partial \tilde{\tau}} &= E_x S_y - E_y S_x + h(\chi), \\ \frac{\partial E_x}{\partial \chi} &= \frac{\partial S_x}{\partial \tilde{\tau}}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial \chi} &= r^2 \frac{\partial S_y}{\partial \tilde{\tau}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} r &= d_y/d_x, \quad E_{x(y)} = f_{x(y)} \mathcal{E}_{x(y)}, \quad \tilde{\tau} = \omega_0 (t - c^{-1}z), \\ \chi &= -z 2\pi n d_x^2 (c\hbar)^{-1}, \quad h(\chi) = W \omega_0^{-1}. \end{aligned}$$

3. ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА МОЗР

Система (8) представляет собой интегрируемую систему уравнений, обобщающую на случай произвольной постоянной накачки систему, найденную в работе автора [19]. Ее представление Лакса для произвольного действительного коэффициента r имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{\tau}} \Phi &= \frac{1}{2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -i \operatorname{cn} \operatorname{dn} & \operatorname{dn} E_x - i \operatorname{cn} E_y \\ -\operatorname{dn} E_x - i \operatorname{cn} E_y & i \operatorname{cn} \operatorname{dn} \end{pmatrix} \Phi, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\chi} \Phi &= \frac{1}{2 \operatorname{sn}^2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -i \operatorname{cn} \operatorname{dn} S_z & \operatorname{dn} S_x - i \operatorname{cn} S_y \\ -\operatorname{dn} S_x - i \operatorname{cn} S_y & i \operatorname{cn} \operatorname{dn} S_z \end{pmatrix} \Phi, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\operatorname{sn} = \operatorname{sn}(\zeta, r), \quad \operatorname{cn} = \operatorname{cn}(\zeta, r) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2},$$

$$\operatorname{dn} = \operatorname{dn}(\zeta, r) = \sqrt{1 - r^2 \operatorname{sn}^2}$$

— эллиптические функции Якоби, ζ — спектральный параметр и r — модуль функций Якоби. Учет

накачки приводит к появлению зависимости спектрального параметра ζ от переменной χ , которая определяется уравнением

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \chi} = \frac{-2r^2 h(\chi) \lambda}{1 + r^2 - \sqrt{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \lambda^2}}, \quad (11)$$

где

$$\lambda = \operatorname{cn}(\zeta, r) \operatorname{dn}(\zeta, r)$$

для любого действительного r . Следует отметить, что для $r = 0$ выражение (11) справедливо после выполнения предельного перехода $r \rightarrow 0$.

Алгебраическая параметризация представления Лакса более проста и поэтому более предпочтительна для применения аппарата МОЗР. Ее удается найти по отдельности для трех областей не перекрывающихся значений r : в изотропном случае, т. е. в точке $r^2 = 1$, в предельно анизотропном случае для $r = 0$ и для остальных значений r : $r^2 \neq 0, 1$.

Отметим, что случай $r = 0$ для $E_y \equiv 0$ в точности отвечает случаю ОНИ с линейной поляризацией. Если $r = 0$ и $E_y \equiv \operatorname{const} \neq 0$, то система уравнений (8) также может быть преобразована к системе РУМБ для линейно поляризованного поля распространяющегося в двухуровневой среде. Действительно, вводим новый вектор Блоха $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ следующим образом:

$$R_x = S_x, \quad R_y = \frac{S_y - E_y S_z}{\nu_0}, \quad R_z = \frac{E_y S_y + S_z}{\nu_0}, \quad (12)$$

где

$$\nu_0 = \sqrt{1 + E_y^2}.$$

Тогда система (8) принимает вид

$$\partial_{\tilde{\tau}} R_x = -R_y \nu_0, \quad (13)$$

$$\partial_{\tilde{\tau}} R_y = R_x \nu_0 - E_x R_z, \quad (14)$$

$$\partial_{\tilde{\tau}} R_z = E_x R_y + h \nu_0, \quad (15)$$

$$\partial_{\chi} E_x = \nu_0 R_y. \quad (16)$$

Здесь $h \nu_0$ — скорость накачки верхнего уровня эффективной двухуровневой среды с частотой перехода ν_0 . Представление Лакса для системы (13)–(16) с накачкой известно [23, 24]. Далее в этом и следующем разделах полагаем, что $h(\chi) = 0$. Случай $h(\chi) \neq 0$ рассматривается в разд. 4.

В изотропном случае спектральная проблема (9) имеет вид задачи Каупа–Ньюелла [25] со спектральным параметром $\tilde{\lambda} = \operatorname{cn} = \operatorname{dn}$, а при $r = 0$ принимает вид задачи Захарова–Шабата [15] со спектральным параметром $\tilde{\lambda} = \operatorname{sn}$ и с добавкой к действительному

потенциалу $\pm E_x$, имеющей вид $-i\tilde{\lambda}E_y$, где E_y — произвольная действительная функция от переменной $\tilde{\tau}$.

Рассмотрим детальнее случай $r^2 \neq 1, r \neq 0$, в котором возможна замена спектрального параметра ζ на ξ с помощью формулы

$$\operatorname{cn}(\zeta, r) = \sqrt{1 - r^2} (\xi - \xi^{-1}) (2r)^{-1}.$$

В результате этой замены получаем следующее представление Лакса для системы (8):

$$\partial_{\tau} \Phi = \begin{pmatrix} -i \left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) & \xi E^* + \frac{1}{\xi} E \\ -\xi E - \frac{1}{\xi} E^* & i \left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \end{pmatrix} \Phi, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\chi} \Phi &= \frac{2r^2 (1 - r^2)^{3/2} \xi^2}{4r^2 - [(1 - r^2) \xi^2 - 1 - r^2]^2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -i \frac{\kappa}{r} \left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) S_z & \xi S^* + \frac{1}{\xi} S \\ -\xi S - \frac{1}{\xi} S^* & i \frac{\kappa}{r} \left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) S_z \end{pmatrix} \Phi \equiv \\ &\equiv \hat{A} \Phi, \quad (18) \end{aligned}$$

где ξ — новый спектральный параметр,

$$\kappa = \sqrt{1 - r^2}/2, \quad E = rE_x/\kappa + iE_y/\kappa,$$

$$S = S_x + iS_y/r, \quad \tau = \kappa^2 \tilde{\tau}/(2r).$$

При фиксированном r спектральная задача (17) для предельных значений спектрального параметра ξ переходит в спектральные задачи, указанные выше. Так, для $\xi \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow \infty$) спектральная задача (17) переходит в спектральную задачу Каупа–Ньюелла [25], если оставить только члены со степенями ξ^1, ξ^2 (ξ^{-1}, ξ^{-2}). Если представить спектральный параметр в виде $\xi = 1 + \tilde{\xi}$, то для $\tilde{\xi}^2 \ll \tilde{\xi}$ спектральная задача (17) переходит в задачу Захарова–Шабата [15] с указанной выше добавкой $-i\tilde{\xi}E_y$, если ограничиться сохранением членов с нулевой и первой степенями $\tilde{\xi}$.

Спектральная задача (17) содержит лишь степени $\pm 1, \pm 2$ спектрального параметра. Поэтому аппарат МОЗР, ассоциированный с этой задачей, должен иметь общие черты с развитым ранее аппаратом для частично родственных спектральных проблем, связанных с уравнением Тирринга [26], нелинейным дифференциальным уравнением Шредингера [25] и с системой уравнений Максвелла–Блоха, учитывающей нелинейный эффект Штарка [27]. В связи с этим приведем лишь основные элементы аппарата МОЗР для достаточно быстро исчезающего на бесконечностях потенциала E и его производных.

Решения (17) обладают следующими свойствами симметрии:

$$\Phi = \widehat{M}\Phi(\xi^*)^*\widehat{M}^{-1}, \quad (19)$$

где

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\Phi(\xi^*)^* = \Phi(\xi^{-1}). \quad (20)$$

Стандартным способом вводим функции Йоста Φ^\pm — решения (17) с асимптотиками

$$\Phi^\pm = \exp(-i\Lambda\widehat{\sigma}_3\tau), \quad \tau \rightarrow \pm\infty. \quad (21)$$

Здесь

$$\Lambda = \xi^2 - \xi^{-2}.$$

Свойство симметрии (19) отвечает следующей матричной форме функций Йоста

$$\Phi^\pm = \begin{pmatrix} \psi_1^\pm & -\psi_2^{\pm*} \\ \psi_2^\pm & \psi_1^{\pm*} \end{pmatrix}.$$

Эти решения связаны матрицей рассеяния \widehat{T}

$$\Phi^- = \Phi^+\widehat{T}, \quad \widehat{T} = \begin{pmatrix} a^* & b \\ -b^* & a \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Зависимость данных рассеяния от χ дается формулой

$$\partial_\chi \widehat{T} = -\widehat{T} \exp(-i\widehat{\sigma}_3\Lambda\tau)\widehat{A}(\tau = -\infty) \exp(i\widehat{\sigma}_3\Lambda\tau) + \exp(-i\widehat{\sigma}_3\Lambda\tau)\widehat{A}(\tau = \infty) \exp(i\widehat{\sigma}_3\Lambda\tau)\widehat{T}. \quad (23)$$

Представим функцию Йоста в виде

$$\begin{aligned} \Phi^+(\tau) = & \exp\{-i\widehat{\sigma}_3[\Lambda\tau + \mu(\tau)]\} + \\ & + \int_\tau^\infty \left(\begin{array}{l} [Q_1(\tau, s) + \xi^{-2}Q_2(\tau, s)] \exp(-i\mu(\tau)) \\ [\xi\widetilde{K}_1(\tau, s) + \xi^{-1}\widetilde{K}_2(\tau, s)] \exp(i\mu(\tau)) \end{array} \right) \times \\ & - \left(\begin{array}{l} [\xi K_1(\tau, s) + \xi^{-1}K_2(\tau, s)] \exp(-i\mu(\tau)) \\ [Q_1^*(\tau, s) + \xi^{-2}Q_2^*(\tau, s)] \exp(i\mu(\tau)) \end{array} \right) \times \\ & \times \exp(-i\widehat{\sigma}_3\Lambda s) ds. \quad (24) \end{aligned}$$

Здесь $\mu(\tau)$ — функция, не зависящая от спектрального параметра, которая будет определена ниже. После подстановки (24) в (17), используя свойства симметрии функций Йоста, находим, что

$$\widetilde{K}_{1,2} = K_{1,2}^*.$$

Ядра $K_{1,2}$ и $Q_{1,2}$ должны удовлетворять условиям

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K_{1,2}(\tau, s) = 0, \quad (25)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Q_{1,2}(\tau, s) = 0. \quad (26)$$

Подставив выражение (24) в (17), находим соотношения, связывающие потенциал и ядра:

$$E^*(\tau, \chi) = 2K_1(\tau, \tau, \chi) \exp(-2i\mu), \quad (27)$$

$$E(\tau, \chi) = 2K_2(\tau, \tau, \chi) \exp(-2i\mu). \quad (28)$$

Из этих условий связи нетрудно найти $\mu(\chi, \tau)$:

$$\mu(\chi, \tau) = -\frac{i}{4} \ln \frac{K_1(\tau, \tau, \chi)}{K_2^*(\tau, \tau, \chi)}. \quad (29)$$

Подставляем значения компонент матричной функции Φ в (22) и интегрируем полученные выражения по ξ с весами $\xi^m \exp(i\Lambda\tau)$, $m = 0, -1, -2$, вдоль контура Γ , показанного на рис. 1. В итоге, используя равенства

$$\int_\Gamma \xi^m \exp(i\Lambda\tau) d\xi = 4\pi\delta(\tau), \quad m = 1, -3, \quad (30)$$

$$\int_\Gamma \xi^{2m} \exp(i\Lambda\tau) d\xi = 0, \quad m = -1/2, 0, \pm 1, \pm 2, \quad (31)$$

находим уравнения Марченко:

$$K_1(\tau, y) = F_0(\tau + y) + \int_\tau^\infty [Q_1(\tau, s)F_0(s + y) + Q_2(\tau, s)F_{-1}(s + y)] ds, \quad (32)$$

$$K_2(\tau, y) = F_{-1}(\tau + y) + \int_\tau^\infty [Q_1(\tau, s)F_{-1}(s + y) + Q_2(\tau, s)F_{-2}(s + y)] ds, \quad (33)$$

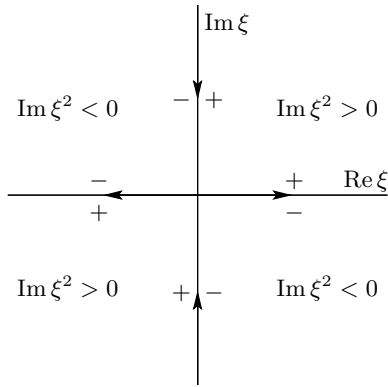


Рис. 1. Контур интегрирования Г. Контур включает пути по осям вдоль направлений, указанных стрелками, и проходит выше (ниже) всех полюсов в I (III) квадранте против часовой стрелки

$$Q_1(\tau, y) = - \int_{\tau}^{\infty} [K_1(\tau, s)F_1^*(s + y) + K_2(\tau, s)F_0^*(s + y)] ds, \quad (34)$$

$$Q_2(\tau, y) = - \int_{\tau}^{\infty} [K_1(\tau, s)F_0^*(s + y) + K_2(\tau, s)F_{-1}^*(s + y)] ds, \quad (35)$$

здесь $y \geq \tau$. Ядро F имеет вид

$$F_m(y, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\chi)}{a(\chi)} \frac{\xi^{2m} \exp(-i\Lambda y)}{2\pi} d\xi - i \sum_k \frac{\xi_k^{2m} b(\chi, \xi_k) \exp(-i\Lambda_k y)}{a'(\chi, \xi_k)}, \quad (36)$$

где

$$\Lambda_k = \xi_k^2 - \xi_k^{-2}, \quad a'(\xi_k, \chi) = \left. \frac{da(\xi, \chi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_k}.$$

Далее будем рассматривать только солитонный спектр задачи, состоящий из изолированных невырожденных полюсов ξ_k в плоскости ξ . Форма ядра (36) не учитывает симметрию задачи. Свойства симметрии (19) и (20) могут быть учтены, если полюсы ξ_k входят в ядро F_m парами: $\{\xi_k, 1/\xi_k^*\}$. На единичном круге эти полюсы, очевидно, совпадают. При учете этих свойств симметрии солитонная часть \mathcal{F}_m ядра F_m принимает следующий вид

$$\mathcal{F}_m(y) = \sum_k \exp(\eta_k y) \times [\xi_k^{2m+1} C_k(y, \chi, \xi_k) - \xi_k^{*-2m-1} C_k^*(y, \chi, \xi_k)]. \quad (37)$$

Здесь

$$C_k(y, \chi, \xi_k) = \frac{-i b_k(\chi, \xi_k)}{\xi_k a'(\chi, \xi_k)} \exp(i\zeta_k y),$$

$$\eta_k = \text{Im } \Lambda_k, \quad \zeta_k = -\text{Re } \Lambda_k.$$

Из выражения (37) находим

$$\mathcal{F}_0(y) = -\mathcal{F}_{-1}^*(y), \quad \mathcal{F}_1(y) = -\mathcal{F}_{-2}^*(y). \quad (38)$$

Простейшее солитонное решение отвечает единственному полюсу ξ_1 , лежащему в первом (третьем) квадранте. Асимптотические условия отвечают следующим устойчивым состояниям:

$$E(\pm\infty, \chi) = 0, \quad S_z(\pm\infty, \chi) = -1.$$

Ввиду свойства симметрии (20) единственный полюс ξ_1 ограничен условием $|\xi_1| = 1$. Положим

$$\xi_1^2 = \exp(i\phi_1), \quad \phi_1 \in \mathbb{R}.$$

Однополюсное решение, которое находим, решая систему уравнений (23), (32)–(36), имеет вид

$$E(\tau, \chi) = \frac{-2|\sin \phi_1| \exp[i\gamma_1 - i\phi_1/2]}{|\text{ch}[4 \sin \phi_1 \theta + \gamma_2 - i\phi_1/2]|}, \quad (39)$$

где

$$\theta = \tau + \frac{\kappa \chi}{2\sqrt{r^2 \cos^2(\phi_1/2) + \sin^2(\phi_1/2)}},$$

$$\gamma_1 = \arg \frac{-ic_1}{2a'(\xi_1)}, \quad \gamma_2 = \ln \left| \frac{c_1}{2a'(\xi_1)} \right|.$$

Условия связи между ядрами, вытекающие из (28) и (27), приводят также к ограничению на фазу: $\phi_1 = 0, \pi$. Форма и положение солитона в зависимости от значений фазы ϕ_1 показаны на рис. 2.

Отметим, что для двухполюсного решения, отвечающего паре значений спектрального параметра $\xi_1, 1/\xi_1^*$, ограничения на область значений ξ_1 не возникают. Найдем солитонное решение, отвечающее этой паре полюсов. Для этого представим ядра в виде

$$K_{1,2}(x, y) = h_{1,2}^+(x) \exp(\eta y + i\zeta y) + h_{1,2}^-(x) \times \exp(\eta y - i\zeta y), \quad (40)$$

$$Q_{1,2}(x, y) = g_{1,2}^+(x) \exp(\eta y + i\zeta y) + g_{1,2}^-(x) \times \exp(\eta y - i\zeta y). \quad (41)$$

Здесь

$$\eta = \text{Im } \Lambda_1, \quad \zeta = -\text{Re } \Lambda_1.$$

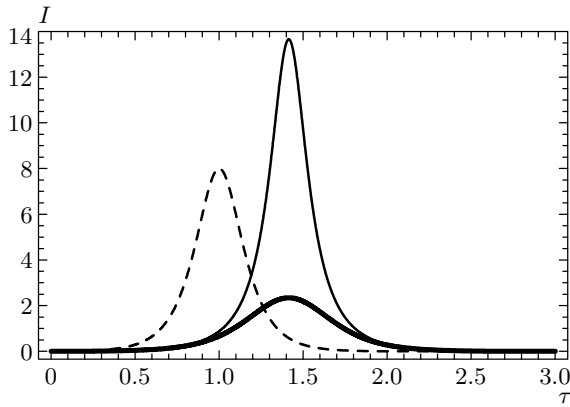


Рис. 2. Зависимость интенсивности $I = |E|^2$ солитона (39) от τ для $\phi_1 = \pi/4$ — жирная линия, $\phi_1 = \pi/2$ — штриховая линия, $\phi_1 = 3\pi/4$ — тонкая линия

Решаем систему уравнений (32)–(35), учитывая зависимость коэффициента C_1 от χ . В итоге находим выражение для ядра

$$K_2(\chi, \chi, \tau) = \frac{c_1 \xi_1^{-1} X \exp(\theta + i\theta_1) - c_1^* \xi_1^* X^* \exp(\theta - i\theta_1)}{D}, \quad (42)$$

где

$$X(\tau, \chi, \xi_1) = 1 + A - \tilde{Z} + \frac{\tilde{\beta} (|\xi_1|^4 + 1)}{|\xi_1|^4 \eta} (\tilde{\beta} \mu^* - \beta \mu),$$

$$D = 1 + A^2 - Z^2 - \tilde{Z}^2, \quad \theta = \eta\tau + \text{Im} \Omega_1 \chi,$$

$$\theta_1 = \zeta\tau + \text{Re} \Omega_1 \chi,$$

$$A = \frac{\beta(\theta) \tilde{\beta}(\theta) (1 + |\xi_1|^4)^2}{(2\eta |\xi_1|^2)^2}, \quad Z = 2\mu(\theta_1) \beta(\theta),$$

$$\tilde{Z} = 2\mu(\theta_1) \tilde{\beta}(\theta),$$

$$\beta(\theta) = \exp(2\eta\theta) c_1 \xi_1^{-1}, \quad \tilde{\beta}(\theta) = \exp(2\eta\theta) c_1^* \xi_1^*,$$

$$C_1(\chi, \xi_1) = c_1(\xi_1) \exp(-2i\Omega_1 \chi),$$

$$\mu(\theta_1) = \frac{\exp(2i\theta_1)}{2(\eta + i\zeta)},$$

$$\Omega_1 = \frac{r(1 - r^2)^2 (\xi_1^4 - 1) S_3(-\infty, 0)}{4r^2 - [(1 - r^2)\xi_1^2 - 1 - r^2]^2}.$$

Находим также аналогичное выражение для $K_1(\chi, \chi, \tau)$

$$K_1(\chi, \chi, \tau) = \frac{c_1 \xi_1 X \exp(\theta + i\theta_1) - c_1^* \xi_1^{*-1} X^* \exp(\theta - i\theta_1)}{D}. \quad (43)$$

Используя (29), (42), (43) находим выражение для поля

$$E(\chi, \tau) = -2i \times \frac{c_1 \xi_1 X \exp(\theta_1) - c_1^* \xi_1^{*-1} X^* \exp(-\theta_1)}{\sqrt{DD^*}} \exp(\theta). \quad (44)$$

Солитонное решение (44) содержит внутреннюю степень свободы, приводящую к осцилляциям, аналогичным осцилляциям бризерного решения уравнения синус-Гордон. С другой стороны, это решение может иметь произвольную амплитуду, так же как и решение, приведенное выше, при конечном значении ξ_1 . В этом состоит качественное отличие полученного решения от решений уравнений Максвелла–Блоха для линейной поляризации поля.

4. ПЕРЕХОД К ИЗОТРОПНОМУ ВЗАИМОДЕЙСТВИЮ

Выше отмечено, что при $\xi \rightarrow \infty$ возможен переход к изотропному случаю, указанному выше. Рассмотрим формальный предельный переход $r \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow \infty$, при котором

$$\sqrt{1 - r^2} (\xi - \xi^{-1}) (2r)^{-1} \rightarrow \lambda,$$

$$\xi E^* + \xi^{-1} E \rightarrow \lambda(E_x - iE_y).$$

При этом в представлении Лакса (9),(10) следует заменить

$$\text{dn} \rightarrow \lambda, \quad \text{cn} \rightarrow \lambda, \quad \text{sn}^2 \rightarrow 1 - \lambda^2,$$

где λ — спектральный параметр. Как нетрудно убедиться, в этом пределе свойство симметрии (20) не справедливо. Уравнения Марченко могут быть получены из приведенных выше также предельным переходом.

В то же время представление Лакса и уравнения аппарата МОЗР могут быть найдены непосредственно для системы (8), в которой положено $r^2 = 1$, для произвольных значений спектрального параметра. Эти уравнения формально совпадают с известными из работы Каупа и Ньюела [25], посвященной нелинейному дифференциальному уравнению Шредингера. Отличие уравнений аппарата МОЗР для системы (8) от соответствующих уравнений, приведенных в работе [25], состоит в иной зависимости данных рассеяния от переменной χ и от спектрального параметра $\lambda = \text{sn}(\zeta, 1)$.

В частности, интегральные уравнения Марченко имеют вид

$$\mathcal{K}_1^*(\tau, y) = \mathcal{F}_0(\tau + y) + \int_{\tau}^{\infty} \mathcal{Q}_1(\tau, s) \mathcal{F}_0(s + y) ds, \quad (45)$$

$$\mathcal{Q}_1^*(\tau, y) = - \int_{\tau}^{\infty} \mathcal{K}_1(\tau, s) \mathcal{F}_1(s + y) ds, \quad (46)$$

где $y \geq \tau$. Ядро \mathcal{F}_m имеет вид

$$\mathcal{F}_m(y, \chi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\chi)}{a(\chi)} \frac{\lambda^{2m} \exp(-i\xi^2 y)}{2\pi} d\xi - i \sum_k \frac{\lambda_k^{2m} c_k(\chi) \exp(-i\lambda_k^2 y)}{a'(\lambda_k, \chi)}. \quad (47)$$

При переходе от уравнений Марченко (32)–(35) к (45) и (46) возникают следующие связи между ядрами:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(r \rightarrow 1) &\rightarrow \mathcal{K}_1, & \mathcal{Q}_1(r \rightarrow 1) &\rightarrow \mathcal{Q}_1, \\ \mathcal{K}_2(\mathcal{Q}_2)(r \rightarrow 1) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Вместо условий связи (27), (28) возникают следующие соотношения между диагональными значениями ядер и потенциалом \tilde{E} :

$$\partial_{\tau} \mu(\tau, \chi) = 2|\mathcal{K}_1(\tau, \tau, \chi)|^2, \quad (49)$$

$$\tilde{E}^*(\tau, \chi) = -2\mathcal{K}_1^*(\tau, \tau, \chi) \exp(-2i\mu), \quad (50)$$

где

$$\tilde{E}^* = E_x - iE_y.$$

Односолитонное решение (8) для $|r| = 1$, отвечающее одному собственному значению $\lambda_1 = |\lambda_1| \exp(i\alpha_1)$, лежащему в первом (третьем) квадранте плоскости λ , имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{E}_c(\tau, \chi) &= \\ &= \frac{-2 \operatorname{Im} \lambda_1^2 \exp \{ [i (\operatorname{Re} \lambda_1^2 \tau - W \chi + \gamma_1 - \alpha_1 - 2\mu)] \}}{|\lambda_1| \operatorname{ch} [\theta_1 + \beta_1 + i\alpha_1]}, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\theta_1 = \operatorname{Im} \lambda_1^2 (\tau + \chi/V), \quad V = (1 - \operatorname{Re} \lambda_1^2)^2 + (\operatorname{Im} \lambda_1^2)^2,$$

$$W = [\operatorname{Re} \lambda_1^2 (1 - \operatorname{Re} \lambda_1^2) - (\operatorname{Im} \lambda_1^2)^2] V^{-1},$$

$$\beta_1 = \ln |(\lambda_1 c_1) / (4 \operatorname{Im} \lambda_1^2 a'(\lambda_1))|,$$

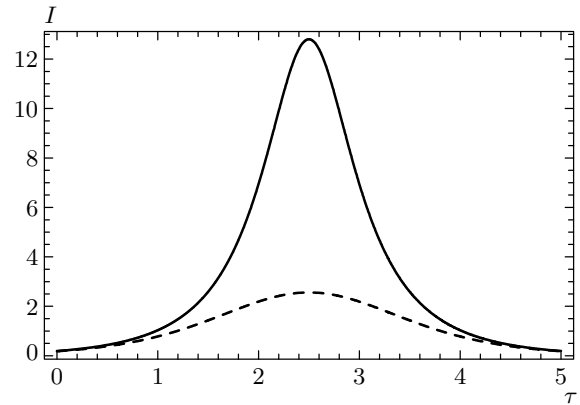


Рис. 3. Зависимость интенсивности $I = |E|^2$ солитонов (51) (сплошная линия) и (52) (штриховая линия) от τ для $\lambda_1 = (0.5 + i)/\sqrt{1.25}$

$$\begin{aligned} \mu = -\operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ch} \left[\operatorname{Im} \lambda_1^2 \left(\tau - \frac{\chi}{V} \right) + \beta_1 \right] \right\} \times \\ \times \frac{2 \operatorname{Im} \lambda_1^2}{|\lambda_1^2| \sin(2\alpha_1)}. \end{aligned}$$

Представляет практический интерес сравнение эффективности применения импульсов с линейной и круговой поляризациями для создания мощных коротких импульсов света. Для этого сравним полученное солитонное решение для циркулярно поляризованной волны (51) с известным решением для аналогичного солитона линейно поляризованной электромагнитной волны, распространяющегося в двухуровневой среде. Такое солитонное решение РУМБ, найденное во многих работах, например в [17], имеет вид

$$\tilde{E}_l(\tau, z) = \frac{2 \operatorname{Im} \eta_1}{\operatorname{ch} [\operatorname{Im} \eta_1 (\tau - \tau_0 - z/V_0)]}, \quad (52)$$

где $(\operatorname{Im} \eta_1)^{-1}$ — длительность солитона, $(c^{-1} + V_0^{-1})^{-1}$ — его групповая скорость, τ_0 — положение солитона в начальный момент. Выберем для сравнения равные длительности солитонов (51) и (52). Пусть

$$\eta_1 = \lambda_1^2, \quad |\lambda_1| = 1.$$

Анализ полученного решения показал, что в случае $\operatorname{Im} \lambda_1^2 \ll \operatorname{Re} \lambda_1^2$ амплитуды солитонов близки. Это предел малых амплитуд ($\propto \operatorname{Im} \lambda_1^2$) и относительно больших частот ($\propto \operatorname{Re} \lambda_1^2$). В то же время этот предел отвечает квазимонохроматическим импульсам, т. е. ОНИ с медленно меняющейся амплитудой. При $\operatorname{Im} \lambda_1^2 = \operatorname{Re} \lambda_1^2$ максимальная интенсивность I_c солитона (51) в два раза больше максимальной интенсивности I_l солитона (52). При $\operatorname{Im} \lambda_1^2 \gg \operatorname{Re} \lambda_1^2$ найдено,

что $I_c \gg I_l$, см. рис. 3. Последний факт связан с тем, что решение (51) может иметь лоренцевскую форму и становится сингулярным при специальном подборе начальных условий. Например, для

$$\lambda_1 = |\lambda_1| \exp(i\alpha_1)$$

в окрестности нуля

$$\theta_1 + \beta_1 = y \ll 1, \quad \alpha_1 = \pi/2 + \phi_1, \quad \phi_1 \ll \pi,$$

находим следующую форму солитона:

$$E_l(y) = \frac{|\lambda_1| \exp(2i\alpha_1)}{y^2 + \phi_1^2}. \quad (53)$$

В реальной физической системе наличие сингулярности означает, что необходимо принимать во внимание дисперсионные эффекты, которые были отброшены при выводе модели (8). С другой стороны, условия применимости двухуровневого приближения также накладывают ограничения на нормированную амплитуду поля: $E_l \lesssim 1$. Эти же условия, строго говоря, ограничивают диапазон начальных данных, которые могут быть использованы в рамках изучаемой модели.

5. ВЛИЯНИЕ НАКАЧКИ НА ПАРАМЕТРЫ СОЛИТОНОВ

При распространении ОНИ в однопроходовой лазерной среде возможно его усиление, которое сопровождается увеличением его амплитуды и уменьшением длительности. Такие эффекты описаны в рамках интегрируемых моделей, точнее, интегрируемых деформаций [28], для квазимонохроматических импульсов [28] и для ОНИ с линейной поляризацией [24]. Поскольку решения уравнений МБ для ОНИ циркулярной и линейной поляризаций имеют качественные различия, следует ожидать, что поведение этих импульсов в лазерной среде также будет различным. В настоящем разделе будут исследованы особенности усиления ОНИ в рамках интегрируемой деформации модели (8).

Лазерная среда нередко моделируется двухуровневой средой с не зависящей от времени накачкой верхнего уровня [29]. В случае модели (8) такая накачка проявляется в появлении дополнительного члена h в правой части третьего уравнения в системе (8). Важно отметить, что при наличии накачки изменяется «фоновое» решение, поскольку «деформируются» не только солитоны, но и возникает нетривиальное радиационное решение, определяе-

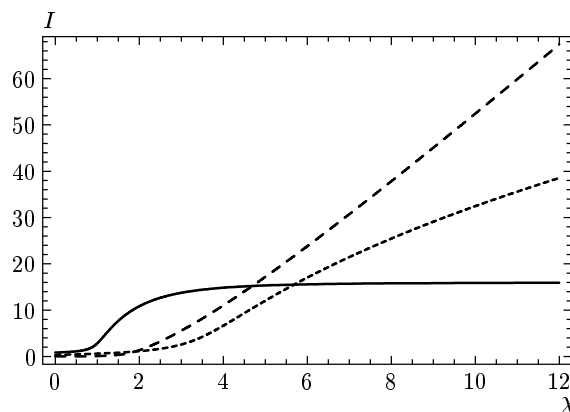


Рис. 4. Усиление солитонов в лазерной среде для различных r . Зависимость максимума солитонов от χ при $h = 1$ для $r = 0.1$ — штриховая линия, $r = 0.5$ — пунктирная линия и $r = 0.99$ — сплошная линия. Единицы произвольны

мое непрерывным спектром задачи. Последнее в случае уравнений МБ для линейной поляризации является решением пятого уравнения Пенлеве [30]. Таким образом, включение накачки, пропорциональной h , в общем случае приводит к изменению аналитических свойств функций Йоста и соответствующей модификации аппарата МОЗР. Этот вопрос подробно исследуется численно и аналитически в работе автора [24], в которой показано, что в некоторой области параметров изменения в фоновом решении и, следовательно, в аппарате МОЗР можно не учитывать. Это можно делать, если нижний уровень совпадает с основным и его начальная заселенность достаточно велика, при достаточно малой скорости накачки h и малых временах. В связи с этим будем считать, что фоновое решение остается тривиальным:

$$E_x = E_y = 0.$$

В соответствии с зависимостью спектрального параметра λ от координаты χ , определяемой уравнением (11) и возникающей как дополнение к представлению Лакса (9), (10) из-за учета накачки, изменяются параметры солитона. Для односолитонных решений модели (8) важными характеристиками являются высота и обратная длина солитона. Известно, что с ростом χ амплитуда солитона (52) под действием положительной накачки растет [23]. В то же время для решений системы (8) возможна качественно иная динамика под действием накачки. Например, при $r \rightarrow 0$ амплитуда солитона (39) имеет максимум, равный четырем для произвольной скорости накачки. Зависимость его максимальной интенсив-

ности от длины усиления показана на рис. 4. Этот солитон не имеет аналога в изотропном случае $r = 1$. Таким аналогом солитона (52) для случая $r^2 \neq 0, 1$ является решение, отвечающее паре полюсов $\zeta_1^2 = \eta$, $\zeta_2^2 = \eta^{-1}$, которое может иметь произвольную амплитуду, являющуюся функцией η .

Выберем для солитона (39)

$$\xi_1 = \exp(i\phi_0)$$

и для солитона (51)

$$\lambda_1 = |\lambda_1| \exp(i\phi_0).$$

Тогда для этих солитонов максимальная интенсивность определяется выражением

$$A(\chi, r)^2 = 16|\lambda_1(\chi)| \sin^2(\phi_0(\chi)), \quad (54)$$

где для солитона (39) $|\lambda_1| = 1$. Для случая линейной поляризации ($r = 0$, $E_y \equiv 0$) амплитуда солитона

$$A(r = 0) = 2 \operatorname{Im} \lambda_1(\chi).$$

На рис. 4 показана зависимость максимальной интенсивности солитонов от длины усиления для разных r и малых начальных амплитуд. Из рисунка видно, что для малых χ более эффективно усиливается солитон поля с почти циркулярной поляризацией (для $r^2 = 0.99$), в то же время для больших χ амплитуды импульсов поля с почти линейной поляризацией ($r = 0.1$) растут быстрее с ростом χ . Как отмечено выше, для ОНИ с круговой поляризацией существует сингулярное решение (53), однако оно не возникает при усилении в лазерной среде солитона с малой начальной амплитудой.

Поведение длительностей ОНИ с линейной и круговой поляризациями в лазерной среде также существенно различается. На рис. 5 приведены графики зависимостей обратной длительности солитонов $\operatorname{Im} \lambda_1$ от χ для разных r . Наблюдается качественное различие изменения длительности солитона с ростом длины усиления при наличии накачки для почти линейно ($r = 0.1$) и почти циркулярно ($r = 0.99$) поляризованных волн. Во втором случае уменьшению длительности солитона с ростом накачки препятствует рост нелинейной связи между компонентами поля, т. е. фазы поля E . Это явление аналогично нелинейной фазовой модуляции импульса поля в случае квазимонохроматических полей.

6. ВЛИЯНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО УРОВНЯ

В настоящей работе в качестве физического прибора рассматриваются импульсы с длительностью,

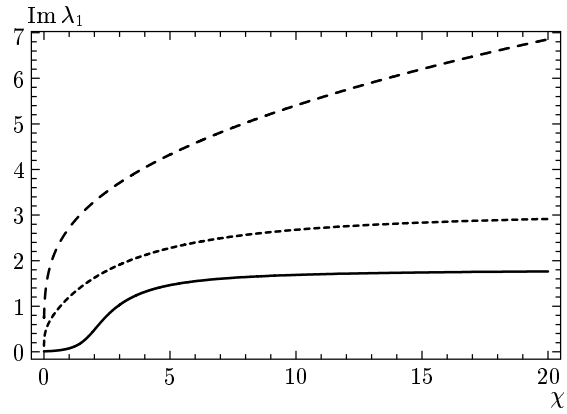


Рис. 5. Зависимость обратной длительности солитонов от χ при $h = 1$ для $r = 0.1$ — штриховая линия, $r = 0.5$ — пунктирная линия и $r = 0.99$ — сплошная линия. Единицы произвольны

в несколько раз большей обратной частоты перехода. В реальной среде при описании эволюции таких импульсов и тем более импульсов с длительностью $\lesssim \omega_0^{-1}$ в эффективной двухуровневой среде необходимо оценивать вклад взаимодействия импульса с дополнительными уровнями. С этой целью рассмотрим влияние удаленного дополнительного уровня на динамику ОНИ круговой и линейной поляризацій. Рассмотрим трехуровневую схему каскадных переходов, состоящую из трех уровней $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$, в которой уровень 2(3) лежит выше уровня 1(2) и уровень 3 является дополнительным. Пусть ω_0 и Ω — частоты переходов $1 \leftrightarrow 2$ и $2 \leftrightarrow 3$, причем $\Omega \gg \omega_0$. Обобщение результатов этого раздела на произвольное число переходов между уровнями 1 и 2 и дополнительными уровнями без учета переходов между дополнительными уровнями достаточно очевидно.

Выберем условия, при которых можно применить адиабатическое исключение дополнительного уровня. Считаем, что длительность импульса поля

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y$$

близка или больше $\pi\omega_0^{-1}$ и много больше $\pi\Omega^{-1}$. Напомним, что для линейной поляризации $\mathcal{E}_y \equiv 0$.

Уравнения Шредингера для амплитуд заселенностей ψ_k уровней $k = 1, 2, 3$ имеют вид

$$d_t \psi_1 = id_{12} \mathcal{E} \hbar^{-1} \psi_2, \quad (55)$$

$$d_t \psi_2 = i\omega_0 \psi_2 + id_{12}^* \mathcal{E}^* \hbar^{-1} \psi_1 + id_{23} \mathcal{E} \hbar^{-1} \psi_3, \quad (56)$$

$$d_t \psi_3 = i\Omega \psi_3 + id_{23}^* \mathcal{E}^* \hbar^{-1} \psi_2, \quad (57)$$

где d_{1k} — дипольные моменты переходов $1 \leftrightarrow k$. Условия на длительность импульсов позволяют

адиабатически устранить ψ_3 . В этом приближении получаем следующие уравнения Блоха для эффективной двухуровневой среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tilde{\tau}} &= iS(1 - gUU^*) - iUS_3, \\ \frac{\partial S_3}{\partial \tilde{\tau}} &= 2i(US^* - U^*S), \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$g = \frac{|d_{23}|^2 \omega_0}{|d_{12}|^2 \Omega}, \quad U = \frac{d_{23} \mathcal{E}}{\omega_0 \hbar},$$

$$S = \psi_2 \psi_1^*, \quad S_3 = |\psi_2|^2 - |\psi_1|^2,$$

$\tilde{\tau}$ — то же, что выше. В рамках приближения однонаправленного распространения волн вместо уравнений Максвелла (6), (7) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} (S - \nu_0 U - g_1 US_3), \quad (59)$$

где

$$\nu_0 = S_0 g_1, \quad S_0(\chi) = |\psi_2|^2 + |\psi_1|^2, \quad g_1 = \frac{d_{23} \omega_0}{2d_{12} \Omega}.$$

Уравнения (58), (59) для циркулярно поляризованного ОНИ справедливы при предположении, что $r^2 = 1$, т. е. $d_x = d_y = d_{12}$. Последнее условие выполняется достаточно часто (см. физические примеры в [18]). Для перехода к случаю линейной поляризации ОНИ следует формально положить в системе (58), (59) $\text{Im} U \equiv 0$ и не учитывать уравнение Максвелла для этой компоненты. Система уравнений (58), (59) не имеет представления Лакса для $g \neq 0$ и (или) $g_1 \neq 0$ и поэтому не может быть решена в рамках МОЗР. Поскольку $\Omega \gg \omega_0$, члены, нарушающие интегрируемость системы (58), (59), могут трактоваться как возмущение. В то же время число дополнительных уровней может быть велико (порядка 10–100). Если учитывать только переходы между уровнем 2 и дополнительными уровнями, то в рамках адиабатического приближения вклады этих переходов суммируются. В результате они могут дать вклад в динамику ОНИ, сопоставимый с вкладом других членов. В этом случае солитонные решения не взаимодействуют упруго и при эволюции ОНИ теряет энергию на излучение. Поскольку нелинейные возмущающие члены растут с ростом амплитуды солитона, следует ожидать уменьшения амплитуды импульса под действием возмущения. Покажем, что при достаточно малой амплитуде и достаточно большой длительности импульса, т. е. при переходе к квазимонохроматическому пределу, система уравнений (58), (59) для ОНИ становится интегрируемой и при учете влияния дополнительных уровней.

Пусть для компонент поля

$$E_{x(y)} = A_{x(y)} \exp(i\omega\tau - ik\chi) + \text{с.с.}$$

характерные временные и пространственные масштабы изменения комплексных амплитуд $A_{x(y)}$ много больше ω^{-1} и k^{-1} , соответственно. Рассмотрим каскадную трехуровневую среду, описанную выше, с частотой перехода ω_0 , близкой ω , и с разностной частотой $\nu = \Omega - \omega > 0$, много большей спектральной ширины импульса. Перейдем к квазимонохроматическому пределу в исходных системах уравнений (3)–(7) для $r^2 = 1$ с учетом влияния дополнительного уровня. Тогда, аналогичным образом исключая в адиабатическом приближении волновую функцию, отвечающую верхнему уровню, получаем аналогичные найденным выше уравнения Блоха:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tau'} = i\tilde{S}(1 - \tilde{g}\tilde{A}\tilde{A}^*) - i\tilde{A}\tilde{S}_3, \quad (60)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}_3}{\partial \tau'} = 2i(\tilde{A}\tilde{S}^* - \tilde{A}^*\tilde{S}),$$

где

$$\tilde{g} = \frac{|d_{23}|^2 \nu_0}{|d_{12}|^2 \nu}, \quad \nu_0 = \omega_0 - \omega, \quad \tau' = \nu_0(t - c^{-1}z),$$

$$\tilde{A} = \frac{A d_{12}}{\nu_0 \hbar}, \quad S = \tilde{S} \exp(i\omega\tau - ik\chi) + \text{с.с.}$$

Уравнения Максвелла (6), (7) приводятся к виду

$$\frac{\partial A}{\partial \chi} = -2i(\tilde{S} - \tilde{\nu}_0 A - \tilde{g}_1 A S_3), \quad (61)$$

где

$$\nu_0 = S_0 \tilde{g}_1, \quad \tilde{g}_1 = \frac{d_{23} \omega_0}{2d_{12} \nu}.$$

Заметим, что эту же систему уравнений (с точностью до коэффициента 2 в уравнении Максвелла) получаем в квазимонохроматическом пределе, применяя это приближение к системе уравнений (58), (59) и учитывая в уравнении (59) нелинейную добавку $ig_1 US_z$, связанную с влиянием дополнительного уровня, но пренебрегая производными от нее.

Полученная система уравнений МБ (58), (59) сводится к интегрируемой системе уравнений МБ для квазимонохроматического поля. Действительно, при этих условиях система (58), (59) простыми линейными преобразованиями приводится к системе уравнений МБ, описывающей взаимодействие мощного квазимонохроматического электромагнитного поля с двухуровневой средой с учетом нелинейного эффекта Штарка и нелинейностью, пропорциональной US_z , в редуцированном уравнении

Максвелла. Последняя нелинейность возникает при сохранении первого члена разложения, пропорционального $\partial_t P/\omega_0$, где P — поляризуемость среды, а ω_0 — частота перехода этой среды. Представление Лакса для этой системы найдено автором ранее [31]. Эта система обладает солитонными решениями, которые упруго взаимодействуют между собой, и другими атрибутами интегрируемых систем [27].

7. ВЫВОДЫ И ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе дано описание явления самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде для циркулярно поляризованных импульсов с длительностью, близкой или большей обратной частоты перехода. Изучение особенностей поведения решений уравнений МБ важно для понимания процессов формирования ОНИ и явления самоиндуцированной прозрачности в двухуровневых средах. Условия наблюдения ОНИ, накладываемые, например, на интенсивности импульсов, по меньшей мере на два порядка слабее, чем те, что требуются для наблюдения динамики ПКИ [9–11]. Из-за более узкого спектра ОНИ требования на применимость приближения двухуровневой среды также значительно мягче, чем для ПКИ. Формально область применимости модели эволюции ОНИ в двухуровневой среде (8) включает весь спектр частот от $\tau_1^{-1} \ll \omega_0$ до $\tau_1^{-1} \gg \omega_0$, где τ_1 — длительность солитона. Однако для светового диапазона необходимо ограничиться условием $\tau_1^{-1} \lesssim \omega_0$.

Из найденных в работе решений видно, что динамика ОНИ с круговой поляризацией качественно отличается от динамики ОНИ с линейной поляризацией и от поведения 2π -импульсов в теории Маколлы–Хана [4]. Например, теорема Маколлы–Хана неприменима для ОНИ с длительностью порядка обратной частоты перехода. Поэтому перенос результатов теории самоиндуцированной прозрачности, развитой для квазимонохроматических импульсов, в область значений длительностей импульсов $\tau_1 \sim \omega^{-1}$ неправилен. В большей степени это относится к импульсам с круговой поляризацией, для которых следует учитывать нелинейные эффекты, связанные с взаимодействием компонент поля. В работе обнаружено, что применение σ -переходов и электромагнитных импульсов с круговой поляризацией позволяет генерировать импульсы с намного большей интенсивностью по сравнению со случаем линейной поляризации при их одинаковой длительности.

Справедливо и обратное: импульсы с круговой поляризацией имеют меньшую длительность, чем импульсы с линейной поляризацией при равных максимальных амплитудах. Для получения импульсов с такими характеристиками необходимо подбирать фазу начального импульса, близкую к $\alpha_1 \approx \pi/2$. Требуемые параметры инжектируемого в среду импульса можно найти, решая задачу (17).

Анализ усиления ОНИ в однопроходном лазерном усилителе, модель которого включает накачку верхнего уровня, показал, что эффективность усиления линейно поляризованных импульсов выше, как это видно на рис. 4. Сравнение формы импульсов с учетом усиления показало, что динамика усиления импульсов для случаев циркулярной и линейной поляризации различна из-за наличия в первом случае нелинейной связи в редуцированных уравнениях Максвелла.

В то же время существует аналогия между генерацией солитонов ОНИ с круговой и линейной поляризациями. Однополюсное (для полюса η_1 с нулевой действительной частью) солитонное решение (51) отвечает «одногорбовой» форме интенсивности импульса. Если действительная часть полюса η_1 не равна нулю, то простейшее решение отвечает паре полюсов η_1 и $-\eta_1^*$. Нетрудно показать, что это решение в более общем случае отвечает двугорбой интенсивности импульса для солитона как линейной, так и круговой поляризации для $r = 1$.

При выводе уравнений Максвелла–Блоха, отвечающих эволюции циркулярно поляризованных ОНИ, для некоторых значений параметров обнаружилась частичная аналогия этих уравнений с интегрируемыми уравнениями для квазимонохроматических волн, найденными автором ранее [31] для другой оптической системы. Эти уравнения описывают взаимодействие линейно поляризованных оптических импульсов с двухуровневой невырожденной средой с учетом квадратичного эффекта Штарка и (или) нелинейных членов, связанных с первой производной от поляризуемости среды по временной переменной. Эта аналогия позволяет использовать ряд результатов, полученных ранее [27]. Специфика уравнений Максвелла–Блоха, описывающих эволюцию ОНИ с циркулярной поляризацией, должна проявиться при описании солитонной оптической бистабильности импульсов. В частности, если поместить достаточно протяженную нелинейную среду, эволюция поля в которой описывается уравнениями (8), в кольцевой резонатор с подкачкой полем с постоянной амплитудой, то в такой системе возникает солитонная оптическая мультистабильность. Параметры

импульса, такие как амплитуда и длительность для некоторых областей значений амплитуды подкачки, неоднозначно зависят от этой амплитуды и от начальных условий. Можно показать, что в аналогичных условиях мультистабильная динамика для линейно поляризованных ОНИ не существует.

Учет взаимодействия с дополнительным уровнем или набором уровней приводит в адиабатическом пределе к появлению дополнительных нелинейных членов в уравнениях Максвелла–Блоха, которые нарушают интегрируемость модели для достаточно коротких импульсов, но не нарушают ее в квазимонохроматическом пределе. Таким образом, мерой такого нарушения является отклонение от квазимонохроматичности импульсов. Однонаправленные импульсы с длительностью порядка ω_0^{-1} будут терять энергию на излучение из-за влияния дополнительных уровней (в отличие от квазимонохроматических импульсов). Используя полученные выше решения, можно показать, что для линейной поляризации в квазимонохроматическом пределе и для циркулярной поляризации в интегрируемых и не интегрируемых случаях адиабатический учет дополнительных уровней приводит к зависимости фазы поля от интенсивности импульса. Эта зависимость (или нелинейный «чирп») проявляется в изменении спектра импульса и его формы. Односолитонное решение для квазимонохроматических ОНИ с учетом чирпа для $r^2 = 1$ формально совпадает с решением (52) с точностью до переобозначений.

Полученные в работе решения могут быть использованы для качественной интерпретации некоторых известных экспериментальных результатов. В работе [32] проведено экспериментальное исследование влияния начальной фазовой отстройки ϕ_0 импульса с длительностью в несколько периодов в нелинейной оптической полупроводниковой среде. В работе исследовалась схема уровней, для анализа которой применялось двухуровневое приближение. Поскольку спектр импульсов света, применяемых в экспериментах, был достаточно широк, требовался учет влияния дополнительных уровней. Влияние уровней с большей энергией учитывалось при моделировании эксперимента соответствующей модификацией диэлектрической постоянной. В то же время в работе [32] экспериментально были обнаружены качественные отклонения от предсказаний такой двухуровневой модели. Например, было обнаружено, что энергия импульса существенно зависит от начальной фазы ϕ_0 и что эффективная нелинейная фаза импульса является функцией интенсивности импульса, что не объяснялось предложенной

моделью. Полученные в настоящей работе результаты могут быть использованы для интерпретации наблюдаемых в работе [32] эффектов, связанных с фазовой отстройкой ϕ_0 и поляризацией импульсов, наблюдаемых в квазидвухуровневых средах вне рамок теории возмущений и квазимонохроматического приближения. Поведение импульсов света, обнаруженное в экспериментах [32], близко к поведению ОНИ с круговой поляризацией или линейно поляризованных ОНИ в двухуровневой среде с учетом влияния дополнительных уровней, исследованному выше в рамках адиабатического приближения. Как было показано выше, учет влияния дополнительных уровней приводит к появлению зависимости фазы импульса от его интенсивности и зависимости амплитуды импульса от начальной фазы α_1 .

В работе [33] экспериментально исследовалось расщепление Раби под действием импульса длительностью, близкой к частоте эффективной двухуровневой среды. Теория, основанная на подходе авторов работы [33], предсказывает увеличение рабиевского расщепления с ростом интенсивности импульса. Однако в эксперименте [33] было обнаружено намного меньшее расщепление, чем предсказано теорией. В рамках полученных в работе решений системы уравнений (58) можно качественно объяснить наблюдаемое в работе [33] уменьшение рабиевского расщепления влиянием дополнительных уровней. Поскольку число дополнительных уровней в исследованной в работе [33] оптической системе около пятидесяти, их влияние может быть существенным. Зафиксируем момент времени, отвечающий максимуму интенсивности импульса $I_0 = |U|^2$. Тогда «мгновенная» частота Раби находится из системы (58) и имеет вид

$$\Omega_R = \sqrt{(1 - \kappa_0 I_0)^2 + I_0}. \quad (62)$$

Зависимость Ω_R от I_0 достигает минимума в точке

$$I_0 = 3/2g,$$

который равен

$$\min \Omega_R = \frac{\sqrt{g+6}}{2\sqrt{g}}.$$

При $g > 2$ с ростом I_0 вначале происходит уменьшение рабиевского расщепления, а после прохождения минимума расщепление растет. Поскольку число дополнительных уровней велико, величина g может быть больше двух, тогда их влияние может приводить к уменьшению рабиевского расщепления, об-

наруженному в эксперименте, выполненном в работе [33]. Заметим, что минимум в зависимости $\Omega_R(I_0)$ возникает, если учитывать переходы между дополнительными уровнями и верхним уровнем 2. В случае, если учитываются только переходы между дополнительными уровнями и нижним уровнем 1, в рамках адиабатического приближения нетрудно показать, что $\Omega_R(I_0)$ монотонно растет с ростом I_0 .

Интегрируемая модель (8) и предложенный выше аппарат МОЗР после некоторой модификации могут быть использованы для описания поперечных акустических волн в парамагнитном кристалле с примесными ионами со спином 1/2, а также при описании динамики импульсов поперечного магнитного поля в кристаллическом магнетике с малой плотностью спинов и с ромбической симметрией.

Представляет интерес применение полученных в работе результатов для описания эволюции ультракоротких (пикосекундных и фемтосекундных) однонаправленных импульсов с круговой поляризацией в двумерном фотонном кристалле или в одномерном кристалле с учетом поляризационных эффектов. Известно, что локализованные солитоноподобные решения существуют внутри запрещенных зон фотонного кристалла [34]. В двумерном кристалле структура солитоноподобных импульсов существенно усложняется [35]. Учет специфики эволюции ОНИ в многоуровневой среде и нелинейной связи между компонентами циркулярно поляризованного поля должен проявиться в структуре импульсов, возникающей при эволюции в фотонном кристалле с имплантированными резонансными атомами [36]. Следует ожидать качественно новых эффектов, связанных с бистабильным поведением, сжатием импульсов [37] с циркулярной поляризацией в фотонном кристалле с композитной средой, включающей резонансную среду, по сравнению с динамикой линейно поляризованных импульсов с длительностью, близкой обратной частоте перехода.

Автор благодарен Х. Штойделю (H. Steudel) за ценные комментарии отдельных результатов этой работы и К. Эйльбеку (J. C. Eilbeck) за информацию о работах на близкую тему. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-16297), Междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН № 84 и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (грант № 8-2).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. K. Bullough, P. M. Jack, P. W. Kitchenside, and R. Saunders, *Physica Scripta* **20**, 364 (1979).
2. A. I. Maimistov, A. M. Basharov, S. O. Elyutin, and Yu. S. Sklyarov, *Phys. Rep.* **191**, 1594 (1990).
3. T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
4. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
5. D. You, D. R. Dykaar, and P. H. Bucksbaum, *Opt. Lett.* **18**, 290 (1993).
6. M. Wittmann, A. Nazarkin, and G. Korn, *Opt. Lett.* **26**, 5 (2001).
7. L. Xu, C. Spielmann, and F. Krausz, *Opt. Lett.* **21**, 1259 (1996).
8. A. Baltuska, Z. Wei, M. S. Pshenichnikov, and D. A. Wiersma, *Opt. Lett.* **22**, 102 (1997).
9. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин и др., Письма в ЖЭТФ **47**, 523 (1988).
10. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущуповский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991).
11. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, L7 (1994).
12. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **114**, 1393 (1998).
13. R. W. Ziolkowski, J. M. Arnold, and D. M. Gogny, *Phys. Rev. A* **52**, 3082 (1995); S. Hughes, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3363 (1998); S. Hughes, *Phys. Rev. A* **62**, 055401 (2000).
14. M. Kolesik, J. V. Moloney, and M. Mlejnek, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 283902 (2002).
15. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
16. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, ЖЭТФ **87**, 1594 (1984).
17. J. D. Gibbon, P. J. Coudrey, J. K. Eilbeck, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, 1237 (1973).
18. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonances and Two-Level Atoms*, New York, Wiley & Sons (1975).
19. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **77**, 558 (2003).
20. J. Cheng and J. Zhou, *Phys. Rev. A* **67**, 041404(R) (2003).

21. R. P. Feynman, F. L. Vernon, and R. W. Hellwarth, *J. Appl. Phys.* **28**, 49 (1957).
22. R. E. Slusher and H. M. Gibbs, *Phys. Rev.* **5**, 1656 (1972).
23. S. P. Burtsev and I. R. Gabitov, *Phys. Rev. A* **49**, 2065 (1994).
24. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **121**, 1012 (2002).
25. D. J. Kaup and A. C. Newell, *J. Math Phys.* **19**, 798 (1978).
26. Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов, *ТМФ* **30**, 303 (1977).
27. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **107**, 1100 (1995).
28. С. П. Бурцев, А. В. Михайлов, В. Е. Захаров, *ТМФ* **70**, 323 (1987).
29. О. Звелто, *Физика лазеров*, Мир, Москва (1979).
30. *Painlevé Transcendents. Their Asymptotics and Physical Applications*, ed. by P. Winternitz and D. Levi, Plenum, New York (1992); NATO ASI Ser., Ser. B: Phys., Vol. 278.
31. А. А. Zabolotskii, *Phys. Lett. A* **124**, 500 (1987).
32. O. D. Mücke, T. Tritschler, and M. Wegener et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 127401 (2002).
33. O. D. Mücke, T. Tritschler, and M. Wegener et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 057401 (2001).
34. S. John and N. Aközbek, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1168 (1993).
35. N. Aközbek and S. John, *Phys. Rev. E* **57**, 2287 (1998).
36. N. Aközbek and S. John, *Phys. Rev. E* **58**, 3876 (1998).
37. R. A. Vlasov and A. G. Smirnov, *Phys. Rev. E* **60**, 5808 (2000).