

К ТЕОРИИ УСИЛЕНИЯ СВЕТА В БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Е. Д. Трифонов, Н. И. Шамров*

*Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена
191186, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 28 июля 2003 г.

Предложена полуклассическая теория усиления света в бозе-эйнштейновском конденсате разреженного атомарного газа, наблюдавшегося в [1]. Выбрав в качестве базиса волновых функций состояния атомов с определенными значениями импульсов, мы приводим вывод уравнений Максвелла–Блоха для модели бозе-эйнштейновского конденсата идеального газа атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем. Полученные решения этих уравнений, описывающие эволюцию интенсивности излучения и населенностей когерентных атомных состояний с различными значениями импульсов отдачи, позволяют теоретически воспроизвести наблюдавшиеся в [1] эффекты.

PACS: 03.75.Nt, 42.50.Gy

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большой интерес вызывают исследования, связанные с возможностью получения бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) разреженных паров щелочных металлов с помощью лазерного и испарительного охлаждения [1–6]. Обстоятельные обзоры теоретических и экспериментальных достижений в этой области можно найти в [7, 8].

В экспериментах [1] по усилению света конденсат паров натрия, заключенный в ловушку диаметром 20 мкм и длиной 200 мкм и содержащий несколько миллионов атомов, облучался двумя лазерными пучками: «одевающим» и «пробным». Частота одевающего луча была смещена в красную сторону относительно резонансной частоты перехода $3S_{1/2}, F = 1 \rightarrow 3P_{3/2}, F = 0, 1, 2$, на 1.7 ГГц. Частота пробного поля отличалась на 91 кГц от частоты одевающего луча, чтобы обеспечить резонанс двухфотонного перехода с учетом энергии отдачи атома. Оба пучка лежали в плоскости, перпендикулярной оси вытянутости конденсата, и пересекали друг друга под углом 135° . Основным результатом этого эксперимента заключался в обнаружении усиления пробного луча при включенном одевающем луче. При низкой интенсивности пробного луча при

выключении одевающего луча отчетливо наблюдалось прекращение усиления. Однако при больших интенсивностях одевающего луча наблюдалось остаточное усиление даже при выключении пробного луча на входе. Это своеобразный голографический эффект: пробный луч возникал на выходе благодаря дифракции одевающего луча на интерференционной решетке волн атомов, получивших импульсы отдачи. Кроме того, наблюдалось запаздывание пробного импульса на выходе, что интерпретировалось как уменьшение групповой скорости света до величины 1 м/с.

Проблема взаимодействия света с вырожденным бозе-газом атомов рассматривалась в работах [9–12]. При полуклассическом рассмотрении [13, 14] обычно используется модель «одетого» атома, в которой эффективно исключают из рассмотрения возбужденные электронные состояния и ограничиваются базисом, состоящим из основных электронных состояний с различными импульсами поступательного движения. Записанные в таком базисе уравнения Максвелла–Блоха дополняются феноменологическими членами, описывающими релаксацию и выход излучения из системы. В наших работах [15–17], посвященных сверхизлучательному рассеянию [5], мы использовали полуклассическую теорию с сохранением в базисе волновых функций возбужденных электронных состояний и явным образом решали задачу о

*E-mail: thphys@herzen.spb.ru

распространении света через систему.

Основы полуклассического подхода для решения задачи об усилении света были изложены в нашей статье [16]. В частности, приведенная в [16] оценка химического потенциала БЭК натрия (для условий экспериментов [1, 4]) и сравнение его величины с энергией отдачи, получаемой атомом при поглощении или испускании фотона, показали, что при рассмотрении взаимодействия БЭК с электромагнитным полем для конденсата допустима модель идеального газа.

Данная работа посвящена уточнению рассматриваемой модели БЭК (в частности, учету релаксации БЭК) и разработке более эффективного метода решения уравнений Максвелла–Блоха, позволившего получить результаты, близкие к экспериментальным.

2. МОДЕЛЬ ОДЕТОГО АТОМА

Качественное объяснение рассматриваемого эффекта дает модель «одетого» атома. Поскольку падающие лазерные пучки квазирезонансны с одним из переходов в атоме, каждый атом будем рассматривать как двухуровневую электронную систему. Считая «одевающий» луч значительно более интенсивным, чем пробный, сначала решаем задачу о взаимодействии двухуровневого атома с «одевающим» полем. Пусть ψ_a и ψ_b — основное и возбужденное состояния атома с энергиями E_a и E_b , соответственно:

$$\psi_{a,b} = \psi_{a,b}^0 \exp\left(-i \frac{E_{a,b}}{\hbar} t\right).$$

Представим волновую функцию в виде

$$\psi = C_a \psi_a + C_b \psi_b.$$

Тогда уравнение Шредингера для рассматриваемой задачи о взаимодействии двухуровневой системы с монохроматическим полем $E \exp(-i\omega_0 t)$ (с добавленным релаксационным членом в приближении вращающейся волны) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \dot{C}_a &= i\Omega_R \exp(-i\Delta\omega t) C_b, \\ \dot{C}_b &= -\frac{\gamma}{2} C_b + i\Omega_R \exp(i\Delta\omega t) C_a, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ — радиационная константа возбужденного состояния,

$$\Delta\omega = \frac{E_b - E_a}{\hbar} - \omega_0$$

— расстройка, $\Omega_R = Ed/\hbar$ — частота Раби одевающего поля (d — матричный элемент дипольного

момента перехода, который мы будем считать вещественным). Тогда, как известно, при условии, что в начальный момент атом находился в состоянии ψ_a , волновая функция будет иметь вид

$$\begin{aligned} \psi &= \exp\left(-i \frac{\varepsilon}{2} t\right) \left[\cos \Omega t + \frac{i\varepsilon}{2\Omega} \sin \Omega t \right] \psi_a + \\ &+ i \frac{\Omega_R}{\Omega} \exp\left(i \frac{\varepsilon}{2} t\right) \sin \Omega t \exp\left(-\frac{\gamma}{2} t\right) \psi_b, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\varepsilon = \Delta\omega - i \frac{\gamma}{2}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \Omega_R^2}.$$

Положим, как это имеет место в условиях эксперимента [1], $|\varepsilon| \gg \Omega_R$. Тогда

$$\Omega \approx \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\Omega_R^2}{\varepsilon}.$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \psi &= \left[\left(1 - \frac{\Omega_R^2}{\Delta\omega^2}\right) \exp\left(-i \left(\frac{E_a}{\hbar} - \frac{\Omega_R^2}{\Delta\omega}\right) t\right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\Omega_R^2}{\Delta\omega^2} \exp\left(-i \left(\frac{E_a}{\hbar} + \Delta\omega - i \frac{\gamma}{2} + \frac{\Omega_R^2}{\Delta\omega}\right) t\right) \right] \psi_a^0 + \\ &+ \frac{\Omega_R}{\Delta\omega} \left[-\exp\left(-i \left(\frac{E_b}{\hbar} + \frac{\Omega_R^2}{\Delta\omega} - i \frac{\gamma}{2}\right) t\right) + \right. \\ &+ \left. \exp\left(-i \left(\frac{E_a}{\hbar} + \omega_0 - \frac{\Omega_R^2}{\Delta\omega} - i \frac{\gamma \Omega_R^2}{2\Delta\omega^2}\right) t\right) \right] \psi_b^0, \end{aligned} \quad (3)$$

если дополнительно учесть, что $\gamma \ll |\Delta\omega|$.

Как видно, первое слагаемое в этом выражении близко к волновой функции основного состояния, второе слагаемое состоит из члена, дающего небольшую примесь возбужденного состояния, и члена, определяющего виртуальное состояние, энергия которого (в частотных единицах) близка к частоте одевающего поля. Это виртуальное состояние имеет слабое затухание, определяемое константой

$$\tilde{\gamma} = \frac{\Omega_R^2}{\Delta\omega^2} \gamma,$$

и небольшое смещение

$$\tilde{\Delta\omega} = \frac{\Omega_R^2}{\Delta\omega^2} \Delta\omega.$$

Отметим также, что, поскольку виртуальное состояние входит с весовым множителем $\Omega_R/\Delta\omega$, дипольный момент перехода из этого состояния в основное состояние равен

$$\tilde{d} = \frac{\Omega_R}{\Delta\omega} d.$$

Можно сказать, что при включении одевающего поля возникает возбужденное виртуальное состояние

ψ_d , имеющее такую же заселенность, как и основное состояние ψ_a , но уменьшенный дипольный момент перехода (либо основной дипольный момент перехода, но уменьшенную населенность). Из виртуального состояния под действием пробного поля возможен вынужденный переход в основное состояние, но, в силу закона сохранения импульса, с импульсом поступательного движения, равным векторной разности импульсов фотонов одевающего и пробного полей. Это состояние ψ'_a в начальный момент является незаселенным. Поскольку процесс происходит в условиях сохранения фазовой памяти, он носит характер вынужденного (или тригерного) сверхизлучения [18, 19]. Напомним, что характерный масштаб времени сверхизлучения в этом случае будет

$$\tilde{\tau}_R = \tilde{\gamma} N_0 \lambda^2 L,$$

где N_0 — концентрация атомов, λ — длина волны излучения, L — длина образца в направлении излучения.

Рассмотрим линейную стационарную поляризованность, которая создается пробным монохроматическим полем с частотой ω на переходе $\psi'_a \leftrightarrow \psi_d$:

$$P(\omega) = \frac{d}{i\hbar} N_0 \int_0^\infty \langle \psi_d \hat{d} \psi'_a \rangle E(\omega) \exp(-i\omega t) dt.$$

Здесь N_0 — концентрация атомов, \hat{d} — оператор дипольного момента. Подставляя сюда выражение для ψ_d , получаем

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{N_0 \Omega_R d^2 E(\omega)}{\hbar \Delta \omega} \times \\ &\times \left[\frac{-(\omega - \omega_{ba}) + i\gamma/2}{(\omega - \omega_{ba})^2 + \gamma^2/4} + \frac{(\omega - \omega_0) - i\tilde{\gamma}/2}{(\omega - \omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2/4} \right] = \\ &= \alpha(\omega) E(\omega), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha(\omega)$ — поляризуемость.

Как известно, комплексный показатель преломления равен

$$n(\omega) = \sqrt{1 + 4\pi\alpha(\omega)}.$$

Считая $4\pi\alpha(\omega) \ll 1$, получаем

$$n(\omega) = n_1 - in_2 = 1 + 2\pi \operatorname{Re} \alpha(\omega) - 2\pi i \operatorname{Im} \alpha(\omega),$$

где n_1 — показатель преломления, n_2 — показатель поглощения. Используя (4), получаем

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 + \\ &+ A \left[-\frac{(\omega - \omega_{ba})}{(\omega - \omega_{ba})^2 + \gamma^2/4} + \frac{(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2/4} \right], \quad (5) \\ n_2 &= A \left[-\frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_{ba})^2 + \gamma^2/4} + \frac{\tilde{\gamma}/2}{(\omega - \omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2/4} \right], \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{2\pi N_0 \Omega_R d^2}{\hbar \Delta \omega}.$$

Формулы (5) получены в предположении, что атом неподвижен. Если учесть, что атом при взаимодействии с полями одевающего и пробного пучков получает импульс отдачи

$$\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}),$$

то последние выражения можно переписать в другом виде:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 + A \left[-\frac{(\omega - \omega_{ba})}{(\omega - \omega_{ba})^2 + \gamma^2/4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0 + \omega_g)^2 + \tilde{\gamma}^2/4} \right], \quad (5a) \\ n_2 &= \left[-\frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_{ba})^2 + \gamma^2/4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{\gamma}/2}{(\omega - \omega_0 + \omega_g)^2 + \tilde{\gamma}^2/4} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\hbar\mathbf{k}_0$, $\hbar\mathbf{k}$ — импульсы фотонов соответственно одевающего и пробного лучей, $\hbar\omega_g = p^2/2M$ — кинетическая энергия отдачи атома массой M .

Мы видим, что показатель поглощения представляет собой сумму двух лоренцианов: отрицательный знак соответствует поглощению, положительный — усилению. Таким образом, имеет место суперпозиция спектра поглощения, центрированного на частоте ω_{ba} , и спектра усиления, центрированного на частоте $\omega_0 - \omega_g$, отвечающей условию точного двухфотонного резонанса. Поглощение на частоте $\omega_0 - \omega_g$ пропорционально $\gamma/\Delta\omega^2$, в то время как усиление на этой же частоте пропорционально величине

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}} = \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega_R} \right)^2 \frac{1}{\gamma}.$$

Очевидно, что усиление значительно превосходит поглощение, но происходит в очень узком интервале частот. Практически это усиление ограничивается продолжительностью импульса, а также временем релаксации когерентного атомного состояния. Что касается показателя преломления, то в районе частоты строгого двухфотонного резонанса он имеет линейную нормальную дисперсию, что, как известно, проявляется в уменьшении групповой скорости импульса.

Применительно к БЭК приведенное выше рассмотрение носит оценочно-качественный характер. В первую очередь, это связано с тем, что в состоянии БЭК атомы делокализованы по всему объему

конденсата и поэтому поляризованность, как будет показано ниже, нелокально зависит от напряженности пробного поля и понятия показателя преломления и показателя поглощения являются не вполне адекватными рассматриваемой ситуации.

3. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Будем характеризовать атом не только его электронным состоянием, но и состоянием поступательного движения с определенным значением импульса. Предположим, что в исходном состоянии все атомы находятся в основном электронном состоянии с почти нулевым значением импульса. При взаимодействии атома с излучением выполняется закон сохранения импульса. Формально это обеспечивается правилами отбора. Матричный элемент взаимодействия атома с электромагнитной волной с волновым вектором \mathbf{k} отличен от нуля для конечного состояния атома, импульс которого отличается от исходного на величину $\hbar\mathbf{k}$. Электронные состояния атома (основное и возбужденное) будем отмечать индексами a и b : φ_a , φ_b , а поступательное движение опишем собственными функциями импульса. Например, базис волновых функций двухуровневого атома мы выберем в виде

$$\begin{aligned} |a; \mathbf{k}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \varphi_a, \\ |b; \mathbf{k}'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \varphi_b \exp(-i\omega_d t), \end{aligned} \quad (6)$$

где ω_d — частота «одевающего» лазерного поля, V — объем системы. Отметим, что функции (6) отличаются от волновых функций свободного атома зависящим от времени фазовым множителем, в котором вместо частоты, соответствующей собственному значению энергии атома (в которой должна быть учтена также и кинетическая энергия поступательного движения), мы берем частоту одевающего лазерного поля. Выбранное на таком базисе представление отличается от обычно используемого представления «взаимодействия», и соответствующие поправки появляются и в уравнении Шредингера.

Общее выражение для волновой функции атома может быть записано в виде

$$\Psi = \sum_{\alpha=a,b,\mathbf{k}} C_{\alpha,\mathbf{k}} |\alpha; \mathbf{k}\rangle, \quad (7)$$

где $C_{\alpha,\mathbf{k}}$ — зависящие от времени коэффициенты разложения.

Будем рассматривать взаимодействие атомов, образующих бозе-эйнштейновский конденсат, с двумя модами электромагнитного поля E_j ($j = d, p$), имеющими форму плоских волн с волновыми векторами \mathbf{k}_j :

$$E = i \sum_j E_j \exp(-i\omega_d t + i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}) + \text{c.c.}, \quad (8)$$

где

$$k_d = \omega_d/c, \quad k_p = \omega_p/c,$$

ω_p — частота пробного импульса, c — скорость света в вакууме. Очевидно, что взаимодействие с модой E_j связывает состояния $|a, \mathbf{k}\rangle$ и $|b, \mathbf{k}'\rangle$, только если $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \pm \mathbf{k}_j$.

Каждая из мод создает поляризованность среды (конденсата), а поляризованность в свою очередь индуцирует вторичное поле E'_j этой же моды. В одномерном случае вторичное поле выражается через поляризованность следующим образом:

$$\begin{aligned} E'_j(y_j, t) &= \frac{2\pi i \omega_d}{c} \exp(-i\omega_d t) \times \\ &\times \int_0^{D_j} P_j \left(y', t - \frac{|y_j - y'|}{c} \right) \times \\ &\times \exp(ik_j |y_j - y'|) dy' + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $P_j(y', t)$ — комплексные амплитуды поляризованности среды, y_j — координата для рассматриваемой моды, D_j — длина конденсата вдоль этой координаты. Эти амплитуды поляризованности выражаются через коэффициенты разложения как среднее квантовомеханическое значение оператора поляризованности:

$$P_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_i^N \sum_{\alpha\beta} \bar{C}_\alpha^{(i)} \bar{C}_\beta^{(i)} \langle \alpha | \hat{d}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) | \beta \rangle, \quad (10)$$

где чертой обозначено комплексное сопряжение, N — полное число атомов в конденсате, \hat{d}_i — оператор дипольного момента i -го атома, $C_\alpha^{(i)}$, $C_\beta^{(i)}$ — коэффициенты разложения для i -го атома. Индексы α и β соответствуют индексам a , \mathbf{k}' и b , \mathbf{k} , причем суммирование проводится только по тем индексам α и β , для которых $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{k}_j$. Поскольку все атомы конденсата имеют одинаковые волновые функции, в итоге для комплексных амплитуд поляризованности рассматриваемых двух мод получаем

$$P_j(y', t) = N_0 d \exp(ik_j y') \sum_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'=\mathbf{k}_j} C_{b,\mathbf{k}} \bar{C}_{a,\mathbf{k}'}, \quad (11)$$

где N_0 — концентрация атомов в конденсате, d — матричный элемент дипольного момента перехода.

Пренебрегая запаздыванием в амплитуде поляризованности и вкладом быстро осциллирующих членов при интегрировании по y' , получаем

$$E'_j = \frac{2\pi i d \omega_d N_0 y_j}{c} \exp(-i\omega_d t + i k_j y_j) \times \sum_{\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{k}_j} C_{b, \mathbf{k}'} \bar{C}_{a, \mathbf{k}}. \quad (12)$$

Как видно, поле, индуцированное пространственно однородной волной поляризации, линейно по y_j . Теперь заменим эти величины средними значениями, положив в первом множителе выражения (12) $y_d = y_p = D/2$, где D — поперечный размер конденсата.

Используя оператор взаимодействия атома с электромагнитным полем в виде

$$\hat{H}_{int} = -\hat{d}E, \quad (13)$$

запишем уравнение Шредингера для одного атома. В приближении вращающейся волны получаем

$$\begin{aligned} \dot{C}_{a, \mathbf{k}} &= \frac{d}{\hbar} \sum_j \bar{E}_j C_{b, \mathbf{k} + \mathbf{k}_j} - i \frac{W_k}{\hbar} C_{a, \mathbf{k}}, \\ \dot{C}_{b, \mathbf{k}} &= -\frac{d}{\hbar} \sum_j E_j C_{a, \mathbf{k} - \mathbf{k}_j} - \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{2} + i \frac{W_k}{\hbar} + i \Delta\omega \right) C_{b, \mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$E_j = E_j^0 + \frac{\hbar}{d\tau_R} \sum_{\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{k}_j} C_{b, \mathbf{k}'} \bar{C}_{a, \mathbf{k}}. \quad (15)$$

Здесь

$$\tau_R = c\hbar/\pi\omega_d d^2 N_0 D,$$

$\Delta\omega = \omega_{ba} - \omega_d$ — расстройка, W_k — кинетическая энергия атома, обладающего импульсом \mathbf{k} , γ — радиационная константа возбужденного электронного состояния атома, описывающая спонтанное рассеяние света в произвольных направлениях, E_j^0 — амплитуды падающих полей.

В условиях эксперимента [1] уравнения (14), (15) могут быть значительно упрощены. Действительно, поскольку в этом случае расстройка $\Delta\omega$ является наибольшим параметром, можно считать, что выполнено условие [20]

$$|\dot{C}_{b, \mathbf{k}}| \ll \Delta\omega |C_{b, \mathbf{k}}|.$$

Тогда производной в левой части второго уравнения (14) можно пренебречь, а коэффициент выразить в виде

$$C_{b, \mathbf{k}} = \frac{d(i - \gamma')}{\hbar\Delta\omega} \sum_j E_j C_{a, \mathbf{k} - \mathbf{k}_j},$$

где принято во внимание, что

$$W_k \ll \hbar\Delta\omega, \quad \gamma' = \gamma/2\Delta\omega.$$

В результате уравнения (14), (15) после исключения $C_{b, \mathbf{k}}$ примут вид

$$\begin{aligned} \dot{C}_{a, \mathbf{k}} &= \frac{d^2(i - \gamma')}{\hbar^2\Delta\omega} \times \\ &\quad \times \sum_{j, j'} \bar{E}_j E_{j'} C_{a, \mathbf{k} + \mathbf{k}_j - \mathbf{k}_{j'}} - i \frac{W_k}{\hbar} C_{a, \mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$E_j = E_j^0 + \frac{i - \gamma'}{\Delta\omega\tau_R} \sum_{j'} E_{j'} \sum_{\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{k}_j} C_{a, \mathbf{k}' - \mathbf{k}_{j'}} \bar{C}_{a, \mathbf{k}}. \quad (17)$$

Так как амплитуды полей выражаются через коэффициенты разложения волновой функции по выбранному базису состояний, уравнение Шредингера (16) оказывается нелинейным.

4. КОГЕРЕНТНОЕ УСИЛЕНИЕ СВЕТА

В условиях эксперимента, когда размеры ловушки конечны и нерадикационное взаимодействие атомов значительно, усиление пробного луча сопровождается релаксацией атомных состояний. Для учета этой релаксации необходимо от уравнения Шредингера перейти к уравнениям Максвелла–Блоха. Релаксация атомных когерентных состояний является еще одной из причин, по которой можно пренебречь вторичными возбуждениями. Поэтому ограничимся актами возбуждения первого порядка. Соответствующая схема уровней и переходов приведена на рис. 1, на котором нечетные номера уровней соответствуют основному, а четные — возбужденному электронному состоянию.

В дальнейшем будем использовать «истинную» амплитуду пробного поля:

$$E_p \rightarrow E_p \exp [i(\omega_d - \omega_p) t].$$

Проведем также замену в коэффициентах разложения:

$$C_3 \rightarrow C_3 \exp [-i(\omega_d - \omega_p) t],$$

$$C_5 \rightarrow C_5 \exp [i(\omega_d - \omega_p) t].$$

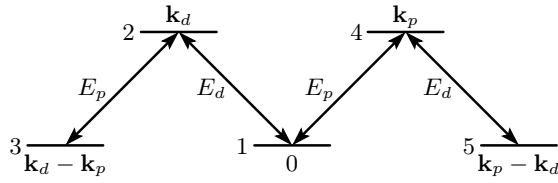


Рис. 1. Схема атомных уровней и переходов при усилении пробного импульса в присутствии одевающего

Кроме того, введем безразмерные единицы для времени, амплитуд полей и энергии:

$$\tau = \frac{t}{\tau_s}, \quad \varepsilon_d = \frac{E_d}{E_m}, \quad \varepsilon_p = \frac{E_p}{E_m}, \quad w_k = \frac{W_k}{\hbar\tau_s^{-1}}, \quad (18)$$

где

$$\tau_s = \frac{\Delta\omega}{\Omega_R^2}, \quad \Omega_R = \frac{dE_m}{\hbar}, \quad (19)$$

— характерный временной масштаб явления (E_m — некоторая максимальная амплитуда полей, использованных в эксперименте). Тогда, исходя из уравнений (16), (17) и используя феноменологическое описание фазовой релаксации, уравнения для матрицы плотности

$$R_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = C_{a,\mathbf{k}}\bar{C}_{a,\mathbf{k}'}$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{R}_{13} &= -\gamma' [(2|\varepsilon_p|^2 + |\varepsilon_d|^2) R_{13} + \\ &+ \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d(R_{33} + R_{11}) + \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p\bar{R}_{35}] + \\ &+ i [|\varepsilon_d|^2 R_{13} + \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d(R_{33} - R_{11}) + \\ &+ \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p\bar{R}_{35}] - iq_3 R_{13} - \gamma_{13} R_{13}, \\ \dot{R}_{15} &= -\gamma' [(2|\varepsilon_d|^2 + |\varepsilon_p|^2) R_{15} + \\ &+ \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p(R_{55} + R_{11}) + \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d R_{35}] + \\ &+ i [|\varepsilon_p|^2 R_{15} + \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p(R_{55} - R_{11}) + \\ &+ \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d R_{35}] - iq_5 R_{15} - \gamma_{15} R_{15}, \\ \dot{R}_{35} &= \\ &= -\gamma' [(|\varepsilon_p|^2 + |\varepsilon_d|^2) R_{35} + \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p(R_{15} + \bar{R}_{13})] + \\ &+ i [(|\varepsilon_p|^2 - |\varepsilon_d|^2) R_{35} + \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p(R_{15} - \bar{R}_{13})] + \\ &+ i(q_3 - q_5) R_{35} - \gamma_{35} R_{35}, \\ \dot{R}_{11} &= -\gamma' [2(|\varepsilon_d|^2 + |\varepsilon_p|^2) R_{11} + \\ &+ \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p(R_{13} + \bar{R}_{15}) + \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d(R_{15} + \bar{R}_{13})] + \\ &+ i [\varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p(\bar{R}_{15} - R_{13}) + \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d(\bar{R}_{13} - R_{15})], \\ \dot{R}_{33} &= -\gamma' [2|\varepsilon_p|^2 R_{33} + \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p R_{13} + \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d\bar{R}_{13}] + \\ &+ i(\varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p R_{13} - \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d\bar{R}_{13}), \\ \dot{R}_{55} &= -\gamma' [2|\varepsilon_d|^2 R_{55} + \varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d R_{15} + \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p\bar{R}_{15}] + \\ &+ i(\varepsilon_p\bar{\varepsilon}_d R_{15} - \varepsilon_d\bar{\varepsilon}_p\bar{R}_{15}). \end{aligned} \quad (20)$$

Амплитуды полей ε_p и ε_d могут быть найдены как решения следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \varepsilon_p^0 + \frac{i-\gamma'}{\Delta} [\varepsilon_p(R_{11} + R_{33}) + \varepsilon_d(R_{13} + \bar{R}_{15})], \\ \varepsilon_d &= \varepsilon_d^0 + \frac{i-\gamma'}{\Delta} [\varepsilon_d(R_{11} + R_{55}) + \varepsilon_p(\bar{R}_{13} + R_{15})]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\gamma' = \gamma/2\Delta\omega, \quad q_3 = (\omega_d - \omega_p - W_3/\hbar)\tau_s,$$

$$q_5 = (\omega_p - \omega_d - W_5/\hbar)\tau_s, \quad \gamma_{ik} = \Gamma_{ik}\tau_s, \quad \Delta = \Delta\omega\tau_R,$$

Γ_{ik} ($i \neq k = 1, 3, 5$) — скорости поперечной релаксации недиагональных элементов матрицы плотности. По экспериментальным оценкам величины $\Gamma_{ik} \approx \Gamma$ имеют порядок 10^4 с^{-1} [5]. Единственным отличным от нуля начальным условием будет

$$R_{11}(0) = 1.$$

Отметим, что уравнения (21) определяют поля, средние по образцу (в силу линейности вторичных полей от координаты, см. (12)). С помощью формул (21) можно также найти поля и на выходе из конденсата, если в последних перед вторыми слагаемыми поставить множитель 2.

Оценим величины, входящие в уравнения (20), (21). Пусть $E_m = 1.45 \cdot 10^{-2}$ СГС (амплитуда поля при интенсивности лазерного излучения $I = 100 \text{ мВт/см}^2$). Поскольку $d = 0.64 \cdot 10^{-17}$ СГС и $\Delta\omega = 1.07 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, имеем единицу времени $\tau_s = 1.37 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ и единицу энергии $\hbar\tau_s^{-1} = 0.77 \cdot 10^{-21} \text{ эрг}$. Положим $N = 5 \cdot 10^6$, т.е. при указанных выше размерах конденсата концентрация атомов $N_0 = 0.8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Так как $\omega_d = 3.2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ и $D = 20 \text{ мкм}$, имеем время $\tau_R = 0.48 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ и радиационную константу $\gamma = 0.63 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$. Кинетическая энергия отдачи атома натрия, испустившего или поглотившего фотон с длиной волны $\lambda = 589 \text{ нм}$, будет равна $W = 1.64 \cdot 10^{-22} \text{ эрг}$. Таким образом, характерная ширина лазерного импульса в условиях эксперимента (500 мкс) составит приблизительно $365\tau_s$, а константы равны $\gamma' = 0.30 \cdot 10^{-2}$, $\Delta = 5.2$. Для энергий получаем величину $w_3 = w_5 = 3.42W/\hbar\tau_s^{-1} = 0.73$.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда «одевающее» поле можно считать заданным, т.е. $\varepsilon_d = \varepsilon_d^0$. Расчеты, проведенные на основе уравнений (20), (21), показали, что в условиях эксперимента, даже при $\varepsilon_p \sim \varepsilon_d$, заселения уровня 5 практически не происходит. Как видно из уравнения (20) для R_{15} , это объясняется сильной нерезонансностью частоты перехода 1–5 частоте двухфотонного процесса $\omega_d - \omega_p$.

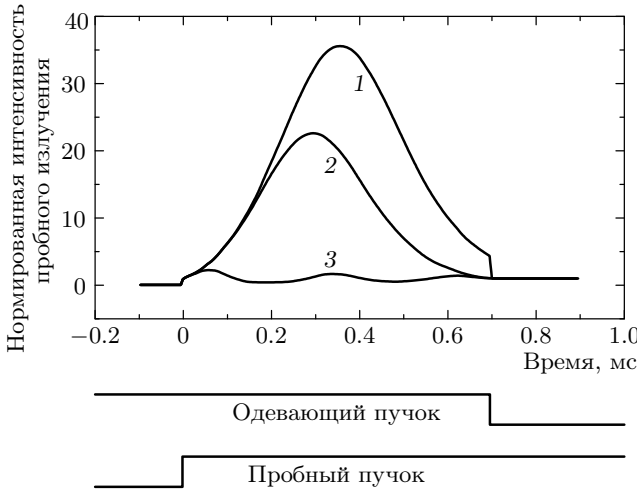


Рис. 2. Трансформация пробного импульса после его прохождения через одетый конденсат. Интенсивность пробного луча 0.0025 (1), 0.005 (2) и 0.5 мВт/см² (3), интенсивность одевающего пучка 5 мВт/см². Кривые нормированы на интенсивность падающего пробного излучения. Кривая 3 представлена в масштабе 2 : 1. Приведены пробный и одевающий импульсы на входе в конденсат

Поэтому в дальнейшем возбуждением уровня 5 пренебрегаем. Соответствующие уравнения (20), (21) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{R}_{13} = & -\gamma' [(|\varepsilon_p|^2 + |\varepsilon_d|^2) R_{13} + \varepsilon_p \bar{\varepsilon}_d (R_{33} + R_{11})] + \\ & + i \varepsilon_p \bar{\varepsilon}_d (R_{33} - R_{11}) - \\ & - i [q_3 - |\varepsilon_d|^2 + |\varepsilon_p|^2 + \gamma_{13}] R_{13}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{11} = & -\gamma' [2|\varepsilon_d|^2 R_{11} + \varepsilon_d \bar{\varepsilon}_p R_{13} + \varepsilon_p \bar{\varepsilon}_d \bar{R}_{13}] + \\ & + i (\varepsilon_p \bar{\varepsilon}_d \bar{R}_{13} - \varepsilon_d \bar{\varepsilon}_p R_{13}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{33} = & -\gamma' [2|\varepsilon_p|^2 R_{33} + \varepsilon_d \bar{\varepsilon}_p R_{13} + \varepsilon_p \bar{\varepsilon}_d \bar{R}_{13}] + \\ & + i (\varepsilon_d \bar{\varepsilon}_p R_{13} - \varepsilon_p \bar{\varepsilon}_d \bar{R}_{13}), \end{aligned}$$

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_p^0 + ((i - \gamma')/\Delta)\varepsilon_d R_{13}}{1 - ((i - \gamma')/\Delta)R_{33}}. \quad (23)$$

Рассмотрим основные эффекты, обнаруженные в рамках предложенной модели. Расчеты показывают, что, как и в эксперименте, эти эффекты проявляются только в присутствии «одевающего» луча. Кроме того, их характер оказался в значительной степени зависящим от формы и интенсивности пробного импульса.

Будем считать вначале, что пробный импульс, взаимодействующий с одетым конденсатом, имеет ступенчатую форму. Как и в эксперименте, обнару-

жилось, что пробный импульс по мере проникновения в конденсат усиливается. Усиление в значительной мере определяется расстройкой двухфотонного резонанса q_3 . Как видно из уравнения (22) для R_{13} , точного двухфотонного резонанса можно достичь, только если учесть, что в полях ε_p и ε_d частота перехода 1–3 испытывает смещение. Таким образом, для точного резонанса необходимо, чтобы для разности частот выполнялось соотношение

$$\omega_d - \omega_p = (w_3 + |\varepsilon_d|^2)\tau_s^{-1} = (0.73 + 0.05)\tau_s^{-1} = 0.78\tau_s^{-1}.$$

Это значение полностью совпадает со значением данной разности, задаваемой в эксперименте ($I_d = 5$ мВт/см²). Усиление пробного импульса зависит не только от расстройки, но и от величины его поля на входе в конденсат (рис. 2). Наибольшее усиление достигается при малом значении E_p^0 , когда возбуждение атомов мало. С увеличением интенсивности пробного луча его усиление падает, а заселенность уровня 3 возрастает. Для полей $E_p^0 \sim E_d^0$ эффективность усиления и степень возбуждения атомов полностью определяются биениями Раби на переходе 1–3.

В одетом конденсате пробный импульс не только усиливается, но и замедляется. Наиболее ярко такое замедление проявляется для пробного импульса гауссовой формы (рис. 3). Величина замедления оказывается зависящей от скорости поперечной релаксации Γ . Чем меньше величина Γ , тем значительней замедление. При $\Gamma = 0$ групповая скорость распространения пробного импульса в одетом конденсате составила 1 м/с, а при возрастании Γ до 10^4 с⁻¹ она увеличилась до 2 м/с. Прохождение пробного импульса через одетый конденсат сопровождается не только его усилением и замедлением, но и значительным уширением. Полученные результаты полностью соответствуют данным эксперимента.

Обратимся вновь к пробному импульсу с крутым передним фронтом. В присутствии мощного «одевающего» пучка значительное число атомов перейдет на уровень 3. Чем круче передний фронт пробного импульса, тем быстрее протекает этот процесс. Если теперь выключить пробный луч, то в конденсате останется динамическая решетка из атомов, получивших импульсы отдачи. Поскольку одевающий пучок продолжает падать на конденсат, он будет дифрагировать на этой решетке и породить пробный луч на выходе из конденсата (рис. 4). Причем, чем больше начальная интенсивность пробного импульса, тем значительней эффект. Этот своеобразный голографический эффект наблюдался в эксперименте.

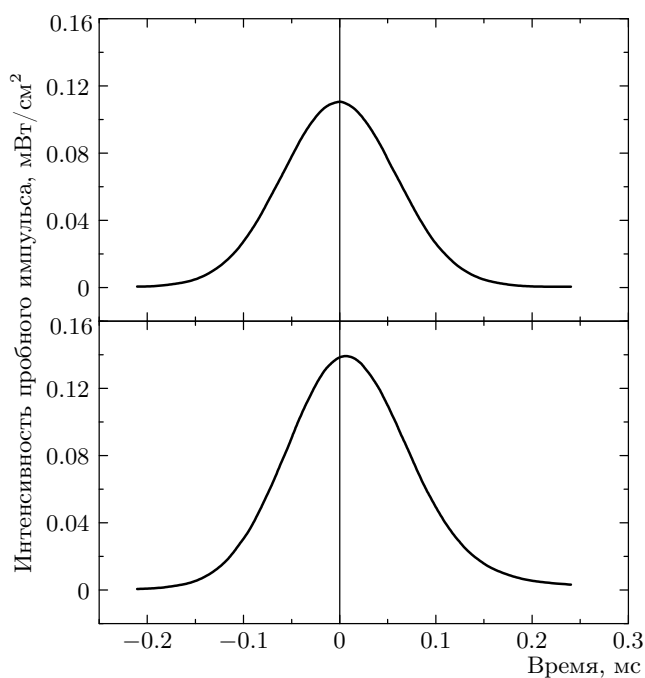


Рис. 3. Задержка импульса при его усилении в одежном конденсате. Входной импульс гауссовской формы длительностью 0.14 мс и пиковой интенсивностью 0.11 мВт/см². Интенсивность одевающего пучка 5.0 мВт/см²

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение еще раз подчеркнем роль бозе-эйнштейновского конденсата в рассматриваемом явлении. Сама система представляет собой разреженный газ с концентрацией 10^{13} – 10^{14} см⁻³ при сверхнизких температурах $T \sim 10^{-7}$ К. По оценке, выполненной в нашей работе [16], химический потенциал в условиях эксперимента на два порядка меньше энергии отдачи, что позволяет пренебречь столкновительными взаимодействиями и рассматривать газ конденсата как идеальный. В эксперименте исследовалось усиление достаточно длительных импульсов (~ 500 мкс), и авторам удалось обнаружить тонкие резонансные эффекты, превышающие по разрешению кинетическую энергию отдачи атомов. Существование этих резонансов проявляется и в наших расчетах. В этой связи оказывается существенным, что в начальном состоянии конденсата отсутствует доплеровское уширение, которое при температуре фазового перехода ($\sim 10^{-7}$ К) для «классического» идеального газа было бы сравнимо с энергией отдачи. Влияние столкновительного взаимодействия мы учли с помощью феноменологической кон-

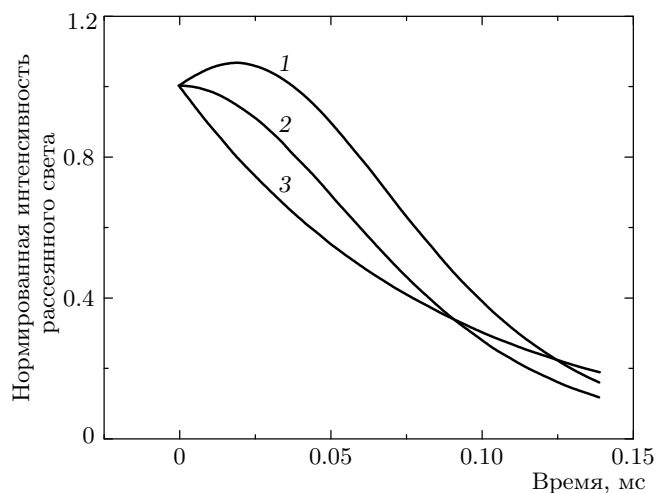


Рис. 4. Интерференция света на решетке из атомов отдачи, возникающей при облучении одежного конденсата брэгговским импульсом прямоугольной формы длительностью 0.1 мс и интенсивностью 1 мВт/см². Интенсивность одевающего пучка 2.9 (1), 11.5 (2) и 13 мВт/см² (3). Все кривые нормированы на интенсивность дифрагирующего света при $t = 0$ (момент «отключения» импульса)

станты поперечной релаксации Γ . Наши расчеты показали, что даже при достаточно малой величине этой константы ($\Gamma \sim 10^4$ с⁻¹) усиление пробного импульса уменьшается на порядок величины (по сравнению со случаем $\Gamma = 0$). Выше мы уже отмечали влияние релаксации на замедление распространения усиливаемого импульса. Очевиден характер влияния поперечной релаксации на описанный выше голографический эффект. Расчеты были проведены для $\Gamma = 3 \cdot 10^3$ с⁻¹. При увеличении этой величины на порядок послесвечение усиливаемого луча практически отсутствует.

В данной работе мы описывали состояния поступательного движения атома собственными функциями оператора импульса с собственными значениями, определяемыми правилами отбора для взаимодействия атома с двумя плоскими волнами электромагнитного поля («одевающей» и усиливаемой). Это давало возможность считать амплитуды соответствующих волн поляризованности пространственно-однородными и зависящими от средних по объему значений полей. В дальнейшем, расширив базис атомных состояний, описывающих поступательное движение, мы предполагаем отказаться от приближения среднего поля, чтобы оценить его влияние на рассмотренные выше эффекты.

Авторы выражают благодарность В. Кеттерле и В. И. Перелю за интерес к работе, а А. С. Трошину за детальное обсуждение и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ и INTAS (проект № 01-855).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Inouye, R. F. Low, S. Gupta, T. Pfau, A. Gustavson, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4225 (2000).
2. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
3. D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1543 (1998).
4. J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999).
5. S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Science* **285**, 571 (1999).
6. L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi, *Nature* **397**, 594 (1999).
7. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
8. Ph. W. Courteille, V. S. Bagnato, and V. I. Yukalov, *Laser Phys.* **11**, 659 (2001).
9. G. Lenz, P. Meystre, and E. M. Wright, *Phys. Rev. A* **50**, 1681 (1994).
10. Y. Castin and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **51**, R3426 (1995).
11. J. Javanainen, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1927 (1995).
12. M. G. Moore and P. Meystre, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5202 (1999).
13. O. E. Mustecaplioglu and L. You, *Phys. Rev. A* **62**, 063615 (2000).
14. N. Piovella, M. Gatelli, and R. Bonifacio, *Opt. Comm.* **194**, 167 (2001).
15. Е. Д. Трифонов, *ЖЭТФ* **120**, 1117 (2001).
16. Е. Д. Трифонов, *Laser Phys.* **12**, 211 (2002).
17. Е. Д. Трифонов, *Опт. и спектр.* **92**, 631 (2002).
18. R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
19. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Superradiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP Publishing, Bristol, Philadelphia (1996).
20. Е. Д. Трифонов, Н. И. Шамров, *Опт. и спектр.* **96**, 294 (2004).