

ГЕНЕРАЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ ОДНОЧАСТОТНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

*А. А. Заболотский**

*Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 17 ноября 2003 г.

Изучаются механизмы генерации акустических импульсов при распространении в оптоупругой среде одночастотного электромагнитного поля. Нелинейное взаимодействие компонент поляризации одночастотного электромагнитного поля в изотропной среде возникает из-за наведенной анизотропии, вызванной акустическими колебаниями. Для разных условий показано, что в такой системе акустоэлектромагнитное взаимодействие, связанное со смешением поляризационных компонент светового поля и акустических колебаний среды, может приводить к формированию когерентных пространственных солитонных акустических возбуждений в тонкой пластине кристалла. Обнаружено, что без учета пространственной дисперсии и для однонаправленного распространения акустических импульсов система уравнений сводится к интегрируемой модели. Показано, что в зависимости от выбора направления деформации и поляризации поля возможны качественно различные режимы формирования акустических солитонов.

PACS: 42.50.Md, 42.65.Tg

1. ВВЕДЕНИЕ

При распространении одночастотной электромагнитной волны в изотропной среде когерентные солитонные и иные возбуждения могут образовываться вследствие компенсации дисперсии кубичной (керровской) нелинейностью или при параметрическом взаимодействии нескольких полей с разными несущими частотами (см., например, [1, 2]). Особый интерес вызывают системы, в которых при наличии не зависящих от времени внешних условий формируется динамический режим, не приводящий к установлению какого-либо стационарного состояния. Достаточно подробно исследованы взаимодействия, связанные с эволюцией квазимонохроматических оптических импульсов, что во многих случаях оправдано выбором временных масштабов и условий резонанса [3]. Это позволило изучить физическую картину фундаментальных нелинейных взаимодействий уединенных волн различной природы. Аналогичные аналитические результаты, относящиеся к нахождению однофазных решений, получены и при изучении акустоэлектромагнитного взаимодействия

в рамках систем уравнений, родственных встречающимся в нелинейной оптике [4–6].

В анизотропной среде для небольших амплитуд доминирует квадратичная по амплитуде поля нелинейность, которая способствует возникновению солитонов при наличии параметрического взаимодействия двух основных волн и третьей волны с разностной несущей частотой или в случае вырожденного варианта этого взаимодействия — генерации второй гармоники [2]. Резонансные трехчастотные процессы в твердых телах достаточно детально изучены [2]. Если кристаллическая среда является упругой и акустоэлектромагнитные эффекты существенны, то необходимо учитывать обратное влияние упругой деформации среды на ее диэлектрическую проницаемость. Зависимость последней от деформации приводит к нелинейной связи между компонентами поляризации. Эта связь описывается уравнениями, аналогичными уравнениям трехволнового или четырехволнового параметрического взаимодействия оптических импульсов в рамках приближения медленных огибающих. Изучению такого рода нелинейных акустоэлектромагнитных волновых взаимодействий в твердых телах посвящено значительное число работ, например, [4–6]. В рабо-

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

тах [4, 5] показано, что взаимодействие ортогонально поляризованных компонент обыкновенной и необыкновенной волн в одноосном кристалле может приводить к генерации непьезоактивной продольной акустической волны вследствие параметрического резонансного взаимодействия. Авторами этих работ найдены простейшие односолитонные решения соответствующих эволюционных уравнений, выведенные в приближении медленных огибающих.

В настоящее время особую актуальность приобрело исследование условий генерации и эволюции субнаносекундных и пикосекундных акустических импульсов. Длина таких импульсов с длительностью порядка 1 пс в твердом теле при скорости около $5 \cdot 10^5$ см/с составляет всего несколько расстояний между атомами в кристалле. Поэтому их применение позволяет исследовать структуру многих кристаллических сред, сложных молекулярных структур [7], а также квантовых ям в полупроводниковых пленках [8]. Теоретический анализ эволюции такого рода акустических импульсов в других физических схемах взаимодействия света со средой, отличающихся от рассматриваемой в настоящей работе, проводился вне рамок рамок приближения медленных огибающих в работах Сазонова с соавторами (см., например, [9–11]) и в работах автора (см., например, [12, 13]). Исследование таких импульсов вызывает в последнее время интерес, так же как и продолжающиеся исследования их оптических аналогов — фемтосекундных оптических импульсов и микроимпульсов [14]. Отметим, что наряду с некоторым сходством между моделями, описывающими эволюцию акустических и оптических импульсов без применения приближения медленных огибающих, между ними имеются существенные различия (ср. модели в работах [14] и [12, 13]).

Изучение акустоэлектромагнитных явлений при условии генерации наносекундных акустических импульсов и с учетом поляризационных эффектов активно ведется для анизотропных кристаллов, в которых эффективные нелинейные модули существенно зависят от направления и поляризации взаимодействующих волн. В качестве примера рассмотрим параллельное акустоэлектромагнитное взаимодействие в оптически анизотропном кристалле LiNbO_3 . Пусть вдоль оси x распространяются обыкновенная и необыкновенная электромагнитные волны, взаимодействующие с акустической волной с частотой, близкой к разности частот электромагнитных волн. При таком взаимодействии, обусловленном линейной фотоупругостью, возможно возникновение солитонного режима динамики волн [15].

В работе [16] экспериментально наблюдалась локализация связанной оптической компоненты акустоэлектромагнитных солитонов. В теоретических работах [4–6], посвященных нахождению солитонных решений в параметрических процессах, использовалось квазимонохроматическое приближение как для электромагнитного, так и для акустического поля. В то же время значения разностной частоты обыкновенной и необыкновенной волн существенно ограничивают диапазон длительностей генерируемых акустических импульсов. Например, для BaTiO_3 , который при температурах меньше -90°C обладает симметрией $3m$, разностная частота составляет примерно 10^8 с $^{-1}$ [5]. Более высокое значение разностной частоты достигается в кристалле LiNbO_2 , в котором оно составляет около $4 \cdot 10^9$ с $^{-1}$. Это означает, что длительность квазимонохроматических солитонов по порядку величины должна быть соответственно не менее 10^{-7} с и 10^{-8} с. Генерация акустических импульсов с длительностью порядка или меньше разностной частоты Ω позволяет продвинуться в область значений наносекундных или более коротких импульсов для такого механизма акустоэлектромагнитного взаимодействия. К тому же для такого диапазона частот (порядка 10^8 – 10^{10} с $^{-1}$) коэффициент затухания акустического импульса пропорционален квадрату частоты [5]. Поэтому при одинаковых длительностях импульсов для квазимонохроматических импульсов коэффициент потерь более чем на два порядка больше, чем для импульсов с длительностью порядка Ω^{-1} . Последние могут включать импульсы пикосекундного диапазона. Генерация пикосекундных акустических солитонов в кристаллической пластинке наблюдалась экспериментально в недавней работе [17]. Солитоны образовывались на расстоянии порядка миллиметра вследствие баланса дисперсии, обусловленной положением атомов в кристаллической решетке, и нелинейности, возникающей из ангармоничности межатомных сил. Изучение генерации таких импульсов при акустоэлектромагнитном взаимодействии дает дополнительные возможности и механизмы управления параметрами акустического импульса электромагнитным полем.

Результаты теоретических исследований, выполненных в цитированных выше работах, в которых изучалось акустоэлектромагнитное взаимодействие, заведомо не могут быть применены для анализа субнаносекундного и тем более пикосекундного диапазона длительностей акустических импульсов, поскольку при описании распространения этих импульсов в кристалле приближение медленной огиба-

ющей для акустического поля неприменимо. Поэтому развитие теории акустоэлектромагнитного взаимодействия вне рамок приближения медленных огибающих, в частности, на разностной частоте, актуально и имеет важное практическое значение. Поскольку в таких теориях, описывающих эволюцию импульсов с длительностью, близкой к $\pi\Omega_{12}^{-1}$, не требуется выполнения условия частотного резонанса, следует ожидать, что в рамках этих теорий могут быть предложены новые эффективные механизмы и условия генерации акустических солитонов. Отметим также, что при использовании коротких световых импульсов для генерации акустических солитонов при параметрическом многочастотном процессе возникают технические трудности, связанные, например, с синхронизацией импульсов [6].

Целью настоящей работы является теоретическое исследование новых механизмов генерации акустических импульсов (солитонов) в акустопругой среде вне рамок приближения медленных огибающих для акустических импульсов. В настоящей работе мы ограничимся случаем одночастотного поля и однородной среды.

Структура работы такова. В следующем разделе приводится вывод основной системы эволюционных уравнений, описывающих динамику электромагнитной волны и акустических колебаний. В разд. 3 приводятся однофазные решения модели. В разд. 4 найдена интегрируемая редукция исходной системы уравнений, приведены соответствующие представления Лакса, а также получено автомодельное несолитонное решение. В заключительном пятом разделе обсуждаются полученные результаты. В Приложении приводится N -солитонное решение интегрируемой редукции изучаемой модели.

2. ЭВОЛЮЦИЯ ОДНОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ В ДВУМЕРНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим изотропный кристалл, протяженный по направлениям осей x и y и оптически тонкий по направлению вдоль оси z . В случае недеформированной изотропной среды состояние слабо деформированного тела описывается в линейном приближении по тензору деформации

$$u_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

где $\mathbf{U}(x, y, z)$ — вектор смещения точек тела. Соответственно этому диэлектрический тензор деформи-

рованного тела имеет вид (см., например, в [18], формула (16.1))

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_0 \delta_{jk} + a_1 u_{jk} + a_2 u_{jj} \delta_{jk}. \quad (2)$$

Здесь δ_{jk} — дельта-функция, a_1 и a_2 — действительные константы. Динамика акустического поля в кристалле без учета нелинейных эффектов описывается гамильтонианом

$$H_a = \int \left(\frac{1}{2n_0} \sum_j p_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,m} \lambda_{jklm} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right) d\mathbf{r}, \quad (3)$$

где n_0 — средняя плотность кристалла, p_j ($j = x, y, z$) — компоненты плотности импульса, возникающие при динамических смещениях, λ_{jklm} — тензор модулей упругости кристалла [18]. Интеграл в (3) берется по объему кристалла. Предполагается, что число фотонов и фононов велико и справедливо классическое описание динамики акустического и электромагнитного полей.

Считаем, что вектор направления распространения электрического поля $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ составляет угол θ_e с осью z (см. ниже). Предполагается, что среда оптически тонкая по направлению вдоль оси z , т. е. производной по z от огибающей электрического поля и акустическими волнами, связанными с деформацией (смещением U_z) кристалла вдоль оси z , можно пренебречь. Такая ситуация реализуется, если кристалл имеет форму тонкой пластины. Кристаллографическая система координат (x, y, z) связана с кристаллом таким образом, что оси x и y лежат на плоскости пластины, а ось z перпендикулярна ей. «Световая» система координат (X, Y, Z) , связанная с направлением распространения света, повернута по отношению к кристаллографической на углы Эйлера [19]. Угол Эйлера θ_e — угол между осями z и Z , угол ϕ_e — угол между осью x и проекцией оси Z на плоскость xy [20]. В этом случае матрица диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}'$ отличается от $\hat{\varepsilon}$ — матрицы диэлектрической проницаемости для $\theta_e = \phi_e = 0$:

$$\hat{\varepsilon}' = \hat{D}^{-1} \hat{\varepsilon} \hat{D},$$

где $\hat{D}(\theta_e, \phi_e)$ — матрица поворота.

Уравнения Максвелла, описывающие пространственно-временную зависимость электромагнитного поля в среде, имеют вид

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{D}) = 0, \quad (5)$$

где $\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{E}_z)$, $\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\tilde{\mathbf{E}}$ — вектор поляризуемости среды, \mathbf{k} — волновой вектор электромагнитного поля и c — скорость света в среде. В отсутствие акустических деформаций тензор $\hat{\epsilon}$ диагонален. Нелинейная зависимость $\hat{\epsilon}$ от амплитуды поля $\tilde{\mathbf{E}}$ не учитывается.

Пусть

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \exp(iKz)\mathbf{E}(x, y, t).$$

Продольная компонента поля E_z может быть исключена с помощью очевидного равенства

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\Delta_{\perp} - K^2) \mathbf{E}, \quad (6)$$

где

$$\Delta_{\perp} = \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_{\perp} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Используя формулы (4) и (6), находим, что поперечные компоненты поля $\mathbf{E}_{\perp} = (E_x, E_y)$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\hat{\epsilon} \mathbf{E})_{\perp} - K^2 \mathbf{E}_{\perp} - \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + iK E_z) = 0. \quad (7)$$

Продольная компонента поля может быть также выражена через поперечные компоненты поля посредством второго уравнения Максвелла (5)

$$iK (\hat{\epsilon} \mathbf{E})_z + \nabla_{\perp} \cdot (\hat{\epsilon} \mathbf{E})_{\perp} = 0. \quad (8)$$

Поскольку невозмущенная среда предполагается изотропной, отличие компонент тензора $\hat{\epsilon}$ для возмущенной среды друг от друга имеет порядок $a_n u_{jk}$, $n = 1, 2, j = x, y, z$, см. формулу (2). Считаем, что волновой вектор поля направлен почти по оси z , т. е. угол между \mathbf{k} и осью z много меньше единицы, но может быть достаточно велик, чтобы выполнялись, например, условия (28), приведенные ниже.

Оценим величину продольной компоненты электрического поля, следуя работе [19]. Из формулы (8) в нулевом приближении в разложении по степеням малого параметра $1/Kl_s$, где l_s — длина оптического солитона, без учета недиагональных членов тензора $\hat{\epsilon}$ следует

$$E_z = -\varepsilon_0^{-1} a_1 u_{xx} \sin \theta_0 \cos \phi_0 E_x \approx -\varepsilon_0^{-1} a_1 u_{xx} \theta_0 E_x.$$

Поскольку предполагалось, что углы Эйлера θ_0 и ϕ_0 малы: $\theta_0, \phi_0 \sim \epsilon$ (ϵ — малая величина) и возмущение

тензора диэлектрической проницаемости также мало, $a_1 u_{xx} \sim \epsilon$, продольная составляющая электрического поля имеет малость порядка ϵ^2 . Вклад недиагональных членов тензора $\hat{\epsilon}$ имеет такой же порядок малости. В связи с этим вкладом продольной компоненты в эволюцию поля и другими членами, имеющими такой же порядок малости, можно пренебречь.

Поскольку изучается (суб)пикосекундный временной диапазон, можно применить приближение медленного временного изменения огибающих компонент поляризации электромагнитного поля. Для этого представим поле в виде

$$\mathbf{E}_{\perp} = \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t) \mathcal{E}(x, y, t),$$

где $\partial_t \mathcal{E} \ll \omega \mathcal{E}$. В оптическом диапазоне частот временной масштаб изменения компонент тензора напряжений u_{xx} , u_{yy} и u_{xy} , т. е. акустического поля, также велик по сравнению с ω^{-1} .

В рамках этих приближений получаем из (7) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left[2i(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) + \Delta_{\perp} + i \frac{2\omega}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \mathcal{E}_x &= \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} [(q_x + a_2 u_{xx}) \mathcal{E}_x + a_1 u_{xy} \mathcal{E}_y], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left[2i(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}) + \Delta_{\perp} + i \frac{2\omega}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \mathcal{E}_y &= \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} [(q_y + a_2 u_{yy}) \mathcal{E}_y + a_1 u_{xy} \mathcal{E}_x], \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{k}_{\perp} = (k_x, k_y)$, для одночастотного поля

$$q_x = q_y = (K^2 + k_x^2 + k_y^2) c^2 \omega^{-2} - \varepsilon_0 = 0.$$

В то же время представляет физический интерес исследование случая $q_x \neq q_y$. Это возможно в более общем случае, чем рассматриваемый здесь. Например, если E_x и E_y — огибающие ортогонально поляризованных волн с различающимися несущими частотами ω_x и ω_y . В этом случае величина

$$q_0 = q_x - q_y \propto \omega_x - \omega_y,$$

т. е. пропорциональна частотной расстройке и может быть как положительной, так и отрицательной. Этот случай обсуждается ниже в разд. 5.

Определим вектор Стокса следующим образом:

$$\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z) \equiv \left(\frac{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y^* + \mathcal{E}_x^* \mathcal{E}_y}{2}, i \frac{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y^* - \mathcal{E}_x^* \mathcal{E}_y}{2}, \frac{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_x^* - \mathcal{E}_y \mathcal{E}_y^*}{2} \right)$$

и его «длину» S_0

$$S_0^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = [(|\mathcal{E}_x|^2 + |\mathcal{E}_y|^2) / 2]^2. \quad (11)$$

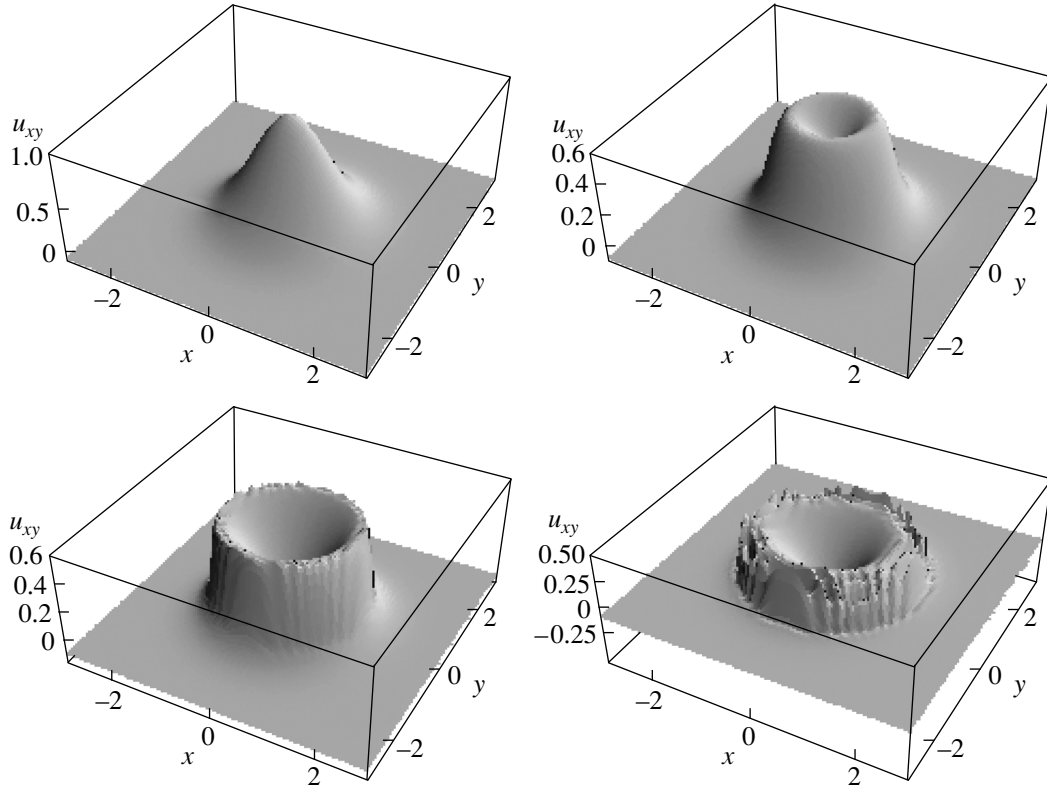


Рис. 1. Зависимости u_{xy} от x, y для начального импульса $u_{xy} = 1.2 \exp[-(x^2 + y^2)]$, $u_{xx} = u_{yy} = 0$, $E_x(-5, 0) = 1$, $E_y(-5, 0) = 0$, показанные через равные промежутки времени

Из правой части системы (9), (10) следует, что эффективный гамильтониан взаимодействия электрического поля и акустической волны имеет вид

$$H_{int} = A_1 \int [g(u_{xx} - u_{yy}) S_z + g(u_{xx} + u_{yy}) S_0 + u_{xy} S_x] dx, \quad (12)$$

где

$$A_1 = 2a_1\omega^2/c^2, \quad g = a_2/2a_1.$$

Уравнения, описывающие динамику акустических волн в сплошной среде, имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}, \quad (13)$$

где $\mathbf{U} = (U_x, U_y)$, $\mathbf{P} = (P_x, P_y)$. Используя эти уравнения и определение компонент тензора напряжений u_x, u_y , находим уравнения распространения упругих деформаций в среде:

$$\left[\nabla_{\perp} - \frac{1}{v_x^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U_x = A_1 \left(\frac{\partial S_x}{\partial y} + g \frac{\partial \mathcal{E}_x \mathcal{E}_x^*}{\partial x} \right), \quad (14)$$

$$\left[\nabla_{\perp} - \frac{1}{v_y^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U_y = A_1 \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + g \frac{\partial \mathcal{E}_y \mathcal{E}_y^*}{\partial y} \right), \quad (15)$$

где

$$v_x = v_y = v_0 = \sqrt{\lambda_{11} n_0^{-1}}$$

— фазовая скорость акустического поля в кристалле. Для компонент тензора напряжений находим

$$\left[\nabla_{\perp} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_{xx} = A_1 \left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x \mathcal{E}_x^*}{\partial x^2} \right), \quad (16)$$

$$\left[\nabla_{\perp} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_{yy} = A_1 \left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial^2 \mathcal{E}_y \mathcal{E}_y^*}{\partial y^2} \right), \quad (17)$$

$$\left[\nabla_{\perp} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_{xy} = \frac{A_1}{2} \left(\nabla_{\perp} S_x + g \frac{\partial^2 S_0}{\partial x \partial y} \right). \quad (18)$$

Для достаточно малых углов Эйлера дифракцией, т. е. членами $\nabla_{\perp} \mathcal{E}_l$, $l = x, y$, в уравнениях (9) и (10) пренебрегать нельзя. Возникающая при этом система уравнений является обобщением двумерного нелинейного уравнения Шредингера. Известно, что в двумерном случае нелинейное уравнение Шредингера не имеет устойчивых солитонных решений (см., например, обзор [21]). Неустойчивости, связанные с дифракционными эффектами, могут приводить к возникновению коллапса, т. е. к сингулярному пове-

дению локализованных решений. Используя эту аналогию, можно предположить, что система уравнений (9), (10), (16)–(18) также не имеет устойчивых двумерных солитонов.

При увеличении углов Эйлера возможна ситуация, когда членами $\nabla_{\perp} \mathcal{E}_l$, $l = x, y$, в уравнениях (9) и (10) можно пренебречь. Система уравнений (9), (10), (16)–(18) без дифракционных членов ($\nabla_{\perp} \mathcal{E}_l$, $l = x, y$) в (9) и (10) исследовалась численно. Обнаружено, что начальный импульс акустического поля u_{xy} , выбранный в виде гауссового импульса

$$u_{xy}(x, y, 0) = u_0 \exp[-(x^2 + y^2)/x_0^2],$$

$$u_{xx}(x, y, 0) = u_{yy}(x, y, 0) = 0,$$

превращается в кольцевой импульс. Затем рост диаметра кольца замедляется и края импульса становятся тоньше, и форма краев кольца становится неровной. Результаты численного моделирования представлены на рис. 1, на котором показана форма начального колоколообразного двумерного акустического импульса u_{xy} через равные промежутки времени.

3. ОДНОФАЗНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ

Поскольку целью этой работы является поиск солитонных решений, будем исследовать физические ситуации, приводящие к их генерации. Можно подобрать условия, при которых система (9), (10), (16)–(18) приводится к одной из версий двухкомпонентного уравнения Шредингера и имеет солитонные и периодические солитонные решения. Такие решения возникают в случае квазиодномерной динамики, при которой второй производной вдоль одной из координат в соответствующей системе отсчета можно пренебречь. Например, если проекция вектора электрического поля на ось y достаточно велика:

$$k_y \partial_y \mathcal{E}_{\perp} \gg \partial_y^2 \mathcal{E}_{\perp},$$

но

$$k_x \partial_x \mathcal{E}_{\perp} \ll \partial_x^2 \mathcal{E}_{\perp}.$$

В этом случае в уравнениях (9) и (10) с требуемой точностью $\Delta_{\perp} = \cos^2 \gamma_0 \partial_x^2$. Такая ситуация возникает, если, например, пучок света, падающего на кристалл, имеет форму эллипса, сильно сплюснутого вдоль оси x и сильно вытянутого вдоль оси y . В стационарном случае нетрудно найти периодическое и односолитонное решения системы (9), (10),

(16)–(18), зависящие от одной автомодельной переменной

$$\theta = \cos \gamma_0 x + \sin \gamma_0 y - Vt,$$

где γ_0 — угол между направлением прямолинейной траектории солитона в плоскости xy и осью x . Из системы (16)–(18) находим

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \Lambda (\cos \gamma_0 \sin \gamma_0 S_x + g \cos^2 \gamma_0 \mathcal{E}_x \mathcal{E}_x^*), \\ u_{yy} &= \Lambda (\cos \gamma_0 \sin \gamma_0 S_x + g \sin^2 \gamma_0 \mathcal{E}_y \mathcal{E}_y^*), \\ 2u_{xy} &= \Lambda (S_x + g \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 S_0), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\Lambda = \frac{A_1 v_0^2}{v_0^2 - V^2}.$$

Константы интегрирования положены равными нулю. Здесь учтено, что при $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0$ акустическая деформация кристалла отсутствует: $u_{jl} = 0$, $j, l = x, y$.

После подстановки этих значений в (9) и (10) получаем автомодельную редукцию системы нелинейных уравнений Шредингера

$$\begin{aligned} \left[2i \left(k_y - \frac{V\omega}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + b_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \mathcal{E}_x &= \\ &= (b_1 \mathcal{E}_x + b_2 \mathcal{E}_y) S_x + b_3 \mathcal{E}_y S_0 + b_x |\mathcal{E}_x|^2 \mathcal{E}_x, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left[2i \left(k_y - \frac{V\omega}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + b_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \mathcal{E}_y &= \\ &= (b_1 \mathcal{E}_y + b_2 \mathcal{E}_x) S_x + b_3 \mathcal{E}_x S_0 + b_y |\mathcal{E}_y|^2 \mathcal{E}_y, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= \cos \gamma_0, \quad b_1 = a_2 \Lambda \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 \omega^2 / c^2, \\ b_2 &= a_1 \Lambda \omega^2 / 2c^2, \quad b_3 = a_1 g \Lambda \cos \gamma_0 \sin \gamma_0 \omega^2 / 2c^2, \\ b_x &= a_2 g \Lambda \cos^2 \gamma_0 \omega^2 / c^2, \quad b_y = a_2 g \Lambda \sin^2 \gamma_0 \omega^2 / c^2. \end{aligned}$$

Простейшее однофазное решение системы (20), (21) ищем в виде

$$\mathcal{E}_x = \Lambda_0 F_0 G(s_0 \theta) \exp(i f_0 \theta), \quad (22)$$

$$\mathcal{E}_y = \Lambda_0^{-1} F_0 G(s_0 \theta) \exp(i f_0 \theta), \quad (23)$$

где Λ_0, F_0, f_0, s_0 — действительные константы и $G(\theta)$ — действительная функция. Подставив анзац (22), (23) в систему (19)–(21), находим, что Λ_0 является решением алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} \Lambda_0^2 (1 - g \cos^2 \gamma_0) - \Lambda_0^{-2} (1 - g \sin^2 \gamma_0) &= \\ &= g \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 (\Lambda_0^{-4} - \Lambda_0^4) / 2, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$f_0 = 2(V\omega/c^2 - k_y), \quad F_0^2 = 4\kappa_0 |B_0|,$$

$$B_0^{-1} = (2b_1 + b_3) + 2b_2\Lambda_0^{-2} + b_3\Lambda_0^{-4} + 2b_x\Lambda_0^2.$$

Функция G является решением уравнения

$$\partial_\theta^2 G(s_0\theta) = \kappa_0 2G(s_0\theta)^3 - f_0^2 G(s_0\theta), \quad (25)$$

где

$$s_0 = 1/\cos\gamma_0, \quad \kappa_0 = \text{sign}B_0.$$

Для $\kappa_0 = -1$ одно из простейших периодических решений уравнения (25) имеет вид

$$G(s_0\theta) = \eta_0 \text{dn}(s_0\eta_0\theta, m). \quad (26)$$

Здесь dn — эллиптическая функция Якоби с модулем

$$m^2 = \frac{f_1^2 - \sqrt{f_1^4 - C}}{f_1^2 + \sqrt{f_1^4 - C}}, \quad \eta_0 = f_1^2 + \sqrt{f_1^4 - C},$$

$$f_1 = f_0 G_0,$$

где C и G_0 — произвольные действительные константы. При $C = f_1^4$ решение (26) вырождается в односолитонное решение

$$G(s_0\theta) = f_1^2 \text{ch}(f_1^2 s_0\theta). \quad (27)$$

Решения (26) и (27) описывают стационарное распространение пакета длинных волн или изолированной волны электромагнитного поля на пластине, состоящего из импульсов, постоянных вдоль линии, перпендикулярной траектории движения солитона.

4. ИНТЕГРИРУЕМАЯ РЕДУКЦИЯ

4.1. Вывод модели

Для неинтегрируемых уравнений, к которым относятся и уравнения (9), (10) и (16)–(18), как правило, удается найти только однофазные решения. Для более детального анализа динамики импульсов в нелинейном взаимодействии и условий управления этой динамикой необходимо решать начально-краевую задачу. В случае нелинейных эволюционных уравнений это удается сделать лишь в рамках метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). В связи с этим представляет интерес нахождение редукций этой модели, интегрируемых посредством МОЗР. В рамках интегрируемых моделей возможен детальный анализ решений разной природы с помощью развитых аналитических методов. С другой стороны, солитонные решения и иные когерентные структуры в этих моделях возникают вследствие баланса между дисперсией, кросс-модуляцией, нелинейным

смешением и пр. Соответствующие члены в уравнениях моделируют реальные физические эффекты, проявляющиеся при различных масштабах амплитуд полей, и их изменения. Поэтому важно определить условия, когда эти эффекты, взаимно уравновешиваясь, приводят к образованию солитонов и других когерентных структур. Этот анализ полезен также для решения почти интегрируемых моделей, поскольку солитонные и другие решения интегрируемых моделей могут быть использованы как нулевое приближение при построении теории возмущений.

Для того чтобы найти интегрируемую редукцию системы (9), (10), (16)–(18), применим приближение медленных огибающих для поперечных пространственных переменных:

$$\partial_j \mathcal{E} \ll k_j \mathcal{E}, \quad j = x, y. \quad (28)$$

Эти условия позволяют пренебречь в правых частях уравнений (9), (10) членами с Δ_\perp . Выше использовалось приближение малости углов Эйлера, например, $\theta_e \ll 1$. В оптическом диапазоне для пикосекундных импульсов существует широкий диапазон значений длительностей импульсов, в котором эти условия выполняются наряду с условиями (28).

Рассматриваем, как и выше, прямолинейное одномерное распространение импульса в плоскости xu под углом γ_0 к оси x . Пучок света, падающий на кристалл, имеет форму эллипса, сильно сплюснутого по направлению вектора $(\cos\gamma_0, \sin\gamma_0, 0)$ и вытянутого вдоль ортогонального направления в плоскости xu . Проведен численный анализ системы уравнений (9), (10), (16)–(18) без учета дифракционных членов в уравнениях (9), (10). Численно обнаружено, что для описания динамики сильно вытянутого в одном направлении пучка возможно применение квазиодномерного приближения. Достаточно большой начальный гауссов импульс, сильно вытянутый в одном направлении и сплюснутый в перпендикулярном направлении, распадается на два независимых импульса, бегущих в противоположных направлениях. Форма импульса, бегущего направо, близка к форме односолитонного решения, приведенного ниже. Это решение будет получено с использованием одномерного приближения и условия однонаправленности распространения импульсов акустического поля. Заметим, что такое расщепление не обнаружено при численном моделировании, если начальный гауссов импульс имеет форму, близкую к симметричной. Можно также аналитически показать, что при таком выборе начального импульса в виде квазиодномерной, т. е. однородной по координате, перпендикулярной направлению распростране-

ния волны, последующая динамика полей будет носить квазиодномерный характер.

Применяя приближения одномерного распространения импульсов и пренебрегая дифракционными эффектами в правых частях уравнений (9), (10), находим, что вектор Стокса удовлетворяет системе уравнений, получаемой из системы (9), (10):

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{\chi}} S_x &= -g(u_{xx} - u_{yy}) S_y, \\ \partial_{\tilde{\chi}} S_y &= g(u_{xx} - u_{yy}) S_x - 2u_{xy} S_z, \\ \partial_{\tilde{\chi}} S_z &= 2u_{xy} S_y, \end{aligned} \quad (29)$$

здесь

$$\partial_{\tilde{\chi}} = 2A_1^{-1} (k_x \partial_x + k_y \partial_y + \omega c^{-2} \partial_t).$$

Система уравнений (14), (15), (29) еще достаточно сложна для анализа. Часто используемое приближение медленных огибающих в данном случае не приводит к интегрируемой редукции, поскольку вектор Стокса не содержит быстро осциллирующих членов. Вне рамок приближения медленных огибающих остается возможность упрощения уравнений (14), (15), (29), возникающая при достаточно слабом акустоэлектромагнитном взаимодействии, точнее, если справедливо неравенство $A_1 S_0 / G_0 \ll 1$ (см. формулу (33)), которое, как правило, на практике выполняется. Это приближение, известное из гидродинамики, аналогично использованному в работе [22, 23] при выводе редуцированных уравнений Максвелла–Блоха для двухуровневой оптической среды и называется условием однонаправленности распространения.

Используем для дальнейшего упрощения системы (16)–(18) условие однонаправленности распространения импульсов акустического поля. В рассматриваемом здесь случае этому отвечают равенства

$$\partial_x = \cos \gamma_0 \partial_{\tilde{\chi}}, \quad \partial_y = \sin \gamma_0 \partial_{\tilde{\chi}},$$

где

$$\tilde{\chi} = \cos \gamma_0 x + \sin \gamma_0 y.$$

При этом справедливо приближенное формальное равенство

$$\partial_{\tilde{\chi}} \approx -v_0^{-1} \partial_t + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Нормированный коэффициент перед правыми частями в системе уравнений (14), (15) имеет тот же порядок малости, что и производная

$$\partial_{\tilde{\chi}} = \partial_{\tilde{\chi}} + v_0^{-1} \partial_t$$

от амплитуд акустических полей (компонент тензора напряжений). При таком условии акустические

импульсы распространяются в среде со скоростью, близкой к фазовой скорости v_0 . При выполнении этих условий производные по x и y в правых частях уравнений (16)–(18) можно с точностью $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ заменить соответственно на $\cos \gamma_0 \partial_{\tilde{\chi}}$ и $\sin \gamma_0 \partial_{\tilde{\chi}}$. Заметим, что в этом случае одномерное и однонаправленное распространение импульсов возникает при произвольных начальных и граничных условиях. Выбор начального импульса в виде плоской волны позволяет ослабить условие однонаправленности распространения импульсов, т.е. распространить его на значения эффективных коэффициентов перед правыми частями в уравнениях (16)–(18), значения которых имеют порядок единицы.

Производная от компонент электромагнитного поля $\partial_{\tilde{\chi}}$ примерно равна

$$2A_1^{-1} (k_x \cos \gamma_0 + k_y \sin \gamma_0) \partial_{\tilde{\chi}}.$$

Здесь учтено, что отношение v_0/c составляет в твердом теле величину порядка 10^{-5} и вкладом производной по времени в $\partial_{\tilde{\chi}}$ можно пренебречь. Из системы (29) находим также условие неизменности длины вектора Стокса

$$\partial_{\tilde{\chi}} S_0 = 0. \quad (30)$$

Для простоты будем считать, что $\gamma_0 \ll 1$, так что членами с коэффициентом $\sin^2 \gamma_0$ в правых частях (16)–(18) можно пренебречь. После применения этих условий система (16)–(18) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{\chi}} + \frac{1}{v_0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{gA_1}{2} \frac{\partial S_z}{\partial \tilde{\chi}}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tilde{\chi}} + \frac{1}{v_0} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = -\frac{A_1}{2} \frac{\partial S_x}{\partial \tilde{\chi}}, \quad (32)$$

где обозначено

$$\mathcal{H} = u_{xx} - u_{yy}, \quad \mathcal{G} = 2u_{xy}.$$

Из формул (29), (31) и (32) следует, что компоненты акустического поля связаны простым соотношением

$$\mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2 = G_0^2. \quad (33)$$

Действительная функция $G_0(\tilde{\chi}, t)$ определяется условием

$$\partial_{\tilde{\chi}} G_0 = -v_0^{-1} \partial_t G_0.$$

Акустоэлектромагнитное взаимодействие по своей сути носит в рассматриваемом случае нерезонансный характер. Поэтому в общем случае следует учесть взаимодействие акустического поля с многочастотным пакетом электромагнитного поля. Ситуация аналогична нерезонансному взаимодействию

электромагнитной волны с ионными колебаниями в плазме. В этих случаях учет вклада различных частот электромагнитного поля проявляется в усреднении правых частей уравнений (31) и (32) по частотам с некоторым весом.

Считаем без потери общности, что

$$G_0 = \text{const}, \quad S_0 = \text{const}.$$

С учетом соотношения (33) интегрируемая система уравнений (29), (31), (32) принимает следующий вид:

$$\partial_\tau G = \langle \partial_\chi R_x \rangle, \quad (34)$$

$$\partial_\tau H = g \langle \partial_\chi R_z \rangle, \quad (35)$$

$$\partial_\chi R_y = g H R_x - G R_z, \quad (36)$$

$$\partial_\chi R_x = -g H R_y, \quad (37)$$

$$\partial_\chi R_z = G R_y, \quad (38)$$

где

$$G = \frac{\mathcal{G}}{G_0}, \quad H = \frac{\mathcal{H}}{G_0}, \quad R_\gamma = -\frac{S_\gamma}{S_0}, \quad \gamma = x, y, z,$$

$$\tau = \frac{(\tilde{\chi} + v_0 t) A_1 S_0}{2(k_x \cos \gamma_0 + k_y \sin \gamma_0)},$$

$$\chi = \frac{A_1 G_0 \tilde{\chi}}{2(k_x \cos \gamma_0 + k_y \sin \gamma_0)}.$$

Угловые скобки в правых частях равенств (34) и (35) означают усреднение по несущим частотам электрического поля:

$$\langle f(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega') \mathcal{D}(\omega) d\omega', \quad (39)$$

здесь $\mathcal{D}(\omega)$ — функция распределения по частотам.

4.2. Аппарат МОЗР

Будем решать задачу на всей оси χ , предполагая, что оптоакустическая система при $\chi \rightarrow \pm\infty$ находится в основном устойчивом состоянии, отвечающем минимуму энергии. В систему вводится импульс акустического поля $H(\chi, 0)$, $G(\chi, 0)$ вида, достаточного для образования солитонов акустического и электромагнитного полей. Детальнее требуемая форма начального импульса обсуждается ниже.

Система уравнений (34)–(38) является условием совместности следующих линейных систем уравнений для функций (матриц 2×2):

$$\partial_\chi \Phi = \hat{L} \Phi, \quad (40)$$

$$\partial_\tau \Phi = \hat{A} \Phi, \quad (41)$$

где

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -i\lambda_- H & \lambda_+ G \\ -\lambda_+ G & i\lambda_- H \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$\hat{A} = \frac{g}{g^2 - 4\lambda_\pm^2} \times \begin{pmatrix} -i\lambda_- R_z & \lambda_+ (gR_x - 2i\lambda_- R_y) \\ -\lambda_+ (gR_x + 2i\lambda_- R_y) & i\lambda_- R_z \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\lambda_\pm = \xi \pm r^2 \xi^{-1},$$

ξ — спектральный параметр,

$$G^2 + E^2 = 1, \quad r = \frac{1}{4} \sqrt{g^2 - 1}.$$

Поскольку ω не входит в явном виде в выражения (40) и (41), можно считать, что $\mathcal{D}(\omega) = \delta(\omega)$.

Физический смысл имеют лишь солитонные решения, распространяющиеся на фоне устойчивого вакуумного решения. Исследуем на устойчивость в линейном приближении стационарное и однородное вакуумное решение $\{R_\gamma^{(0)}, G^{(0)}, H^{(0)}\}$ системы (34)–(38). Это решение удовлетворяет условиям

$$gR_x^{(0)} H^{(0)} = R_z^{(0)} G^{(0)}, \quad R_y^{(0)} = 0. \quad (44)$$

Выберем возмущение в виде

$$R_\gamma = R_\gamma^{(0)} + \tilde{R}_\gamma \exp(i\nu t + iq\tilde{\chi}),$$

$$H = H^{(0)} + \tilde{H} \exp(i\nu t + iq\tilde{\chi}),$$

$$G = G^{(0)} + \tilde{G} \exp(i\nu t + iq\tilde{\chi}),$$

где функции с тильдой являются малыми возмущениями. Дисперсионное соотношение в длинноволновом пределе $q \rightarrow 0$ принимает вид

$$\nu^2 = \nu_0^2 \sqrt{1 + (g^2 - 1) H^{(0)2}} \times \left[\sqrt{1 + (g^2 - 1) H^{(0)2}} - g R_z^{(0)} \text{sign}(H^{(0)}) \right], \quad (45)$$

где ν_0 — действительная константа. Из формулы (45) следует, что для $\text{sign}(gR_z^{(0)} H^{(0)}) < 0$ решение (44) устойчиво. Для $\text{sign}(gR_z^{(0)} H^{(0)}) > 0$ это решение остается устойчивым при $g^2 < 1$ и становится неустойчивым, если $g^2 > 1$. В случае $g = 1$ и $\text{sign}(R_z^{(0)} H^{(0)}) > 0$ решение (44) безразлично устойчиво. Как будет видно из полученных ниже решений, условие устойчивости фонового решения отвечает распространению солитонов со скоростью ниже

фазовой скорости звука в среде. Можно формально построить солитонные решения, имеющие в качестве фонового решения неустойчивое постоянное решение (44). Этот солитон будет распространяться со скоростью больше фазовой скорости звука в среде. Однако это решение не имеет физического смысла, поскольку оно неустойчиво. Вместо него будет реализовываться квазиавтомодельное решение, описывающее распад неустойчивого начального состояния. Можно показать, что и для этого решения групповая скорость меньше фазовой скорости звука в среде.

Выбор спектрального параметра в (40), (41) отличается от приведенного в работе [13] и позволяет в некоторых частных случаях вакуумного решения (44) избежать необходимости введения поверхностей Римана для $g^2 \leq 1$. Рассмотрим такой случай, отвечающий условиям

$$\begin{aligned} R_x(0, \tau) = R_y(0, \tau) = 0, \quad R_z(0, \tau) = -1, \\ G(\chi, 0) = 0, \quad H(\chi, 0) = 1. \end{aligned} \quad (46)$$

Для выбранной параметризации и для фонового решения (46) аппарат МОЗР становится проще по сравнению с приведенным для другой задачи в работе [13].

Решения спектральной задачи (40) обладают следующими свойствами симметрии:

$$\Phi(\xi) = \widehat{M} \Phi(\lambda^*)^* \widehat{M}^{-1}, \quad (47)$$

где

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Стандартным способом вводим функции Йоста Ψ^\pm — решения (40) с асимптотиками:

$$\Psi^\pm = \widehat{\Psi}_0 \exp(-i\lambda_- \hat{\sigma}_3 \tau), \quad \tau \rightarrow \pm\infty, \quad (49)$$

где $\hat{\sigma}_3$ — матрица Паули и матрица $\widehat{\Psi}_0$ имеет вид

$$\widehat{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Эти решения связаны матрицей рассеяния \widehat{T} :

$$\Psi^- = \Psi^+ \widehat{T}, \quad \Psi^\pm = \begin{pmatrix} \psi_1^\pm & -\psi_1^{\pm*} \\ \psi_2^\pm & \psi_2^{\pm*} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Из свойств симметрии (47), (48) следует, что матрица рассеяния может быть выбрана в виде

$$\widehat{T} = \begin{pmatrix} a(\xi) & -b^*(\xi) \\ b(\xi) & a^*(\xi) \end{pmatrix}, \quad (52)$$

здесь $a(\xi), b(\xi)$ и функции Йоста имеют стандартные аналитические свойства: $a(\xi), \psi^+(\xi), \psi^-$ могут быть аналитически продолжены в верхнюю полуплоскость ξ и $a^*(\xi), \psi^{+*}(\xi), \psi^{-*}(\xi)$ — в нижнюю полуплоскость.

Имеют место следующие соотношения симметрии:

$$a(-r^2/\xi) = a(\xi), \quad b(-r^2/\xi) = b(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

Пусть $\xi_m, \xi_m^*, m = 1, 2, \dots, 2N$ — полюсы в комплексной плоскости,

$$\begin{aligned} b_n(\xi_n) = -b_n^*(\xi_n^*), \quad b_{N+n} = -b_n, \\ n = 1, 2, \dots, N, \\ c_{N+n} = -r^2 \xi_n^{-2} c_n, \quad \xi_{N+n} = -r^2/\xi_n, \\ \lambda_{\pm, N+n} = \pm \lambda_{\pm, n}, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$c_n = b(\xi_n)/(ida/d\xi|_{\xi=\xi_n}), \quad \lambda_{\pm, m} = \xi_m \pm r^2 \xi_m^{-1}.$$

Представим функции Йоста в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\chi, \xi) = \psi^+(\chi, \xi) + \\ + \int_{\chi}^{\infty} \begin{pmatrix} \lambda_- K_1(\chi, s) & \lambda_+ K_2(\chi, s) \\ -\lambda_+ K_2^*(\chi, s) & \lambda_- K_1^*(\chi, s) \end{pmatrix} \times \\ \times \psi^+(s, \xi) ds. \end{aligned} \quad (55)$$

Подставляем компоненты этих функций в систему (51), откуда следует

$$\psi_1^{+*} = \frac{\psi_1^{-*}}{a} - \frac{b}{a} \psi_1^+, \quad (56)$$

$$\psi_2^{+*} = \frac{\psi_2^{-*}}{a} - \frac{b}{a} \psi_2^+. \quad (57)$$

Интегрируем полученные уравнения по ξ с весом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda_{\pm} y)/2\pi.$$

Используем следующие известные соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda_- \chi) d\xi = 2\pi \delta(\chi), \quad (58)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\xi) \xi^{-1} \exp(i\lambda_- \chi) d\xi = 0,$$

$$\Omega(\xi) = \Omega(-r^2/\xi), \quad (59)$$

получаем в итоге уравнения Марченко для правого конца оси ($y \geq \chi$):

$$K_2^*(\chi, y) - F_1(\chi, y) = \int_{\chi}^{\infty} K_1(\chi, s) F_2(s + y)^* ds, \quad (60)$$

$$K_1^*(\chi, y) = - \int_{\chi}^{\infty} K_2(\chi, s) F_3(s + y) ds. \quad (61)$$

Здесь ядра F_k имеют вид

$$F_1(\chi) = \sum_{n=1}^{4N} \frac{c_n}{\lambda_{-,n}} \exp(i\lambda_{-,n}\chi) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho}{\lambda_-} \exp(i\lambda_- \chi) d\xi, \quad (62)$$

$$F_2(\chi) = \sum_{n=1}^{4N} c_n \exp(i\lambda_{-,n}\chi) + \frac{1}{2\pi} \int \rho \exp(i\lambda_- \chi) d\xi, \quad (63)$$

$$F_3(\chi) = \sum_{n=1}^{4N} \frac{c_n \lambda_{+,n}}{\lambda_{-,n}} \exp(i\lambda_{-,n}\chi) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho \lambda_+}{\lambda_-} \exp(i\lambda_- \chi) d\xi, \quad (64)$$

где

$$\rho(\xi) = b(\xi)/a(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Из приведенных выше свойств симметрии и условия вещественности функций G, H следует, что N -солитонному решению отвечает набор из $4N$ полюсов. Из этого набора $2N$ полюсов $\xi_n, \xi_{n+N}, n = 1, 2, \dots, N$, связаны соотношением

$$\xi_{N+n} = -r^2/\xi_n.$$

Каждому такому полюсу отвечает дополнительный полюс $\tilde{\xi}_m = -\xi_m^*, m = 1, 2, \dots, 2N$, если $\text{Re } \xi_m \neq 0$. Появление полюсов в виде таких пар наряду с условием симметрии

$$c_n(\xi) = -c_n^*(-\xi^*) \quad (65)$$

обеспечивает вещественность потенциалов G, H .

Приведем выражения для ядер F_1, F_2, F_3 , отвечающие солитонному спектру без учета радиационной части решения и с учетом свойств симметрии (54) и (65):

$$F_1(\chi) = \sum_{n=1}^N (C_n \exp(i\lambda_{-,n}\chi) + C_n^* \exp(-i\lambda_{-,n}^*\chi)), \quad (66)$$

$$F_2(\chi) = \sum_{n=1}^N (C_n \lambda_{-,n} \exp(i\lambda_{-,n}\chi) - C_n^* \lambda_{-,n}^* \exp(-i\lambda_{-,n}^*\chi)), \quad (67)$$

$$F_3(\chi) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{C_n \lambda_{+,n}^2}{\lambda_{-,n}} \exp(i\lambda_{-,n}\chi) - \frac{C_n^* \lambda_{+,n}^{2*}}{\lambda_{-,n}^*} \exp(-i\lambda_{-,n}^*\chi) \right), \quad (68)$$

где

$$C_n = c_n/\xi_n, \quad \lambda_{\pm,n} = \xi_n \pm r^2/\xi_n, \quad \lambda_{\pm,n}^* = \xi_n^* \pm r^2/\xi_n^*.$$

Подставив выражение для Ψ^+ в спектральную задачу (40) и приравняв выражения для разных степеней λ , находим следующее соотношение:

$$K_2(\chi, \chi) [1 + H(\chi)] = G(\chi) [1 - iK_1(\chi, \chi)]. \quad (69)$$

Используя (69) и равенство $G^2 = 1 - H^2$, находим связи между потенциалами G, H и ядрами $K_{1,2}$ в виде

$$H(\chi) = \frac{[1 - iK_1(\chi, \chi)]^2 - K_2^2(\chi, \chi)}{[1 - iK_1(\chi, \chi)]^2 + K_2^2(\chi, \chi)}, \quad (70)$$

$$G(\chi) = \frac{2[1 - iK_1(\chi, \chi)] K_2(\chi, \chi)}{[1 - iK_1(\chi, \chi)]^2 + K_2^2(\chi, \chi)}. \quad (71)$$

N -солитонные решения, отвечающие наборам собственных значений

$$\{\xi_n, -\xi_n^*, -r^2/\xi_n, r^2/\xi_n^*\}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

могут быть построены одним из известных методов. Матричная форма решения приведена в Приложении.

Зависимость $c_n(\tau)$ определяется из системы (41) для $R_z(\pm\infty, \tau) = 1$. Эта зависимость находится с помощью формулы

$$\partial_\tau \hat{T} = \hat{T} \hat{A}'(\chi, \tau)|_{\chi \rightarrow \infty} - \hat{A}'(\chi, \tau)|_{\chi \rightarrow -\infty} \hat{T}, \quad (72)$$

где

$$\hat{A}'(\chi, \tau) = \Psi^+(\chi) \hat{A}(\chi, \tau) [\Psi^+(\chi)]^{-1}.$$

Для выбранных начальных и граничных условий, отвечающих солитонной динамике, находим

$$c_n(\tau) = c_n(0) \exp\left(\frac{2ig\lambda_{-,n}\tau}{g^2 - 4\lambda_{-,n}^2}\right). \quad (73)$$

Приведем частный вид односолитонного решения для

$$C_1 = |C_1| \exp(i\phi_1), \quad \xi = r \exp(i\alpha),$$

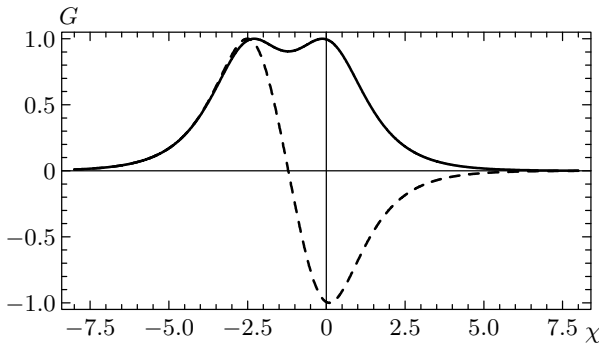


Рис. 2. Форма солитона $G(\chi)$ (иллюстрация решения (75)) для $r = 0.25$, $|c_1| = 1$; $\alpha = 2\pi/5$. Сплошная линия — $\phi_1 = \pi/3$, штриховая линия — $\phi_1 = 2\pi/3$

т. е. для собственного значения $\lambda_{-,1}$, лежащего на мнимой оси:

$$H = 1 - \frac{2}{f^2(\chi, \tau) + 1}, \tag{74}$$

$$G = \frac{2f(\chi, \tau)}{f^2(\chi, \tau) + 1}, \tag{75}$$

$$f(\chi, \tau) = \frac{2|C_1| \exp[-4r\theta \sin \alpha] \cos \phi_1}{1 + 8r|C_1^2 \cos^2 \alpha| |\sin \alpha|^{-1} \cos \phi_1 \exp[-8r\theta \sin \alpha]}, \tag{76}$$

где

$$\theta = \chi - \tilde{V}_0 \tau, \quad \tilde{V}_0 = g [g^2 + (g^2 - 1) \sin^2 \alpha]^{-1}.$$

Из рис. 2 видно, что форма решения зависит от знака $\cos \phi_1$. Как следует из выражений для ядер K' и K_2 , найденных в Приложении, в более общем случае (для $\xi = r_1 \exp(i\alpha)$, $r_1 \neq r$) возникает дополнительная внутренняя степень свободы солитона, аналогичная осцилляционной моде бризерного решения уравнения синус-Гордон.

5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом, мы показали, что солитонные режимы акустоэлектромагнитного взаимодействия могут возникать при распространении в оптоупругой среде одночастотного поля. При распространении одночастотной электромагнитной волны в изотропной среде акустические колебания среды могут

приводить к образованию нелинейной связи между компонентами поляризации поля. Соответствующие эволюционные уравнения имеют достаточно богатую структуру, которая позволяет найти однофазные решения или свести их (при выполнении реалистических приближений) к некоторым интегрируемым моделям. Последние, в свою очередь, обладают (много) солитонными решениями и автомодельными решениями других типов. В рамках этих систем уравнений генерация солитонов и других типов решений в изотропной среде происходит из-за параметрического смещения при нерезонансном взаимодействии световой и акустической волн.

Механизм нелинейного взаимодействия акустических и электромагнитных полей, описанный в настоящей работе, позволяет управлять генерацией и эволюцией пикосекундных акустических импульсов с помощью электрического поля. Приближение одномерного распространения акустических импульсов выполняется, если начальный импульс задан в виде волны или сильно сплюснутого гауссова импульса. Заметим, что при этом, как показали численные расчеты, происходит разбиение начального импульса на два не взаимодействующих пакета импульсов, бегущих в разных направлениях. Таким образом, численное моделирование показывает, что при выборе начального импульса в виде волны справедливо также приближение однонаправленности распространения при значениях коэффициентов перед правыми частями уравнений (31), (32) порядка единицы.

Для генерации пикосекундных акустических солитонов на фоне устойчивого вакуумного решения требуется инвертировать в среду электрическое поле необходимой формы. В случае интегрируемой модели (34)–(38) устойчивое фоновое состояние отвечает, например, условиям

$$u_{xx} > 0, \quad u_{yy} = u_{xy} = 0, \quad E_x \neq 0, \quad E_y = 0,$$

т. е. пластина деформирована вдоль направления начальной поляризации светового поля, падающего на нее (сжатие вдоль оси x). В случае двухчастотного поля, т. е. для $q_0 \neq 0$ (см. (9), (10)), появляется дополнительная возможность управления процессом генерации солитонов. При $u_{xx} = 0$, $u_{yy} = u_{xy} = 0$ роль начального условия будет играть расстройка q_0 . В зависимости от ее знака (вместо знака $H(\chi, 0)$) будет реализовываться устойчивый или неустойчивый режим распространения импульсов полей. Это предоставляет дополнительные возможности управления генерацией акустических волн изменением расстройки.

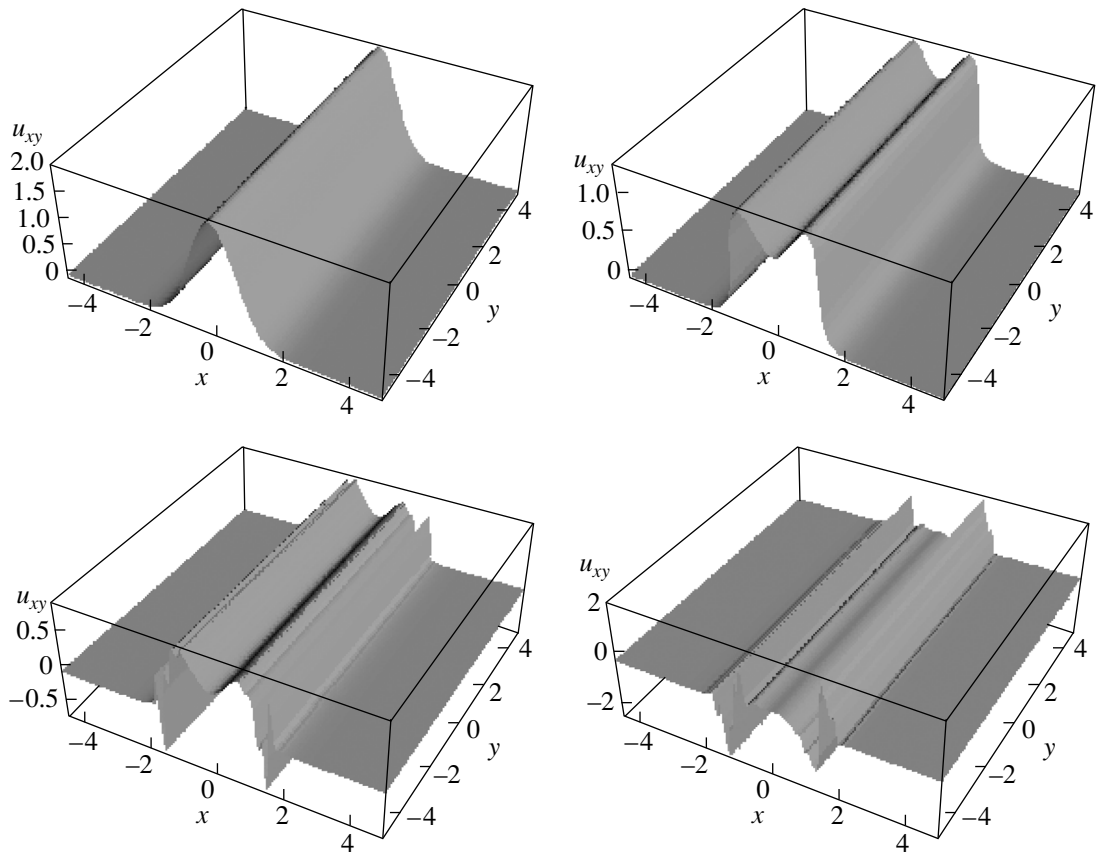


Рис. 3. Распад начального импульса $u_{xy} = 2 \exp[-(x^2 + 0.00001y^2)]$, $u_{xx} = u_{yy} = 0$, $E_x(-5, \tau) = 1$, $E_y(-5, \tau) = 0$, на солитоны. Зависимости u_{xy} от x, y показаны через равные промежутки времени

Если начальное электрическое поле представляет собой достаточно мощный импульс, то, как следует из решения начальной задачи для интегрируемой системы (34)–(38) и связи между компонентами тензора напряжений вектором Стокса, акустическое поле u_{xy} также будет представлять пакет солитонов. Решение задачи о генерации акустических импульсов требует, строго говоря, решения спектральной задачи, в которой потенциал выражается через амплитуду поля $E_{x,y}$ или вектор Стокса \mathbf{S} . Однако в рассматриваемом случае полностью интегрируемой системы уравнений (34)–(38) такая спектральная задача имеет существенно более сложную зависимость от спектрального параметра, чем в формуле (40), и требует дополнительного развития соответствующего аппарата МОЗР.

В рассмотренной в настоящей работе «начальной» задаче (40) генерация солитонов осуществляется начальной деформацией кристалла, которая описывается потенциалом $G(\chi, 0)$. Критерий возникновения солитонного решения может быть получен све-

дением спектральной задачи (40) к спектральной проблеме Захарова–Шабата с помощью калибровочного преобразования, аналогичного использованному в работе [24]. При этом потенциал $q(\chi)$ в задаче Захарова–Шабата связан с потенциалом G соотношением

$$q(\chi) = i \left(\sqrt{1 - g^2} G + \partial_\chi G / \sqrt{1 - G^2} \right). \quad (77)$$

Из анализа задачи Захарова–Шабата известно, что для генерации солитонов требуется достаточно большое значение интеграла от $q(\chi)$, такое что интеграл

$$I_0 = \left| \int q(s) ds \right|$$

должен быть достаточно велик (порядка 3), см. например, [25]. Это возможно, либо если площадь под G достаточно велика, либо если изменение G с ростом χ достаточно сильное и монотонное. Таким образом, для генерации акустических солитонов можно использовать почти однородное напряжение кристалла $u_{xy} \neq 0$ или достаточно сильный

акустический импульс. Как видно из рис. 2, солитон представляет собой связанное состояние двух куполообразных солитонов или солитона и антисолитона в зависимости от значений фазы C_1 . Отметим, что при численном моделировании исходной модели для начального гауссова импульса с амплитудой $u_{xy}(x, y, 0, 0) = 2$ наблюдалось образование связанной пары солитона и антисолитона, бегущей направо, см. рис. 3.

Иная картина будет наблюдаться, если в качестве начально-краевого условия будет выбрано неустойчивое стационарное состояние системы. Этому состоянию могут отвечать условия

$$u_{yy} > 0, \quad u_{xx} = u_{xy} = 0, \\ E_x \neq 0, \quad E_y = 0, \quad g > 1,$$

т. е. пластина деформирована в направлении, перпендикулярном направлению начальной поляризации электромагнитного поля. Если в качестве возмущения выбрать пикосекундный затравочный импульс электромагнитного поля, такой что $S_x(0, \tau) \neq 0$, то пакеты акустических и электромагнитных импульсов такой же длительности будут генерироваться в процессе распада неустойчивого состояния системы. Детальное описание этого процесса выходит за рамки настоящей работы. Отметим лишь, что эта динамика описывается несолитонным решением, которое при некотором выборе начальных условий может быть выражено через один из трансцендентов Пенлеве после калибровочного преобразования, примененного к системе (40), (41). Отметим, что соответствующее решение аналогично решению, описывающему комбинационное рассеяние, или решению, описывающему фононную лавину в системе примесных ионов со спинами $S = 1/2$, имплантированными в парамагнетик [13].

Очевидно, что при переходе к более сложным моделям, например, для конечных углов Эйлера (см. разд. 2) и при учете анизотропии невозмущенного кристалла появляются дополнительные возможности генерации акустических и электромагнитных импульсов и управления их параметрами. В то же время эволюционные уравнения, которые описывают акустоэлектромагнитное взаимодействие в таких системах, имеют значительно более сложный вид и требуют отдельного рассмотрения. Представляет интерес распространение результатов, полученных в настоящей работе, на случай среды с периодически модулированной плотностью или коэффициентом диэлектрической проницаемости.

Автор благодарен А. И. Плеханову и Ф. Х. Гельмуханову за обсуждения физической части задачи. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 03-02-16297), Междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН № 84 и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (грант № 8-2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представим ядра в матричном виде:

$$F_1(\chi + y) = D_1(\chi)D_0(y)^T, \\ F_2(\chi + y) = D_2(\chi)D_0(y)^T, \\ F_3(\chi + y) = D_3(\chi)D_0(y)^T, \tag{78}$$

где

$$D_0(\chi)_n = \exp(i\lambda_{-,n}\chi), \\ D_0(\chi)_{n+N} = \exp(-i\lambda_{-,n}^*\chi), \\ D_1(\chi)_n = c_n \xi_n^{-1} D_0(\chi)_n, \\ D_1(\chi)_{n+N} = c_n^* \xi_n^{-1*} \exp(-i\lambda_{-,n}^*\chi), \\ D_2(\chi)_n = c_n \lambda_{-,n} \xi_n^{-1} \exp(i\lambda_{-,n}\chi), \\ D_2(\chi)_{n+N} = -c_n^* \lambda_{-,n}^* \xi_n^{-1*} \exp(-i\lambda_{-,n}^*\chi), \\ D_3(\chi)_n = c_n \lambda_{+,n}^2 \lambda_{-,n}^{-1} \xi_n^{-1} \exp(i\lambda_{-,n}\chi), \\ D_3(\chi)_{n+N} = -c_n^* \lambda_{+,n}^{2*} (\lambda_{-,n} \xi_n)^{-1*} \times \\ \times \exp(-i\lambda_{-,n}^*\chi), \\ n \leq N.$$

Аналогичным образом представим

$$K_1(\chi, y) = Q_1(\chi)D_0(y)^T, \\ K_1(\chi, y) = Q_2(\chi)D_0(y)^T. \tag{80}$$

Тогда уравнения Марченко (60) и (61) могут быть записаны в матричном виде:

$$Q_1(\chi) = -Q_2(\chi)P_1(\chi), \tag{81}$$

$$Q_2(\chi) = D_1^*(\chi) + Q_1(\chi)P_2(\chi), \tag{82}$$

где P_1 и P_2 являются $2N \times 2N$ -матрицами:

$$P_1(\chi)_{nm} = \frac{D_0^*(\chi)_n D_3(\chi)_m}{i(\lambda_{-,n}^* - \lambda_{-,m})}, \tag{83}$$

$$P_2(\chi)_{nm} = \frac{D_0(\chi)_n D_2^*(\chi)_m}{i(\lambda_{-,m}^* - \lambda_{-,n})}. \tag{84}$$

Отсюда находим формальные решения для диагональных значений ядер $K' = 1 - iK_1$ и K_2 :

$$K'(\chi, \chi) = 1 + \text{Tr} [iP_1 D_0^T D_1^* (I + P_1 P_2)] = \frac{\det(I + P_1 P_2 + iP_1 D_0^T D_1^*)}{\det(I + P_1 P_2)}, \quad (85)$$

$$K_2(\chi, \chi) = \text{Tr} [D_0^T D_1^* (I + P_1 P_2)] = \frac{\det(I + P_1 P_2 + D_0^T D_1^*)}{\det(I + P_1 P_2)} - 1. \quad (86)$$

Для $N = 1$ находим следующие выражения для ядер:

$$K'(\chi, \chi; \tau) = 1 + \frac{f(\chi, \tau)}{D(\chi, \tau)} \times \left\{ 2 \text{Re} [\exp(i\theta_1 + i\phi_1) \sin(\theta_1 + i\gamma/2)] + \frac{f(\chi, \tau)}{2\zeta} \text{Im} [\sin(\theta_1 + i\gamma/2) S(\chi, \tau)] \right\}, \quad (87)$$

$$K_2(\chi, \chi; \tau) = \frac{|C_1| \exp(-2\zeta(\chi - V_0\tau))}{D(\chi, \tau)} \times \left\{ \cos(2\eta(\chi - V_1\tau) + \phi_1) + \frac{f(\chi, \tau)}{2\zeta} \text{Im} [e^{\beta/2} S(\chi, \tau)] \right\}. \quad (88)$$

Здесь

$$D(\chi, \tau) = 1 + \text{sh}^2 \gamma |f(\chi, \tau)|^2 (2\zeta)^{-2} - f(\chi, \tau) \zeta^{-1} \times \text{Re} [\exp(i\phi_1 + i\beta + i\phi_2/2) \sin(\theta_0 + i\gamma)],$$

$$f(\chi, \tau) = \frac{|C_1 \lambda_{+,1}|^2 \exp(-4\zeta(\chi - V_0\tau))}{|\lambda_{-,1}|},$$

$$S(\chi, \tau) = \exp(i\psi_1) \sin \theta_0 + \exp(-i\psi_1) \sin(\theta_0 - i\gamma),$$

$$\theta_0 = 2\eta(\chi - V_1\tau) - \beta/2 + \phi_2/2, \quad \theta_1 = 2\eta(\chi - V_1\tau) - \beta/2,$$

$$\psi_1 = \beta/2 + \pi/4 + \phi_2, \quad \gamma = \ln |\lambda_{-,1}/\zeta|,$$

$$\lambda_{-,1} = \eta + i\zeta = i|\lambda_{-,1}| \exp(i\beta),$$

$$C_1 = |c_1/\zeta_1| \exp(i\phi_1), \quad \phi_2 = \phi_1 + 2 \arg(\lambda_{+,1}) - \beta - \pi/2,$$

$$V_0 = \frac{g^2 + 4g(\zeta + \eta)}{[g^2 + 4(\zeta^2 - \eta^2)]^2 + (8\eta\zeta)^2},$$

$$V_1 = \frac{-g^2 + 4g(\zeta + \eta)}{[g^2 + 4(\zeta^2 - \eta^2)]^2 + (8\eta\zeta)^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, Письма в ЖЭТФ **20**, 734 (1974); ЖЭТФ **68**, 834 (1975).
2. А. П. Сухоруков, *Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиоп физике*, Наука, Москва (1988).
3. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
4. Г. Н. Бурлак, В. В. Гримальский, Н. Я. Коцаренко, ФТТ **23**, 631 (1985).
5. Г. Н. Бурлак, ЖЭТФ **96**, 1607 (1990).
6. Г. Н. Бурлак, В. В. Гримальский, К. Ишкабулов, ФТТ **39**, 1101 (1997).
7. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorovich, and L. S. Tsimring, Rev. Mod. Phys. **65**, 1331 (1993).
8. M. Schall, M. Walther, and P. Uhd Jepsen, Phys. Rev. B **64**, 094301 (2001).
9. S. V. Sazonov, J. Phys.: Condens. Matter **4**, 6485 (1992).
10. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ФТТ **43**, 1969 (2001).
11. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001).
12. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **76**, 709 (2002).
13. A. A. Zabolotskii, Phys. Rev. E **67**, 066606 (2003).
14. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
15. Г. Н. Бурлак, В. В. Гримальский, Н. Я. Коцаренко, ФТТ **90**, 1487 (1986).
16. А. С. Щербаков, И. Б. Позднов, Письма в ЖТФ **20**, 12 (1994).
17. Н.-У. НАО and Н. J. Maris, Phys. Rev. B **64**, 4302 (2001).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992), 3-е изд.
19. N. N. Rosanov and S. V. Fedorov, Phys. Rev. E **63**, 066601 (2001).
20. A. Bourgeade and E. Freysz, J. Opt. Soc. Am. B **17**, 226 (2000).
21. L. Bergé, Phys. Rep. **303**, 259 (1998).
22. P. J. Coudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math. Gen. **6**, L53 (1973).
23. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math. Gen. **6**, 1337 (1973).
24. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **115**, 1168 (1999).
25. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).