

ВНУТРЕННИЕ МОДЫ СОЛИТОНОВ КОНДЕНСАТА БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

*П. И. Крепостнов, В. О. Попов, Н. Н. Розанов**

*Научно-исследовательский институт лазерной физики
199034, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 20 ноября 2003 г.

На основе модифицированного уравнения Гросса – Питаевского с учетом нелокальности взаимодействия атомов конденсата Бозе – Эйнштейна проведен анализ и расчет характеристик внутренних мод светлых солитонов конденсата — собственных типов его малых возмущений. Для одномерных и двумерных солитонов найден спектр внутренних мод различной симметрии и определен коэффициент нелинейного затухания внутренних мод. Обсуждены возможности экспериментальной проверки выводов.

PACS: 67.40.-w, 42.50.Rh

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ малых коллективных колебаний атомного конденсата Бозе – Эйнштейна (БЭК) в ловушке служит эффективным методом диагностики этого макроскопического квантового объекта и экспериментальной проверки его теоретического описания [1–6]. Недавние эксперименты по наблюдению светлых солитонов БЭК атомов Li [7, 8], характеризующихся отрицательной длиной рассеяния, сделали доступными исследования конденсата вне ловушки, что открывает возможности изучения новых аспектов физики этого объекта. Возможным становится и анализ собственных типов малых колебаний солитонов, называемых обычно их внутренними модами.

Одним из приближений стандартного описания БЭК в рамках уравнения Гросса – Питаевского [1] является локальность потенциала межатомных взаимодействий (этот потенциал заменяется на дельта-функцию от расстояния между атомами). В этом случае возможна устойчивая нелинейная (связанная с межатомным взаимодействием) локализация только по одному из пространственных направлений. Другими словами, устойчивы только квазиодномерные солитоны БЭК при локализации конденсата по двум остальным направлениям внешним потенциа-

лом. Именно такая схема и была реализована в эксперименте, описанном в работах [7, 8].

Как показал Турицын [9] на ряде модельных примеров, нелокальность потенциала взаимодействия способна предотвратить коллапс, ввиду чего допустимыми становятся многомерные (двумерные и трехмерные) солитоны БЭК. Модификация уравнения Гросса – Питаевского с учетом слабой нелокальности межатомного взаимодействия [10] приводит к выводу об устойчивости двумерных солитонов БЭК с отрицательной длиной рассеяния в случае их достаточно больших размеров, а также о существовании внутренних мод этих солитонов — собственных типов их малых возмущений. Одномерные, двумерные и трехмерные солитоны БЭК в рамках модифицированного уравнения Гросса – Питаевского получены численно в работах [11, 12], где подчеркнута также перспективность применения таких солитонов для формирования наноструктур и нанолитографии.

Основной задачей настоящей работы является анализ влияния нелокальности межатомного взаимодействия на свойства одномерных солитонов БЭК. Хотя одномерные солитоны существуют и устойчивы даже в отсутствие нелокальности, они при этом не обладают внутренними модами. Мы покажем, что учет нелокальности взаимодействия ведет при превышении некоторого порога к появлению спектра внутренних мод, и получим характеристики

*E-mail: nrosanov@yahoo.com, rosanov@ilph.spb.su

этих мод различной симметрии (разд. 2). В линейном приближении отвечающие внутренним модам колебания не затухают. Однако нелинейность по их амплитуде приводит к потокам атомов, уходящих из центральной области солитона на периферию (на бесконечность ввиду отсутствия ловушки), что вызывает затухание внутренних мод. В разд. 3 проводится анализ скорости этого затухания на основе развитого в работах [13–16] полуаналитического подхода. Заметим, что выполненный в работе [17] численный анализ подтверждает справедливость этого подхода. Далее в разд. 4 представлены аналогичные результаты для двумерных солитонов БЭК. В том же разделе содержатся общее обсуждение и выводы.

2. ВНУТРЕННИЕ МОДЫ ОДНОМЕРНОГО СОЛИТОНА КОНДЕНСАТА БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

Модифицированное уравнение Гросса–Питаевского для одночастичной волновой функции $\Phi(x, t)$ с учетом слабой нелокальности межатомного взаимодействия удобно записать в безразмерном виде (случай отрицательной длины рассеяния) [11, 12]:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \Phi |\Phi|^2 + \Phi \frac{\partial^2 |\Phi|^2}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь t и x — безразмерные время и координата и все параметры устранены за счет нормировки (см. [11, 12]). Заметим, что тот же вид (1) сохраняется за счет перенормировки соответствующих величин и при более общем, чем предложено в работе [11], способе устранения расходимости интегралов — моментов потенциала межатомного взаимодействия.

Стационарные решения (1) имеют вид

$$\Phi(x, t) = A(x) \exp(ikt), \quad (2)$$

причем экспоненциально убывающая при $x \rightarrow \pm\infty$ функция $A(x)$ служит собственным решением вещественного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 A}{dx^2} - \kappa A + A^3 + A \frac{d^2 A^2}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

Характеристики одномерных (а также двумерных и трехмерных) солитонов, полученные численным решением (3), приведены в работе [12]. Уравнение (3) можно решить аналитически, понизив его порядок введением новой переменной $p = dA/dx$. Тогда для p^2 получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Его решения в

общем случае выражаются через эллиптические интегралы первого и третьего рода, а в специальных случаях — через элементарные функции [18]. Для интересующего нас локализованного симметричного решения имеем следующую связь A и x (рис. 1а):

$$|x| = \int_A^{A_m} \sqrt{\frac{A^2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\kappa A^2 - \frac{1}{4}A^4}} dA = 2 \operatorname{arccotg} q + \frac{1}{2\sqrt{\kappa}} \ln \left| \frac{2q\sqrt{\kappa} + 1}{2q\sqrt{\kappa} - 1} \right|, \quad q = \sqrt{\frac{A^2 + \frac{1}{2}}{2\kappa - A^2}}. \quad (4)$$

Здесь $A_m = \sqrt{2\kappa}$ — максимальная амплитуда солитона (при $x = 0$). Асимптотика при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$A(x) \sim \exp(-\sqrt{\kappa}|x|).$$

Характеризующий солитон спектральный параметр $\kappa > 0$, пропорциональный химическому потенциалу (энергии) конденсата, однозначно связан с пропорциональной числу частиц величиной (рис. 2):

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(x) dx = 2\sqrt{\kappa} + (4\kappa + 1) \operatorname{arccotg} \frac{1}{2\sqrt{\kappa}}. \quad (5)$$

При $\kappa \ll 1$ имеем $N \approx 4\sqrt{\kappa}$, а при $\kappa \gg 1$ эта зависимость линейна: $N \approx 2\pi\kappa$.

Введем малое отклонение волновой функции от стационарной формы (2):

$$\Phi(x, t) = [A(x) + \delta\Phi^{(1)}(x, t)] \exp(ikt). \quad (6)$$

Линеаризованное по $\delta\Phi^{(1)}$ управляющее уравнение (1) имеет вид

$$i \frac{\partial \delta\Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \delta\Phi}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A(\delta\Phi + \delta\Phi^*)] + \left(A^2 - \kappa + \frac{d^2 A^2}{dx^2} \right) \delta\Phi + A^2(\delta\Phi + \delta\Phi^*) = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим локализованные решения этого уравнения. В силу симметрии (1) относительно сдвига фазы волновой функции имеется четное по координате x решение (7) вида $\delta\Phi = iA(x)$, а из-за трансляционной инвариантности (1) (по отношению к сдвигу координаты) существует и нечетное решение $\delta\Phi = dA/dx$. Наличие этих «нейтральных мод» нетрудно подтвердить сравнением результата их подстановки в (7) с уравнением (3). Интересующие нас внутренние моды солитона являются нестатическими (осциллирующими по времени) локализованными решениями (7) вида

$$\delta\Phi^{(1)}(x, t) = a [\psi(x) \exp(ipt) + \chi(x) \exp(-ipt)]. \quad (8)$$

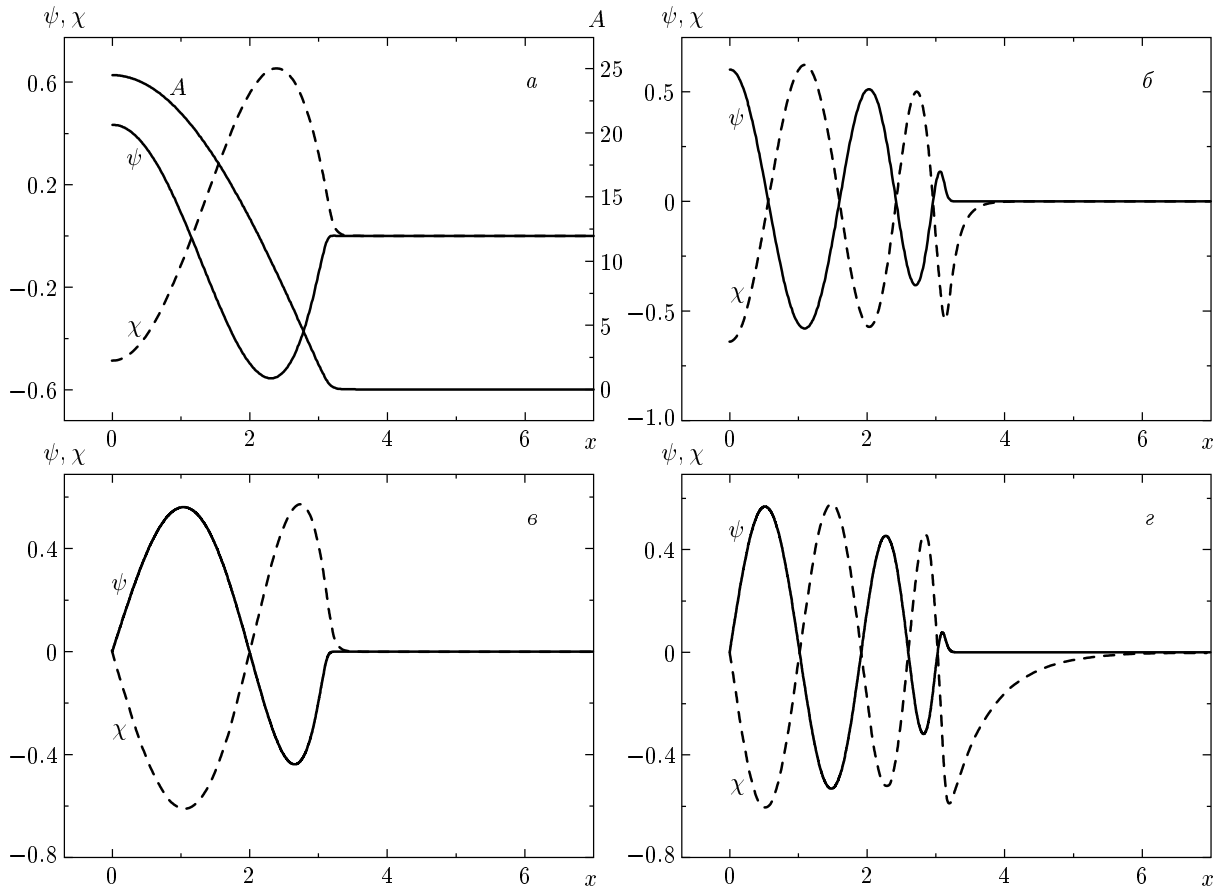


Рис. 1. Амплитуда одномерного солитона БЭК $A(x)$ (а) и собственные функции $\psi(x)$ и $\chi(x)$ его первой (а, в) и четвертой (б, г) четных (а, б) и нечетных (в, г) внутренних мод при $\kappa = 300$

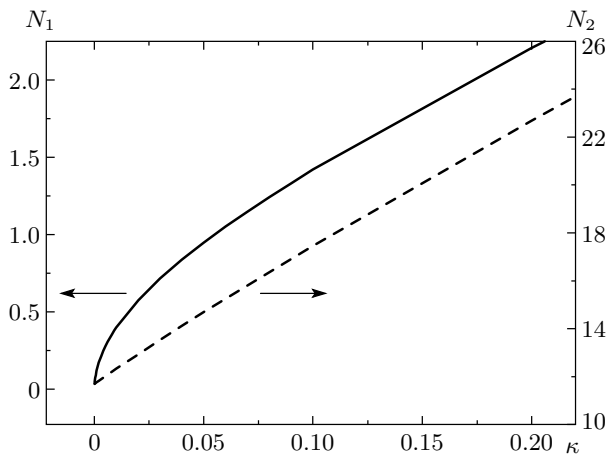


Рис. 2. Зависимость пропорциональной числу частиц величины N от спектрального параметра κ одномерного (N_1) и двумерного (N_2) солитонов

Здесь собственные значения p и собственные функции $\psi(x)$ и $\chi(x)$ предполагаются вещественными ($p > 0$) и определяются вытекающими из (7) уравнениями

$$\begin{aligned} p_2 \psi'' + p_1 (\psi' + \chi') + (M - p) \psi + A^2 \chi'' + q \chi &= 0, \\ p_2 \chi'' + p_1 (\chi' + \psi') + (M + p) \chi + A^2 \psi'' + q \psi &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где штрихи означают дифференцирование по x и

$$\begin{aligned} p_1 &= 2AA', \quad p_2 = 1 + A^2, \quad q = A^2 + AA'', \\ M &= 2A^2 + 2(A')^2 + 3AA'' - \kappa. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия для дискретного спектра соответствуют убыванию мод на бесконечности:

$$\psi(\pm\infty) = \chi(\pm\infty) = 0. \quad (11)$$

Собственные функции полагаем нормированными:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi^2 + \chi^2) dx = 1, \quad (12)$$

а малость возмущения обеспечивается малостью вещественной амплитуды a в выражении (8).

Ввиду симметрии солитона вводим четные и нечетные по x возмущения и рассматриваем полу-бесконечный интервал $0 < x < \infty$. Для четных мод

$$\psi'(0) = \chi'(0) = 0, \quad (13)$$

а для нечетных мод

$$\psi(0) = \chi(0) = 0. \quad (14)$$

Условия на бесконечности для мод любой четности совпадают:

$$\psi(\infty) = \chi(\infty) = 0. \quad (15)$$

Более точно, из (9) следует, что при условии

$$0 < p < \kappa \quad (16)$$

асимптотика функций $\psi(x)$ и $\chi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ отвечает экспоненциальному убыванию:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\propto \exp(-\sqrt{\kappa + p}x), \\ \chi(x) &\propto \exp(-\sqrt{\kappa - p}x). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) видно, что функция $\chi(x)$ убывает более медленно, чем $\psi(x)$. Особенно ярко это проявляется при $p \rightarrow \kappa$ (в этом пределе функция $\psi(x)$ локализована в конечной области, а ширина распределения $\chi(x)$ неограниченно возрастает).

Внутренние моды мы определили численным решением (9) с граничными условиями (15) и (13) или (14) методом матричной прогонки для солитонов со спектральным параметром $0 < \kappa < 1000$. Вид собственных функций $\psi(x)$ и $\chi(x)$ при $\kappa = 300$ приведен на рис. 1 для двух четных ($a, б$) и двух нечетных ($в, г$) мод. Видно, что с ростом номера моды число пространственных осцилляций собственных функций увеличивается. В соответствии с асимптотикой (17) ширина распределения $\chi(x)$ возрастает при приближении p к границе сплошного спектра $p_b = \kappa$. Число ветвей внутренних мод увеличивается с ростом κ . Как показывает рис. 3а, первая четная мода возникает при $\kappa > 0.4$, вторая — при $\kappa > 15$, третья — при $\kappa > 70$ и т. д. Картина для нечетных мод аналогична (рис. 3б). Отметим, что при $\kappa < 0.4$ нет ни четных, ни нечетных внутренних мод, а верхняя по p граница их существования совпадает с границей сплошного спектра $p_b = \kappa$.

3. НЕЛИНЕЙНОЕ ЗАТУХАНИЕ ВНУТРЕННИХ МОД

В линейном по $\delta\Phi^{(1)}$ приближении возмущение локализовано около солитона и осциллирует по времени без уменьшения амплитуды. Тогда суммарная

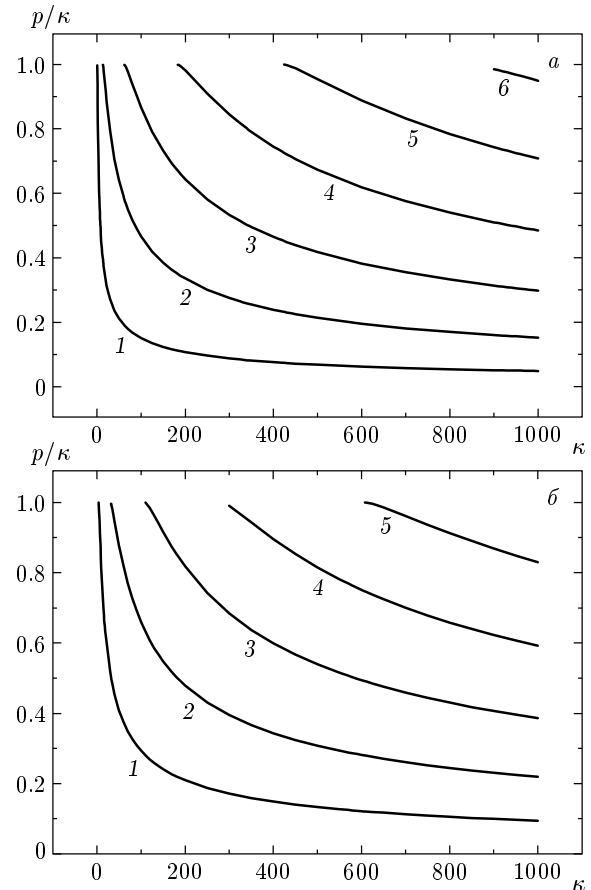


Рис. 3. Зависимость отношения собственных чисел внутренних мод и спектрального параметра одномерного солитона БЭК p/κ от κ для четных (a) и нечетных ($б$) мод. Цифры у кривых указывают номер моды

волновая функция будет отвечать также незатухающим периодическим осцилляциям концентрации атомов в БЭК. Если, однако, учесть нелинейные по $\delta\Phi^{(1)}$ члены, то вторая и/или высшие гармоники колебаний (с частотными сдвигами $2p$ и т. д.) будут попадать уже в сплошной спектр и вызывать волны материи, расходящиеся от центра солитона. Это отвечает затуханию внутренних мод и установлению стационарного солитона. В этом разделе мы вычислим скорость нелинейного затухания внутренних мод одномерных солитонов БЭК, определив уходящий от солитона поток атомных частиц на его периферию во втором порядке теории возмущений. Поскольку процедура аналогична выполненной для оптических солитонов в работах [13–17], приведем здесь только ее краткое изложение. Отметим также, что для коллективных колебаний БЭК в ловуш-

ке этот механизм нелинейного затухания отсутствует, поскольку ловушка предотвращает уход атомов на большие расстояния от конденсата. В данной работе мы игнорируем не описываемую уравнением Гросса–Питаевского конечность времени жизни солитонов БЭК, вызванную двух- или трехчастичными столкновениями с переворотом спина и выпадением атомов из конденсата; соответствующие оценки для состояний (2,2) и (1,1) атомов ^7Li приведены в работах [11, 12].

Включим в (6) члены второго порядка по амплитуде возмущений:

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = \\ = \left[A(x) + \delta\Phi^{(1)}(x, t) + \delta\Phi^{(2)}(x, t) \right] \exp(i\kappa t). \end{aligned} \quad (18)$$

Верхний индекс здесь указывает порядок теории возмущений. Функцию второго порядка можно искать в виде

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{(2)}(x, t) = \\ = C(x) \exp(2ipt) + B^*(x) \exp(-2ipt) + C_0(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Вообще говоря, функции C , B и C_0 зависят и от времени, что приводит, в частности, к нелинейному сдвигу частоты осцилляций p . Но эта зависимость медленная и не влияет на интересующую нас скорость затухания внутренних мод.

Подставив (19) в (1) и выделив члены второго порядка малости по амплитуде возмущений, найдем следующие уравнения для функций $C(x)$ и $B(x)$:

$$\begin{aligned} C''' - (2p + \kappa + 2A^2)C + A^2B + \psi(\psi + 2\chi)A + \\ + A(BA)'' + C(A^2)'' + A(CA)'' + \\ + \psi(A\psi)'' + \psi(A\chi)'' + A(\psi\chi)'' = 0, \\ B'' + (2p - \kappa + 2A^2)B + A^2C + \chi(\chi + 2\psi)A + \\ + A(CA)'' + B(A^2)'' + A(BA)'' + \\ + \chi(A\psi)'' + \chi(A\chi)'' + A(\psi\chi)'' = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Функция $C_0(x)$ описывает изменение формы солитона вследствие возмущений и нелинейный сдвиг частоты колебаний. Определяющее ее динамику уравнение не записано, поскольку оно не связано с уравнениями для функций $C(x)$ и $B(x)$ и не влияет на скорость затухания внутренних мод. Ввиду (19) обе функции $C(x)$ и $B(x)$ служат амплитудами периодических по времени возмущений солитона с периодом π/p , но обладают существенно различающейся пространственной зависимостью. А именно, из (20) следует, что при условии

$$2p - \kappa > 0 \quad (21)$$

при $|x| \rightarrow \infty$ функция $C(x)$ затухает экспоненциально, тогда как функция $B(x)$ переходит в плоскую волну, отвечающую потоку атомов от центра солитона к периферии: $B(x) \sim \exp(\pm i\sqrt{2p - \kappa}x)$. Поэтому именно функция $B(x)$ описывает затухание внутренних мод. Согласно [13–17], динамика числа частиц, отвечающих возмущению солитона в виде внутренней моды,

$$\delta N = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\psi^2 + \chi^2) dx = a^2,$$

при условии (21) определяется уравнением

$$\frac{d\delta N}{dt} = -\gamma\delta N^2. \quad (22)$$

Коэффициент нелинейного затухания определяется асимптотикой функции $B(x)$:

$$\gamma = 2\pi\sqrt{2p - \kappa} |B(\infty)|^2. \quad (23)$$

Асимптотическое значение $B(\infty)$ мы находим численным решением (20).

Результаты расчетов в рамках условия (21) приведены на рис. 4 для четных (а) и нечетных (б) мод. Максимум коэффициента нелинейного затухания γ для нечетных мод оказывается в несколько раз выше, чем для четных. Оно достигается недалеко от границы сплошного спектра $p_b = \kappa$. Следует признать, что вариации этого максимума для различных ветвей внутренних мод не столь существенны, так что в области перекрытия кривых на рис. 4 возможно сравнительно длительное сосуществование нескольких внутренних мод. Возмущения, отвечающие не локализованным внутренним модам, а сплошному спектру, должны затухать более быстро. Напротив, при нарушении соотношения (21) внутренние моды затухают значительно медленней, так как потоки атомов на периферию описываются более высокими порядками теории возмущений.

4. ВНУТРЕННИЕ МОДЫ ДВУМЕРНОГО СОЛИТОНА КОНДЕНСАТА БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

Модифицированное уравнение Гросса–Питаевского для двумерной геометрии получается из (1) при замене $\partial^2/\partial x^2$ на поперечный оператор Лапласа $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Как показано в работах [10–12], уже слабая нелокальность межатомного взаимодействия делает возможной устойчивость двумерных (волновая функция не зависит от координаты z) светлых солитонов БЭК с отрицательной

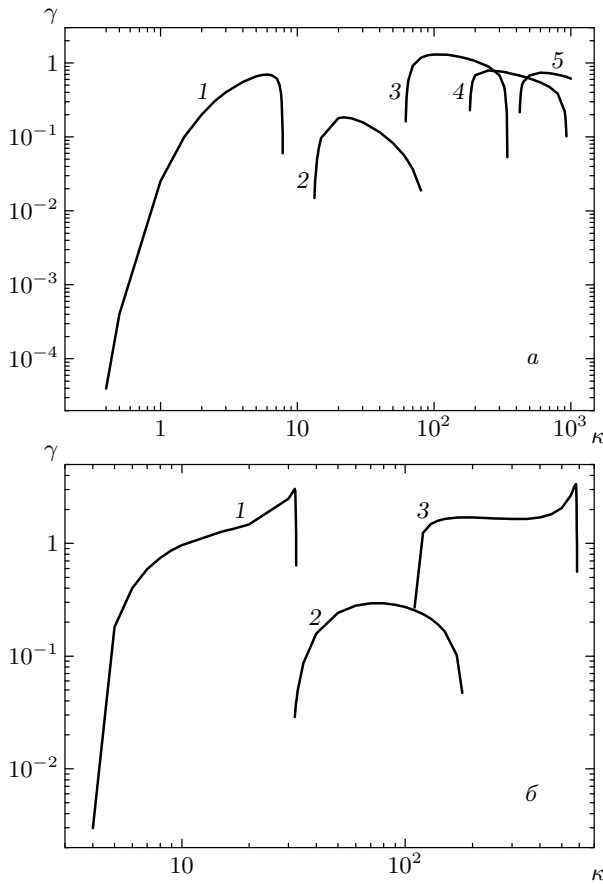


Рис. 4. Зависимость коэффициента нелинейного затухания осцилляций γ от спектрального параметра одномерного солитона κ для четных (а) и нечетных (б) мод. Цифры у кривых указывают номер моды

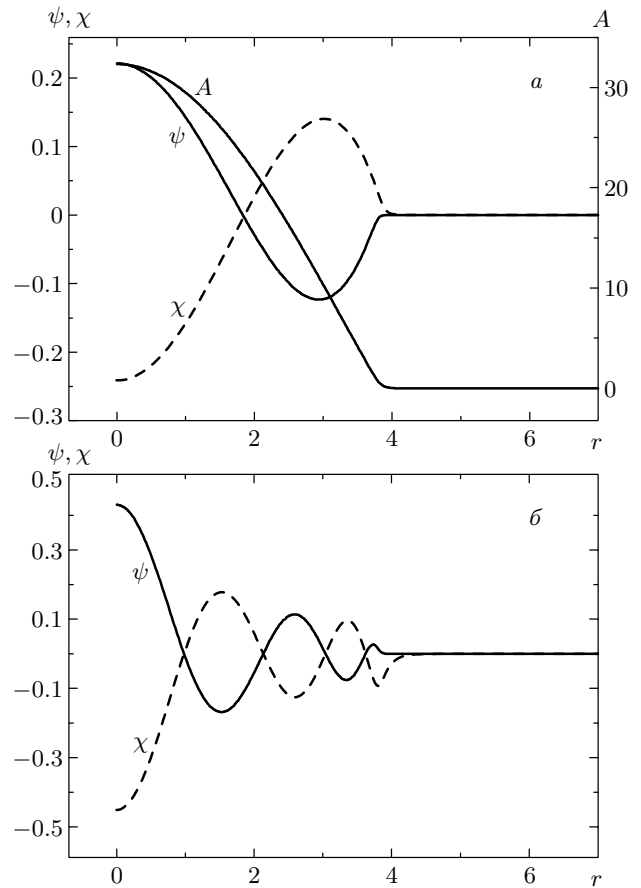


Рис. 5. Амплитуда двумерного солитона $A(r)$ (а) и собственные функции $\psi(r)$ и $\chi(r)$ его симметричных первой (а) и четвертой (б) внутренних мод при $\kappa = 300$

длиной рассеяния. Обладающие осевой симметрией двумерные солитоны БЭК получены в работе [11]. Связь спектрального параметра κ с пропорциональной числу частиц величиной

$$N = 2\pi \int_0^\infty A^2(r) r dr$$

показана на рис. 2, а пример радиального профиля амплитуды солитона представлен на рис. 5а. Внутренние моды в общем случае асимметричны и могут быть разложены по угловым гармоникам, так что для отдельной гармоники вместо (8) имеем

$$\delta\Phi^{(1)}(r, \varphi, t) = a[\psi(r) \exp(im\varphi + ipt) + \chi^*(r) \exp(-im\varphi - ipt)]. \quad (24)$$

Здесь r и φ — полярные координаты, а целое число $m = 0, 1, 2, \dots$ — азимутальный индекс. Затуха-

ние внутренних мод двумерного солитона при условии (21) также описывается уравнением вида (22), где постоянная затухания γ выражается через асимптотические значения функций второго порядка теории возмущений [14–16]. Наиболее близки к четным внутренним модам одномерных солитонов симметричные моды двумерных солитонов, в связи с чем далее мы ограничимся случаем $m = 0$.

Не повторяя выкладки, весьма близкие к представленным выше для одномерных солитонов, приведем только рис. 5–7, иллюстрирующие конечные результаты. Полезно сравнить эти рисунки, соответственно, с рис. 1, 3, 4. Видно, что различия только количественные. Наибольшие различия наблюдаются в величине постоянной затухания, которая в двумерном случае оказывается заметно меньше, чем в одномерном (ср. рис. 4 и 7). Для трехмерных солитонов БЭК, которые также возможны из-за нелокальности межатомного взаимодействия [11, 12], вну-

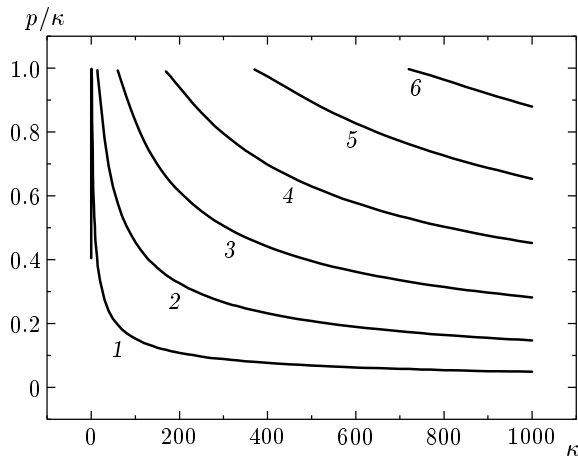


Рис. 6. Зависимость отношения собственных чисел симметричных внутренних мод и спектрального параметра двумерного солитона БЭК p/k от κ . Цифры у кривых указывают номер моды

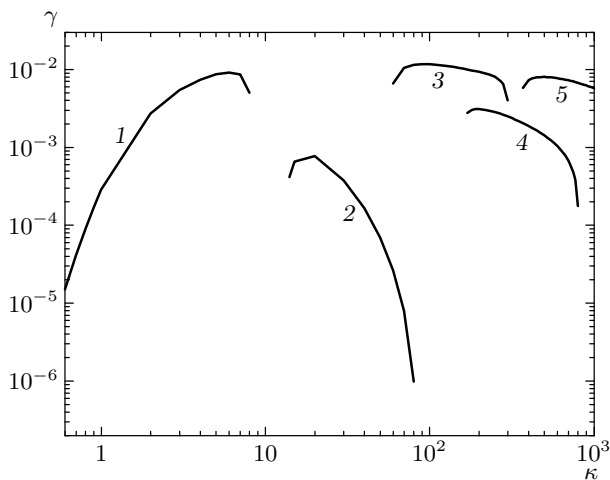


Рис. 7. Зависимость коэффициента нелинейного затухания осцилляций γ от спектрального параметра двумерного солитона κ . Цифры у кривых указывают номер моды

тренные моды сферически-симметричных солитонов имеют более сложную, чем (21), угловую структуру, хотя для сферически-симметричных колебаний результаты вполне аналогичны [14, 16].

В заключение напомним, что измерение частот малых колебаний БЭК в ловушке служит широко распространенным способом извлечения информации о физике взаимодействия атомов в конденсате [1–6, 19]. При этом спектр коллективных колебаний зависит как от свойств атомов БЭК,

так и от характеристик ловушки. В рассматриваемом случае светлого солитона БЭК ловушка отсутствует (по «солитонному» направлению). Поэтому здесь появляется уникальная возможность по собственным частотам внутренних мод в низкочастотной области в более чистом виде получить данные о нелокальности межатомного взаимодействия в состоянии конденсата. Для внутренних мод нелокальность проявляется наиболее ярко в реализованном в эксперименте [7, 8] случае одномерных солитонов (напомним, что без учета нелокальности в рамках стандартного уравнения Гросса–Питаевского внутренних мод одномерных солитонов нет, они возникают только при наличии нелокальности). Заметим, что для БЭК атомов Li время жизни солитонов превышает 3 с [7], а характерные частоты осцилляций p лежат в килогерцовой области. Представляется, что экспериментальные исследования солитонов БЭК атомов Li реальны и позволят извлечь новую информацию о нелокальном взаимодействии атомов в БЭК. Скорость затухания осцилляций внутренних мод солитонов определяется отсутствующим для БЭК в ловушке нелинейным механизмом — слабым уходом атомов из конденсата на периферию. Скорость затухания существенно зависит от амплитуды возмущения солитона (исходной глубины модуляции концентрации атомов) и резко убывает при уменьшении амплитуды. Естественно, что нет смысла учитывать затухание внутренних мод, если оно происходит за времена, превышающие время жизни солитона, которое определяется межатомными столкновениями.

Авторы благодарны В. А. Смирнову за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 211-855) и РФФИ (грант № 01-02-17242).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Питаевский, УФН **168**, 641 (1998).
2. D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **77**, 420 (1996).
3. D. S. Jin, M. R. Mathews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **78**, 764 (1997).
4. M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **77**, 988 (1996).

5. M. Edwards, P. A. Ruprecht, K. Burnett, R. J. Dodd, and C. W. Clark, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1671 (1996).
6. S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2360 (1996).
7. K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature* **417**, 150 (2002).
8. L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari et al., *Science* **296**, 1290 (2002).
9. С. К. Турицын, *ТМФ* **64**, 226 (1985).
10. N. N. Rosanov, A. G. Vladimirov, D. V. Skryabin, and W. J. Firth, *Phys. Lett. A* **293**, 45 (2002).
11. Н. Н. Розанов, Ю. В. Рождественский, В. А. Смирнов, С. В. Федоров, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 89 (2003).
12. Н. Н. Розанов, Ю. В. Рождественский, В. А. Смирнов, С. В. Федоров, *Опт. и спектр.* **96**, 828 (2004).
13. D. E. Pelinovsky, Yu. S. Kivshar, and V. V. Afanasjev, *Physica D* **116**, 121 (1998).
14. N. N. Rosanov, S. V. Fedorov, N. A. Kaliteevskii, D. A. Kirsanov, P. I. Krepostnov, and V. O. Popov, *Nonlin. Opt.* **23**, 221 (2000).
15. П. И. Крепостнов, В. О. Попов, Н. Н. Розанов, *Опт. и спектр.* **89**, 964 (2000).
16. А. Б. Витенберг, П. И. Крепостнов, В. О. Попов, Н. Н. Розанов, *Опт. и спектр.* **92**, 603 (2002).
17. N. N. Rosanov, P. I. Krepostnov, and V. O. Popov, *Chaos* **13**, 791 (2003).
18. Н. Н. Розанов, *Опт. и спектр.* (2004), в печати.
19. W. Ketterle, *Phys. Today* **52**(12), 30 (1999).